

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030404

再談平面分割問題以及探討尤拉定理在平面上的推廣

學校名稱：澎湖縣立湖西國民中學

作者： 國三 王順永	指導老師： 李祐宗
-------------------	------------------

關鍵詞： 數列、尤拉定理

再談平面分割問題以及探討尤拉定理在平面上的推廣

壹、摘要

猶記得寒假上數學輔導課的時候，教師拿著正多面體要我們學習立體幾何的學問，並且探討尤拉定理，於是我就突發奇想，如果我們將此凸多面體以「平面」的眼光來看待時，立體空間的邊長就變成了平面的分割直線，那麼尤拉定理是否仍適用於平面圖形呢？或是有所改變呢？這個問題引起我研究平面分割的相關問題的動機。其實「研究 n 條直線可以將一平面分割成多少區域」這個主題在以前有很多人研究過，而我想推廣為更多圖形分割平面的相關問題，看看是否能由尤拉定理推導出相關理論出來。

貳、研究目的

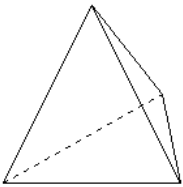
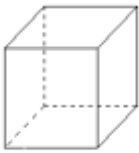
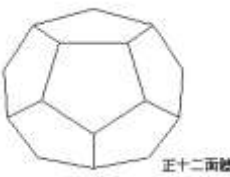
- 一、研究直線分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣。
- 二、研究多邊形分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣。
- 三、研究圓形分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣。
- 四、研究拋物線分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣。

參、研究工具

紙、筆。

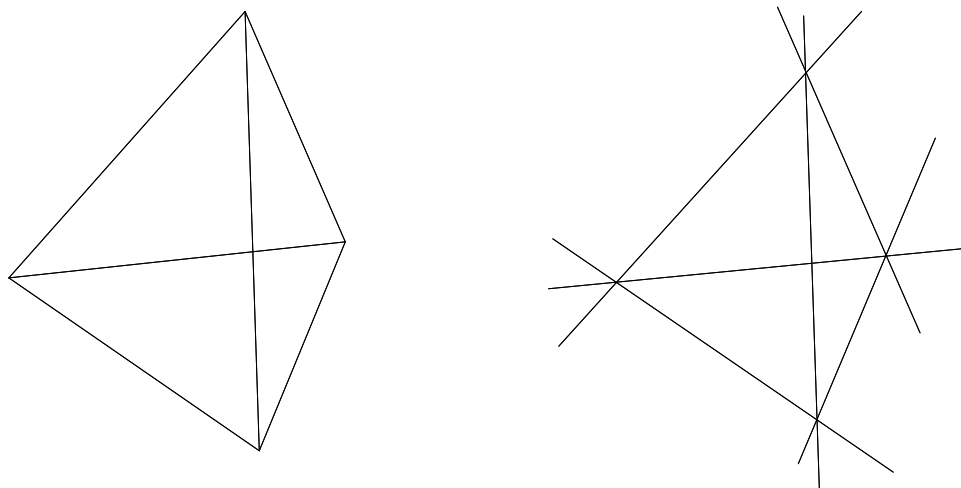
肆、研究過程

讓我們表列正多面體回顧一下尤拉公式：

正多面體	頂點數	稜數	面數	尤拉公式 $V - E + F =$
 正四面體	4	6	4	2
 正六面體	8	12	6	2
 正八面體	6	12	8	2
 正十二面體	20	30	12	2

	12	30	20	2
---	----	----	----	---

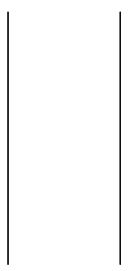
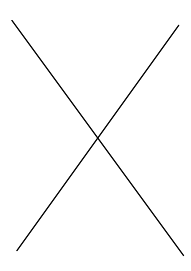
若將上圖之正四面體以平面眼光來看，就等同於一個六條直線形成的直線網，如圖：
我們將尤拉定理的頂點改為線段的交點數 V 、面數改為封閉空間的面數 F 、稜線改為不同的線段數 E 則，我們可以發現此圖之 $V=5$ 、 $E=8$ 、 $F=4$ ，則 $V-E+F=1$ ，若再將此圖之每條直線無限延伸，則可得到另一圖：



如圖，若將頂點數仍設為交點數、面數增加為所有包含無限及有限的區域面、線段包含所有有限及無限的線段，則我們發現 $V=5$ 、 $E=20$ 、 $F=16$ ，則 $V-E+F=1$ ，所以要探討平面分割問題，以右邊之圖形較為恰當，而左邊之圖形包含在右邊圖形之中。

看過很多資料，對於平面分割只僅限於多少條直線可以將平面分割為多少空間，但我發現平面分割可以研究的問題還很多，包含分割之平面數、封閉空間之數目、三角形之最大面數、及尤拉定理的推廣，以及若直線改為多邊形及圓形來分割平面，這些結果又會如何？尤拉定理在此是否為 $V-E+F=1$ 之恆等式？

一、直線分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣：

圖形（兩直線平行）	圖形（兩線交叉）
	

頂點數 (V) : 0

分割之平面數 (F) : 3

線段數 (E) : 2

$V - E + F = 1$

封閉面數 : 0

三角形面數 : 0

頂點數 (V) : 1

分割之平面數 (F) : 4

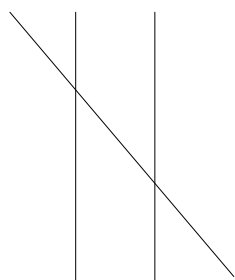
線段數 (E) : 4

$V - E + F = 1$

封閉面數 : 0

三角形面數 : 0

圖形 (其中兩線平行)



頂點數 (V) : 2

分割之平面數 (F) : 6

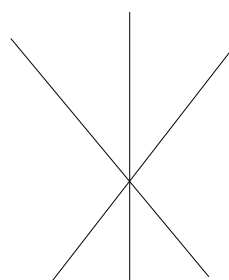
線段數 (E) : 7

$V - E + F = 1$

封閉面數 : 0

三角形面數 : 0

圖形 (三線交於一點)



頂點數 (V) : 1

分割之平面數 (F) : 6

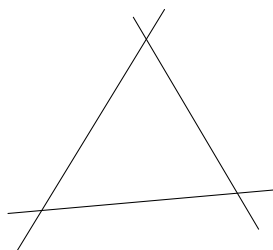
線段數 (E) : 6

$V - E + F = 1$

封閉面數 : 0

三角形面數 : 0

圖形 (三線互不平行)



頂點數 (V) : 3

分割之平面數 (F) : 7

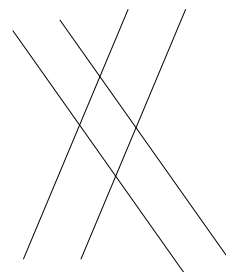
線段數 (E) : 9

$V - E + F = 1$

封閉面數 : 1

三角形面數 : 1

圖形 (兩組平行線)



頂點數 (V) : 4

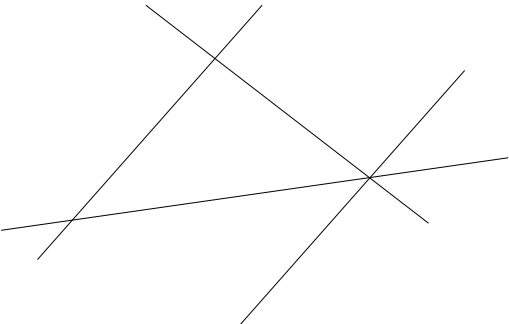
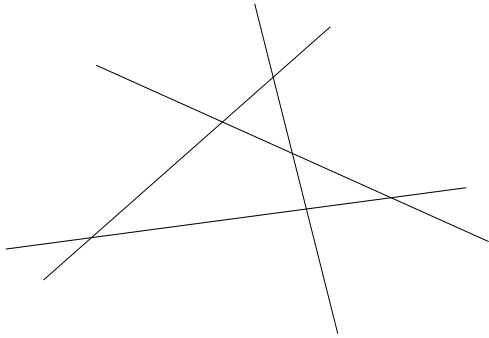
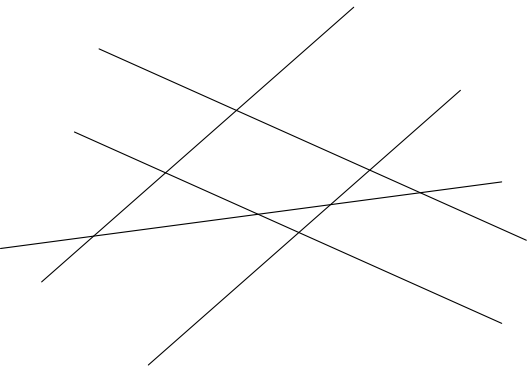
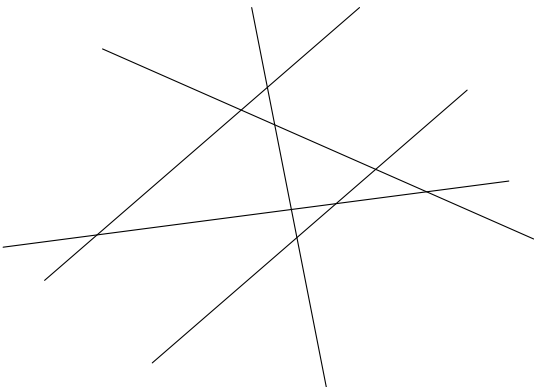
分割之平面數 (F) : 9

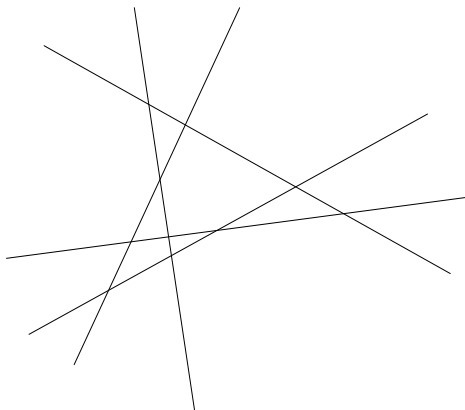
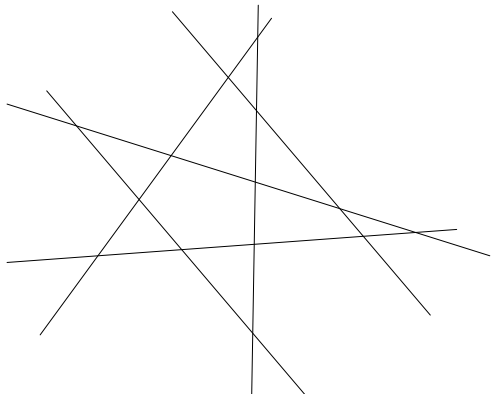
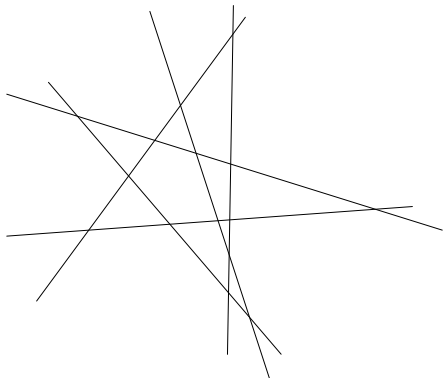
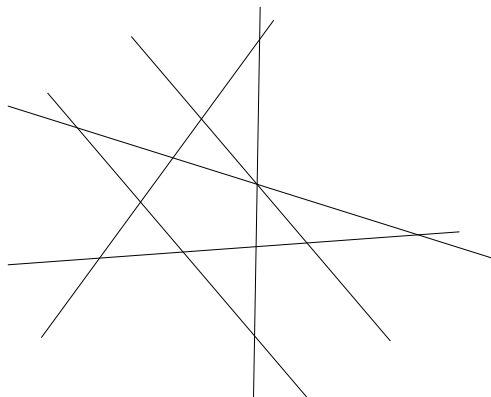
線段數 (E) : 12

$V - E + F = 1$

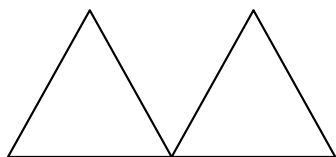
封閉面數 : 1

三角形面數 : 0

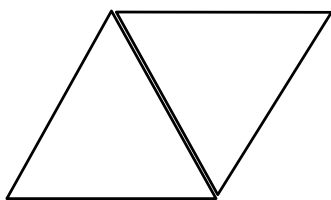
圖形（其中兩線平行，且三線交於一點）  頂點數 (V) : 3 分割之平面數 (F) : 9 線段數 (E) : 11 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 1 三角形面數 : 1	圖形（四線互不平行）  頂點數 (V) : 6 分割之平面數 (F) : 11 線段數 (E) : 16 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 3 三角形面數 : 2
圖形（五線，其中兩組平行線）  頂點數 (V) : 8 分割之平面數 (F) : 14 線段數 (E) : 21 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 4 三角形面數 : 3	圖形（五線，其中一組平行線）  頂點數 (V) : 9 分割之平面數 (F) : 15 線段數 (E) : 23 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 5 三角形面數 : 3

圖形（五線互不平行）	圖形（六線，其中一組平行線）
 頂點數 (V) : 10 分割之平面數 (F) : 16 線段數 (E) : 25 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 6 三角形面數 : 4	 頂點數 (V) : 14 分割之平面數 (F) : 21 線段數 (E) : 34 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 9 三角形面數 : 6
圖形（六線互不平行）	圖形（一組三線共點）
 頂點數 (V) : 15 分割之平面數 (F) : 22 線段數 (E) : 36 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 10 三角形面數 : 6	 頂點數 (V) : 12 分割之平面數 (F) : 20 線段數 (E) : 31 $V - E + F = 1$ 封閉面數 : 8 三角形面數 : 7

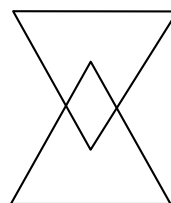
二、三角形分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣：



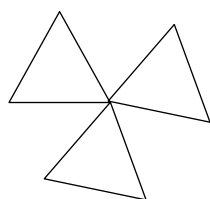
頂點數 (V): 5
 分割之平面數 (F): 3
 線段數 (E): 6
 $V - E + F = 2$



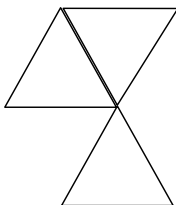
頂點數 (V): 4
 分割之平面數 (F): 3
 線段數 (E): 5
 $V - E + F = 2$



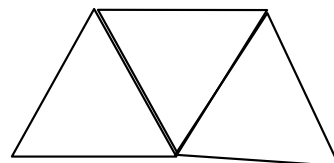
頂點數 (V): 8
 分割之平面數 (F): 4
 線段數 (E): 10
 $V - E + F = 2$



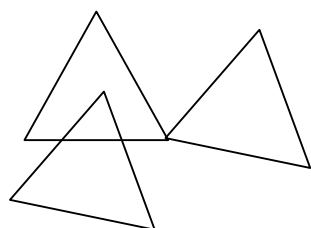
頂點數 (V): 7
 分割之平面數 (F): 4
 線段數 (E): 9
 $V - E + F = 2$



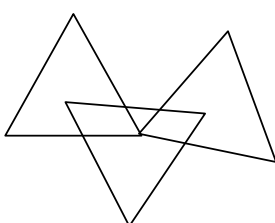
頂點數 (V): 6
 分割之平面數 (F): 4
 線段數 (E): 8
 $V - E + F = 2$



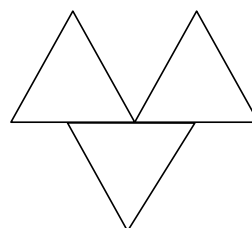
頂點數 (V): 5
 分割之平面數 (F): 4
 線段數 (E): 7
 $V - E + F = 2$



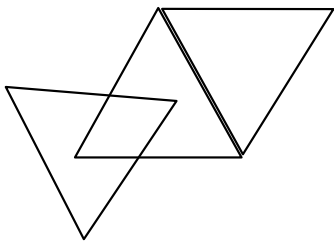
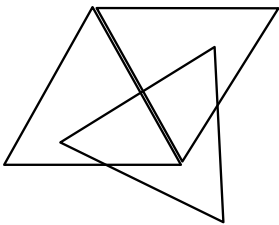
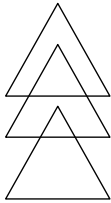
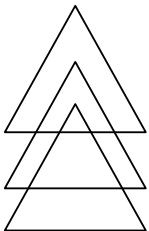
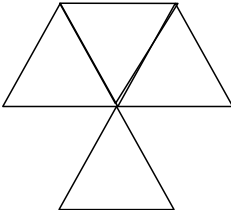
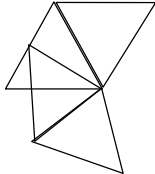
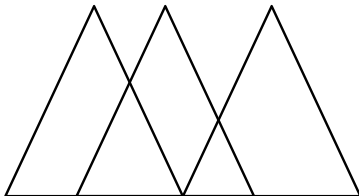
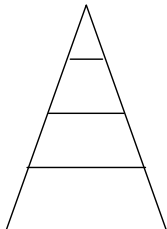
頂點數 (V): 10
 分割之平面數 (F): 5
 線段數 (E): 13
 $V - E + F = 2$



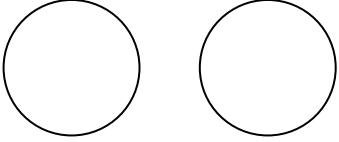
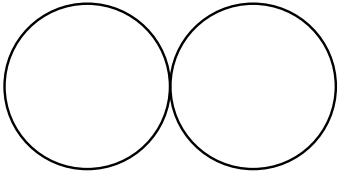
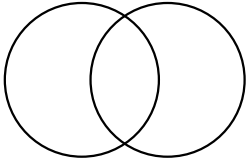
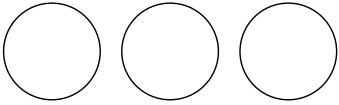
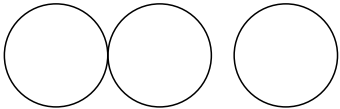
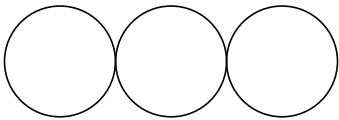
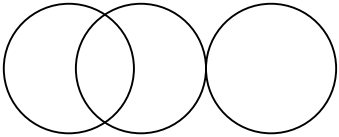
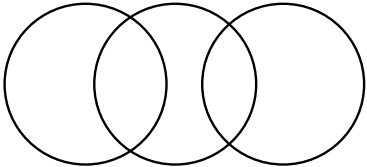
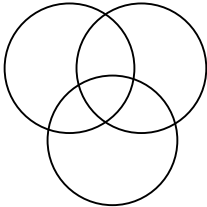
頂點數 (V): 12
 分割之平面數 (F): 7
 線段數 (E): 17
 $V - E + F = 2$



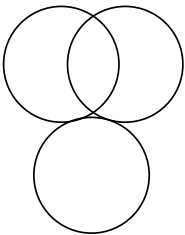
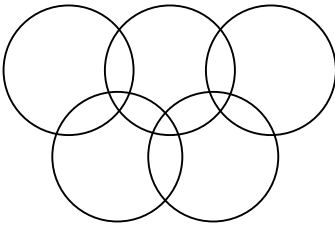
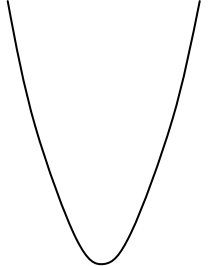
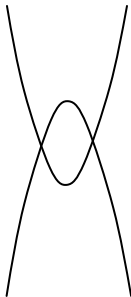
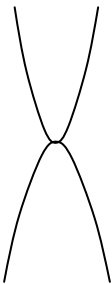
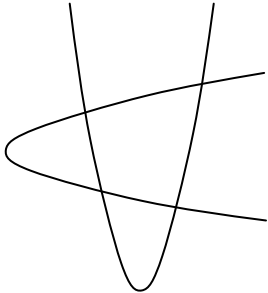
頂點數 (V): 8
 分割之平面數 (F): 4
 線段數 (E): 10
 $V - E + F = 2$

 頂點數 (V) : 9 分割之平面數 (F) : 5 線段數 (E) : 12 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V) : 10 分割之平面數 (F) : 6 線段數 (E) : 14 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V) : 13 分割之平面數 (F) : 6 線段數 (E) : 17 $V - E + F = 2$
 頂點數 (V) : 15 分割之平面數 (F) : 8 線段數 (E) : 21 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V) : 7 分割之平面數 (F) : 5 線段數 (E) : 10 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V) : 8 分割之平面數 (F) : 7 線段數 (E) : 13 $V - E + F = 2$
 頂點數 (V) : 10 分割之平面數 (F) : 6 線段數 (E) : 14 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V) : 12 分割之平面數 (F) : 7 線段數 (E) : 17 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V) : 9 分割之平面數 (F) : 5 線段數 (E) : 12 $V - E + F = 2$

三、圓形分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣：

 頂點數 (V): 0 分割之平面數 (F): 3 線段數 (E): 2 $V - E + F = 1$	 頂點數 (V): 1 分割之平面數 (F): 3 線段數 (E): 2 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V): 2 分割之平面數 (F): 4 線段數 (E): 4 $V - E + F = 2$
 頂點數 (V): 0 分割之平面數 (F): 4 線段數 (E): 3 $V - E + F = 1$	 頂點數 (V): 1 分割之平面數 (F): 4 線段數 (E): 3 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V): 2 分割之平面數 (F): 4 線段數 (E): 4 $V - E + F = 2$
 頂點數 (V): 3 分割之平面數 (F): 5 線段數 (E): 6 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V): 4 分割之平面數 (F): 6 線段數 (E): 8 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V): 6 分割之平面數 (F): 8 線段數 (E): 12 $V - E + F = 2$

四、圓形分割（二）及拋物線分割平面的相關問題及尤拉定理的推廣。

 頂點數 (V): 4 分割之平面數 (F): 6 線段數 (E): 8 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V): 13 分割之平面數 (F): 16 線段數 (E): 27 $V - E + F = 2$	 頂點數 (V): 0 分割之平面數 (F): 2 線段數 (E): 1 $V - E + F = 1$
 頂點數 (V): 2 分割之平面數 (F): 5 線段數 (E): 6 $V - E + F = 1$	 頂點數 (V): 1 分割之平面數 (F): 4 線段數 (E): 4 $V - E + F = 1$	 頂點數 (V): 4 分割之平面數 (F): 7 線段數 (E): 10 $V - E + F = 1$

伍、研究結果討論

一、直線分割平面的討論。

N 條直線分割平面	3	4	5	6	N
分割之最大平面數	7	11	16	22	$\frac{n^2 + n + 2}{2}$
封閉區間最大數	1	3	6	10	$\frac{n^2 + n + 2}{2} - 2n$
最大三角形數	1	2	4	7	$\leq \frac{n(n-2)}{3}$

(一) 我們發現只要三線共點的狀況或是含有一組平行線，封閉面數就會少 1，若是三線共點加一組平行線，封閉面數就會少 2，餘類推。所以就會導致分割之最大平面數跟著減少。

(二) 無論是何種情況，直線分割平面之尤拉定理均是 $V - E + F = 1$ ，沒有例外。

所以我們可依此推算直線能夠分割出平面之最大面數（當然不含三線共點以及平行線組），推算如下：

如果這 n 條直線任二直線必相交，任三條直線不共點，則此 n 條直線必有 $C(n, 2)$ 個交點，因此 $V = C(n, 2)$ ，又每條直線都會與其他直線都會相交，因此這條直線上共有 $n-1$ 個交點，這條直線被分成 n 段，因此 $E = n^2$ ，利用尤拉公式 $F = 1 - V + E$ 可知

$$F = 1 - C(n, 2) + n^2 = 1 - \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

(三) 接下來我們看看能夠分割出三角形的最大個數，我們發現平行線組及三線共點組會影響三角形之最大個數（可能增加或減少），於是我們做了以下推論：

1、三角形區域個數的上界：假設 a 為三角形數，所以三角形總邊數為 $3a$ ，另一方面由於每個邊都是基本線段，而每條直線上會被其他 $n-1$ 條直線相交出 $n-1$ 個交點（最多的情況下），扣掉頭尾延伸的線段只剩 $n-2$ 個基本線段，而 n 條直線共有 $n(n-2)$ 條線段，所以： $3a \leq n(n-2) \Rightarrow a \leq \frac{n(n-2)}{3}$ 。

2、三角形區域個數的下界：

若 n 條直線彼此平行或是共點，三角形數目是 0，但無討論的價值，所以討論的前提是三線不共點及沒有平行線組的情況下。假設直線 ℓ 與另外 $n-1$ 條直線的交點依次為 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ，基本線段 $A_i A_{i+1}$ ，與過 A_i, A_{i+1} 的直線圍成三角形 $\triangle BA_i A_{i+1}$

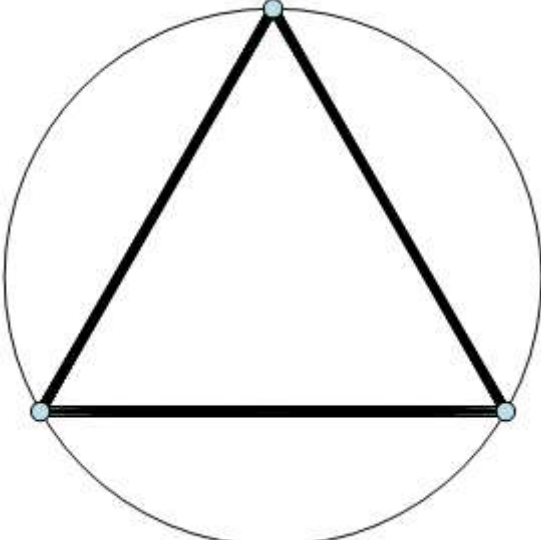
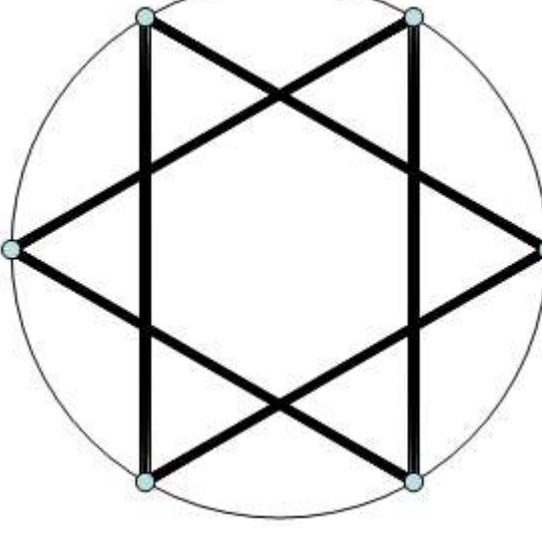
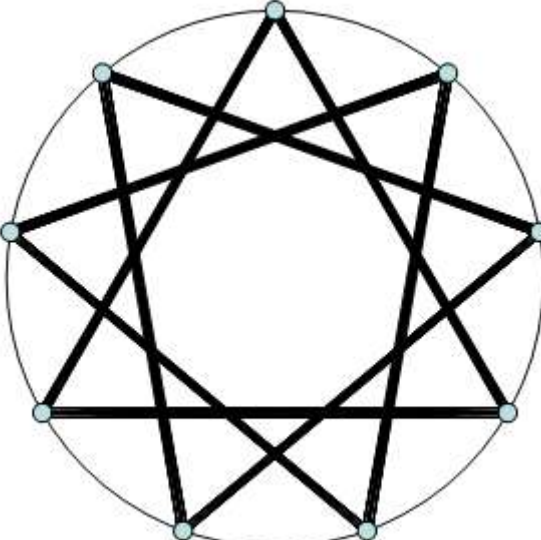
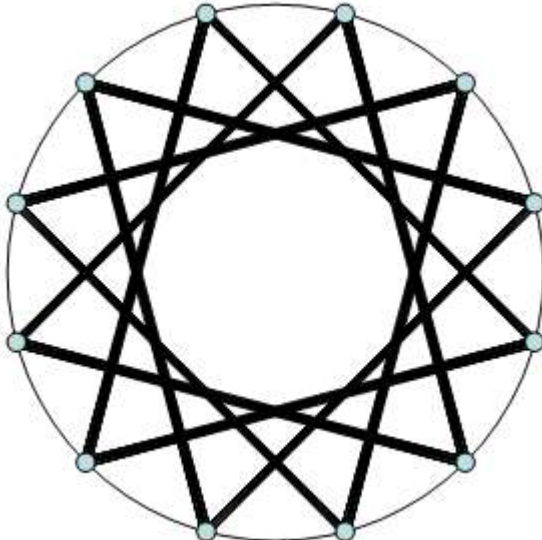
($1 \leq i \leq n-2$)，任意直線穿過這個三角形將它分成兩塊時，仍有一塊為三角形區域，因此在整個構圖中每個 $\triangle BA_i A_{i+1}$ 都有三角形區域，所以三角形最小的數目 $a \geq n-2$ 。

二、三角形分割平面的討論。

(一) 無論是何種情況，均符合尤拉定理： $V - E + F = 2$ ，沒有例外。

(二) 探討三角形可以分割的最大平面數，我們作以下的討論：

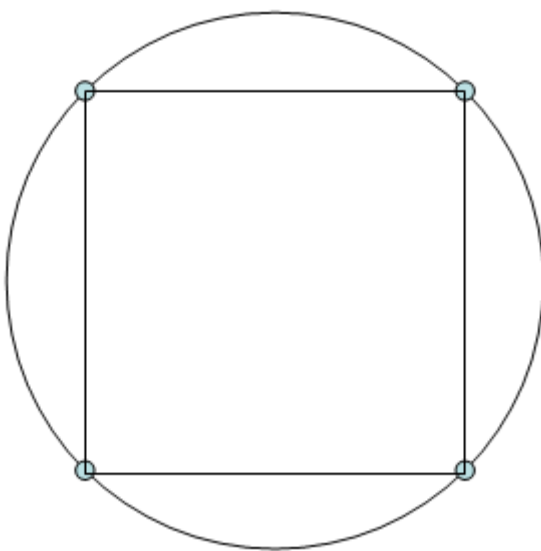
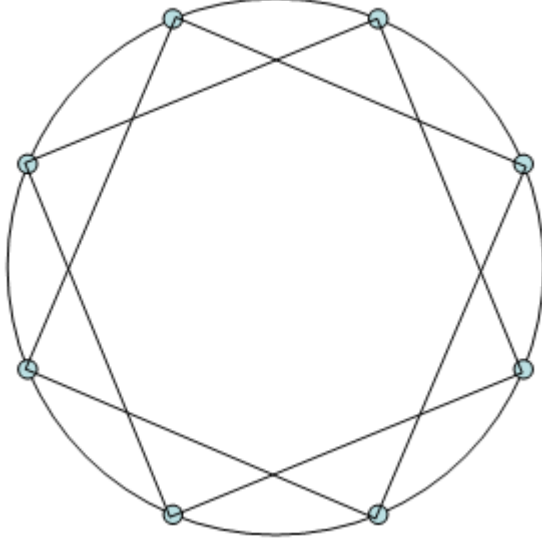
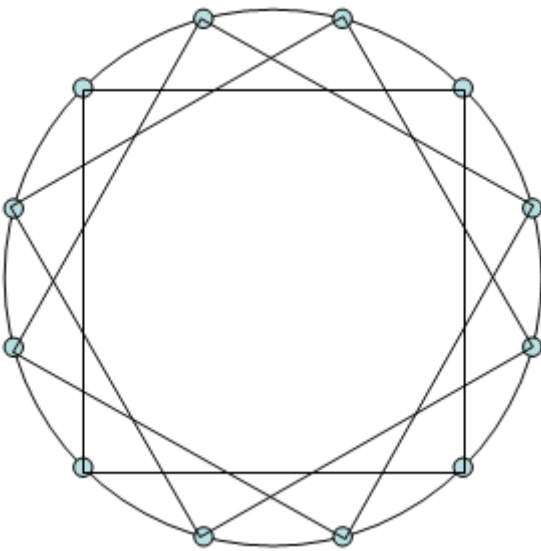
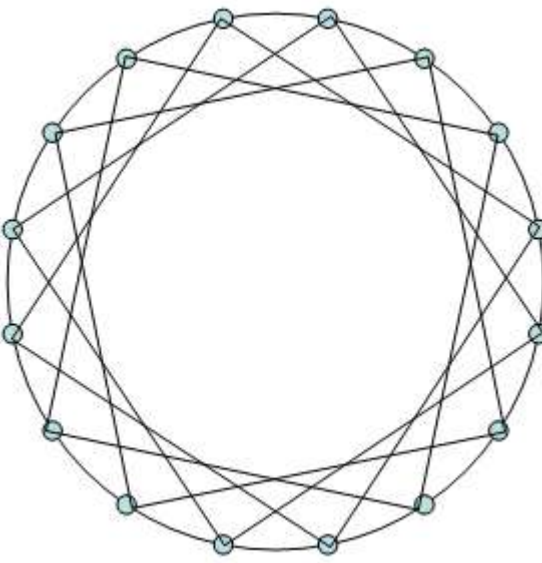
我們假設平面空間以一個圓作討論，在圓內分別作 N 個正三角形，當然要得到最大的分割面積數，我們可以將欲作三角形的總頂點數（ $3 \times n$ ）分別在圓上找出等分點，畫出的圖形較為整齊，如下表。（在此作正多邊形的目的是便於觀察分割數目，事實上三角形可以使用非正三角形，以下探討的其他多邊形亦然）

	
平面分割數：2	平面分割數：8
	
平面分割數：20	平面分割數：38

公式推導：

三角形數	1	2	3	4	N
平面分割數	2	8	20	38	
數字分析	2	2+6	8+6+6	20+6+6+6	
	2	2+6	2+6+6+6	2+6+6+6+6+6	
	2	2+6×1	2+6×3	2+6×6	
	2	2+3×2×1	2+3×2×3	2+3×2×6	$2+3 \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$ $= 2+3 \times n(n-1)$

接下來我們再看看若以四邊形爲主角分割平面會是怎樣的情況：

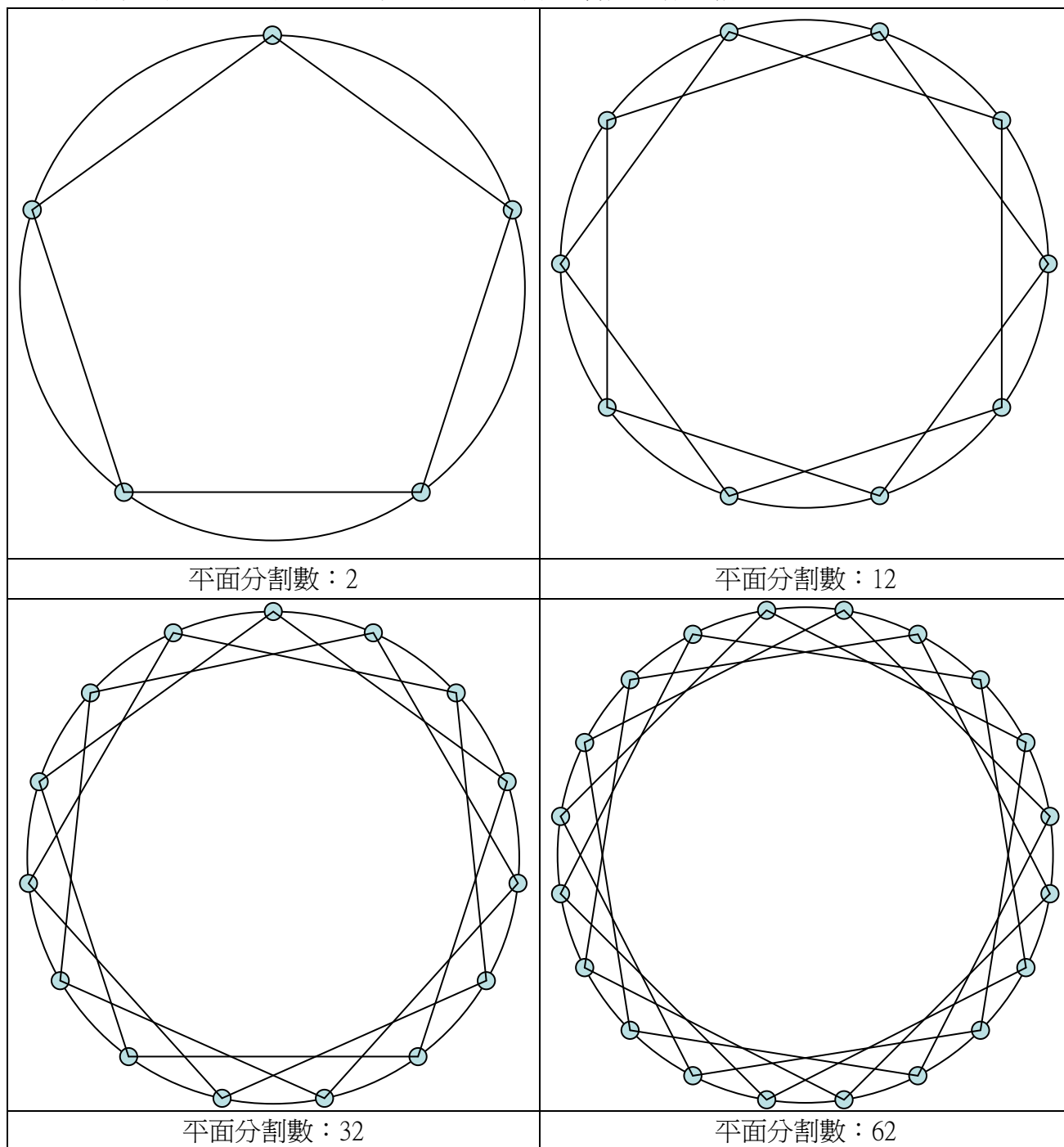
	
平面分割數：2	平面分割數：10
	
平面分割數：26	平面分割數：50

公式推導：

四邊形數	1	2	3	4	N
平面分割數	2	10	26	50	
數字分析	2	$2+8 \times 1$	$2+8 \times 3$	$2+8 \times 6$	
	2	$2+4 \times 2 \times 1$	$2+4 \times 2 \times 3$	$2+4 \times 2 \times 6$	$2+4 \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$ $=2+4 \times n(n-1)$

綜合以上推論，n 個 m 邊形分割平面最大數為： $2+m \times n(n-1)$ 。

接下來我們再看看若以五邊形爲主角分割平面會是怎樣的情況：



公式推導：

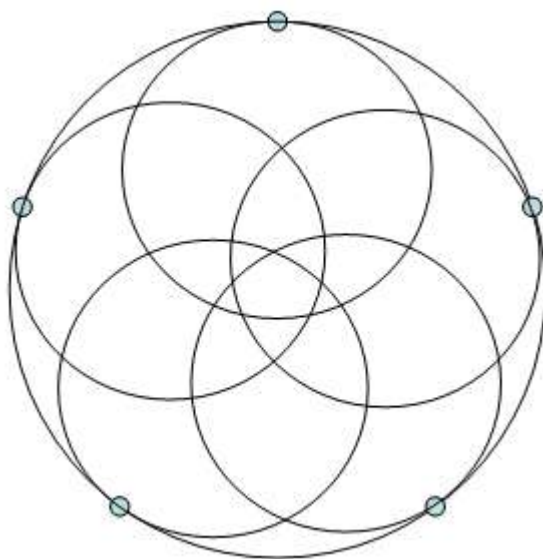
四邊形數	1	2	3	4	N
平面分割數	2	12	32	62	
數字分析	2	$2+5 \times 2$	$2+5 \times 6$	$2+5 \times 12$	
	2	$2+5 \times 2 \times 1$	$2+5 \times 2 \times 3$	$2+5 \times 2 \times 6$	$2+5 \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2}$ $= 2+5 \times n(n-1)$

綜合以上推論，n 個 m 邊形分割平面最大數爲： $2+m \times n(n-1)$ 。

（欲做出最大分割數不可以出現三線共點的情況）

三、圓形分割平面的討論。

- (一) 若有 n 個圓分割平面，若此 n 個圓皆兩兩外離，則尤拉定理為 $V-E+F=1$ ，其餘為 $V-E+F=2$ 。
- (二) 如欲找出最大分割數，必須圓與圓兩兩相交，不可有外離之情況，也不可出現三線共點之情況，所以應用 $V-E+F=2$ 來推導， $V-E+F=2 \rightarrow F=2+E-V$ ，交點方面 (V) 對一個圓而言，每多一個圓與它相交，就會多 2 個頂點，所以 n 個圓相交的話，對一個圓而言共有 $2(n-1)$ 個交點，而圓與圓之間交點是共用的，所以 n 個圓相交共有 $2(n-1) \times n \div 2 = n(n-1)$ 個交點；線段方面 (E)， n 個圓相交的話，對一個圓而言共有 $2(n-1)$ 條線段，所以 n 個圓相交共有 $2(n-1) \times n = 2n(n-1)$ 個線段。所以最大分割平面數 $F=2+2n(n-1)-n(n-1)=n^2-n+2$ 。
- 像奧運五圈標誌畫出來只有 16 面數，而五圈最大面數應為 $5^2-5+2=22$ 個面，其圖形如下：

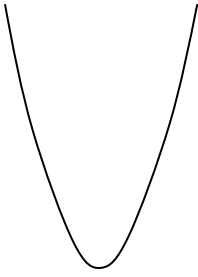
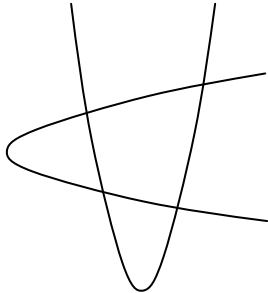
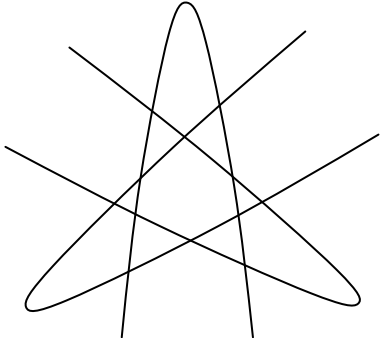
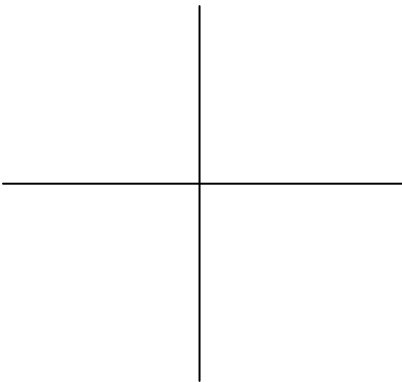
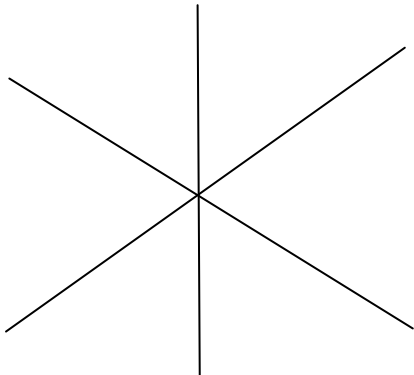
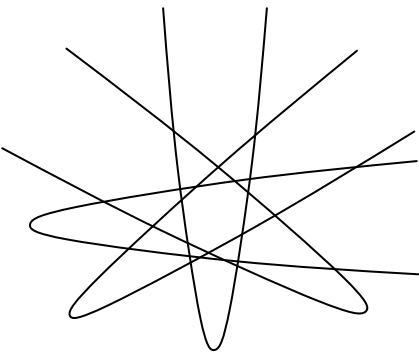
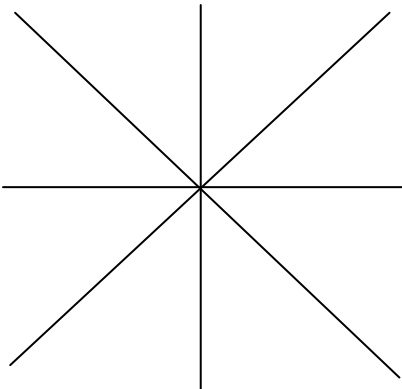


其劃法類似以正五邊形為頂點作五圓的相交：平面數為： $2+4 \times 5=22$ 個平面。

如欲做出不同圈數的最大平面分割可採用類似方法。

四、拋物線分割平面的討論。

無論何種情況，尤拉定理均為 $V-E+F=1$ 。且若要獲得最大的平面分割數，我們發現拋物線必須兩兩彼此有四個交點才能得到最大的平面數，其圖形如下：

 頂點數 (V): 0 分割之平面數 (F): 2 線段數 (E): 1 $V - E + F = 1$	 頂點數 (V): 4 分割之平面數 (F): 7 線段數 (E): 10 $V - E + F = 1$	 頂點數 (V): 12 分割之平面數 (F): 16 線段數 (E): 27 $V - E + F = 1$
上圖拋物線主軸相交情形	上圖拋物線主軸相交情形	上圖拋物線主軸相交情形
 對角線交角: 180^0	 對角線交角: 90^0	 對角線交角: 60^0
 頂點數 (V): 24 分割之平面數 (F): 29 線段數 (E): 52 $V - E + F = 1$	左圖拋物線主軸相交情形  對角線交角: 45^0	

公式推導：

拋物線數	1	2	3	4	N
交點數 V	0	4	12	24	$2n(n-1)$
數字分析	0	4×1	4×3	4×6	$4 \times \frac{n(n-1)}{2} = 2n \times (n-1)$
線段數 E	1	10	27	52	$(4n-3) \times n$
數字分析： $E \div \text{拋物線數}$	1	5	9	13	$4n-3$

由拋物線的尤拉定理可知 n 條拋物線可以將平面分割之最大面數 $F = 1 - V + E$
 $= 1 - 2n(n-1) + (4n-3) \times n = 1 - 2n^2 + 2n + 4n^2 - 3n = 2n^2 - n + 1$ 。

另外我們發現若欲畫出更多條拋物線的分割平面圖形，可以參考這樣的方式，就是將此 n 條拋物線的主軸相交於一點，然後主軸間的角度為 $(180 \div n)^0$ ，就可畫出較完美的圖形。

陸、結論

一、直線分割平面：

(一) 尤拉定理：均為 $V - E + F = 1$ 。

(二) 最大分割平面數： $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ 。

(三) 最大三角形數 a ： $n-2 \leq a \leq \frac{n(n-2)}{3}$ 。

二、三角形分割平面：

(一) 尤拉定理： $V - E + F = 2$ 。

(二) 最大分割平面數： n 個 m 邊形分割平面最大數為： $2 + m \times n(n-1)$ 。

三、圓形分割平面：

(一) 尤拉定理：若圓與圓兩兩外離，則 $V - E + F = 1$ ，其餘為 $V - E + F = 2$ 。

(二) 最大分割平面數： $n^2 - n + 2$ 。

四、拋物線分割平面：

(一) 尤拉定理： $V - E + F = 1$ 。

(二) 最大分割平面數： $2n^2 - n + 1$ 。

柒、參考資料

宋秉信（民 87）。從尤拉公式到空間的平面分割。數學傳播季刊，第 22 卷第 3 期。

取自：<http://www.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=223>

【評語】 030404

1. 偏遠地區學生，獨自努力完成此作品，值得肯定。
2. 三角形分割平面，頂點定義不明確。
3. 類似尤拉公式並無證明。
4. 三角形區域個數上界估計不夠精確。
5. 表達能力要再加強。