

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第三名

030406

弧弧相切－多邊形內相切弧的探討

學校名稱：南投縣立竹山國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳冠安	顏名宏
國二 陳宇亭	錢威印
國二 陳佑任	
國二 陳芝云	

關鍵詞： 半徑、數列、相切弧

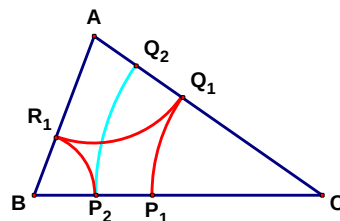
摘要

在 $\triangle ABC$ 中，以 C 點為圓心， C 至 $\overline{BC}$ 邊上一點 P_1 的長為半徑畫弧，交 $\overline{CA}$ 邊上的 Q_1 點，接著以 A 點為圓心， $\overline{AQ_1}$ 為半徑畫弧到達 $\overline{AB}$ 邊上的 R_1 點，然後以 B 點為圓心， $\overline{BR_1}$ 為半徑的畫弧達到 $\overline{BC}$ 邊上的 P_2 點，依這樣的規律進行下去，在 $\overline{BC}$ 邊上會產生點 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 。本文探討上述圖形中起始半徑 $\overline{CP_1}$ 、數列 P (由 $\overline{CP_1}, \overline{CP_2}, \overline{CP_3}, \dots, \overline{CP_n}$ 的長度組成) 及弧弧相切的關係，並類推至多邊形，結果顯示：雖然數列 P 在奇數多邊形及偶數多邊形中，皆有形成公差為零之等差數列的狀況，但是發生條件相當不同，在奇數多邊形中，與「起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值」有關，但在偶數多邊形中，僅與「邊長」有關；弧弧相切的況狀在奇數多邊形中，一定會發生，而在偶數多邊形時，只有當『奇數邊的和＝偶數的和』時，才會有弧弧相切的現象產生。

壹、研究動機：

老師教完等差數列及級數之後，在課堂上分享了一題「動手玩數學」一書中的題目，讓有興趣的同學研究，題目內容如下：

在 $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=15$, $\overline{AC}=14$ 的三角形上，一隻螞蟻做圓弧形的運動，如圖所示，螞蟻從 $\overline{BC}$ 邊上的一點 P_1 出發，繞著以 C 點為圓心， $\overline{CP_1}$ 為半徑的圓弧到達 $\overline{CA}$ 邊上的 Q_1 點，接著從 Q_1 點出發，繞著以 A 點為圓心， $\overline{AQ_1}$ 為半徑的圓弧到達 $\overline{AB}$ 邊上的 R_1 點，然後從 R_1 點出發，繞著以 B 點為圓心， $\overline{BR_1}$ 為半徑的圓弧達到 $\overline{BC}$ 邊上的 P_2 點，依這樣的規律進行下去，在 $\overline{BC}$ 邊上會產生點 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 。



(1) 若起始點 P_1 滿足 $\overline{CP_1}=7$ ，描述 $P_2, P_3, \dots$ 點所在的位置。

(2) 若起始點 P_1 滿足 $\overline{CP_1}=12$ ，描述 $P_2, P_3, \dots$ 點所在的位置。

於是，平時就喜歡挑戰難題的我們，就找了幾個志同道合的伙伴，一起動手玩起了這道數學題。

貳、研究目的：

- 一、探討起始半徑 $\overline{CP_1}$ 與三角形中 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 數列的關係及弧弧相切的狀況。
- 二、探討起始半徑 $\overline{CP_1}$ 與多邊形中 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 數列的關係及弧弧相切的狀況。

參、研究設備、器材及名詞釋義

一、研究設備及器材：

筆、紙、直尺、圓規、電腦、EXCELL 軟體、GSP 軟體

二、名 詞 釋 義：

為使研究結果一致、易於比較及討論，我們統一幾個名詞。

「底 邊」：不論幾邊形皆以 $\overline{BC}$ 為底邊。

「起始半徑」：以 C 點為圓心畫的第一個弧，其半徑稱為起始半徑，以 $\overline{CP_1}$ 表示。

「數 列 P」：以 $\overline{CP_n}$ 的長度做為數列中第 n 項(P_n)之值。例： $\overline{CP_1} = 7$ 時， $P_1=7$ 。

「奇偶數邊」：以底邊 $\overline{BC}$ 為第一段邊長，沿逆時針方向依序命名其他邊長。例如：四邊形 ABCD 中，奇數邊指的是： $\overline{BC}$ 、 $\overline{DA}$ ，偶數邊指的是 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AB}$ 。

「邊 長」：第一段邊，邊長為 a_1 ，第二段邊長為 a_2 ，依序類推。

「弧弧相切」：是指圖形中每個弧與其相互緊鄰的兩個弧，有兩兩相切的情況。

肆、研究過程

一、針對三角形的討論

(一)尺規作圖(快速推測規律)

為大致、快速地看出 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 數列的規律性，我們依題意直接用直尺重新畫了一個符合題意的三角形，並用圓規直接在圖上畫弧，結果從圖形上看來，我們發現：不管起始半徑 $\overline{CP_1}=7$ 或是 $\overline{CP_1}=12$ 時，都有一個規律：畫第二個循環結束後， P_1 、 P_3 、 P_5 等奇數點開始重疊， P_2 、 P_4 、 P_6 等偶數點也開始重疊，此時的圖形中皆有六個弧，且有弧弧相切的現象。

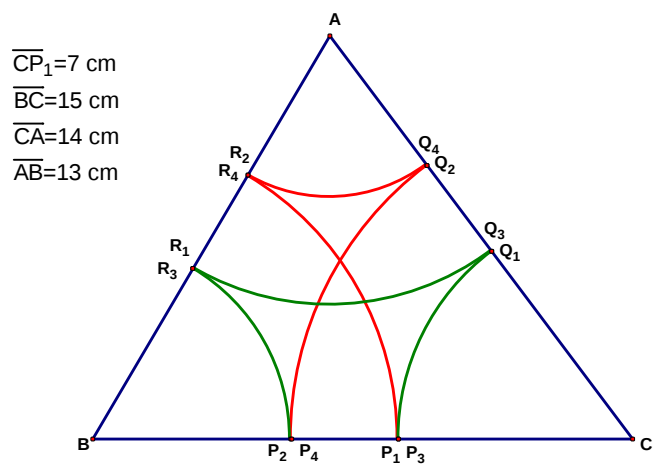
(二)畫表格列舉及 GSP 軟體繪圖(詳細計算，求出精確數據)

尺規作圖雖然可快速看出趨勢及規律性，但為避免作圖及測量時所產生的誤差，我們接下來畫出表格實際運算出各點坐標，再用 GSP 軟體繪圖，方法如下：

- 依序在各邊畫弧的結果，會在各邊上畫出許多交點，為避免混淆，我們統一稱 $\overline{BC}$ 上的交點為 P 點， $\overline{CA}$ 上的交點為 Q 點， $\overline{AB}$ 上的交點為 R 點，每邊上的交點依出現的先後順序標上 1、2、3...的下標以作區分，例： $\overline{BC}$ 邊上的第三個出現的交點以 P_3 表示。
- 以 C 點為圓心， $\overline{CP_1} = 7$ (起始半徑，可更改)為半徑畫弧，交 $\overline{CA}$ 邊於 Q_1 點，故 $\overline{AQ_1} = \overline{CA} - \overline{CP_1} = 14 - 7 = 7$ 。
- 以 A 點為圓心， $\overline{AQ_1}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{AB}$ 邊於 R_1 點，因此 $\overline{BR_1} = \overline{AB} - \overline{AQ_1} = 13 - 7 = 6$ 。
- 以 B 點為圓心， $\overline{BR_1}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{BC}$ 邊於 P_2 ，故 $\overline{CP_2} = \overline{BC} - \overline{BR_1} = 15 - 6 = 9$ 。
- 仿照上面步驟依序運算，其結果如表一、表二所示。
- 用 GSP 軟體將表一、表二的數據繪圖，結果如圖一、圖二所示。

邊長 半徑 n	$\overline{BC} = 15$	$\overline{CA} = 14$	$\overline{AB} = 13$
	$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$
1	7	7	6
2	9	5	8
3	7	7	6
4	9	5	8
5	7	7	6
6	9	5	8
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

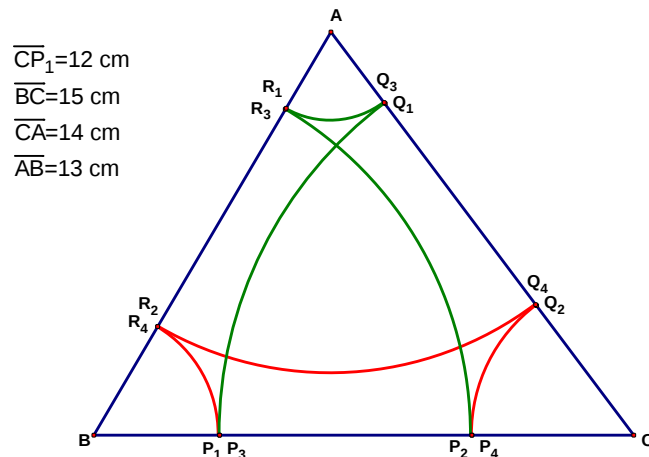
表一、起始半徑 $\overline{CP_1} = 7$ 的數據



圖一、起始半徑 $\overline{CP_1} = 7$ 的圖形

半 徑 n	邊長	$\overline{BC} = 15$	$\overline{CA} = 14$	$\overline{AB} = 13$
		$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$
1		12	2	11
2		4	10	3
3		12	2	11
4		4	10	3
5		12	2	11
6		4	10	3
.		.	.	.
.		.	.	.
.		.	.	.

表二、起始半徑 $\overline{CP_1} = 12$ 的數據



圖二、起始半徑 $\overline{CP_1} = 12$ 的圖形

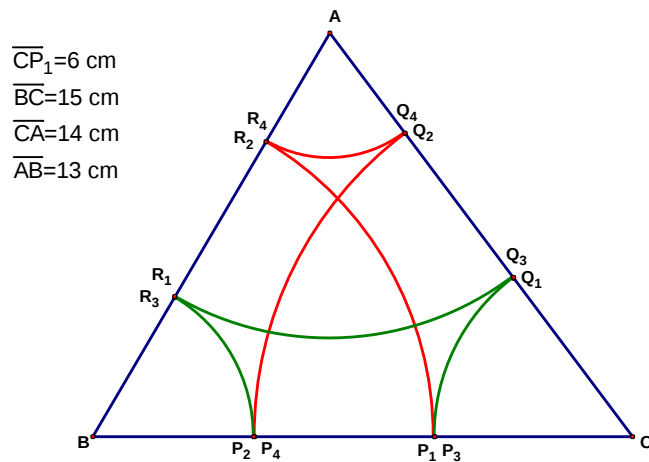
由上面兩組表格及圖形所得到的資料，可看出 P 數列分別為 7，9，7，9，7，9… 及 12，4，12，4，12，4…，且圖形中皆有六個弧且弧弧相切，這樣的結果和尺規作圖時所得到的結果是一致的。

(三)利用 EXCEL 公式及 GSP 軟體繪圖(運用程式縮短運算時間)

利用畫表格列舉所得到的結果，讓我們相當高興，在和老師討論這樣的方法及結果之後，他教我們使用 EXCEL 的運算功能，將表格做進一步的改良，目的是讓我們能夠利用 EXCEL 的運算功能，簡單的輸入三角形的邊長及起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值，便能快速得到 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的數列(詳細的表格設定，如附錄一所示)，於是我們又嘗試做了下面幾組實驗，結果如表三、表四、表五所示，再利用 GSP 軟體將資料繪圖成圖三、圖四、圖五。

$\overline{CP_n}$	三角形三邊長	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{AB}$
是否等於		15	14	13
$\overline{CP_1}$	n 半徑	$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$
	1	6	8	5
不相等	2	10	4	9
相等	3	6	8	5
不相等	4	10	4	9
相等	5	6	8	5
不相等	6	10	4	9
相等	7	6	8	5
不相等	8	10	4	9
相等	9	6	8	5
不相等	10	10	4	9
相等	11	6	8	5

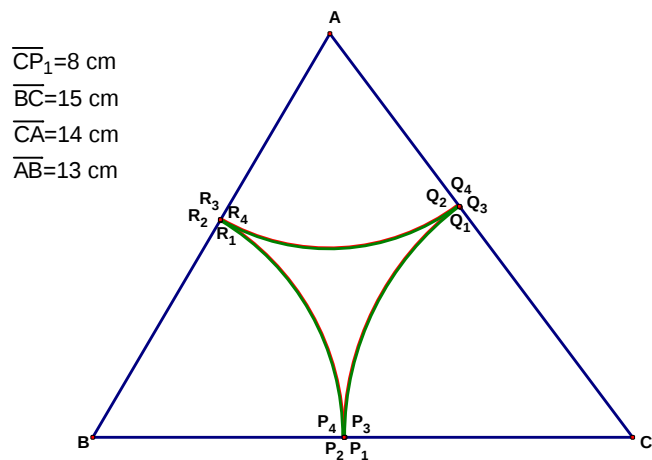
表三、起始半徑 $\overline{CP_1}=6$ 的數據



圖三、起始半徑 $\overline{CP_1}=6$ 的圖形

$\overline{CP_n}$ 是否等於 $\overline{CP_1}$	三角形三邊長	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{AB}$
		15	14	13
	n 半徑	$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$
	1	8	6	7
相等	2	8	6	7
相等	3	8	6	7
相等	4	8	6	7
相等	5	8	6	7
相等	6	8	6	7
相等	7	8	6	7
相等	8	8	6	7
相等	9	8	6	7
相等	10	8	6	7
相等	11	8	6	7

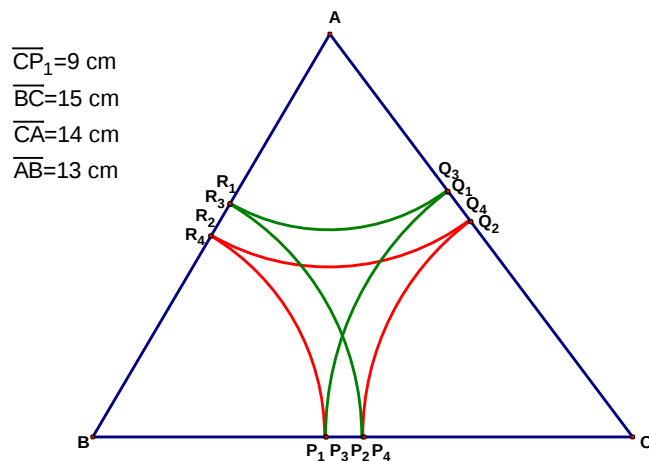
表四、起始半徑 $\overline{CP_1}=8$ 的數據



圖四、起始半徑 $\overline{CP_1}=8$ 的圖形

$\overline{CP_n}$ 是否等於 $\overline{CP_1}$	三角形三邊長 n 半徑	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{AB}$
		15	14	13
		$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$
	1	9	5	8
不相等	2	7	7	6
相等	3	9	5	8
不相等	4	7	7	6
相等	5	9	5	8
不相等	6	7	7	6
相等	7	9	5	8
不相等	8	7	7	6
相等	9	9	5	8
不相等	10	7	7	6
相等	11	9	5	8

表五、起始半徑 $\overline{CP_1}=9$ 的數據



圖五、起始半徑 $\overline{CP_1}=9$ 的圖形

由上面的結果，我們除了看到不論起始半徑 $\overline{CP_1}$ 之值為何，畫兩個循環，數列就會開始重複，且畫出的六個弧有弧弧相切外，更讓我們發現當 $\overline{CP_1}=8$ 時，畫一個循環

結束就會重複，且 P_n 皆等於 8，且畫出的三個弧也有弧弧相切的現象。

(四)代數法推導(導出一般性)

至此，我們發現規律好像可以說就要呼之欲出了，但因為我們嘗試的起始半徑 $\overline{CP_1}$ 都是整數，並未論及其他狀況，這樣的結果，可能只是特例，而且對於當 $\overline{CP_1}=8$ 時，只要畫一個循環，就會重複的結果，仍無法解釋，所以，我們決定使用代數法，令 $\triangle ABC$ 的邊長 $\overline{BC}=a_1$ ， $\overline{CA}=a_2$ ， $\overline{AB}=a_3$ ，且起始半徑 $\overline{CP_1}=x$ ，用畫表格列舉的運算方法再重新列表來探討、比較 $\overline{CP_1}$ 的值對於數列循環的影響，結果如表六所示：

邊長 半徑 n	$\overline{BC}=a_1$	$\overline{AC}=a_2$	$\overline{AB}=a_3$
	$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$
1	x	a_2-x	$-a_2+a_3+x$
2	$a_1+a_2-a_3-x$	$-a_1+a_3+x$	a_1-x
3	x	a_2-x	$-a_2+a_3+x$
4	$a_1+a_2-a_3-x$	$-a_1+a_3+x$	a_1-x
5	x	a_2-x	$-a_2+a_3+x$
6	$a_1+a_2-a_3-x$	$-a_1+a_3+x$	a_1-x
·	·	·	·
·	·	·	·
·	·	·	·
2n-1	x	a_2-x	$-a_2+a_3+x$
2n	$a_1+a_2-a_3-x$	$-a_1+a_3+x$	a_1-x

表六、用代數法推導三邊形之結果

從表六中的數據，我們可以得到下列結果：

- (1)不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值為何，都會造成數列 P 有： $P_1=P_3=P_5=\cdots=P_{2n-1}$ 及 $P_2=P_4=P_6=\cdots=P_{2n}$ 的現象，且 $P_{2n}-P_{2n-1}=(a_1+a_2-a_3-2\times\text{起始半徑})$ ，而此時畫出的圖形是六個弧弧相切的弧，這樣的推導結果合理解釋了我們前面的實驗數據。
- (2)為了探討 $\overline{CP_1}=8$ 時的特殊狀況，我們令起始半徑 $\overline{CP_1}=\overline{CP_2}$ ，得到方程式：

$$x=a_1-a_3+a_2-x$$

整理 $\rightarrow 2x=a_1-a_3+a_2$

$$\rightarrow x = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}$$

也就是當起始半徑值 $\overline{CP_1} = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}$ ，會使數列 P 成爲一公差爲零的等差數列，

即 $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n$ ，此時所得的圖形是三個弧相切的弧，而當 $a_1=15$ ， $a_2=14$ ，

$a_3=13$ 時， $\overline{CP_1} = x = \frac{15+14-13}{2} = 8$ ，這和我們之前所得的結果是一樣的。

二、針對多邊形討論

(一)四邊形

用代數法推導的結果，和我們之前幾個方法所得到的結果一致且更具一般性，這樣的推導結果除了讓我們感到高興之外，更讓我們好奇是否能用這樣的方法，推導出

四邊形的情況，於是我們令四邊形 $ABCD$ 之邊長， $\overline{BC} = a_1$ ， $\overline{CD} = a_2$ ， $\overline{DA} = a_3$ ， $\overline{AB} =$

a_4 ，且 $\overline{CP_1} = x$ ，用畫表格列舉的方法來探討，結果如表七所示：

邊長 半徑 n	$\overline{BC} = a_1$	$\overline{CD} = a_2$	$\overline{DA} = a_3$	$\overline{AB} = a_4$
	$\overline{CP_n}$	$\overline{DQ_n}$	$\overline{AR_n}$	$\overline{BS_n}$
1	x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$
2	$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + x$	$-a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4 - x$	$a_1 - 2a_2 + 2a_3 - a_4 + x$	$-a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - x$
3	$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 2a_3 + 2a_4 - x$	$2a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 2a_4 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 3a_3 + 3a_4 - x$
4	$3a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 3a_3 + 3a_4 - x$	$3a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 3a_4 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 4a_3 + 4a_4 - x$
5	$4a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 4a_3 + 4a_4 - x$	$4a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 4a_4 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 5a_3 + 5a_4 - x$
6	$5a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 5a_3 + 5a_4 - x$	$5a_1 - 6a_2 + 6a_3 - 5a_4 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 6a_3 + 6a_4 - x$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$(n-1)a_1 - (n-1)a_2 + (n-1)a_3 - (n-1)a_4 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - (n-1)a_3 + (n-1)a_4 - x$	$(n-1)a_1 - na_2 + na_3 - (n-1)a_4 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - na_3 + na_4 - x$

表七、用代數法推導四邊形之結果

由表七的數據，我們可以得到下列結果：

(1)四邊形不像三邊形從數據中一眼就可看出不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值爲何，都會造成數列

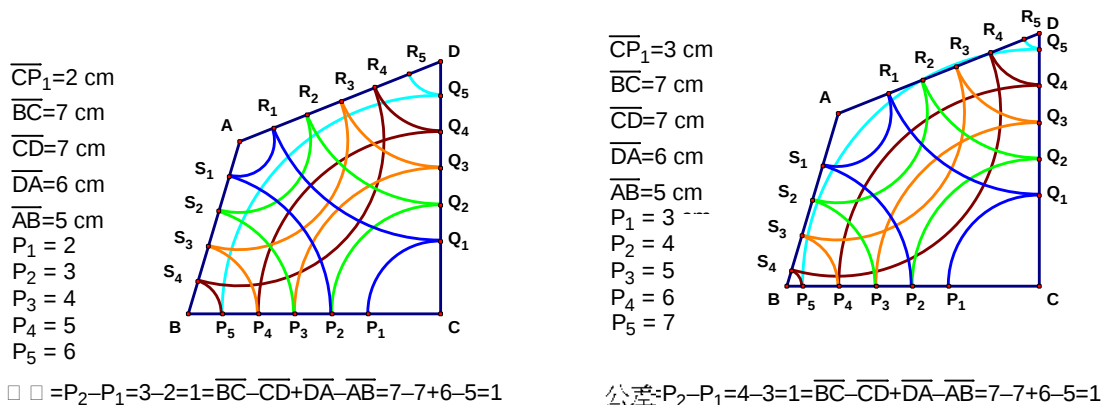
P 有： $P_1 = P_3 = P_5 = \dots = P_{2n-1}$ 及 $P_2 = P_4 = P_6 = \dots = P_{2n}$ 的結果，但是不論起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值

為何，都會使 P 數列形成一公差為 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ 的等差數列，其例圖如圖六，此時的圖形並無法完全弧弧相切。

(2) 仿照三邊形的推導結果，我們令起始半徑 $\overline{CP_1} = \overline{CP_2}$ 時，我們得到方程式：

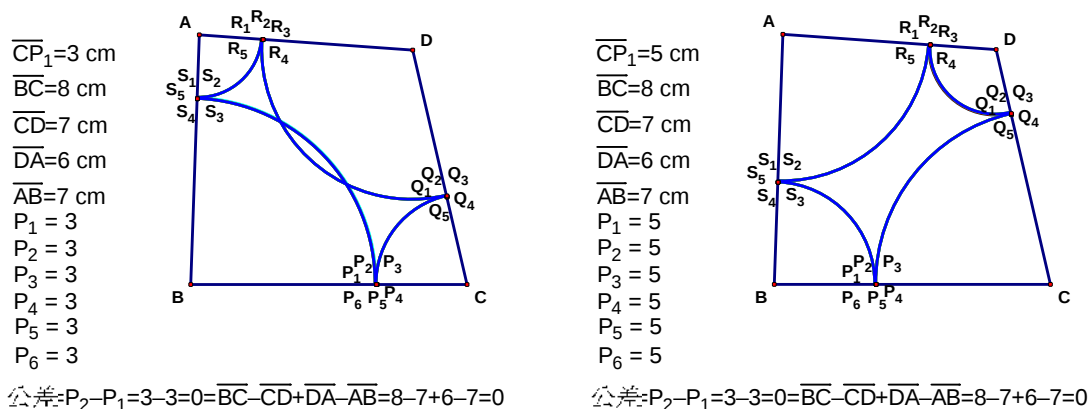
$$\begin{aligned} x &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + x \\ \text{整理} \rightarrow 0 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ \text{移項} \rightarrow a_1 + a_3 &= a_2 + a_4 \end{aligned}$$

由上面的結果，我們發現，不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 之值為何，只要四邊形邊長有 $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$ 的關係，就會使 P 數列形成一公差為零的等差數列，其例圖如圖七，此時的圖形是四個弧弧相切的弧。



圖六、在四邊形中，不管 $\overline{CP_1}$ 值為何，數列 P 皆會形成

公差為 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ 的等差數列，但圖形中的弧無法完全弧弧相切



圖七、在四邊形中，若 $\overline{BC} + \overline{DA} = \overline{CD} + \overline{AB}$ 時，不管 $\overline{CP_1}$ 值為何，數列 P 皆會形成

公差為零的等差數列，且圖形中的弧會弧弧相切

(二)五邊形

推導出四邊形的特性之後，我們更想試著推導出五邊形時，是否也有相似的情況，

於是我們令五邊形 $ABCDE$ 之邊長， $\overline{BC} = a_1$ ， $\overline{CD} = a_2$ ， $\overline{DE} = a_3$ ， $\overline{EA} = a_4$ ， $\overline{AB} = a_5$ ，

且 $\overline{CP_1} = x$ ，用畫表格列舉的方法來探討，結果如表八所示：

半 徑 n	邊長 $\overline{BC} = a_1$	$\overline{CD} = a_2$	$\overline{DE} = a_3$	$\overline{EA} = a_4$	$\overline{AB} = a_5$
	$\overline{CP_n}$	$\overline{DQ_n}$	$\overline{ER_n}$	$\overline{AS_n}$	$\overline{BT_n}$
1	x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$
2	$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_5 + x$	$a_1 - x$
3	x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$
4	$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_5 + x$	$a_1 - x$
5	x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$
6	$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_5 + x$	$a_1 - x$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
2n-1	x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$
2n	$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 - x$	$-a_1 + a_5 + x$	$a_1 - x$

表八、用代數法推導五邊形之結果

由表八的數據，我們可以得到下列結果：

(1)五邊形與三邊形一樣，從數據中一眼就可看出不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值為何，都會造成

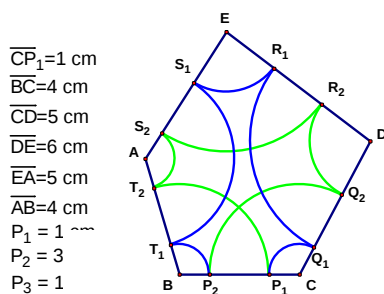
數列 P 有： $P_1 = P_3 = P_5 = \cdots = P_{2n-1}$ 及 $P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = P_{2n}$ 的結果，且相鄰兩項的差 $P_{2n} - P_{2n-1} = (a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - 2 \times \text{起始半徑})$ ，其例圖如圖八，此時所得到的圖形是十個弧弧相切的弧。

(2)當我們令起始半徑 $\overline{CP_1} = \overline{CP_2}$ ，得到方程式：

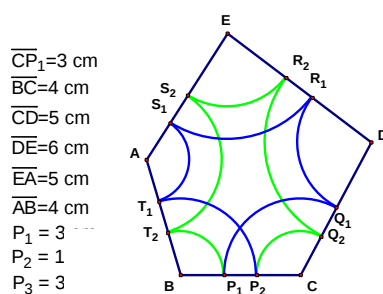
$$\begin{aligned}
 x &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - x \\
 \text{整理} \rightarrow 2x &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \\
 \rightarrow x &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5}{2}
 \end{aligned}$$

亦即當始半徑 $\overline{CP_1} = \frac{a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5}{2}$ 時，會使數列 P 成爲一公差爲零的等差數

列，即 $P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = P_n$ ，其例圖如圖九，此時所得到的圖形是五個弧弧相切的弧。

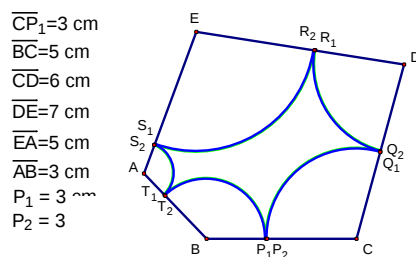
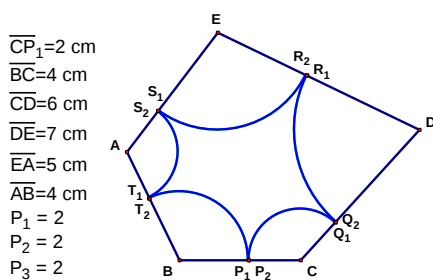


$$\begin{aligned} \text{相鄰兩數之差} &= P_2 - P_1 = 3 - 1 = 2 \\ &= BC + CD - DE + EA - AB - 2CP_1 \\ &= 4 + 5 - 6 + 5 - 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{相鄰兩數之差} &= P_2 - P_1 = 1 - 3 = -2 \\ &= BC + CD - DE + EA - AB - 2CP_1 \\ &= 4 + 5 - 6 + 5 - 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

圖八、在五邊形中，不管 $\overline{CP_1}$ 值為何，數列 P 形成一相鄰兩項差為 $\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EA} - \overline{AB} - 2\overline{CP_1}$ 的數列，且圖中的弧會弧弧相切



$$\text{起始半徑 } \overline{CP_1} = \frac{\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EA} - \overline{AB}}{2} = \frac{4 + 6 - 7 + 5 - 4}{2} = 2 \quad \text{起始半徑 } \overline{CP_1} = \frac{\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EA} - \overline{AB}}{2} = \frac{5 + 6 - 7 + 5 - 3}{2} = 3$$

圖九、在五邊形中，若 $\overline{CP_1} = \frac{\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EA} - \overline{AB}}{2}$ ，數列 P 形成

公差為零之等差數列，且圖形中的弧會弧弧相切

(三)六邊形

仔細觀查三邊形和五邊形的數據，可以看出兩者有相同的規律，但卻和四邊形的特性有些不同，故我們也想知道是不是六邊形和四邊形也有相同的規律，於是我們令六邊形 ABCDE 之邊長， $\overline{BC} = a_1$ ， $\overline{CD} = a_2$ ， $\overline{DE} = a_3$ ， $\overline{EF} = a_4$ ， $\overline{FA} = a_5$ ， $\overline{AB} = a_6$ ，且

$\overline{CP_1} = x$ ，用畫表格列舉的方法來探討，結果如表九所示。

半 徑 n	邊長	$\overline{BC} = a_1$	$\overline{CD} = a_2$	$\overline{DE} = a_3$	$\overline{EF} = a_4$	$\overline{FA} = a_5$	$\overline{AB} = a_6$
		$\overline{CP_n}$	$\overline{DQ_n}$	$\overline{ER_n}$	$\overline{FS_n}$	$\overline{AT_n}$	$\overline{BU_n}$
1		x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - x$
2		$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + x$	$-a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - x$	$a_1 - 2a_2 + 2a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + x$	$-a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - a_5 + a_6 - x$	$a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - a_6 + x$	$-a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - 2a_5 + 2a_6 - x$
3		$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 2a_3 + 2a_4 - 2a_5 + 2a_6 - x$	$2a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 3a_3 + 3a_4 - 2a_5 + 2a_6 - x$	$2a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 2a_6 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 3a_3 + 3a_4 - 3a_5 + 3a_6 - x$
4		$3a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 3a_6 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 3a_3 + 3a_4 - 3a_5 + 3a_6 - x$	$3a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 3a_6 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 4a_3 + 4a_4 - 3a_5 + 3a_6 - x$	$3a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 3a_6 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 4a_3 + 4a_4 - 4a_5 + 4a_6 - x$
5		$4a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 4a_6 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 4a_3 + 4a_4 - 4a_5 + 4a_6 - x$	$4a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 4a_6 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 5a_3 + 5a_4 - 4a_5 + 4a_6 - x$	$4a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 4a_6 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 5a_3 + 5a_4 - 5a_5 + 5a_6 - x$
6		$5a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 5a_6 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 5a_3 + 5a_4 - 5a_5 + 5a_6 - x$	$5a_1 - 6a_2 + 6a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 5a_6 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 6a_3 + 6a_4 - 5a_5 + 5a_6 - x$	$5a_1 - 6a_2 + 6a_3 - 6a_4 + 6a_5 - 5a_6 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 6a_3 + 6a_4 - 6a_5 + 6a_6 - x$
.		.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.
n		$(n-1)a_1 - (n-1)a_2 + (n-1)a_3 - (n-1)a_4 + (n-1)a_5 - (n-1)a_6 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - (n-1)a_3 + (n-1)a_4 - (n-1)a_5 + (n-1)a_6 - x$	$(n-1)a_1 - na_2 + na_3 - (n-1)a_4 + (n-1)a_5 - (n-1)a_6 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - na_3 + na_4 - (n-1)a_5 + (n-1)a_6 - x$	$(n-1)a_1 - na_2 + na_3 - na_4 + na_5 - (n-1)a_6 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - na_3 + na_4 - na_5 + na_6 - x$

表九、用代數法推導六邊形之結果

由表九的數據，我們可以得到下列結果：

(1)六邊形與四邊形有一樣的規律，不論起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值為何，都會使 P 數列形成一公差為 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ 的等差數列，其例圖如圖十，此時所畫的弧無法完全弧弧相切。

(2)當我們令起始半徑 $\overline{CP_1} = \overline{CP_2}$ 時，藉由解方程式：

$$x = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + x$$

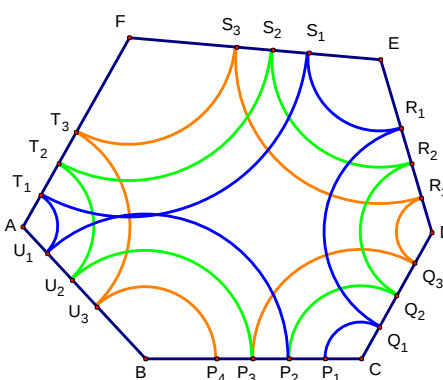
$$\text{整理} \rightarrow 0 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$$

$$\text{移項} \rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$$

只要六邊形邊長有 $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$ 的關係，不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 之值為何，P 數列皆會形成一公差為零的等差數列，其例圖如圖十一。

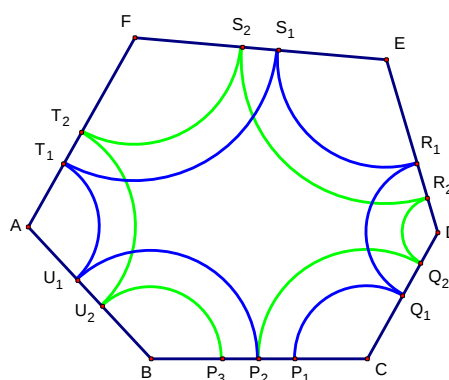
$\overline{CP_1} = 1 \text{ cm}$
 $\overline{BC} = 6 \text{ cm}$
 $\overline{CD} = 4 \text{ cm}$
 $\overline{DE} = 5 \text{ cm}$
 $\overline{EF} = 7 \text{ cm}$
 $\overline{FA} = 6 \text{ cm}$
 $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$
 $P_1 = 1$
 $P_2 = 2$
 $P_3 = 3$
 $P_4 = 4$

$$\begin{aligned} \text{公差} &= P_2 - P_1 = 2 - 1 = 1 \\ &= \overline{BC} - \overline{CD} + \overline{DE} - \overline{EF} + \overline{FA} - \overline{AB} \\ &= 6 - 4 + 5 - 7 + 6 - 5 = 1 \end{aligned}$$



$\overline{CP_1} = 2 \text{ cm}$
 $\overline{BC} = 6 \text{ cm}$
 $\overline{CD} = 4 \text{ cm}$
 $\overline{DE} = 5 \text{ cm}$
 $\overline{EF} = 7 \text{ cm}$
 $\overline{FA} = 6 \text{ cm}$
 $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$
 $P_1 = 2$
 $P_2 = 3$
 $P_3 = 4$

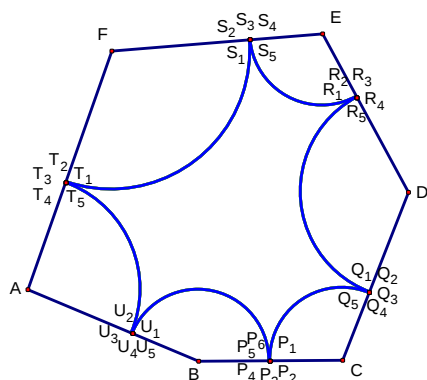
$$\begin{aligned} \text{公差} &= P_2 - P_1 = 3 - 2 = 1 \\ &= \overline{BC} - \overline{CD} + \overline{DE} - \overline{EF} + \overline{FA} - \overline{AB} \\ &= 6 - 4 + 5 - 7 + 6 - 5 = 1 \end{aligned}$$



圖十、在六邊形中，不管 $\overline{CP_1}$ 值為何，數列 P 皆會形成公差為 $\overline{BC} - \overline{CD} + \overline{DE} - \overline{EF} + \overline{FA} - \overline{AB}$ 的等差數列，且圖形中的弧無法完全弧弧相切

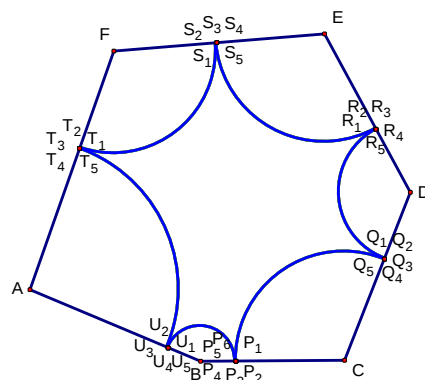
$$\begin{aligned}\overline{CP_1} &= 2 \text{ cm} \\ \overline{BC} &= 4 \text{ cm} \\ \overline{CD} &= 5 \text{ cm} \\ \overline{DE} &= 5 \text{ cm} \\ \overline{EF} &= 6 \text{ cm} \\ \overline{FA} &= 7 \text{ cm} \\ \overline{AB} &= 5 \text{ cm} \\ P_1 &= 2 \\ P_2 &= 2 \\ P_3 &= 2 \\ P_4 &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{公差} &= P_2 - P_1 = 2 - 2 = 0 \\ &= \overline{BC} - \overline{CD} + \overline{DE} - \overline{EF} + \overline{FA} - \overline{AB} \\ &= 4 - 5 + 5 - 6 + 7 - 5 = 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overline{CP_1} &= 3 \text{ cm} \\ \overline{BC} &= 4 \text{ cm} \\ \overline{CD} &= 5 \text{ cm} \\ \overline{DE} &= 5 \text{ cm} \\ \overline{EF} &= 6 \text{ cm} \\ \overline{FA} &= 7 \text{ cm} \\ \overline{AB} &= 5 \text{ cm} \\ P_1 &= 3 \\ P_2 &= 3 \\ P_3 &= 3 \\ P_4 &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{公差} &= P_2 - P_1 = 3 - 3 = 0 \\ &= \overline{BC} - \overline{CD} + \overline{DE} - \overline{EF} + \overline{FA} - \overline{AB} \\ &= 4 - 5 + 5 - 6 + 7 - 5 = 0\end{aligned}$$



圖十一、在六邊形中，若 $\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA} = \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{AB}$ 時，數列 P 會形成公差為零的等差數列，且圖形中的弧會弧弧相切

(四)七邊形

比較前面幾項討論的結果，我們得知三邊形和五邊形的規律一致，但為更加確認奇數多邊形是否有相同的規律，所以我們利用同樣方法，續繼研究七邊形，令七邊形 $ABCDEFGH$ 之邊長 $\overline{BC} = a_1$ ， $\overline{CD} = a_2$ ， $\overline{DE} = a_3$ ， $\overline{EF} = a_4$ ， $\overline{FG} = a_5$ ， $\overline{GA} = a_6$ ， $\overline{AB} = a_7$ ，且 $\overline{CP_1} = x$ ，用畫表格列舉的方法來探討，結果如表十所示。

由表十的數據，我們可發現七邊形的數據和五邊形、三邊形一致，其結果如下：

(1)從數據中就可明顯看出不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值為何，都會造成數列 P 有： $P_1 = P_3 = P_5$

$= \dots = P_{2n-1}$ 及 $P_2 = P_4 = P_6 = \dots = P_{2n}$ 的結果，且相鄰兩項的差 $P_{2n} - P_{2n-1} = (a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - 2 \times \text{起始半徑})$ ，其例圖如圖十二，此時所得到的圖形是十四個弧弧相切的弧。

(2)當我們令起始半徑 $\overline{CP_1} = \overline{CP_2}$ ，得到方程式：

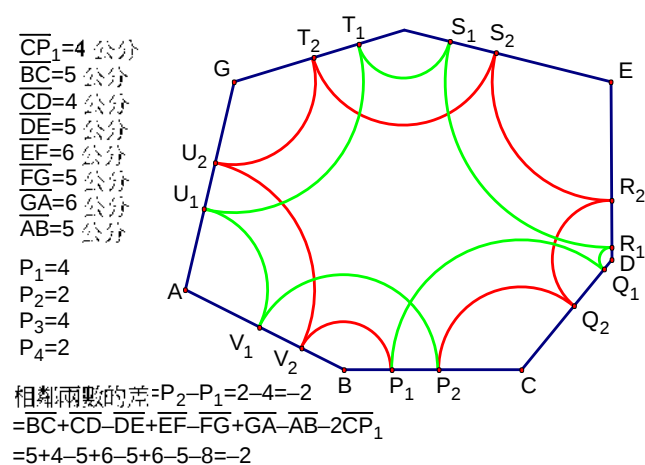
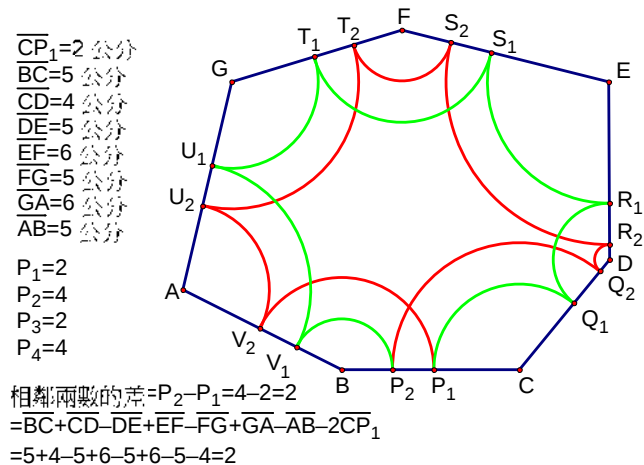
$$\begin{aligned}x &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x \\ \text{整理} \rightarrow 2x &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 \\ \rightarrow x &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7}{2}\end{aligned}$$

亦即當始半徑 $\overline{CP_1} = \frac{a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7}{2}$ 時，會使數列 P 成為一公差為零的

等差數列，即 $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n$ ，其例圖如圖十三，此時所得到的圖形是七個弧弧相切的弧。

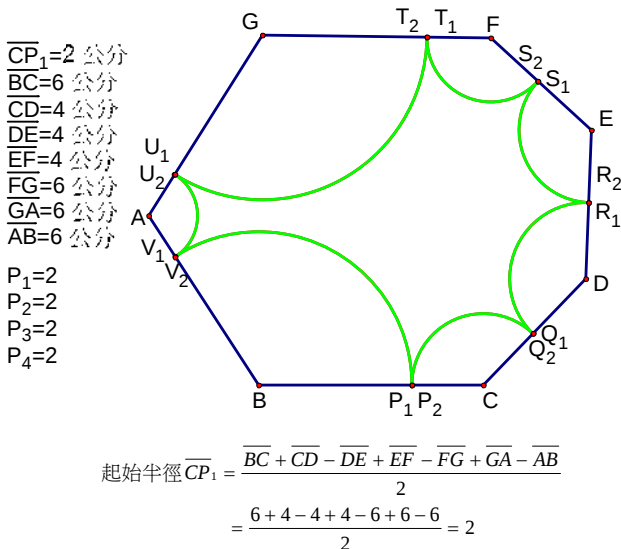
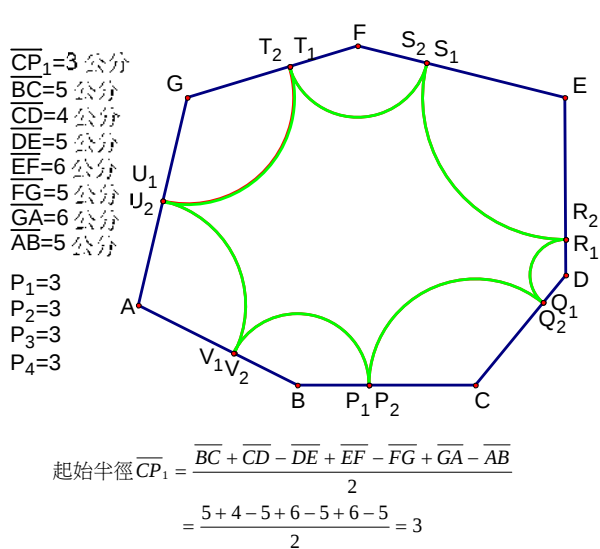
半 徑 n	邊長	$\overline{BC} = a_1$	$\overline{CD} = a_2$	$\overline{DE} = a_3$	$\overline{EF} = a_4$	$\overline{FG} = a_5$	$\overline{GA} = a_6$	$\overline{AB} = a_7$
		$\overline{CP_n}$	$\overline{DQ_n}$	$\overline{ER_n}$	$\overline{FS_n}$	$\overline{GT_n}$	$\overline{AU_n}$	$\overline{BV_n}$
1		x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$
2		$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_7 + x$	$a_1 - x$
3		x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$
4		$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_7 + x$	$a_1 - x$
5		x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$
6		$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_7 + x$	$a_1 - x$
.		.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.
2n-1		x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$
2n		$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_1 + a_6 - a_7 - x$	$-a_1 + a_7 + x$	$a_1 - x$

表十、用代數法推導七邊形之結果



圖十二、在七邊形中，不管 $\overline{CP_1}$ 值為何，數列 P 形成相鄰兩項差為

$\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EF} - \overline{FG} + \overline{GA} - \overline{AB} - 2\overline{CP_1}$ 的數列，且圖中的弧會弧弧相切



圖十三、在七邊形中，若 $\overline{CP_1} = \frac{\overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DE} + \overline{EF} - \overline{FG} + \overline{GA} - \overline{AB}}{2}$ ，數列 P 形成

公差為零之等差數列，且圖形中的弧會弧弧相切

(五) 八邊形

由三邊形、五邊形及七邊形的討論結果發現這三種奇數多邊形有相同的特性，於是我們再以相同的方法探討八邊形，令八邊形 ABCDEFGH 之邊長 $\overline{BC} = a_1$ ， $\overline{CD} = a_2$ ， $\overline{DE} = a_3$ ， $\overline{EF} = a_4$ ， $\overline{FG} = a_5$ ， $\overline{GH} = a_6$ ， $\overline{HA} = a_7$ ， $\overline{AB} = a_8$ ，且 $\overline{CP_1} = x$ ，用畫表格列舉的運算方法再重新列表來探討，結果如表十一所示。

半 邊長 徑 n	$\overline{BC} = a_1$	$\overline{CD} = a_2$	$\overline{DE} = a_3$	$\overline{EF} = a_4$	$\overline{FG} = a_5$	$\overline{GH} = a_6$	$\overline{HA} = a_7$	$\overline{AB} = a_8$
	$\overline{CP_n}$	$\overline{DQ_n}$	$\overline{ER_n}$	$\overline{FS_n}$	$\overline{GT_n}$	$\overline{HU_n}$	$\overline{AU_n}$	$\overline{BV_n}$
1	x	$a_2 - x$	$-a_2 + a_3 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - x$	$-a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + x$	$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - x$
2	$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + x$	$-a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - x$	$a_1 - 2a_2 + 2a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + x$	$-a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - x$	$a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + x$	$-a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - 2a_5 + 2a_6 - a_7 + a_8 - x$	$a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + 2a_7 - a_8 + x$	$-a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - 2a_5 + 2a_6 - 2a_7 + 2a_8 - x$
3	$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + 2a_7 - 2a_8 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 2a_3 + 2a_4 - 2a_5 + 2a_6 - 2a_7 + 2a_8 - x$	$2a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + 2a_7 - 2a_8 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 3a_3 + 3a_4 - 2a_5 + 2a_6 - 2a_7 + 2a_8 - x$	$2a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 2a_6 + 2a_7 - 2a_8 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 2a_3 + 3a_4 - 3a_5 + 3a_6 - 2a_7 + 2a_8 - x$	$2a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 3a_6 + 3a_7 - 2a_8 + x$	$-2a_1 + 3a_2 - 3a_3 + 3a_4 - 3a_5 + 3a_6 - 3a_7 + 3a_8 - x$
4	$3a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 3a_6 + 3a_7 - 3a_8 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 3a_3 + 3a_4 - 3a_5 + 3a_6 - 3a_7 + 3a_8 - x$	$3a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 3a_6 + 3a_7 - 3a_8 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 4a_3 + 4a_4 - 3a_5 + 3a_6 - 3a_7 + 3a_8 - x$	$3a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 3a_6 + 3a_7 - 3a_8 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 3a_3 + 4a_4 - 4a_5 + 4a_6 - 3a_7 + 3a_8 - x$	$3a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 4a_6 + 4a_7 - 3a_8 + x$	$-3a_1 + 4a_2 - 4a_3 + 4a_4 - 4a_5 + 4a_6 - 4a_7 + 4a_8 - x$
5	$4a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 4a_6 + 4a_7 - 4a_8 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 4a_3 + 4a_4 - 4a_5 + 4a_6 - 4a_7 + 4a_8 - x$	$4a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 4a_6 + 4a_7 - 4a_8 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 5a_3 + 5a_4 - 4a_5 + 4a_6 - 4a_7 + 4a_8 - x$	$4a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 4a_6 + 4a_7 - 4a_8 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 4a_3 + 5a_4 - 5a_5 + 5a_6 - 4a_7 + 4a_8 - x$	$4a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 5a_6 + 5a_7 - 4a_8 + x$	$-4a_1 + 5a_2 - 5a_3 + 5a_4 - 5a_5 + 5a_6 - 5a_7 + 5a_8 - x$
6	$5a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 5a_6 + 5a_7 - 5a_8 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 5a_3 + 5a_4 - 5a_5 + 5a_6 - 5a_7 + 5a_8 - x$	$5a_1 - 6a_2 + 6a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 5a_6 + 5a_7 - 5a_8 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 6a_3 + 6a_4 - 5a_5 + 5a_6 - 5a_7 + 5a_8 - x$	$5a_1 - 6a_2 + 6a_3 - 6a_4 + 6a_5 - 5a_6 + 5a_7 - 5a_8 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 5a_3 + 6a_4 - 6a_5 + 6a_6 - 5a_7 + 5a_8 - x$	$5a_1 - 6a_2 + 6a_3 - 6a_4 + 6a_5 - 6a_6 + 6a_7 - 5a_8 + x$	$-5a_1 + 6a_2 - 6a_3 + 6a_4 - 6a_5 + 6a_6 - 6a_7 + 6a_8 - x$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(n-1)a_1 - (n-1)a_2 + (n-1)a_3 - (n-1)a_4 + (n-1)a_5 - (n-1)a_6 + (n-1)a_7 - (n-1)a_8 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - (n-1)a_3 + (n-1)a_4 - (n-1)a_5 + (n-1)a_6 - (n-1)a_7 + (n-1)a_8 - x$	$(n-1)a_1 - na_2 + na_3 - (n-1)a_4 + (n-1)a_5 - (n-1)a_6 + (n-1)a_7 - (n-1)a_8 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - na_3 + na_4 - (n-1)a_5 + (n-1)a_6 - (n-1)a_7 + (n-1)a_8 - x$	$(n-1)a_1 - na_2 + na_3 - na_4 + na_5 - (n-1)a_6 + (n-1)a_7 - (n-1)a_8 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - na_3 + na_4 - na_5 + na_6 - (n-1)a_7 + (n-1)a_8 - x$	$(n-1)a_1 - na_2 + na_3 - na_4 + na_5 - na_6 + na_7 - (n-1)a_8 + x$	$-(n-1)a_1 + na_2 - na_3 + na_4 - na_5 + na_6 - na_7 + na_8 - x$

表十一、用代數法推導八邊形之結果

由表十一的數據，我們可以發現八邊形的數據與四邊形、六邊形一致，結果如下：

(1)不論起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值為何，都會使 P 數列形成一公差為 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ 的等差數列，其例圖如圖十四，此時所畫的弧無法完全弧弧相切。

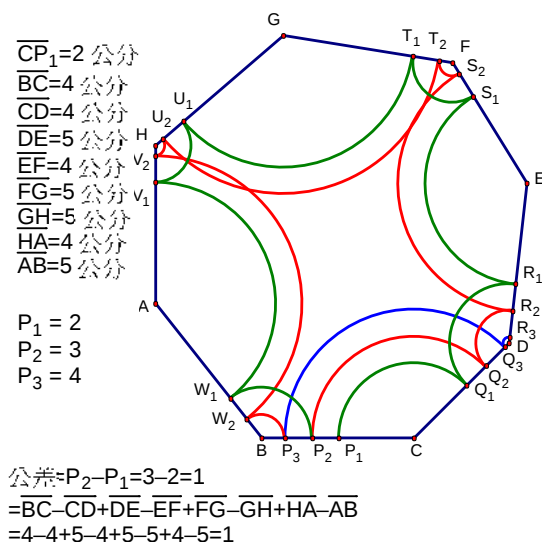
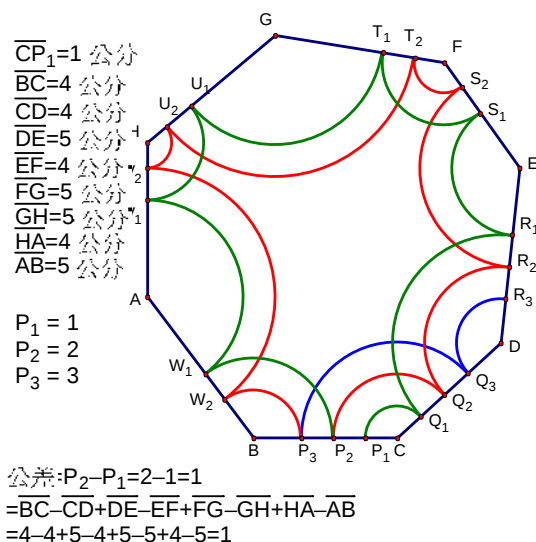
(2)當我們令起始半徑 $\overline{CP_1} = \overline{CP_2}$ 時，藉由解方程式：

$$x = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + x$$

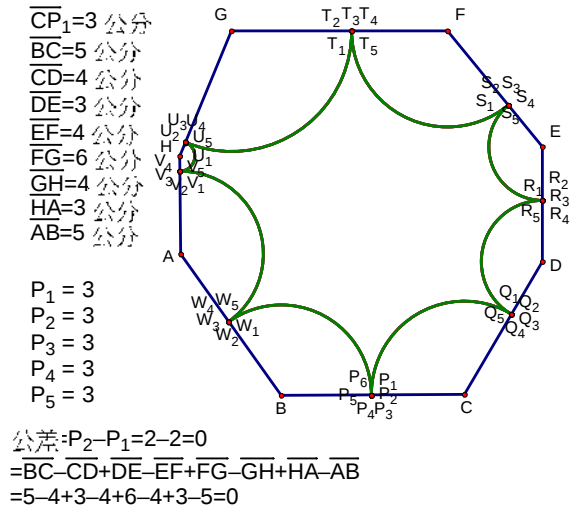
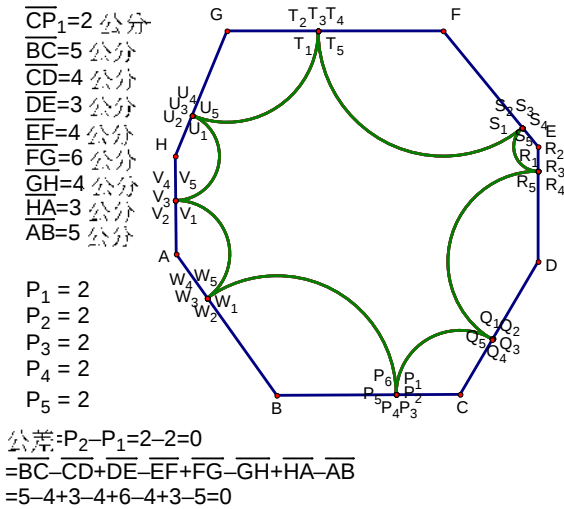
$$\text{整理} \rightarrow 0 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8$$

$$\text{移項} \rightarrow a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

只要八邊形邊長有 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ 的關係，不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 之值為何，P 數列皆會形成一公差為零的等差數列，其例圖如圖十五。



圖十、在八邊形中，不管 $\overline{CP_1}$ 值為何，數列 P 皆會形成公差為 $\overline{BC} - \overline{CD} + \overline{DE} - \overline{EF} + \overline{FG} - \overline{GH} + \overline{HA} - \overline{AB}$ 的等差數列，且圖形中的弧無法完全弧弧相切



圖十一、在六邊形中，若 $\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FG} + \overline{HA} = \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{AB}$ 時，數列 P 會形成公差為零的等差數列，且圖形中的弧會弧弧相切

(六) 奇數邊多邊形

我們由比較延伸探討的結果中可以看出，三邊形和五邊形及七邊形的規律一致，四邊形和六邊形及八邊形的規律一致，故分別將三邊形、五邊形及七邊形的 $\overline{CP_n}$ 整理在一起，依規律推導出奇數 $(2m-1)$ 邊形的 $\overline{CP_n}$ ，結果如表十二所示。

從表十二的結果，我們可以看出：

(1) 當我們令起始半徑 $\overline{CP_1} = \overline{CP_2}$ 時，藉由解方程式：

$$\begin{aligned}
 x &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + (-1)^{2m-2} a_{2m-2} + (-1)^{2m-1} a_{2m-1} - x \\
 \text{整理} \Rightarrow 2x &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + (-1)^{2m-2} a_{2m-2} + (-1)^{2m-1} a_{2m-1} \\
 x &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + (-1)^{2m-2} a_{2m-2} + (-1)^{2m-1} a_{2m-1}}{2} \\
 x &= \frac{2a_1 + [(a_2 + a_4 + \dots + a_{2m}) - (a_3 + a_5 + \dots + a_{2m-1})]}{2} \\
 x &= a_1 + \frac{[(a_2 + a_4 + \dots + a_{2m}) - (a_3 + a_5 + \dots + a_{2m-1})]}{2}
 \end{aligned}$$

也就是當起始半徑 $\overline{CP_1} = \text{底邊} + \frac{(\text{偶數邊的和} - \text{奇數邊的和})}{2}$ 時，會使得數列 P 形成一公差為零的等差數列，且圖形中會有 $(2m-1)$ 個弧弧相切的弧。

(2) 在起始半徑 $\overline{CP_1} \neq a_1 + \frac{(\text{偶數邊的和} - \text{奇數邊的和})}{2}$ 時，任何起始半徑 $\overline{CP_1}$ 都會使數列

P 有： $P_1=P_3=P_5=\cdots=P_{2n-1}$ 及 $P_2=P_4=P_6=\cdots=P_{2n}$ 的結果，且 $P_{2n}-P_{2n-1}=a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+(-1)^{2m-2}a_{2m-2}+(-1)^{2m-1}a_{2m-1}-2\times$ 起始半徑，即 $P_{2n}-P_{2n-1}=2(\text{底邊一起始徑})+(\text{偶數邊的和}-\text{奇數邊的和})$ ，且圖中會有 $2(2m-1)$ 個弧弧相切的弧。

邊數 半 徑 n	三邊形	五邊形	七邊形	奇數 $(2m-1)$ 邊形
	$\overline{CP_n}$	$\overline{CP_n}$	$\overline{CP_n}$	$\overline{CP_n}$
1	x	x	x	x
2	$a_1+a_2-a_3-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+(-1)^{2m-2}a_{2m-2}+(-1)^{2m-1}a_{2m-1}-x$
3	x	x	x	x
4	$a_1+a_2-a_3-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+(-1)^{2m-2}a_{2m-2}+(-1)^{2m-1}a_{2m-1}-x$
5	x	x	x	x
6	$a_1+a_2-a_3-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+(-1)^{2m-2}a_{2m-2}+(-1)^{2m-1}a_{2m-1}-x$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$2n-1$	x	x	x	x
$2n$	$a_1+a_2-a_3-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7-x$	$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+(-1)^{2m-2}a_{2m-2}+(-1)^{2m-1}a_{2m-1}-x$

表十二、用代數法推導奇數 $(2m-1)$ 邊形之結果

(七)偶數邊多邊形

分別將四邊形和六邊形及八邊形的 $\overline{CP_n}$ 整理在一起，藉由觀察其規律類推出偶數 (2m) 邊形的結果，如表十三所示。

邊數 半 徑 n	四邊形	六邊形	八邊形	偶數(2m)邊形
	$\overline{CP_n}$	$\overline{CP_n}$	$\overline{CP_n}$	$\overline{CP_n}$
1	x	x	x	x
2	$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + x$	$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + x$	$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + x$	$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots + (-1)^{2m} a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} a_{2m} + x$
3	$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + x$	$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + x$	$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + 2a_7 - 2a_8 + x$	$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 - 2a_5 + \cdots + (-1)^{2m} 2a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} 2a_{2m} + x$
4	$3a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + x$	$3a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 3a_6 + x$	$3a_1 - 3a_2 + 3a_3 - 3a_4 + 3a_5 - 3a_6 + 3a_7 - 3a_8 + x$	$3a_1 - 3a_2 + 3a_3 + 3a_4 - 3a_5 + \cdots + (-1)^{2m} 3a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} 3a_{2m} + x$
5	$4a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + x$	$4a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 4a_6 + x$	$4a_1 - 4a_2 + 4a_3 - 4a_4 + 4a_5 - 4a_6 + 4a_7 - 4a_8 + x$	$4a_1 - 4a_2 + 4a_3 + 4a_4 - 4a_5 + \cdots + (-1)^{2m} 4a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} 4a_{2m} + x$
6	$5a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + x$	$5a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 5a_6 + x$	$5a_1 - 5a_2 + 5a_3 - 5a_4 + 5a_5 - 5a_6 + 5a_7 - 5a_8 + x$	$5a_1 - 5a_2 + 5a_3 + 5a_4 - 5a_5 + \cdots + (-1)^{2m} 5a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} 5a_{2m} + x$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$(n-1)a_1 - (n-1)a_2 + (n-1)a_3 - (n-1)a_4 + x$	$(n-1)a_1 - (n-1)a_2 + (n-1)a_3 - (n-1)a_4 + (n-1)a_5 - (n-1)a_6 + x$	$(n-1)a_1 - (n-1)a_2 + (n-1)a_3 - (n-1)a_4 + (n-1)a_5 - (n-1)a_6 + (n-1)a_7 - (n-1)a_8 + x$	$(n-1)a_1 - (n-1)a_2 + (n-1)a_3 - (n-1)a_4 + (n-1)a_5 + \cdots + (-1)^{2m} (n-1)a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} (n-1)a_{2m} + x$

表十三、用代數法推導偶數(2m)邊形之結果

從表十三的結果中，我們可以得到：

(1)當我們令起始半徑 $\overline{CP_1} = \overline{CP_2}$ 時，藉由解方程式：

$$x = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots + (-1)^{2m} a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} a_{2m} + x$$

整理 $\Rightarrow 0 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots + (-1)^{2m} a_{2m-1} + (-1)^{2m+1} a_{2m}$

移項 $\Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2m-1} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2m}$

也就是當『奇數邊的和＝偶數的和』時，不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 之值為何，會使得數列 P 形成一公差為零的等差數列，且圖形中會有 $2m$ 個弧弧相切的弧。

(2)當『奇數邊的和≠偶數的和』時，不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 之值為何，數列 P 會是一個等差數列，公差是『奇數邊的和－偶數的和』，且圖形中的弧不能完全弧弧相切。

伍、結論

由以上的研究討論，其結論如下：

一、三邊形的結論：

(一)當起始半徑值 $\overline{CP_1} = \frac{\overline{BC} + \overline{CA} - \overline{AB}}{2}$ ，會使數列 P 成為一公差為零的等差數列，且此時所得的圖形是三個弧弧相切的弧。

(二)當起始半徑值 $\overline{CP_1} \neq \frac{\overline{BC} + \overline{CA} - \overline{AB}}{2}$ 時，不管 $\overline{CP_1}$ 值為何，數列 P 有： $P_1 = P_3 = P_5 = \dots = P_{2n-1}$ 及 $P_2 = P_4 = P_6 = \dots = P_{2n}$ 的現象，且 $P_{2n} - P_{2n-1} = (\overline{BC} + \overline{CA} - \overline{AB} - 2 \times \text{起始半徑})$ ，且此時畫出的圖形是六個弧弧相切的弧。

二、多邊形的結論：

(一)在奇數多邊形中，當起始半徑 $\overline{CP_1} = \text{底邊} + \frac{(\text{偶數邊的和} - \text{奇數邊的和})}{2}$ 時，數列 P 形成一公差為零的等差數列，且圖形中的 $(2m-1)$ 個弧會弧弧相切；當起始半徑 $\overline{CP_1} \neq \text{底邊} + \frac{(\text{偶數邊的和} - \text{奇數邊的和})}{2}$ 時，數列 P 會形成所有奇數項相同及所有偶數項相同，且偶數項－奇數項的差 $= 2(\text{底邊長} - \text{起始半徑}) + (\text{偶數邊的和} - \text{奇數邊的和})$ ，且圖形中的 $2(2m-1)$ 個弧會弧弧相切。

(二)在偶數多邊形中，不管起始半徑 $\overline{CP_1}$ 之值為何，數列 P 皆為等差數列，公差是『奇數邊的和－偶數的和』，圖形中的弧並不一定能完全弧弧相切，只有當『奇數邊的和＝偶數的和』時，即數列 P 形成公差為零的等差數列時，且圖形中的 $2m$ 個弧才會弧弧相切。

(三)雖然數列 P 在奇數多邊形及偶數多邊形中，皆有形成公差為零之等差數列的狀況，但是發生條件相當不同，在奇數多邊形中，與「起始半徑 $\overline{CP_1}$ 值」有關，但在偶數多邊形中，僅與「邊長」有關。

(四)弧弧相切的況狀在奇數邊形與偶數邊形中亦不相同，在奇數多邊形中，一定會形成弧弧相切，而在偶數多邊形時，在『奇數邊的和＝偶數的和』時，才會有弧弧相切的現象產生。

陸、研究展望

(一)本研究已由實際運算推導出三邊形、四邊形、五邊形、六邊形、七邊形、八邊形之結論，唯奇數多邊形及偶數多邊之結論僅由列表、觀察、類推所得，期望能在日後以更嚴謹的方法導出結論，讓本研究結果更為完備。

(二)由 GSP 實際做圖，我們發現並非任意邊長之多邊形及任意之起始半徑 $\overline{CP_1}$ 皆能形成數列 P，故起始半徑 $\overline{CP_1}$ 、邊長與數列 P 的項數間有何關係，仍需做進一步的研究探討。

柒、參考資料

一、徐立民、馬榮喜、陳世易(民 96)。國中數學第四冊。台北縣：康軒。

二、許志農。動手玩數學。民 97 年 2 月 10 日，取自：

<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/play.htm>。

三、吳政勳。GSP 動態幾何教學。民 97 年 3 月 2 日，取自：

<http://140.127.47.6/DLMathEd/home/Garden/GSP/index.htm>。

四、邢維禮、高世良。GSP 動態幾何教材設計與網頁製作。民 97 年 3 月 2 日，取自：

<http://tpc.k12.edu.tw/1001214071/index.html>，

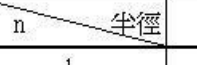
附錄一

利用 EXCEL 公式縮短運算時間的設定

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		$\overline{CP_n}$ 是否等於 $\overline{CP_1}$	三角形三邊長	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{AB}$	
3							
4				$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$	
5			1				
6			2				
7			3				
8			4				
9			5				
10			6				
11			2				
12			3				
13			4				
14			5				
15			6				
16							
17							

圖一

- 1.開啓一新的 EXCEL 檔，先依上圖將表格繪製好。
- 2.在 E5 欄位中輸入=SE\$3-D5，在 F5 欄位中輸入=SF\$3-E5，在 D6 欄位中輸入=SD\$3-F5，在 E6 欄位中輸入=SE\$3-D6，在 F6 欄位中輸入=SF\$3-E6。
- 3.然後，選取 D6 至 F6，按右鍵，點選『複製』，如圖二所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		$\overline{CP_n}$ 是否等於 $\overline{CP_1}$	三角形三邊長	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{AB}$		
3								
4				$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$		
5			1		0	0		
6			2	0	0	0		
7			3					
8			4					
9			5					
10			6					
11			2					
12			3					
13			4					
14			5					
15			6					
16								



4.再選取 D7 欄至 F17 欄，按右鍵，點選『選擇性貼上』，如圖三，再點選『公式』，如圖四。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		$\overline{CP_n}$	三角形三邊長	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{AB}$		
3		是否等於	n 半徑					
4		$\overline{CP_1}$		$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$		
5			1		0	0		
6			2	0	0	0		
7			3					
8			4					
9			5					
10			6					
11			2					
12			3					
13			4					
14			5					
15			6					
16								
17								
18								

圖三

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		$\overline{CP_n}$	三角形三邊長	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{AB}$			
3		是否等於	n 半徑						
4		$\overline{CP_1}$		$\overline{CP_n}$	$\overline{AQ_n}$	$\overline{BR_n}$			
5			1		0	0			
6			2	0	0	0			
7			3						
8			4						
9			5						
10			6						
11			2						
12			3						
13			4						
14			5						
15			6						
16									
17									
18									
19									

圖四

- 因為我們發現 $\overline{CP_1}$ 的值有時會重複出現，故增設一欄快速比較欄，方式是於 B6 欄位輸入 $=IF(D6=\$D\$5,"相等","不相等")$ 後，點選 B6 欄位，按步驟 3~4 的方式，將公式複製到 B7~B15 等欄位。
- 接下來，我們在 D3、E3、F3 欄位內，分別輸入 15、14 及 13。
- 藉由分別在 D5 欄位內，輸入 6、7、8，我們就可以讓 EXCEL 快速地幫我們運算出表三、表四、表五內的其他數值。

【評語】 030406

1. 有創意。
2. 論理詳實。
3. 善用電腦輔助說明。
4. 弧長比邊長大的情形已補足，往後作品如能事前考慮更多元更周延更好。