中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030401

先左腳再右腳

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二　董伊庭	王世宏
國二　童筱絜	林耀南
國二　李佩璇	

關鍵詞：　斐波納契數列、修正值數列、自走砲車

先左腳再右腳

摘要：

本文將斐波納契數列中可無限繁殖的兔子改成加上繁殖一定數量後，母兔會死亡的變因，這形成了新的 Di 數列，Di 數列和盧卡斯數列一樣具有斐氏數列的核心概念，不過比起盧卡斯數列和斐氏數列的線性關係來說，Di 數列和斐氏數列有著更複雜的非線性關係。本文利用作者獨創的『自走砲車，交互運算』模式建立了各 Di 數列和斐氏數列之間的關係式，並經由各 Di 數列及 Ci 修正值數列間的比較，找到一個相較起來較爲精簡的公式，利用這精簡的公式可迅速的從 F(巨大項)的值算出 F(兩倍巨大項)的值，遠遠縮短了從前計算 F(兩倍巨大項)之值的時間。

註：Di 表示一隻兔子繁殖 i 次後死亡

Ci 表示各 Di 與 F 之交互運算式之修正值

壹、研究動機：

在一篇有關「兔子農場」的文章中，我們認識了所謂斐波納契數，我們也發現這個數列被廣泛的探討過，且持續有人發現新東西，可見這數列一定還有很多寶藏可以去發覺。若兔子數量隨著繁殖而能無限增長，兔子永遠不死，這似乎不太合理，又這斐波納契數列的後一項都要靠前兩項相加而來，也似乎不太科學，我們想要探討的是一種一面繁殖一面死亡的數列和一個可跳躍式計算後幾項的斐波納契數列的計算方法。

貳、研究目的：

1. 創造加上死亡變因類似斐氏數列的新數列(Di 數列)。
2. 探討斐氏數列和各 Di 數列之間的關係。
3. 利用修正值 Ci，建立各 Di 數列和斐氏數列之間的關係式。
4. 比較前項之各關係式，取得最精簡且方便的公式，用於跳躍式計算斐氏數列遙遠處的某一項。

參、研究過程：

一、 加上死亡變因的兔子繁殖數列說明

假設每一隻長大再繁殖的兔子都會在繁殖 N 隻(其他數量見研究日誌)後死亡，在這條件下，斐氏數列有何變化？有何規律？爲了回答這問題我們只能先土法煉鋼，從一隻(或一對)兔子每隔一個月繁殖一次開始，繁殖過程如下：

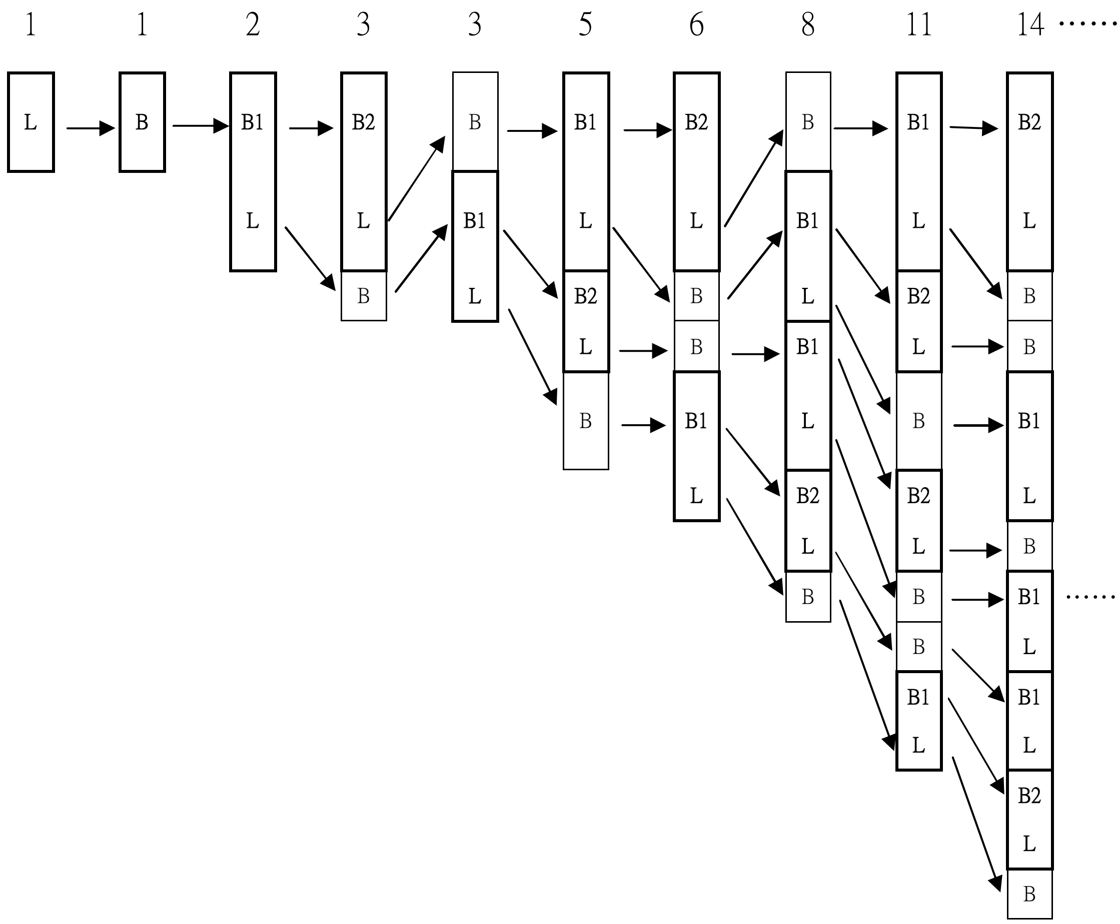
定義：

B -- Big rabbit

L -- Little rabbit

Bi --生了第 i 胎之後的大兔子

以 N=2 爲例（即生完兩胎後隨即死亡的數列），繁殖過程如下：



我們獲得一個新數列如下： 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8, 11, 14, 19, 25, 33, 44, 58⋯

觀察這個數列，從第二項起，「連續兩項的和即為下下項的值」。

同理，我們也創造出繁殖三隻、四隻⋯後死亡的新數列，如下：

N= 3 時，新數列為： 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 14 , 21 , 30 , 45 , 65 , 96……

N= 4 時，新數列為： 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 11 , 18 , 27 , 42 , 64 , 98 ,151……

同樣的觀察這些數列會發現，從第二項起，「連續三項、四項的和即為下下項的值」，這些數列和原來的斐氏數列有顯著的不同。

二、定義名詞

(一)斐氏數列 F：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21…… 。

(二)Di 數列：在繁殖 i 隻後死亡的類似斐氏數列。

(三)F(n)：斐氏數列的第 n 項。

(四)D2(n)：繁殖兩隻後立即死亡的數列第 n 項。

(五)D3(n)：繁殖三隻後立即死亡的數列第 n 項。

(六)D4(n)：繁殖四隻後立即死亡的數列第 n 項。

(七)Di (n)：繁殖 i 隻後立即死亡的數列第 n 項。

三、探討 Di 數列與 F 數列之間的相關性

由於各 Di($i \geq 2$)數列的後面項都是由前面幾項加總起來的，因此後面的項都會越向後擴散越大，因此在某個有限項之後 Di 數列和 F 數列幾乎不可能有共同項，但我們好奇的

是這兩個數列之間是否有什麼關聯性？最好是我們能在這兩個數列上找到一個函數關係式，讓我們藉由這關係式能由 Di 數列算出 F 數列的值，我們的研究方法如下：
觀察數學家(Lucas)盧卡斯的數列和 F 數列

F： 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ⋯ ⋯ ⋯
L： 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76 ⋯ ⋯

盧卡斯發現這兩個數列之間有著非常漂亮的函數關係式：

$$F(n) = \frac{2L(n)+L(n-3)}{5} \text{，} (n \geq 4)$$

這個關係式在當時歐洲非常的出名，最後就命名為 Lucas 數列。

由這個關係式給了我們極大的啓發，我們的 Di 數列和 F 數列之間的關係式是不是也長這樣，或有更特別之處。由於 Lucas 數列和 F 數列的關係式看起來像線型函數，因此我們準備用聯立方程式來試探它，以 D3 數列為例：

F ：1, 1, 2, 3, 5 | , 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ⋯ ⋯ ⋯
D3 ：1, 1, 2, 3, 5 | , 6, 10, 14, 21, 30, 45, 65, 96 ⋯ ⋯ ⋯

先從第六項開始(避開共同項)，且因為是 D3，所以取 3 項一節，只用 a . b . c 三個未知數，製造一組聯立方程式如下：

$$\begin{cases} D3(6)\,a + D3(7)\,b + D3(8)\,c = F(9) \\ D3(7)\,a + D3(8)\,b + D3(9)\,c = F(10) \\ D3(8)\,a + D3(9)\,b + D3(10)\,c = F(11) \end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases} 6a + 10b + 14c = 34 \text{———} (1) \\ 10a + 14b + 21c = 55 \text{———} (2) \\ 14a + 21b + 30c = 89 \text{———} (3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1)\times 5 \\ (2)\times 3 \end{matrix} \begin{cases} 30a + 50b + 70c = 170 \\ 30a + 42b + 63c = 165 \end{cases}$$

相減消去 a，得 $8b + 7c = 5$ ——— (4)

$$\begin{matrix} (2)\times 7 \\ (3)\times 5 \end{matrix} \begin{cases} 70a + 98b + 147c = 385 \\ 70a + 105b + 150c = 445 \end{cases}$$

相減消去 a，得 $7b + 3c = 60$ ——— (5)

$$\begin{matrix} (4)\times 7 \\ (5)\times 8 \end{matrix} \begin{cases} 56b + 49c = 35 \\ 56b + 24c = 480 \end{cases}$$

相減消去 b，得 $25c = -445$，$\therefore\ c = -\frac{89}{5}$ ——— (6)

代回得 $b = \frac{81}{5}$，$a = \frac{101}{5}$。

是一組分數解，將這組分數解套用到下一組 D3 數列上，發現並不成立，無法產生 F 數列的下一項，〔即 F(10)、F(11)、F(12)〕，因此放棄這組解，我們再試其它的組合如下：

$$\begin{cases} D3(6)\,a + D3(7)\,b + D3(8)\,c = F(10) \\ D3(7)\,a + D3(8)\,b + D3(9)\,c = F(11) \\ D3(8)\,a + D3(9)\,b + D3(10)\,c = F(12) \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 6a + 10b + 14c = 55 \text{———} ① \\ 10a + 14b + 21c = 89 \text{———} ② \\ 14a + 21b + 30c = 144 \text{———} ③ \end{cases}$

$\begin{matrix} ① \times 5 \\ ② \times 3 \end{matrix} \begin{cases} 30a + 50b + 70c = 275 \\ 30a + 42b + 63c = 267 \end{cases}$

相減消去 a，得 $8b + 7c = 8$ ——— ④

$\begin{matrix} ② \times 7 \\ ③ \times 5 \end{matrix} \begin{cases} 70a + 98b + 147c = 623 \\ 70a + 105b + 150c = 720 \end{cases}$

相減消去 a，得 $7b + 3c = 97$ ——— ⑤

$\begin{matrix} ④ \times 7 \\ ⑤ \times 8 \end{matrix} \begin{cases} 56b + 49c = 56 \\ 56b + 24c = 776 \end{cases}$

相減消去 b，得 $25c = -720$，$c = -\dfrac{144}{5}$ ——— ⑥

代回得 $b = \dfrac{131}{5}$，$a = \dfrac{327}{10}$，是一組分數解。

但用這組分數解套用到下一組 D3 數列上並不成立，無法產生 F 數列上的下一項，我們也只得放棄這組解，我們就用上述方法一直嘗試錯誤，並拆開分析數列的每一項，大夥兒弄了三個多月一直都找不到方法，挫折感逐漸在組員間擴散，真想放棄算了。我們在 D2、D3、D4 數列間不知轉了多少回，直到有一天組員小董在 D4 數列中找到了一組看起來有用的「整數解」激起大夥兒一陣歡呼，說明如下：

F ：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 1 3 , 2 1 , 3 4 , 5 5 , 8 9 , 1 4 4 ⋯ ⋯ ⋯

D 4 ：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 1 1 , 1 8 , 2 7 , 4 2 , 6 4 , 9 8 ⋯ ⋯ ⋯

先從第六項開始，且因爲是 D4 所以取四位一節，所以取用 a . b . c . d 四個未知數，而最富想像力的概念是「D4 數列中前四項和等於下下項之數」，竟然將這概念移植到 F 數列上去，也就是說，也取 F 數列的下下項爲目標數。詳細過程如下：

$$\begin{cases} D4(6)\cdot a + D4(7)\cdot b + D4(8)\cdot c + D4(9)\cdot d = F(11) \\ D4(7)\cdot a + D4(8)\cdot b + D4(9)\cdot c + D4(10)\cdot d = F(12) \\ D4(8)\cdot a + D4(9)\cdot b + D4(10)\cdot c + D4(11)\cdot d = F(13) \\ D4(9)\cdot a + D4(10)\cdot b + D4(11)\cdot c + D4(12)\cdot d = F(14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 11b + 18c + 27d = 89 \text{———} ① \\ 11a + 18b + 27c + 42d = 144 \text{———} ② \\ 18a + 27b + 42c + 64d = 233 \text{———} ③ \\ 27a + 42b + 64c + 98d = 377 \text{———} ④ \end{cases}$$

$\begin{matrix} ② - ① \\ ④ - ③ \end{matrix} \begin{cases} 3a + 7b + 9c + 15d = 55 \\ 9a + 15b + 22c + 34d = 144 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a + 21b + 27c + 45d = 165 \\ 9a + 15b + 22c + 34d = 144 \end{cases}$$

相減得 $6b + 5c + 11d = 21$ ——— ⑤

$$\begin{matrix} ③ - ① \\ ④ - ② \end{matrix} \begin{cases} 10a + 16b + 24c + 37d = 144 \\ 16a + 24b + 37c + 56d = 233 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 80a + 128b + 192c + 296d = 1152 \\ 80a + 120b + 185c + 280d = 1165 \end{cases}$$

相減得 $8b + 7c + 16d = -13$ ——— ⑥

$$\begin{matrix} ⑤ \times 4 \\ ⑥ \times 3 \end{matrix} \begin{cases} 24b + 20c + 44d = 84 \\ 24b + 21c + 48d = -39 \end{cases}$$

相減，消去 b，得 $c + 4d = -123$ ——— ⑦

爲了取得另一個 c、d 的關係式，我們另外再來一次，

$$\begin{matrix} ② \times 8 \\ ① \times 11 \end{matrix} \begin{cases} 88a + 144b + 216c + 336d = 1152 \\ 88a + 121b + 198c + 297d = 979 \end{cases}$$

相減得 $23b + 18c + 39d = 173$ ——— ⑧

$$\begin{matrix} ⑤ \times 23 \\ ⑧ \times 6 \end{matrix} \begin{cases} 138b + 115c + 253d = 483 \\ 138b + 108c + 234d = 1038 \end{cases}$$

相減得 $7c + 19d = -555$ ——— ⑨

$$\begin{matrix} ⑦ \times 7 \\ ⑨ \end{matrix} \begin{cases} 7c + 28d = -861 \\ 7c + 19d = -555 \end{cases}$$

相減得 $9d = -306$，$d = -34$，$c = 13$

代回上式可得 $b = 55$，$a = 21$

我們發現了一組 **整數解**，更特別的是這四個數似乎原本就有存在 F 數列中，且能一步步往前而命中前方 F 數列的項，一系列探討如下：

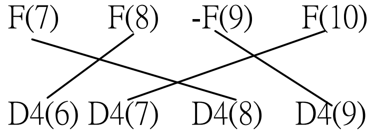
(一) D4 數列和 F 數列之間的關係：

我們將前文的整數解 a=21 , b=55 , c=13 , d= -34 轉換成 F 數列的 a=21=F(8) , b=55=F(10) , c=13=F(7) , d= -34= -F(9)，再依序搭配前文①,②,③,④式中的 D4 數列，並將橫式轉成直式繪圖如下：

觀察①式 $8a + 11b + 18c + 27d = 89$

即爲 D4(6)・F(8)＋D4(7)・F(10)＋D4(8)・F(7)＋D4(9)・〔-F(9)〕= F(11)

轉成直式

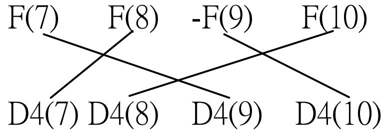


命中 F(11)

圖(一)

同理將②式 D4(7)・F(8)＋D4(8)・F(10)＋D4(9)・F(7)＋D4(10)・〔-F(9)〕= F(12)

轉成直式



命中 F(12)

圖(二)

又將③式　D4(8)・F(8)＋D4(9)・F(10)＋D4(10)・F(7)＋D4(11)・〔-F(9)〕= F(13)

轉成直式　F(7)　F(8)　-F(9)　F(10)

命中 F(13)

D4(8) D4(9)　D4(10) D4(11)

圖(三)

最後將④式 D4(9)・F(8)＋D4(10)・F(10)＋D4(11)・F(7)＋D4(12)・〔-F(9)〕= F(14)

轉成直式　F(7)　F(8)　-F(9)　F(10)

命中 F(14)

D4(9) D4(10) D4(11) D4(12)

圖(四)

從上面這四個直式中，我們有兩件重大的發現，(一) D4 和 F 的搭配呈固定的雙十字交叉型。(二) 固定的四項 F，搭配一步步向前移動的 D4 數列，可以命中越來越遠的 F 數列。

利用聯立方程式的結果，很高興的，只要一直移動 D4 數列，我們就可以命中 F(11)、F(12) 、F(13)、F(14)，不幸的是當再一次移動 D4 數列時，就沒辦法命中 F(15)了，請看下列計算：

F(7)　F(8)　-F(9)　F(10)

D4(10) D4(11) D4(12) D4(13)

⇓

13　21　－34　55

42　64　98　151

圖(五)

42×21 +　64×55 +　98×13　+　151×(-34)　=　542

而 F(15)　=　610　≠　542　　沒有命中

到底為什麼會這樣呢？我們探討了許久，因為 F 數列在圖(一)、圖(二)時已命中 F(11)和 F(12)，如果根據移動對稱性來看，也許圖(三)的命中有另一種可能，因此我們先回復到圖(二)我們嘗試讓 F 數列也「向前移動一步」，因此就有圖(三之一)、圖(四之一)的出現，也那麼「剛好」，F(13) 、F(14) 都被命中。

F(8)　F(9)　- F(10)　F(11)

D4(7) D4(8)　D4(9) D4(10)

⇓

F :　21　34　- 55　89

D 4 :　11　18　27　42

(將圖(二)的 F 數列「向前移動一步」而 D4 數列維持不變)

$$
\begin{array}{r}
11\times\ \ 34 = \quad 374 \\
18\times\ \ 89 = \ \ 1602 \\
27\times\ \ 21 = \quad 567 \\
+)42\times(-55) = -2310 \\
\hline
233
\end{array}
$$

圖(三之一)，取代原圖(三)，同樣命中 F(13) = 233

F(8)　F(9)　- F(10)　F(11)

D4(8) D4(9)　D4(10) D4(11)

⇓

F :　21　34　- 55　89

D 4 :　11　18　27　42

$$
\begin{array}{r}
18\times\ \ 34 = \quad 612 \\
27\times\ \ 89 = \ \ 2403 \\
42\times\ \ 21 = \quad 882 \\
+)64\times(-55) = -3520 \\
\hline
377
\end{array}
$$

圖(四之一)，取代原圖(四)，同樣命中 F(14) = 377

因此**我們發現命中的規律是「每當移動過一次 D4 數列後，就往前移動一次 F 數列」也就是好比我們走路時，先左腳再右腳**，如此反覆移動也都能命中 F(15)、F(16)、F(17)了。

F(9)　F(10)　- F(11)　F(12)

D4(8) D4(9)　D4(10)　D4(11)

⇓

F :　34　55　- 89　144

D 4 :　18　27　42　64

$$
\begin{array}{r}
18\times\ \ 55 = \quad 990 \\
27\times 144 = \ \ 3888 \\
42\times\ \ 34 = \ \ 1428 \\
+)64\times(-89) = -5690 \\
\hline
610
\end{array}
$$

圖(五之一)，取代原圖(五)，命中 F(15) = 610

F(9)　F(10)　- F(11)　F(12)

D4(9) D4(10)　D4(11) D4(12)

⇓

F :　34　55　- 89　144

D 4 :　27　42　64　98

$$
\begin{array}{r}
27\times\ \ 55 = \ \ 1485 \\
42\times 144 = \ \ 6048 \\
64\times\ \ 34 = \ \ 2176 \\
+)\ 98\times(-89) = -8722 \\
\hline
987
\end{array}
$$

圖(六)依規律輪動，能命中 F(16) = 987

F(10)　F(11)　- F(12)　F(13)

D4(9) D4(10)　D4(11)　D4(12)

⇓

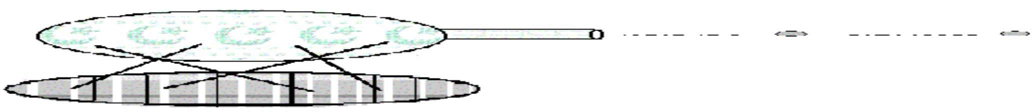
F：55　89　- 144　233

D 4：27　42　64　98

$$
\begin{array}{r}
27 \times \quad 89 = \quad 2403 \\
42 \times \quad 233 = \quad 9786 \\
64 \times \quad 55 = \quad 3250 \\
+)\ 98 \times (-144) = -14112 \\
\hline
1597
\end{array}
$$

圖(七) 依規律輪動，能命中 F(17) = 1597

本來以爲如此下去將能一路順風，那樣的話就太有趣了，因爲這就好比我們擁有一座長程的自走砲車，這砲車能一面前進，一面命中前方遠處敵人的目標，如圖(五之一)、(六)、(七)。這輛自走砲車的假想圖是組員小童設計的，那雙十字交叉的支架撐起了砲塔，非常有趣，見下圖：



自走砲車想像圖(小童設計)

但事與願違，如下圖(八)、(九)、(十)、(十一)，我們就沒命中目標，非常失望。

F：55　89　－144　233　377　610　987　1597　$\boxed{2584}$…

D4：42　64　98　151

$$
\begin{array}{r}
42\times \quad 89 = \quad 3738 \\
64\times \quad 233 = \quad 14912 \\
98\times \quad 55 = \quad 5390 \\
+)151\times(-144) = -21744 \\
\hline
2296
\end{array}
$$

圖(八) 依規律輪動，但和 F(18) = 2584 差 288

F：89　144　－233　377　610　987　1597　2584　$\boxed{4181}$…

D4：42　64　98　151

$$
\begin{array}{r}
6048 \\
24128 \\
8722 \\
+)\ (-35183) \\
\hline
3715
\end{array}
$$

圖(九) 依規律輪動，但和 F(19) = 4181 差 466

F：89　144　－233　377　610　987　1597　2584　4181　$\boxed{6765}$…

D4：64　98　151　231

$$
\begin{array}{r}
9216 \\
36946 \\
13439 \\
+)(-53823) \\
\hline
5778
\end{array}
$$

圖(十) 和 F(20) = 6765 差 987

F： 144 233 －377 610 987 1597 2584 4181 6765 $\boxed{10946}$…

D4： 64 98 151 231

圖(十一) 和 F(21) = 10946 差 1597

14912
59780
21744
+)(- 87087)
9349

依規律輪動 F 和 D4，我們能命中 F(11)至 F(17)，但爲什麼就不能命中 F(18)、F(19)…呢？，還好聽隔壁當過兵的大哥哥說，砲車有時候是需要校正的，也許我們修正一下計算就能夠命中，因此我們回頭觀察圖(八)、(九)、(十)、(十一)的誤差。敘述如下：

圖(八)中，初步算出的值 2296 比目標 2584 少 288，而這 288 恰好等於 2 倍的 144，所以只要把原來－144 × 151 修正成－144 × (151－2) = －144 × 149 立刻就能命中目標了，我們把這組修正值定爲(0 , 0 , 0 ,－2)，其中〝 0 〞表示前三項不必修正，如圖(八之一)。

F：55 89 －144 233 377 610 987 1597 $\boxed{2584}$…

D4：$\boxed{42}$ $\boxed{64}$ $\boxed{98}$ $\boxed{151}$
修正值：(0 , 0 , 0 , －2)
4 2 64 98 149

3738
14912
5390
+)(- 21456)
2584

圖(八之一) 命中 F(18) = 2584

在圖(九)中，初步值爲 3715，比目標值 4181 少 466，而這 466 也恰好等於 2 倍的 233，所以只要把原來－144 × 151 修正成－144 × (151－2) = －144 × 149 也立刻能命中目標。這組修正值也定爲(0 , 0 , 0 ,－2)，如圖(九之一)。

F： 89 144 －233 377 610 987 1597 2584 $\boxed{4181}$…

D4：$\boxed{42}$ $\boxed{64}$ $\boxed{98}$ $\boxed{151}$
修正值：(0 , 0 , 0 , －2)
42 64 98 149

6048
24128
8722
+) (-34717)
4181

圖(九之一) 命中 F(19) = 4181

同理圖(十)的修正值定爲(1 , 1 , 0 ,－2)。
圖(十一)的修正值定爲(1 , 1 , 0 ,－2)。

但這樣每一發砲彈的修正值若沒有規律可預測，必定是一場災難，若能有規律的話才是名符其實的自走砲車，屆時就能隨心所欲的命中目標。爲了找尋修正值規律我們仍以土法煉鋼，繼續往下計算，合併前文取得一連串的修正值如下：

$$\begin{cases} F(7) \quad F(8) \ -F(9) \quad F(10) \\ D4(7)\ D4(8) \quad D4(9) \ \ D4(10) \text{ 修正值}(0,0,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(8) \quad F(9) \ -F(10) \quad F(11) \\ D4(7)\ D4(8) \quad D4(9) \ \ D4(10) \text{ 修正值}(0,0,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(8) \quad F(9) - F(10) \quad F(11) \\ D4(8)\ D4(9)\ \ D4(10)\ \ D4(11)\ \text{修正值}(0,0,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(9) \quad F(10) - F(11) \quad F(12) \\ D4(8)\ D4(9)\ \ D4(10)\ D4(11)\ \text{修正值}(0,0,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(9) \quad F(10) - F(11) \quad F(12) \\ D4(9)\ D4(10)\ \ D4(11)\ D4(12)\ \text{修正值}(0,0,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(10) \quad F(11) - F(12) \quad F(13) \\ D4(9)\ D4(10)\ \ D4(11)\ D4(12)\ \text{修正值}(0,0,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(10) \quad F(11) - F(12) \quad F(13) \\ D4(10)\ D4(11)\ \ D4(12)\ D4(13)\ \text{修正值}(0,0,0,-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(11) \quad F(12) - F(13) \quad F(14) \\ D4(10)\ D4(11)\ \ D4(12)\ D4(13)\ \text{修正值}(0,0,0,-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(11) \quad F(12) - F(13) \quad F(14) \\ D4(11)\ D4(12)\ \ D4(13)\ D4(14)\ \text{修正值}(1,1,0,-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(12) \quad F(13) - F(14) \quad F(15) \\ D4(11)\ D4(12)\ \ D4(13)\ D4(14)\ \text{修正值}(1,1,0,-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(12) \quad F(13) - F(14) \quad F(15) \\ D4(12)\ D4(13)\ \ D4(14)\ D4(15)\ \text{修正值}(2,3,2,-2)\text{或}(1,3,1,-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(13) \quad F(14) - F(15) \quad F(16) \\ D4(12)\ D4(13)\ \ D4(14)\ D4(15)\ \text{修正值}(2,3,2,-2)\text{或}(1,3,1,-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(13) \quad F(14) - F(15) \quad F(16) \\ D4(13)\ D4(14)\ \ D4(15)\ D4(16)\ \text{修正值}(0,10,3,0)\text{或}(2,9,4,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(14) \quad F(15) - F(16) \quad F(17) \\ D4(13)\ D4(14)\ \ D4(15)\ D4(16)\ \text{修正值}(0,10,3,0)\text{或}(2,9,4,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(14) \quad F(15) - F(16) \quad F(17) \\ D4(14)\ D4(15)\ \ D4(16)\ D4(17)\ \text{修正值}(1,18,6,-1)\text{或}(2,17,6,-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(15) \quad F(16) - F(17) \quad F(18) \\ D4(14)\ D4(15)\ \ D4(16)\ D4(17)\ \text{修正值}(1,18,6,-1)\text{或}(2,17,6,-2) \end{cases}$$

$$\vdots$$

由於修正值是隨 D4(n),D4(n+1),D4(n+2),D4(n+3)的變化而改變，因此這串值兩兩相同，也就是說每當自走砲車「先左腳、再右腳」行進時，左腳發射和右腳發射所需要的修正值是一樣的。

定義修正值的符號如下：

C4 (n , a)：其中 a 指 all 即對應 D4(n),D4(n+1),D4(n+2),D4(n+3)的「整串」修正值。

例如 C4(10,a) = (0,0,0,-2) 是對應 D4(10),D4(11),D4(12),D4(13) 的修正值。

C4 (n , i)：i=1,2,3,4 指 C4(n,a)修正值串的第 i 個分量。

例如 C4(10,1) = 0，C4(10,2) = 0，C4(10,3) = 0，C4(10,4) = -2

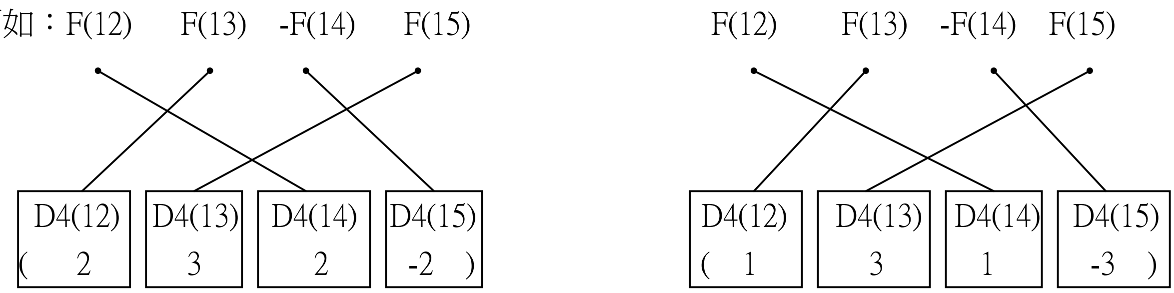
因此上述的修正值串可歸併如下：

C4(7 ,a) = (0, 0, 0, 0)
C4(8 ,a) = (0, 0, 0, 0)
C4(9 ,a) = (0, 0, 0, 0)
C4(10,a) = (0, 0, 0,-2)
C4(11,a) = (1, 1, 0,-2)
C4(12,a) = (2, 3, 2,-2)或(1 , 3, 1,-3)
C4(13,a) = (0,10,3 ,0)或(2 , 9, 4, 0)
C4(14,a) = (1,18,6,-1)或(2,17, 6,-2)

⋮

在推算修正值的過程中，我們發現同一組砲車的修正值竟有兩個以上，例如 C4(12,a) = (2,3,2,-2)或(1,3,1,-3)，但其實進一步觀察這兩組修正值是可以互相轉換的，也就是說對該座砲車的修正量而言是相等的，探討如下：

例如：



修正量= 2×F(13)+3×F(15)+2×F(12)+2×F(14)
= 2×233+3×610+2×144+2×377
= 3338

修正量 = 1×F(13)+3×F(15)+2×F(12)+2×F(14)
= 1×233+3×610+1×144+3×377
= 3338

因此(2,3,2,-2)=(1,3,1,-3)，我們順理成章的認爲(2,3,2,-2) － (1,3,1,-3)= 0，將各分量實際的去減減看，得到一個基本的替換修正值(1,0,1,1)，利用這種方法，我們共找到四個修正值替換的公式：

有 1. (0 ,1 ,1 ,2)
2. (1 ,0 ,1 ,1)
3. (1,-1 ,0,-1)
4. (2,-1 ,1 ,0)

利用這些替換公式，可以將原修正值串改變成另一個新修正值串而不影響砲車命中的目標。這些替換公式可對原修正值串做「加」、「減」或「乘以常數」的運算，而不改變當時的

修正量。仔細觀察這些替換公式也有 F 數列概念，僅這四個基本公式就夠用，因爲每一個公式中皆有一項爲 0 ，這樣當我們不想改變修正值串的某一項時，就可以選用對應的替換公式使用，也因爲只有四項，所以這四個公式當然是夠使用了。

爲了找尋修正值數列的規律，利用替換公式，我們試了好久、好久。

例如： 第四直行 第一直行

都是零 成等差

C4(9 ,a) = (0, 0, 0, 0) → (0, 0, 0 , 0) → (0 , 0, 0 ,0) → (, , ,)
C4(10,a) = (0, 0, 0,-2) → (0, 1, 1 , 0) → (1 , 1, 2 ,1) → (, , ,)
C4(11,a) = (1, 1, 0,-2) → (1, 2, 1 , 0) → (2 , 2, 2 ,1) → (, , ,)
C4(12,a) = (2, 3, 2,-2) → (2, 4, 3 , 0) → (3 , 4, 4 ,1) → (, , ,)
C4(13,a) = (0,10,3, 0) → (0,10 ,3 , 0) → (4 , 8 ,5 ,0) → (, , ,)
C4(14,a) = (1,18,6,-1) → (2,18 ,7 , 0) → (5 ,15,7,-3) → (, , ,)

上面的轉換中我們一直想讓某一直行的值固定，或成等差遞增…等等諸如此類的設計，但一直都找不出規律，直到有一天，同學<u>小璇</u>突發奇想將 D4 概念加入修正值串的第一直行中，再利用二元一次方程式，找到預測修正值的方法了。

結果如下： 第一直行

C4(9 ,a) = (0 , 0 , 0 , 0) → (2 , - 2 , 0 , - 2)
C4(10,a) = (0 , 0 , 0 ,-2) → (2 , - 2 , 0 , - 4)
C4(11,a) = (1 , 1 , 0 ,-2) → (3 , - 3 , -2 , -8)
C4(12,a) = (2 , 3 , 2 ,-2) → (4 , - 4 , -3 ,-14)
C4(13,a) = (0,10 , 3 , 0) → (7 , - 7 , -7, -27)
C4(14,a) = (1,18, 6 , -1) → (11, -11,-13 ,-49)
C4(15,a) = (1,30, 6,-10) → (16,-16 , X , Y)

首先讓 C4(n,1)，即第一直行的「前四項和等於下下項」，再讓 C4(n,2)，即第二直行，成爲 C4(n,1)的相反數，同樣的也具有 D4 概念，此時 C4(n,3)、C4(n,4)就被確定了，但觀察這兩行，一時之間也看不出有何規律，因此我們想用自走砲車來運算看看，首先取 F 數列中連續四項 a , b , a+b , a+2b，搭配 C4(9,a)、C4(10,a)、C4(11,a)…，來試一試它們的修正量變化。

例如：

a b -(a+b) a+2b

2 -2 0 -2

得 2b-2(a+2b)+0a+2(a+b)
= 2b-2a-4b+2a+2b
= 0a+0b

a b -(a+b) a+2b

2 -2 0 -4

得 2b-2(a+2b)+0a+4(a+b)
= 2a+2b

a　　b　-(a+b)　a+2b　　　得 3b-3(a+2b) -2a+8(a+b)

= 3a+5b

3　-3　-2　-8

a　　b　-(a+b)　a+2b　　　得 4b-4(a+2b) -3a+14(a+b)

= 7a+10b

4　-4　-3　-14

a　　b　-(a+b)　a+2b　　　得 7b-7(a+2b) -7a+27(a+b)

= 13a+20b

7　-7　-7　-27

a　　b　-(a+b)　a+2b　　　得 11b-11(a+2b) - 13a+49(a+b)

= 25a+38b

11　-11　-13　-49

a　　b　-(a+b)　a+2b　　　得 16b-16(a+2b) +Xa - Y(a+b)

= (-16+X-Y)a+(-16-Y)b

16　-16　X　Y

現在觀察修正量 a , b 係數：

a 的係數數列為 0 , 2 , 3 , 7 , 13 , 25 , -16+X-Y……

b 的係數數列為 0 , 2 , 5 , 10 , 20 , 38 , -16-Y……

為了配合 D4(n)概念，上面兩數列不夠長，但我們可以加上前面幾組修正值為(0,0,0,0)搭配後得修正量 0a+0b 的式子，因此：

a 的係數數列為 0 , 0 , 0 , 2 , 3 , 7 , 13 , 25 , -16+X-Y ——— ①

b 的係數數列為 0 , 0 , 0 , 2 , 5 , 10 , 20 , 38 , -16-Y ——— ②

由②式發現「前四項的和」必和「下下項」差一個 F 數列的項，例如：

0 + 0 + 0 + 2 + F(6) = 10 , (b 係數數列的第 6 項)

0 + 0 + 2 + 5 + F(7) = 20 , (b 係數數列的第 7 項)

0 + 2 + 5 + 10 + F (8) = 38 , (b 係數數列的第 8 項)

因此令 2 + 5 + 10 + 20 + F(9) = -16-Y , (b 係數數列的第 9 項)

而 F(9) =34，所以 2+ 5+ 10+ 20+ 34 = -16-Y，得 Y= -87———— ③

由①式也發現「前四項的和」必和「下下項」差一個 F 數列的項，例如：

0 + 0 + 0 + 2 + F(5) = 7 , (a 係數數列的第 6 項)

0 + 0 + 2 + 3 + F (6) = 13 , (a 係數數列的第 7 項)

0 + 2 + 3 + 7 + F (7) = 25 , (a 係數數列的第 8 項)

因此令 2 + 3 + 7 + 13 + F(8) = -16+X-Y , (a 係數數列的第 9 項)

而 F(8) = 21，所以 2+3+7+13+21= -16+X-(-87)，得 X=-25———— ④

由③,④我們推得 C4(15,a)=(16,-16,-25,-87)而當我們把原來的 C4(15,a)=(1,30,6,-10) 經過轉換公式轉換後確為(16,-16,-25,-87)，因此我們找到了預測修正值的方法了，敘述如下：

觀察 $|C4(8,3)|+|C4(9,3)|+|C4(10,3)|+|C4(11,3)|+\mathrm{F}(5)=0+0+0+2+5=7=|C4(13,3)|$

$$|C4(9,3)|+|C4(10,3)|+|C4(11,3)|+|C4(12,3)|+\mathrm{F}(6)=0+0+2+3+8=13=|C4(14,3)|$$

$$|C4(10,3)|+|C4(11,3)|+|C4(12,3)|+|C4(13,3)|+\mathrm{F}(7)=0+2+3+7+13=25=|C4(15,3)|$$

歸納得 $|C4(n,3)|+|C4(n+1,3)|+|C4(n+2,3)|+|C4(n+3,3)|+\mathrm{F(n-3)}=|C4(n+5,3)|$

利用此公式可輕易的取得 C4(n,3)的數列，如下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
F(n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	…
C4(n,3)								0	0	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-82	…

同理 $|C4(7,4)|+|C4(8,4)|+|C4(9,4)|+|C4(10,4)|+\mathrm{F}(6)=0+0+2+4+8=14=|C4(12,4)|$

$$|C4(8,4)|+|C4(9,4)|+|C4(10,4)|+|C4(11,4)|+\mathrm{F}(7)=0+2+4+8+13=27=|C4(13,4)|$$

$$|C4(9,4)|+|C4(10,4)|+|C4(11,4)|+|C4(12,4)|+\mathrm{F}(8)=2+4+8+14+21=49=|C4(14,4)|$$

$$|C4(10,4)|+|C4(11,4)|+|C4(12,4)|+|C4(13,4)|+\mathrm{F}(9)=4+8+14+27+34=87=|C4(15,4)|$$

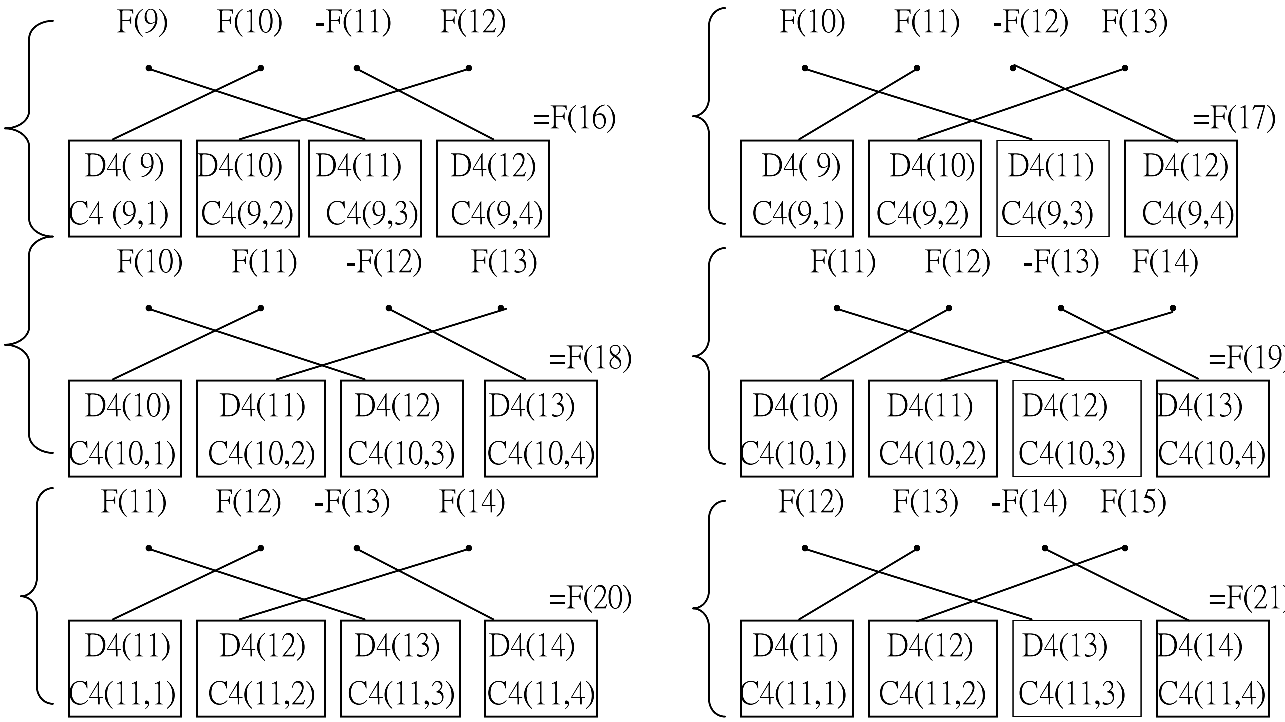
歸納得 $|C4(n,4)|+|C4(n+1,4)|+|C4(n+2,4)|+|C4(n+3,4)|+\mathrm{F(n-1)}=|C4(n+5,4)|$

利用此公式可輕易取得 C4(n,4)的數列，如下表：

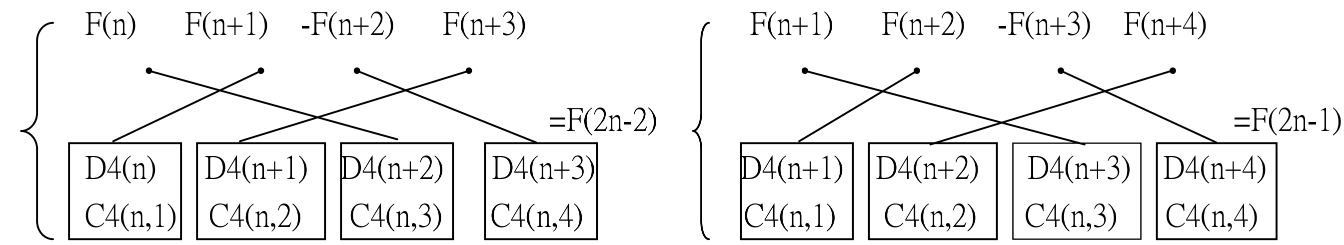
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
F(n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	…
C4(n,4)							0	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-87	-153	…

既然 D4 的修正值數列規律已找到，我們的 D4 自走砲車必然可勇往直前走到無限遠處，也因爲自走砲車是一左、一右交互前進，因此這砲車的「射擊公式」必須分成奇、偶兩式，敘述如下：

觀察　　　命中 F(偶數項)　　　　　命中 F(奇數項)



歸納得　　　　　　　　歸納得



將上面兩座砲車展開後，得到兩個有用的關係式，我們暫稱爲 D4 定理，如下：

D4 定理：

已知　F 數列　：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , 233……

D4 數列　：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 11 , 18 , 27 , 42 , 64 , 98 , 151……

C4(n,1)數列　：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 3 , 4 , 7 , 11 , 1 6……

C4(n,2)數列　：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,- 2 ,- 2 ,- 3 , - 4 , - 7 , - 11 , - 1 6……

C4(n,3)數列　：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , - 2 , - 3 , - 7 , - 13, - 25……

C4(n,4)數列　：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,- 2 , - 4 ,- 8 ,- 14 , - 27 , - 49 , - 87……

則(1)　$[D4(n)+C4(n,1)]\cdot F(n+1)+[D4(n+1)+C4(n,2)]\cdot F(n+3)$

$+[D4(n+2)+C4(n,3)]\cdot F(n)-[D4(n+3)+C4(n,4)]\cdot F(n+2)$

$=F(2n-2)$，$n\geq 7$，n 爲自然數

(2) 〔D4(n)＋C4(n, 1)〕• F(n+2)＋〔D4(n＋1)＋C4(n, 2)〕• F(n＋4)

＋〔D4(n＋2)＋C4(n, 3)〕• F(n+1)－〔D4(n＋3)＋C4(n, 4)〕• F(n＋3)

＝ F(2n-1)，$n \geq 7$ ，n 為自然數

在上面這個定理中，我們發現只要先準備好 D4 和 F 的第 n , n+1 , n+2 , n+3 項及 C4(n,a)修正值就可利用本定理直接算出 F 數列的兩倍遠處的連續兩項 F(2n-1)和 F(2n-2)。根據 F 數列的研究報告，就算用電腦程式去算 F 數列的「兩倍巨大項」時，所需的時間不只是兩倍、三倍…而已，往往電腦要跑上好多天也跑不出來。因此我們這個定理可跳躍式的計算，一定可節省不少時間，雖然要事先準備 Dn 和 Cn 數列，但畢竟這些都比較小，花費時間相對起來一定少很多。

(二)D3 數列和 F 數列之間的關係：

在一開始研究自走砲車的存在性時，對 D3 數列，我們嘗試了好多種列式的可能去尋找 a , b , c 的整數解，但一直都找不出來，最後我們只能寄希望於 D4 的 a , b , c , d，我們發現 D4 數列中的 a , b , c , d 四個整數解，放在 D3 數列竟然也能使用 (詳見研究日誌) ，這自走砲車一步步向前行之後也慢慢需要修正值了，利用轉換公式，我們也將 C3(n,a)的修正值數列規律找了出來，採用與 D4 的相同歸納法，我們獲得 D3 定理。

D3 定理：

已知 F 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , 233……

D3 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 14 , 21 , 30 , 45 , 65 , 96 , 140……

C3(n,1)數列：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 3 , 4 , 7 , 9 , 14 , 20…

C3(n,2)數列：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ,- 2 ,- 2 ,- 3 , - 4 , - 7 , - 9 , - 1 4 , - 2 0…

C3(n,3)數列：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , - 2 , - 3 , - 7 , - 13, - 25 , - 44 , -79…

C3(n,4)數列：0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , - 2 , - 4 , - 8 ,- 14 , - 27 , - 47 , - 83 , - 143, -246…

則 (1) 〔D3(n)＋C3(n, 1)〕• F(n＋1)＋〔D3(n＋1)＋C3(n, 2)〕• F(n＋3)

＋〔D3(n＋2)＋C3(n, 3)〕• F(n)－〔D3(n＋3)＋C3(n, 4)〕• F(n＋2)

＝ F(2n-1)，$n \geq 6$ ，n 為自然數

(2) 〔D3(n)＋C3(n, 1)〕• F(n＋2)＋〔D3(n＋1)＋C3(n, 2)〕• F(n＋4)

＋〔D3(n＋2)＋C3(n, 3)〕• F(n＋1)－〔D3(n＋3)＋C3(n, 4)〕• F(n＋3)

＝ F(2n-2)，$n \geq 6$ ，n 為自然數

(三)D2 數列和 F 數列之間的關係：

由於之前我們曾計算過 D3 的 a . b . c 值皆為分數，針對 D2 我們也曾探討過它的 a . b 值，同樣的也找不到整數值，因此我們大膽的假設，不論是任何一個 Di 數列，也許只有如同 D4 中的 a . b . c . d 四整數可用，事實上利用如同 D4 中的 a,b,c,d 四整數概念我們也讓這輛自走砲車動了起來，走到須要修正值的地方，取得一連串的修正值，再利用轉換公式找出 C2(n,a)數列，並歸納得 D2 定理。

D2 定理：

已知 F 數列： 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144, 233 , 377 …

D2 數列： 1, 1 , 2 , 3 , 3 , 5 , 6 , 8 , 11 , 14 , 19 , 25 , 33 …

C2(n,1)數列： 0 , 0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 9 , 12 , 16⋯， $n \ge 5$
C2(n,2)數列： 0 , 0 , 0 , 0 , - 2 ,- 2 ,- 3 , - 4 , - 5 , - 7 , - 9 , - 12 , - 16⋯， $n \ge 5$
C2(n,3)數列： 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , - 2 , - 3 , - 7 , - 13, - 23 , - 41⋯， $n \ge 5$
C2(n,4)數列： 0 , 0 , 0 , 0 , - 2 ,- 4 , - 8 ,- 14 ,- 25 , - 43 , - 73 , - 123⋯， $n \ge 5$

則 (1) 〔D2(n)＋C2(n , 1)〕‧F(n＋2)＋〔D2(n＋1)＋C2(n , 2)〕‧F(n＋4)
＋〔D2(n＋2)＋C2(n , 3)〕‧F(n＋1)－〔D2(n＋3)＋C2(n , 4)〕‧F(n＋3)
＝ F(2n＋1)， $n \ge 5$ ，n 為自然數

(2) 〔D2 (n)+C2 (n ,1)〕‧F (n+1) +〔D2 (n+1)+C2 (n,2)〕‧F (n+3)
+〔D2 (n+2)+C2 (n,3)〕‧F (n)－〔D2 (n+3) + C2 (n,4)〕‧F (n+2)
= F (2n) ， $n \ge 5$ ，n 為自然數

比較盧卡斯數列及 D2 數列使用於計算 F 數列之方便性，假如要計算 F 數列的第兩百萬項之值時，盧卡斯數列也要算到兩百萬項左右，而 D2 數列只要約算到一百萬項左右，即可透過本定理，算出 F 數列的第兩百萬項。

(四) D5 數列和 F 數列之間的關係：

F : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377⋯
D5: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 19, 31, 48, 76, 119, 187, 293, 461⋯

在算 D5 前，我們想到之前 D2, D3, D4 所代入的砲車是由 4 項 F 數列及 4 項 Dn 數列所組成，我們擔心 D5 要變成由 5 項或 5 項以上的 F 及 Dn 數列組成的砲車，我們的 a , b , c , d 四個整數解不知能否應用在這前五項之和等於下下項的 D5 數列上，不過我們還是決定孤注一擲，代入原砲車，看看是否能繼續使用，算出更遠的 F 數列之項，例如：

F : 21 34 -55 89 ⋯ $\boxed{144}$
正確
D5: 13 19 31 48
圖(十二)

F: 13 21 -34 55 ⋯ $\boxed{233}$
正確
D5: 19 31 48 76
圖(十三)

F : 34 55 -89 144 ⋯ $\boxed{377}$
正確
D5: 19 31 48 76
圖(十四)

F : 34 55 -89 144 ⋯ $\boxed{610}$
正確
D5: 31 48 76 119
圖(十五)

我們發現，雖然代入的是由 4 項 F 及 D5 數列所組成的砲車，但是代入 D5 計算，卻可直接計算出比原先在 D4 中有更多的正確項，如圖(十二) (十三) (十四)(十五)，更多見研究日誌，因此我們的擔心是多餘的，從第 9 個圖開始才需要修正，我們也在取得足夠多的修正值之後，利用轉換公式，導出 C5(n,a)數列，並歸納得 D5 定理。

D5 定理：

已知 F 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , 233 , 377 ⋯
D5 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 19 , 31 , 48 , 76 , 119 , 187 , 293 ⋯
C5(n , 1)數列：0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,2 ,2 ,3 ,4 ,5, 12, 16, 26, 40, 63, 99, 157, 244⋯
C5(n , 2)數列：0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,-2 ,-2 ,-3 ,-4 ,-5, -12, -16, -26, -40, -63,-99, ⋯
C5(n , 3)數列：0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,-2 ,-3 ,-7, -13, -25, -46, -84, -149,-264,⋯
C5(n , 4)數列：0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,-2 ,-4 ,-8 ,-14 ,-25, -50, -87, -156,-273,-476,⋯

則(1) 〔D5(n)＋C5(n , 1)〕• F(n＋1)＋〔D5(n＋1)＋C5(n , 2)〕• F(n＋3)
＋〔D5(n+2)+C5(n , 3)〕• F(n)－〔D5(n+3)+ C5(n , 4)〕• F(n+2)
＝F(2n−3)　$n \ge 8$，n為自然數

(2) 〔D5(n)+C5(n , 1)〕• F(n+2)+〔D5(n+1)+C5(n , 2)〕• F(n+4)
＋〔D5(n+2)+C5(n , 3)〕• F(n+1)－〔D5(n+3)+C5(n , 4)〕• F(n+3)
＝F(2n−2)　$n \ge 8$，n為自然數

使用 D5 定理，一樣可跳躍式計算 F 數列兩倍遠處項，其他關於 D6,D7,D8,D9,D10…等，也都和 D5 一樣有類似的規律，在我們的研究日誌裡都有詳細的研究。

(五)D1 數列和 F 數列之間的關係：

之前之所以先探討 D2,D3,D4,D5 的原因是因我們實在不忍心讓母兔生一胎就死亡且生一胎就死亡在自然界的哺乳動物中沒聽說過有這樣的，但基於數學概念的完整性我們也不得不討論一下，首先我們仍用自走砲車來觀察需要的修正值：

F：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377……

D1：1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2……

F: 2　3　-5　8…$\boxed{13}$
正確
D1: 2　1　2　1
圖(十六) C1(3,a)=(0,0,0,0)

F : 3　5　-8　13…$\boxed{21}$
正確
D1: 2　1　2　1
圖(十七) C1(3,a)=(0,0,0,0)

F: 3　5　-8　3…$\boxed{34}$
差 16
D1: 1　2　1　2
圖(十八) C1(4,a)=(0,0,0,-2)

F : 5　8　-13　21…$\boxed{55}$
差 26
D1: 1　2　1　2
圖(十九) C1(4,a)=(0,0,0,-2)

F: 5　8　-13　21…$\boxed{89}$
差 55
D1: 2　1　2　1
圖(二十) C1(5,a)=(1,2,1,0)

F: 8　13　-21　34…$\boxed{144}$
差 89
D1: 2　1　2　1
圖(二十一) C1(5,a)=(1,2,1,0)

F: 8　13　-21　34…$\boxed{233}$
差 186
D1:1　2　1　2
圖(二十二) C1(6,a)=(0,5,2,0)

F: 13　21　-34　55…$\boxed{377}$
差 301
D1: 1　2　1　2
圖(二十三) C1(6,a)=(0,5,2,0)

F: 13　21　-34　55…$\boxed{610}$
差 536
D1: 2　1　2　1
圖(二十四) C1(7,a)=(0,9,2,0)

F: 21　34　-55　89…$\boxed{987}$
差 843
D1: 2　1　2　1
圖(二十五) C1(7,a)=(0,9,2,0)

F: 21　34　-55　89… $\boxed{1597}$

差 1474

D1: 1　2　1　2

圖(二十六) C1(8,a)=(9,11,9,0)

F :34　55　-89　144… $\boxed{2584}$

差 2385

D1: 1　2　1　2

圖(二十七) C1(8,a)=(9,11,9,0)

蒐集了一連串自走砲車的修正值之後，利用轉換公式，轉換成有規律的修正值。

C1 (3,a)= (0 , 0 , 0 , 0) ⟶ (2 , -2 , 0 , -2)
C1 (4,a)= (0 , 0 , 0 , -2) ⟶ (2 , -2 , 0 , -4)
C1 (5,a)= (1 , 2 , 1 , 0) ⟶ (2 , -2 , -2 , -7)
C1 (6,a)= (0 , 5 , 2 , 0) ⟶ (2 , -2 , -3 , -12)
C1 (7,a)= (0 , 9 , 2 , 0) ⟶ (2 , -2 , -7 , -20)
C1 (8,a)= (9 ,11, 9 , 0) ⟶ (2 , -2 , -11 , -33)

說明：

1. 我們發現 D1 數列中只有兩種數 1 和 2，超乎想像的單純。
2. 我們發現 C1 (n ,1)數列也成 D1 型，即任意一項等於下下項。
3. C1 (n ,1)和 C1 (n ,2)互為相反數且為定值。
4. C1 (n ,3)數列和 F 數列相關：

觀察 C1 (n ,3)數列：0 , -2 , -3 , -7 , -11…
先取絕對值成為：0 , 2 , 3 , 7 , 11…
又 F 數列為：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13…

則 $|C1(5,3)|+F(5)=2+5=7=|C1(7,3)|$

$|C1(6,3)|+F(6)=3+8=11=|C1(8,3)|$ ……

$|C1(7,3)|+F(7)=7+13=20=|C1(9,3)|$

歸納得 $|C1(n,3)|+F(n)=|C1(n+2,3)|$

5. C1 (n ,4)數列也和 F 數列有關：

$|C1(4,4)|+F(6)=4+8=12=|C1(6,4)|$

$|C1(5,4)|+F(7)=7+13=20=|C1(7,4)|$

$|C1(6,4)|+F(8)=12+21=33=|C1(8,4)|$

歸納得 $|C1(n,4)|+F(n+2)=|C1(n+2,4)|$

利用上述 C1(n, i), i=1,2,3,4 的歸納公式，我們製作了一個 n=1,2,⋯⋯30 的 D1,C1 總表，見表(一)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
D1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
C1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
	0	0	0	0	-2	-3	-7	-11	-20	-32	-54	-87	-143	-231	-376
	0	0	-2	-4	-7	-12	-20	-33	-54	-88	-143	-232	-376	-609	-986
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
F	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
D1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
C1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
	-608	-986	-1595	-2583	-4179	-6764	-10944	-17710	-28655	-46367	-75023	-121392	-196416	-317810	-515127
	-1596	-2583	-4180	-6764	-10945	-17710	-28656	-46367	-75024	-121392	-196417	-317810	-514228	-832039	-1346268

表(一)

又經過與 D4 定理一樣的歸納過程，我們獲得一個 D1 定理，敘述如下：

D1 定理：

已知 F 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 1 3 , 2 1 , 3 4 , 5 5 , 8 9 , 1 4 4 , 2 3 3 , 3 7 7 ⋯

D1 數列：1 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 ⋯

C1(n,1)數列：0 , 0 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2⋯

C1(n,2)數列：0 , 0 , -2 , -2 , -2 , -2 , -2 , -2 , -2 , -2⋯

C1(n,3)數列：0 , 0 , 0 , 0 ,-2 , -3 , -7 , -11 , -20 , -32 , -54 , -87 , -143⋯

C1(n,4)數列：0 , 0 , -2 , -4 , -7 , -12 , -20 , -33 , -54 , -88 , -143 , -232⋯

則(1) 〔D1(n)＋C1(n ,1)〕· F(n＋1)＋〔D1(n＋1)＋C1(n ,2)〕· F(n＋3)

＋〔D1(n＋2)＋C1(n ,3)〕· F(n)－〔D1(n＋3)＋C1(n ,4)〕· F(n＋2)

＝ F(2n+1)　　$n \geq 4$ ，n 爲自然數

(2) 〔D1(n)＋C1(n ,1)〕· F(n＋2)＋〔D1(n＋1)＋C1(n ,2)〕· F(n＋4)

＋〔D1(n＋2)＋C1(n ,3)〕· F(n+1)－〔D1(n＋3)＋C1(n ,4)〕· F(n＋3)

＝ F(2n+2)　　$n \geq 4$ ，n 爲自然數

由於 D1 數列的各項數值又小又是定值 1 或 2 且 C1(n,1),C1(n,2)數列也是定值，我們發現用 D1、C1 數列帶入自走砲車計算 F 數列的遠處項相較起來是最方便的，以計算 F(51)、F(52)爲例，我們使用表(一)的資料代入 D1 定理的公式運算一次來驗證：

欲命中 F(51)、F(52)，只要在 D1 定理中取 n=25 即可，此時搭配的 D1 數列爲 D1(25)、D1(26)、D1(27)、D1(28)，而修正值數列爲 C1(25,a)，作法如下：

	F(25)	F(26)	-F(27)	F(28)
	D1(25)	D1(26)	D1(27)	D1(28)
+	C1(25,1)	C1(25,2)	C1(25,3)	C1(25,4)

	F(26)	F(27)	-F(28)	F(29)
	D1(25)	D1(26)	D1(27)	D1(28)
+	C1(25,1)	C1(25,2)	C1(25 ,3)	C1(25,4)

⇓ ⇓

75025 121393 -196418 317811 | 121393 196418 -317811 514229

	2	1	2	1		2	1	2	1
+	2	-2	- 46367	-121393	+	2	-2	- 46367	-121392

計算得： 4×121393-317811- 46365×75025 +121393×196418= 20365011074

計算得：4×196418-514229-46365×121393 +121393×317811=32951280099

檢驗 F(51)= 20365011074

檢驗 F(52)= 32951280099

由於 D1 定理中用到的 D1 數列都是定值 1 或 2，且 C1(n,1)=2, C1(n,2)=-2 也是定值，因此我們應該可以把這 D1 定理做一個更精簡化的整理，這樣也許應用起來更方便。做法如下：

(1) 欲命中 F 奇數項，且 2n+1 的 n 爲奇數時：(即 2n+1=3,7,11…等 4k+3 型)

F(n) F(n+1) -F(n+2) F(n+3)

命中 F(2n+1)

+	D1(n) C1(n,1)	D1(n+1) C1(n,2)	D1(n+2) C1(n,3)	D1(n+3) C1(n,4)

⇓

F(n) F(n+1) -F(n+2) F(n+3)

+	2 2	1 -2	2 C1(n,3)	1 C1(n,4)

$\Rightarrow$ 4F(n+1)－F(n+3)＋$\left[2+C1(n,3)\right]$ · F(n)－$\left[1+C1(n,4)\right]$ · F(n+2)

=4F(n+1)－F(n+3)＋2F(n)－F(n+2)＋C1(n,3) · F(n)－C1(n,4) · F(n+2)

= F(n+1)＋C1(n,3) · F(n)－C1(n,4) · F(n+2)命中 F(2n+1), 2n+1 爲 4k+3 型

因此令 m=2n+1　則 n=$\frac{m-1}{2}$代入上式

得 F(m)=F($\frac{m+1}{2}$)＋C1($\frac{m-1}{2}$,3) · F($\frac{m+1}{2}$)－C1($\frac{m-1}{2}$,4) · F($\frac{m+3}{2}$),m 爲 4k+3 型

(2) 欲命中奇數項且 2n+1 的 n 爲偶數時：(即 2n+1=5,9,13,…等 4k+1 型)

F(n) F(n+1) -F(n+2) F(n+3)

命中 F(2n+1)

+	D1(n) C1(n,1)	D1(n+1) C1(n,2)	D1(n+2) C1(n,3)	D1(n+3) C1(n,4)

⇓

F(n) F(n+1) -F(n+2) F(n+3)

1 2	2 -2	1 C1(n,3)	2 C1(n,4)

$\Rightarrow$ 3F(n+1)+ $\left[1+C1(n,3)\right]$ · F(n)－$\left[2+C1(n,4)\right]$ · F(n+2)

= 3F(n+1)+F(n)－2F(n+2)+ C1(n,3) · F(n)－C1(n,4) · F(n+2)

= F(n+1)－F(n)+C1(n,3) · F(n)－C1(n,4) · F(n+2)

= F(n-1)+ C1(n,3) · F(n)－C1(n,4) · F(n+2)命中 F(2n+1), 2n+1 爲 4k +1 型

因此令 m=2n+1　則 n=$\dfrac{m-1}{2}$代入上式

得 $F(m)=F(\dfrac{m-3}{2})+C1(\dfrac{m-1}{2},3)\cdot F(\dfrac{m-1}{2})-C1(\dfrac{m-1}{2},4)\cdot F(\dfrac{m+3}{2})$,m 爲 4k +1 型

(3)欲命中 F 偶項數且 2n+2 中的 n 爲奇數時：(即 2n+2=4,8,12…等 4k 型)

F(n+1)	F(n+2)	-F(n+3)	F(n+4)
D1(n) C1(n,1)	D1(n+1) C1(n,2)	D1(n+2) C1(n,3)	D1(n+3) C1(n,4)

$\Downarrow$

F(n+1)	F(n+2)	-F(n+3)	F(n+4)
1 2	2 -2	1 C1(n,3)	2 C1(n,4)

$\Rightarrow$ $4F(n+2)-F(n+4)+[2+C1(n,3)]\cdot F(n+1)-[1+C1(n,4)]\cdot F(n+3)$

$=4F(n+2)-F(n+4)+2F(n+1)-F(n+3)+C1(n,3)\cdot F(n+1)-C1(n,4)\cdot F(n+3)$

$=F(n+2)+C1(n,3)\cdot F(n+1)-C1(n,4)\times F(n+3)$命中 F(2n+2), 2n+2 爲 4k 型

令 m=2n+2　則 n=$\dfrac{m-2}{2}$代入上式

得 $F(m)=F(\dfrac{m+2}{2})+C1(\dfrac{m-2}{2},3)\cdot F(\dfrac{m}{2})-C1(\dfrac{m-2}{2},4)\cdot F(\dfrac{m+4}{2})$,m 爲 4k 型

(4)欲命中 F 偶項數且 2n+2 中的 n 爲偶數時：(即 2n+2=6,10,14 等 4k+2 型)

F(n+1)	F(n+2)	-F(n+3)	F(n+4)
D1(n) C1(n,1)	D1(n+1) C1(n,2)	D1(n+2) C1(n,3)	D1(n+3) C1(n,4)

$\Downarrow$

F(n+1)	F(n+2)	-F(n+3)	F(n+4)
1 2	2 -2	1 C1(n,3)	2 C1(n,4)

$\Rightarrow$ $3F(n+2)+[1+C1(n,3)]\cdot F(n+1)-[2+C1(n,4)]\cdot F(n+3)$

$=3F(n+2)+F(n+1)-2F(n+3)+C1(n,3)\cdot F(n+1)-C1(n,4)\cdot F(n+3)$

$=F(n)+C1(n,3)\cdot F(n+1)-C1(n,4)\times F(n+3)$命中 F(2n+2), 2n+2 爲 4k+2 型

令 m=2n+2　則 n=$\dfrac{m-2}{2}$代入上式

得 $F(m)=F(\dfrac{m-2}{2})+C1(\dfrac{m-2}{2},3)\cdot F(\dfrac{m}{2})-C1(\dfrac{m-2}{2},4)\cdot F(\dfrac{m+4}{2})$,m 爲 4k+2 型

例如：　取 m=51,52,53,54

F(51)=F(26)+C1(25,3)・F(26)－C1(25,4)・F(27)=20365011074

F(52)=F(27)+C1(25,3)・F(26)－C1(25,4)・F(28)=32951280099

F(53)=F(25)+C1(26,3)・F(26)－C1(26,4)・F(28)=53316291173

F(54)=F(26)+C1(26,3)・F(27)－C1(26,4)・F(29)=86267571272

肆、討論：

一、歸納 Dn，n=1,2,3,4,5,…得總表(一)。

D1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
D2	1	1	2	3	3	5	6	8	11	14	19	25	33	44	58	77	102	135	179
D3	1	1	2	3	5	6	10	14	21	30	45	65	96	140	206	301	442	647	949
D4	1	1	2	3	5	8	11	15	27	42	64	98	151	231	355	544	835	1281	1965
D5	1	1	2	3	5	8	13	19	31	48	76	119	187	293	461	723	1136	1783	2800
D6	1	1	2	3	5	8	13	21	32	52	82	131	208	331	526	836	1330	2114	3362
D7	1	1	2	3	5	8	13	21	34	53	86	137	220	352	564	903	1446	2315	3708
D8	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	87	141	226	364	585	941	1513	2433	3912
D9	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	142	230	370	597	962	1551	2500	4030
D10	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	231	374	603	974	1572	2538	4097
D11																			

觀察左下三角形數列：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144……逐漸形成斐氏數列，怎麼會這樣呢？

道理是在這 Dn 總表中，可看出當 n→∞時，表示兔子在生値無限多小兔子後才死亡，這意義相當於兔子可無限繁殖而不死亡，因此理論上看來 Dn 當 n→∞時 Dn=F，而我們觀察 Dn 表中左下角△，當 n→∞時，表中的最後一列的數列已變成斐氏數列了，驗證了這概念，真神奇。

二、歸納 Ck(n,1)，k=1,2,3,4,5…，得總表(二)。

C1(n,1)	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
C2(n,1)	0	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49
C3(n,1)	0	2	2	3	4	7	9	14	20	30	43	64	96	137
C4(n,1)	0	2	2	3	4	7	11	16	25	38	59	90	138	212
C5(n,1)	0	2	2	3	4	7	11	18	27	43	67	106	166	261
C6(n,1)	0	2	2	3	4	7	11	18	29	45	72	114	182	289
C7(n,1)	0	2	2	3	4	7	11	18	29	47	74	119	190	305
C8(n,1)	0	2	2	3	4	7	11	18	29	47	76	121	195	313
C9(n,1)	0	2	2	3	4	7	11	18	29	47	76	123	197	318
C10(n,1)	0	2	2	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	320
C11(n,1)													?	

發現表中左下角三角形的數值逐漸被確定，可藉此推出下方一列的 Ck(n,1)數列。

方法是將「對角線」的前兩項相加，即爲對角線的下一項，例如：C11(13,1)=76+123=199

三、歸納 Ck(n,2)，k=1,2,3,4,5⋯，得總表(三)。

C1(n,2)	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
C2(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-5	-7	-9	-12	-16	-21	-28	-37	-49
C3(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-9	-14	-20	-30	-43	-64	-96	-137
C4(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-11	-16	-25	-38	-59	-90	-138	-212
C5(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-11	-18	-27	-43	-67	-106	-166	-261
C6(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-11	-18	-29	-45	-72	-114	-182	-289
C7(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-11	-18	-29	-47	-74	-119	-190	-305
C8(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-11	-18	-29	-47	-76	-121	-195	-313
C9(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-11	-18	-29	-47	-76	-123	-197	-318
C10(n,2)	0	-2	-2	-3	-4	-7	-11	-18	-29	-47	-76	-123	-199	-320
C11(n,2)													?	

發現表中左下角三角形的數值也逐漸被確定，可藉此推出下方一列的 Ck(n,2)數列

方法是將「對角線」的前兩項相加，即為對角線的下一項，例如：C11(13,2)= (-76)+(-123)= -199

四、歸納 Ck(n,3)，k=1,2,3,4,5⋯，得總表(四)。

C1(n,3)	0	-2	-3	-7	-11	-20	-32	-54	-87	-143	-231	-376	-608	-986	-1595	-2583
C2(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-23	-41	-70	-119	-200	-333	-552	-910	-1495	-2449	-4002
C3(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-44	-79	-116	-203	-328	-542	-880	-1450	-2360	-3859
C4(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-82	-146	-255	-443	-762	-1303	-2216	-3750	-6321
C5(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-84	-149	-264	-461	-801	-1381	-2369	-4043	-6872
C6(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-84	-151	-267	-470	-819	-1420	-2447	-4198	-9496
C7(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-84	-151	-269	-473	-739	-1294	-2020	-3433	-5640
C8(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-84	-151	-269	-475	-831	-1447	-2504	-4315	-6794
C9(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-84	-151	-269	-475	-833	-1450	-2513	-4333	-6833
C10(n,3)	0	-2	-3	-7	-13	-25	-46	-84	-151	-269	-475	-833	-1452	-2516	-4342	-6851
C11(n,3)														?		

發現表中左下角三角形的數值也逐漸被確定，可藉此推出下方一列的 Ck(n,3)數列。

方法是將「對角線」的前兩項相加，再依序減去 F 數列中的其中一項，即爲下一項，

例如：C11(14,3)=C9(12,3)+C10(13,3)-F(13)= (-833)+(-1452)-233= - 2518

五、歸納 Ck(n,4)，k=1,2,3,4,5…，得總表(五)。

C1(n,4)	0	-2	-4	-7	-12	-20	-33	-54	-88	-143	-232	-376	-609	-986	-1596	-2583
C2(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-25	-43	-73	-123	-205	-340	-561	-922	-1511	-2470	-4030
C3(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-47	-83	-143	-246	-417	-705	-1183	-1978	-3292	-5462
C4(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-87	-153	-266	-460	-788	-1343	-2277	-3844	-6465
C5(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-89	-157	-276	-480	-831	-1428	-2443	-4159	-7055
C6(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-89	-159	-280	-490	-851	-1471	-2528	-4327	-7376
C7(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-89	-159	-282	-498	-861	-1493	-2573	-4416	-7550
C8(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-89	-159	-282	-496	-865	-1501	-2591	-4455	-7629
C9(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-89	-159	-282	-496	-867	-1505	-2601	-4461	-7672
C10(n,4)	0	-2	-4	-8	-14	-27	-49	-89	-159	-282	-496	-867	-1507	-2607	-4485	-7680
C11(n,4)													?			

發現表中左下角三角形的數値逐漸被確定，可藉此推出更下方的 Ck(n,4)數列。

方法是將「對角線」的前兩項相加，再依序減去 F 數列的其中一項，即爲下一項，

例如：C11(13,4)= C9(11,4)+C10(12,4)-F(12)=(-496)+(-867)-144= -1507

六、比較各個 Dn 在第 n 項命中 F(51)的砲車狀況：

實證(一)D1：F(25)　,　F(26)　, - F(27)　,　F(28)

D1(25)　, D1(26)　, D1(27)　, D1(28)

$C1(25,1)$, $C1(25,2)$, $C1(25,3)$, $C1(25,4)$

$\longrightarrow$ 命中 F(51)

實證(二) D2：F(26) ,　F(27)　, - F(28)　,　F(29)

D2(25) ,　D2(26)　, D2(27)　, D2(28)

$C2(25,1)$, $C2(25,2)$, $C2(25,3)$, $C2(25,4)$

$\longrightarrow$ 命中 F(51)

實證(三)D3：F(26) ,　F(27)　, - F(28)　,　F(29)

D3 (26)　, D3(27)　,D3(28)　,D3(29)

$C3(26,1)$, $C3(26,2)$, $C3(26,3)$, $C3(26,4)$

$\longrightarrow$ 命中 F(51)

實證(四)D4：F(27)，　F(28)　，- F(29)　，　F(30)

D4 (26)　，D4(27)　，D4(28)　，D4(29)

$C4(26,1)$，$C4(26,2)$，$C4(26,3)$，$C4(26,4)$

$\longrightarrow$ 命中 F(51)

實證(五)D5：F(27)，　F(28)　，- F(29)　，　F(30)

D5 (27)　，D5(28)　，D5(29)　，D5(30)

$C5(27,1)$，$C5(27,2)$，$C5(27,3)$，$C5(27,4)$

$\longrightarrow$ 命中 F(51)

實證(六)D6：F(28)，　F(29)　，- F(30)　，　F(31)

D6 (27)　，D6(28)　，D6(29)　，D6(30)

$C6(27,1)$，$C6(27,2)$，$C6(27,3)$，$C6(27,4)$

$\longrightarrow$ 命中 F(51)

實證(七)D7：F(28)，　F(29)　，- F(30)　，　F(31)

D7 (28)　，D7(29)　，D7(30)　，D7(31)

$C7(28,1)$，$C7(28,2)$，$C7(28,3)$，$C7(28,4)$

$\longrightarrow$ 命中 F(51)

⋮

由上述各實證圖表中，不難發現欲命中 F(51)時，以採用 D1 從 F(25)跳躍命中 F(51)，跳躍的最遠。

七、假設我們要計算 F 數列的極遠項，例如 F(512)，則我們大約的計算次序可先 F(16)，再 F(32)，再 F(64)、F(128)、F(256)……配合 Dn 數列 Cn 數列即可命中。當然欲搭配的 Dn、Cn 數列，以選擇 D1、C1 最方便，因它們的數值又小又有些是定值，以下是一個算 F(100)、F(101)的例子，步驟如下:

步驟一：先準備 F(25)~F(28)及 D1(25)~D1(28)和 C1(25, i)，代入自走砲車求出 F(50)、F(51)、F(52)、F(53)。

步驟二：由 D1 總表，取得 D1(50)~D1(53)，其值不是 1 就是 2。

步驟三：由 C1 總表，依總表規律，取得 C1(50,a)。

步驟四：重複步驟一，代入自走砲車，算出 F(100)、F(101)、F(102)、F(103)，建立如下之表，往後一直計算下去，非常方便。

n	1	2	…	25	26	27	…	50	51	52
D1	1	1	…	2	1	2	…	1	2	1
C1(n,1)	0	0	…	2	2	2	…	2	2	2
C1(n,2)	0	0	…	-2	-2	-2	…	-2	-2	-2
C1(n,3)	0	0	…	-46367	-75023	-121392	…	-7778742047	-12586269024	-20365011072
C1(n,4)	0	0	…	-121392	-196417	-317810	…	-12586269024	-20365011073	-32951280098

…	n	100	101	102
…	D1	1	2	1
…	C1(n,1)	2	2	2
…	C1(n,2)	-2	-2	-2
…	C1(n,3)	-218922995834555169026	-354224848179261915074	-573147844013817084099
…	C1(n,4)	-573147844013817084100	-927372692193078999175	-1500520536206896083276

八、採用 D1, C1 搭配自走砲車，將之展開並簡化，我們發現一組命中兩倍遠處項的簡潔公式。

當自走砲車的射擊：

(一) 欲命中 F(m),m=4k 型時

$$F(m)=F(\frac{m+2}{2})+C1(\frac{m-2}{2},3)\cdot F(\frac{m}{2})-C1(\frac{m-2}{2},4)\cdot F(\frac{m+4}{2})$$

(二) 欲命中 F(m),m=4k+2 型時

$$F(m)=F(\frac{m-2}{2})+C1(\frac{m-2}{2},3)\cdot F(\frac{m}{2})-C1(\frac{m-2}{2},4)\cdot F(\frac{m+4}{2})$$

(三) 欲命中 F(m),m=4k+3 型時

$$F(m)=F(\frac{m+1}{2})+C1(\frac{m-1}{2},3)\cdot F(\frac{m-1}{2})-C1(\frac{m-1}{2},4)\cdot F(\frac{m+3}{2})$$

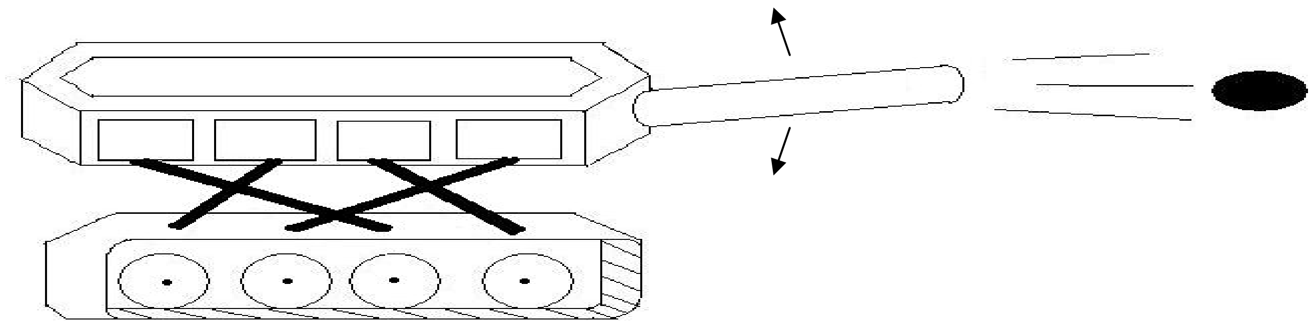
(四) 欲命中 F(m),m=4k+1 型時

$$F(m)=F(\frac{m-3}{2})+C1(\frac{m-1}{2},3)\cdot F(\frac{m-1}{2})-C1(\frac{m-1}{2},4)\cdot F(\frac{m+3}{2})$$

將上式公式與盧卡斯公式比較，雖然我們必須先準備 C1 數列，且不必理會 D1 數列，但明顯的只要準備一半即可，不像盧卡斯數列要準備幾乎相同數量的項數，對於巨大的 n，明顯的可看出來，當要計算 F(n)時，我們的公式必可節省幾乎一半以上的時間，非常划算。

九、我們創造了一部可命中 F 兩倍遠處項的「自走砲車」，如下圖：

這部自走砲車依「先左腳再右腳」迂迴前進，威力強大。



歡迎試車!謝謝!

伍、結論：

一、我們發現了許多與斐波納契數列相似的新數列，分別是：

D2 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 3 , 5 , 6 , 8 , 11 , 14 , 19 , 25 , 33 , 44 , 58……

D3 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 14 , 21 , 30 , 45 , 65 , 96……

D4 數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 11 , 18 , 27 , 42 , 64 , 98 , 151 , 231……

二、我們也發現了許多與斐波納契數列相似的修正值新數列，分別是：

C2(n,1)數列： 2 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 9 , 12 , 16……

C2(n,2)數列： -2 , -2 , -3 , -4 , -5 , -7 , -9 , -12 , -16…… n≧5

C2(n,3)數列： 0 , 0 , -2 , - 3 , -7 , -13 , -23 , - 41……

C2(n,4)數列： -2 , -4 , -8 , -14 , -25 , - 43 , -73 , -123……

C3(n,1)數列： 2, 2 , 3 , 4 , 7 , 9 , 14 , 20……

C3(n,2)數列：-2, -2, -3, -4, -7, -9, -14, -20…… n≧6

C3(n,3)數列： 0, 0, -2, -3, -7, -13 , -25 , -44, -79……

C3(n,4)數列：-2, -4, -8, -14, -27, -47, -83, -143, -246…

⋮

三、我們發現了下列 Di 數列與斐氏數列之間的關係式：

1. ① 〔D1(n)＋C1(n , 1)〕• F(n＋1)＋〔D1(n＋1)＋C1(n , 2)〕• F(n＋3)
   ＋〔D1(n＋2)＋C1(n , 3)〕• F(n)－〔D1(n＋3)＋C1(n , 4)〕• F(n＋2)
   ＝ F(2n+1)　　$n \ge 4$ ，n 爲自然數

   ② 〔D1(n)＋C1(n , 1)〕• F(n＋2)＋〔D1(n＋1)＋C1(n , 2)〕• F(n＋4)
   ＋〔D1(n＋2)＋C1(n , 3)〕• F(n+1)－〔D1(n＋3)＋C1(n , 4)〕• F(n＋3)
   ＝ F(2n+2)　　$n \ge 4$ ，n 爲自然數

2. ① 〔D2 (n)+C2 (n , 1)〕• F (n+2) +〔D2 (n+1)+C2 (n , 2)〕• F (n+4)
   +〔D2 (n+2)+C2 (n , 3)〕• F (n+1)－〔D2 (n+3) + C2 (n , 4)〕• F (n+3)
   = F (2n+1)　　$n \ge 5$ ，n 爲自然數

   ② 〔D2 (n)+C2 (n , 1)〕• F (n+1) +〔D2 (n+1)+C2 (n , 2)〕• F (n+3)
   +〔D2 (n+2)+C2 (n , 3)〕• F (n)－〔D2 (n+3) + C2 (n , 4)〕• F (n+2)
   = F (2n)　　$n \ge 5$ ，n 爲自然數

3. ① 〔D3(n)＋C3(n , 1)〕• F(n＋1)＋〔D3(n＋1)＋C3(n , 2)〕• F(n＋3)
   ＋〔D3(n＋2)＋C3(n , 3)〕• F(n)－〔D3(n＋3)＋C3(n , 4)〕• F(n＋2)
   ＝ F(2n-1)，$n \ge 6$ ，n 爲自然數

   ② 〔D3(n)＋C3(n , 1)〕• F(n＋2)＋〔D3(n＋1)＋C3(n , 2)〕• F(n＋4)
   ＋〔D3(n＋2)＋C3(n , 3)〕• F(n＋1)－〔D3(n＋3)＋C3(n , 4)〕• F(n＋3)
   ＝ F(2n-2)，$n \ge 6$ ，n 爲自然數

4. ① 〔D4(n)＋C4(n , 1)〕• F(n+2)＋〔D4(n＋1)＋C4(n , 2)〕• F(n＋4)
＋〔D4(n＋2)＋C4(n , 3)〕• F(n+1)－〔D4(n＋3)＋C4(n , 4)〕• F(n＋3)
＝ F(2n-1)，$n \geq 7$ ，n 爲自然數

② 〔D4(n)＋C4(n , 1)〕• F(n＋1)＋〔D4(n＋1)＋C4(n , 2)〕• F(n＋3)
＋〔D4(n＋2)＋C4(n , 3)〕• F(n)－〔D4(n＋3)＋C4(n , 4)〕• F(n＋2)
＝ F(2n-2)，$n \geq 7$ ，n 爲自然數

5. ① 〔D5(n)＋C5(n , 1)〕• F(n＋1)＋〔D5(n＋1)＋C5(n , 2)〕• F(n＋3)
＋〔D5(n＋2)＋C5(n , 3)〕• F(n)－〔D5(n＋3)＋C5(n , 4)〕• F(n+2)
＝ F(2n－3)　　$n \geq 8$ ，n 爲自然數

② 〔D5(n)＋C5(n , 1)〕• F(n＋2)＋〔D5(n＋1)＋C5(n , 2)〕• F(n＋4)
＋〔D5(n＋2)＋C5(n , 3)〕• F(n+1)－〔D5(n＋3)＋C5(n , 4)〕• F(n＋3)
＝ F(2n－2)　　$n \geq 8$ ，n 爲自然數

四、在各 Di 的關係式中，以 D1 公式最方便，我們將它再精簡細分成四條可媲美盧卡斯公式的關係式：

1. 欲命中 F(m),m=4k+3 型時

$$F(m)=F(\frac{m+1}{2})+C1(\frac{m-1}{2},3)\cdot F(\frac{m-1}{2})-C1(\frac{m-1}{2},4)\cdot F(\frac{m+3}{2})$$

2. 欲命中 F(m),m=4k+1 型時

$$F(m)=F(\frac{m-3}{2})+C1(\frac{m-1}{2},3)\cdot F(\frac{m-1}{2})-C1(\frac{m-1}{2},4)\cdot F(\frac{m+3}{2})$$

3. 欲命中 F(m),m=4k 型時

$$F(m)=F(\frac{m+2}{2})+C1(\frac{m-2}{2},3)\cdot F(\frac{m}{2})-C1(\frac{m-2}{2},4)\cdot F(\frac{m+4}{2})$$

4. 欲命中 F(m),m=4k+2 型時

$$F(m)=F(\frac{m-2}{2})+C1(\frac{m-2}{2},3)\cdot F(\frac{m}{2})-C1(\frac{m-2}{2},4)\cdot F(\frac{m+4}{2})$$

五、一般來說，以電腦計算 F(巨大項)和 F(兩倍巨大項)所需的時間比不是兩、三倍而已，而是非常非常多倍長，據說有時經過好幾天也沒算出來，由於盧卡斯數列也要計算到和 F 數列相同遠項處，因此所花的時間一定差不多。我們這份報告找出了一個解決方法，雖然我們需要事先計算 Di (n)和 Ci(n,a)數列但那也划得來。

陸、 參考資料及其他：

一、 斐氏數列書籍：

(一) N. N. Vorobyov /編。周春荔/譯。《斐波那契數》。九章出版。2002/09

(二) 丹尼斯・居耶德(Denis Guedj) /編。漢斯/譯。《鸚鵡定理：跨越兩千年的數學之旅》。究竟出版社。2003/07

(三) 卡佳坦・波斯基特/編。劉立翔/譯《萬能的鑰匙—數學》：新視野圖書出版公司：2007/02

(三) 伊凡・莫斯科維奇/編。繆靜芬，黃柏瑄/譯。《達文西的鏡子和生不完的兔子》。究竟出版社。2006/1

(四) 安娜・伽拉佐利(Anna Cerasoli)/編。王愛雅/譯。《愛上數學：悠遊數學世界的 20 個趣味故事》。如何出版社。2003/11

(五) 柯利弗德・皮寇弗(Clifford A. Pickover) /編。蔡承志/譯。《數字的異想世界：125 個有趣的數學遊戲》。商周出版。2002/03

(六) 羅勃・伊斯威，傑瑞米・溫德漢/編。蔡承志/譯。《爲什麼公車一次來三班？：81 個生活中隱藏的數學謎題》。三言社。2004/11

二、 歷屆科展：

(一) 王智璿、郭正佩、顏永愉。長方形交替切割成正方形的問題-費氏數列與黃金矩形的研究。第二十九屆中小學科學博覽會

(二) 林芳維、徐湘婷、許忠誠、黃田奇、黃偉綸、鄭龍驊。小朋友上樓梯-費氏數列的推廣與應用。第四十四屆中小學科學博覽會

(三) 涂珉鳳。潘朵拉的盒子。第四十五屆中小學科學博覽會

三、 國中部編版數學課本。一、二、三、四冊

【評語】030401

1. 這篇報告在研究斐波納契數列中，加上繁殖一定數量後，母兔會死亡的變因，是比較合於實際的一種假設，可見作者的用心。
2. 因爲 L 和 F 有漂亮關係，而希望 Di 和 F 也有類似關係，可能太危險。因爲 Di 的遞迴式和 F 差異太多，所以不該有此期望。
3. 可研究 Di 自身的性質。