中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080410

毛毛蟲爬眼鏡-移位遊戲變形玩法

學校名稱：臺北縣樹林市樹林國民小學

作者：	指導老師：
小五 陳妍廷 小五 李奇軒 小五 吳睿軒 小五 簡子賀	黃秋綿 柯佩君

關鍵詞：　移位遊戲、問題解決

毛毛蟲爬眼鏡—移位遊戲變形玩法

壹、摘要

移位遊戲是相當熱門的科展主題，不論是調整棋子的數量、變化棋子的顏色、或是改變棋盤的樣式，都能讓研究者有不同的發現。在這次的研究中，我們嘗試自己設計棋盤樣式，並應用原有直線移位遊戲的策略來解決我們所遇到的問題，在遊戲的操作過程中，整理歸納我們所設計出的眼鏡棋的規律，這對我們來說，是很有意義的經驗，也讓我們很希望有機會將我們的研究成果介紹給大家。

貳、研究動機

在我們中年級的時候，學校老師陸續介紹很多種類的棋類遊戲，同學們也很喜歡一起下棋。爲了能夠破解遊戲，大家會一起討論遊戲的規則與策略，發現有很多棋類遊戲，可以整理出規律性，而在彼此討論的過程中，除了學習解決問題的策略，提升思考的能力，也讓大家的感情更好了。

在老師介紹讓我們認識的棋類遊戲中，有種一個人練習的毛蟲棋，我們發現有些的歷屆科展作品，是以毛蟲棋作爲研究的基礎，對喜歡下棋的我們來說，這些經過變形的相關作品充滿創意，激發我們挑戰的動力。

當我們研究了很多做棋類遊戲的相關作品，發現從直線型毛蟲棋、環形毛蟲棋到蝴蝶棋的過程中，棋盤的變形相當多樣，我們想嘗試新的變形棋盤是否也能出現令人意外的研究結果。

序號	屆別組別	科展得獎名次	主題名稱	研究簡介
1	24 屆初小組	全國第三名	有趣的移位遊戲	早期移位遊戲作品，為日後其他移位遊戲研究的基礎。
2	34屆高小組	全國第二名	毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現	針對移位遊戲作更深入的探討，該作品中對兩邊棋子數不相等的部分做了完整的討論，並歸納出規律與公式。
3	39屆高中組	全國第二名	乾坤大挪移	移位的對稱性、黑棋白棋的對稱性、空格位置統計，有嚴謹的理論基礎。
4	第41屆國中組	全國第二名	解開難題的奧秘--「個人移位跳棋」遊戲的探討。	以不同觀點詮釋移位遊戲，並歸納多種不同移位遊戲的規律與最少步數公式。
5	44屆國小組	第一名	三色移位毛毛蟲~三色移位遊戲的探討	首次出現在全國的三色移位遊戲，在大量的實驗中，找出最低步數，並歸納其規律性。

本研究的價值與特色

1. 題目為學生在自我學習中發揮創意所改良的遊戲。
2. 遊戲過程中以過去科展研究成果為立足點，檢驗自創遊戲之規律。
3. 利用不同思考方式，改進減少步數的策略，並整理出具體作法。
4. 經由反覆操作所得的數據，推算各種走法步數的計算規則。
5. 可改良成遊戲，藉由介紹與推廣，引發其他學生的學習動力。

參、研究目的

在研究移位遊戲的過程中，我們嘗試將環形棋盤做了翻轉扭曲，形成像眼鏡一樣形狀的棋盤，我們稱之為眼鏡形棋盤，並訂定了以下的研究目標。

一、了解一般直線移位遊戲的規律。
二、了解環狀移位遊戲的規律。
三、尋找無折眼鏡形棋盤移位遊戲是否有規律性。
四、尋找一折眼鏡形棋盤移位遊戲是否有規律性。
五、尋找二折眼鏡形棋盤移位遊戲是否有規律性。
六、尋找三折眼鏡形棋盤移位遊戲是否有規律性。
七、嘗試歸納多折眼鏡形移位遊戲是否有規律性。

肆、研究設備及器材

一、圖畫冊、自製眼鏡棋棋盤、雙色圍棋棋子
二、紀錄表格、文具

伍、研究過程與討論

一、歷史資料研究

討論一：瞭解直線移位遊戲的規律

我們參考直線移位遊戲的相關資料，確認了遊戲規則和結果。關於移位遊戲的說明如下：

（一）遊戲內容：（以 3×3 為例）

1.在棋盤的左側，有三個白色棋子，在右側有三個黑色棋子。

2.再透過移（鄰位移位）或跳（隔位移位）來使白色棋子和黑色棋子的位置互換。

空格號碼	1	2	3	4	5	6	7
開始棋子位置	●	●	●		○	○	○
結束棋子位置	○	○	○		●	●	●

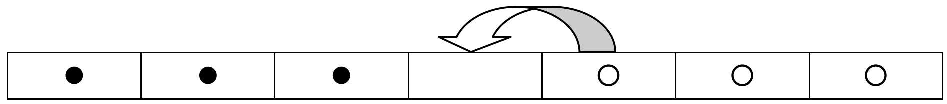
（二）遊戲規則：(以以３-３直線棋盤樣式作爲示範）

1.每次只能移動一顆棋子

2.每一顆被移動，可以選擇這兩種方式前進

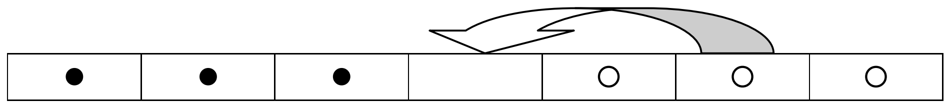
（1）走（鄰位移位）：當這一顆棋子旁邊有一個空格時，可以以走的方式移到這一空格。

例：



（2）跳（隔位移位）：這一顆棋子的旁邊棋子的旁邊有空格時，可以以跳的方式移到這一空格。

例：



3.將兩邊棋子互換完成，所需步數越少越好。

最後可以發現直線型兩邊等長移位遊戲中，移動的最少步數爲如下表：

棋盤樣式	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	6-6	7-7	8-8	9-9	10-10
步數	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120

而直線型兩邊等長移位遊戲最少移動步數滿足以下規律：

移位的最少步數＝每邊的棋子數×（每邊的棋子數＋2）

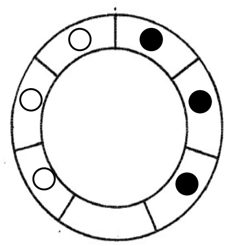
滿足最少步數作法被稱之爲交叉戰法。

表（ 1 ） 示範最少步數以３×３直線棋盤最少步數走法							
步數	1	2	3	4	5	6	7
0	●	●	●		○	○	○
1	●	●	●	○		○	○
2	●	●		○	●	○	○
3	●		●	○	●	○	○
4	●	○	●		●	○	○
5	●	○	●	○	●		○
6	●	○	●	○	●	○	
7	●	○	●	○		○	●
8	●	○		○	●	○	●
9		○	●	○	●	○	●
10	○		●	○	●	○	●
11	○	○	●		●	○	●
12	○	○	●	○	●		●

13	○	○	●	○		●	●
14	○	○		○	●	●	●
15	○	○	○		●	●	●

討論二：了解環狀移位遊戲的規律性。

在「毛毛蟲變蝴蝶－移位遊戲的新發現中」環形兩邊等長移位遊戲，除了可以利用「傳統作法」解開遊戲外，更發現「最後一顆奇數倒轉法」、「中央切半法」使環形移位遊戲有最短步驟出現。

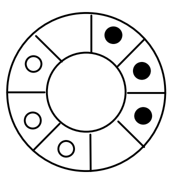


圖（1）單空格環形棋盤樣式示範（單邊３顆棋子）

二、研究操作與嘗試

研究一：環狀移位遊戲的變形

（一）我們在操作環狀棋盤時，發現修改環狀移位遊戲棋盤，增加一空格在兩色棋子相接之處，使兩色棋子分別爲空格所隔開，我們修改過的環形棋盤，試著走出最少步數。



圖（2）雙空格環形棋盤樣式示範（單邊３顆棋子）

我們嘗試的結果如下：

表（2）　雙空格環狀棋移位步數整理			
雙空格環狀棋單側棋子數	最少步數		
1	**3**	3＝0×2＋1×3	3＝0×(0＋2)＋1×(1＋2)
2	**6**	6＝1×3＋1×3	6＝1×(1＋2)＋1×(1＋2)
3	**11**	11＝1×3＋2×4	11＝1×(1＋2)＋2×(2＋2)
4	**16**	16＝2×4＋2×4	16＝2×(2＋2)＋2×(2＋2)
5	**23**	23＝2×4＋3×5	23＝2×(2＋2)＋3×(3＋2)
6	**30**	30＝3×5＋3×5	30＝3×(3＋2)＋3×(3＋2)
7	**39**	39＝3×5＋4×6	39＝3×(3＋2)＋4×(4＋2)
8	**48**	48＝4×6＋4×6	48＝4×(4＋2)＋4×(4＋2)
9	**59**	59＝4×6＋5×7	59＝4×(4＋2)＋5×(5＋2)
10	**70**	70＝5×7＋5×7	70＝5×(5＋2)＋5×(5＋2)

經過操作，我們發現：

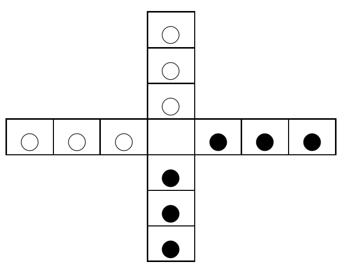
1. 雙空格環狀棋與原本的直線型棋盤有非常大的相關性。
2. 我們可以**將雙空格環狀棋當作兩隻直線型移位遊戲，有技巧的將雙空格環形移位遊戲，折成兩組直線形移位遊戲會出現最少完成步驟。**
3. 如果單側棋子是偶數時，直接在同色棋子中間切半變成兩組直線型兩邊等長棋盤。

最短步數＝〔棋子數÷2×（棋子數÷2＋2）〕×2＝棋子數×（棋子數÷2＋2）

4. 如果單側棋子是奇數時，將環形直線棋盤分成兩組棋子數差一的直線型兩邊等長棋盤。

最短步數＝〔(棋子數＋1）÷2〕×〔(棋子數＋1）÷2＋2〕
＋〔(棋子數－1）÷2〕×〔(棋子數－1）÷2＋2〕

5. 如果將雙空格環狀遊戲當作是兩組直線移位遊戲的變形，**將兩組直線移位遊戲棋盤由尾端相接改為空格交疊，則會形成十字形棋盤(如下圖)，其最短步數，也是兩組直線行移位遊戲分別的最短步數總和。**



圖（3）十字形棋盤樣式示範

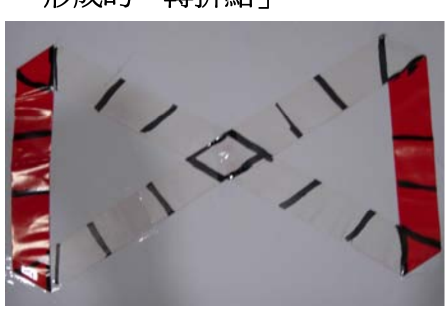
6.當我們在環狀移位遊戲的棋盤加上一個空格，雙環狀環形移位遊戲出現了不同於單空格環狀遊戲的結果，於是大家決定，將改變棋盤的形狀當作是我們研究的變因。

研究二： 經過扭曲的眼鏡型棋盤

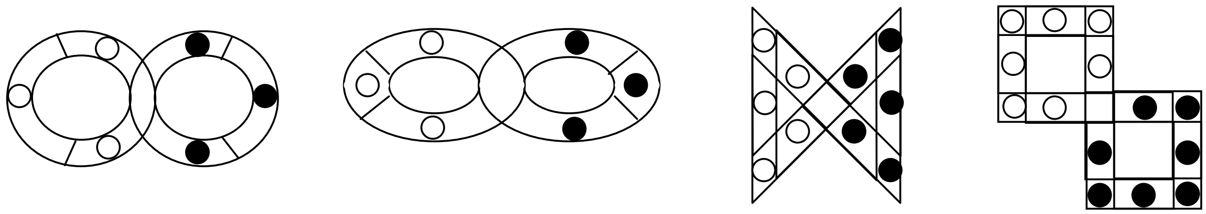
（一）我們對自己提出了新的問題：「要怎麼改變棋盤？」

有人提出建議將棋盤從平面上搬到空間中進行扭轉，也許會出現特別的結果。大家興奮的利用長紙條當作移位遊戲的棋盤，在手上折來折去，連環形棋盤都被拿來扭轉。

1. 在平面中的直線行移位遊戲的棋盤是一條直線的變化，環狀棋為簡單封閉曲線，雖然棋子的移位像是一個一個的點，棋盤上卻沒有明顯的「交點」或「端點」出現。經過我們扭曲的紙條，**會出現紙條與紙條相交的「交點」、還有紙條彎折所形成的「轉折點」。**



2. 在我們扭轉環形棋盤的過程中，有一組造型因爲形狀像眼鏡鏡框一樣，所以我們決定稱之爲「眼鏡型棋盤」。並依其彎折數的不同，分別命名爲**「無折眼鏡棋」、「一折眼鏡棋」、「二折眼鏡棋」、「三折眼鏡棋」**



圖（4）眼鏡棋樣圖示範：由左而右，無折眼鏡棋、一折眼鏡棋、二折眼鏡棋、三折眼鏡棋

（二）眼鏡棋的遊戲規則

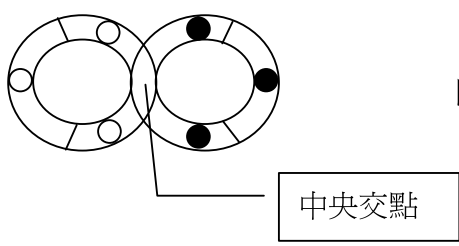
1. 眼鏡型棋盤左右邊兩個環狀棋盤各有一種顏色的棋子。

2. 利用環狀軌道所形成的線，所爲棋子可以移位的線。

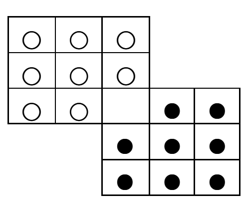
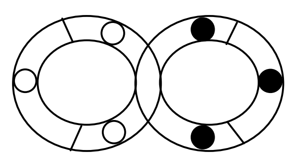
3. 可以利用「走」的移位方式移動到空格中，也可以利用「跳」的移位方式，跳過一棋子移位到空格中。

研究三：無折眼鏡型棋盤及其規律

從直線毛蟲棋所變形的環狀棋，過去研究的作品中曾發現單空格環狀毛蟲棋的最短步數和移位的規律，我們將環狀棋的棋盤扭了一圈後壓平，發現新的棋盤形成了與蝴蝶棋長相相似的棋盤，我們將扭曲過的環狀棋盤稱之爲眼鏡棋盤。



圖（5）無折眼鏡棋棋盤樣式示範

表（3）蝴蝶棋和眼鏡棋比較		
樣式範例		
名稱	蝴蝶棋	眼鏡棋
移位區域	爲兩個部分重疊的方形矩陣所形成的棋盤位置，可移位範圍形成平面區域。	兩個交於一點的空心雙環，雙環中心爲鏤空區域，不能行走棋子，可移位範圍爲線狀軌道。
移位方向	在矩陣中水平與垂直的直線方向。	在環狀的軌道路線上前後移位。
移位方式	走（鄰位移位）、跳（隔位移位）	走（鄰位移位）、跳（隔位移位）

1. 環狀棋是線狀空心的圓圈，經過空間的扭曲後，形成兩個相連的空心圓圈，也就是我們說的眼鏡棋，不知道這樣子的雙環像眼鏡框架一般的棋盤，這樣的棋盤會不會也有步數規律？是否和線狀的直線移位遊戲、環狀棋或兩塊區域所構成的蝴蝶棋有所關係？
2. 環狀棋是單純封閉的曲線，如果以完全不跳的形式，也可以只用走的方式繞 180 度的圖形使棋子到達我們所要的位子。而我們所折出的眼鏡形的棋盤，因爲相連接的位置爲一個交點，如果不跳過異色棋子，是無法調換兩個區域的棋子。但是將所有的棋子依一定的方向作 8 字交錯繞行，維持除了中心交點外同色棋子相連的原則，也能將棋子移位到我們所希望的位子。其結果請見 P19 附表一
3. 雖然達成了移位的目標，但讓多數的棋子遠離中心點的繞行，增加了非常多的步數，所以這不會是最短的步數。
4. 在直線移位遊戲中，兩端棋子只前進不後退時會有最短步數出現，經過測試，只要讓每一個棋子在最短的距離，利用相連接的位置，與另一邊的棋子易位，將棋子遠離中心點的機會減少，能夠有最少步數出現。

我們將這樣的方式運用在無折眼鏡棋中，其結果如表（4）:

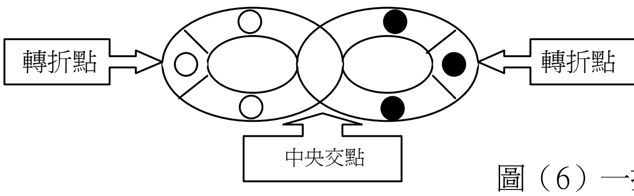
表（4） 無折眼鏡棋移位步數整理

無折眼鏡棋單側棋子數	最少步數		
1	**3**	3＝0×2＋1×3	3＝0×(0＋2)＋1×(1＋2)
2	**6**	6＝1×3＋1×3	6＝1×(1＋2)＋1×(1＋2)
3	**11**	11＝1×3＋2×4	11＝1×(1＋2)＋2×(2＋2)
4	**16**	16＝2×4＋2×4	16＝2×(2＋2)＋2×(2＋2)
5	**23**	23＝2×4＋3×5	23＝2×(2＋2)＋3×(3＋2)
6	**30**	30＝3×5＋3×5	30＝3×(3＋2)＋3×(3＋2)
7	**39**	39＝3×5＋4×6	39＝3×(3＋2)＋4×(4＋2)
8	**48**	48＝4×6＋4×6	48＝4×(4＋2)＋4×(4＋2)
9	**59**	59＝4×6＋5×7	59＝4×(4＋2)＋5×(5＋2)
10	**70**	70＝5×7＋5×7	70＝5×(5＋2)＋5×(5＋2)

1. **將棋盤拆成兩組直線行移位遊戲棋盤，會出現移位最少步數。**
2. 使棋子不用再以繞的方式調換位子，而是以中心交點爲間隔，兩色棋子交叉的移位。
3. 無折眼鏡棋的移位規則與雙空格的環形棋盤相同，無折眼鏡棋與雙空格環形棋盤實際上是相同的遊戲方式，兩者是相同的設計方式，不同的變形棋盤。
4. **雙空格環狀棋、十字棋、無折眼鏡棋，都能利用直線移位遊戲的移位策略，找出最短步數的規則。**

研究四： 一折眼鏡型棋盤移位規律

（一）我們在扭曲棋盤時，爲了固定形狀，會把圖形壓扁，當我們將無折眼鏡棋的紙條左右拉平壓扁時，原本平滑的曲線出現了一個彎折，形成了一個轉折點，眼鏡棋的兩邊環狀中心部分各有的一個彎折點移位遊戲棋盤，我們命名爲「一折眼鏡棋」。



圖（6）一折眼鏡棋棋盤樣式示範

（二）從一折眼鏡棋開始，我們做了一些設定，

1. 彎折的端點必須是一顆棋子的位置，不能以線作爲彎折位置。

2. 端點前後兩邊的棋子不能「跳」過端點，但是可以跳過中心點。

3. 從相鄰的「中心點」或「轉折點」可以放的棋子位置，稱爲眼鏡棋的「一邊」，一邊上可以放棋子的空格數量稱之爲「邊長」。

4. 爲了記錄方便我們以每邊上可以放的棋子數來區分眼鏡棋的規格。

（三）我們歸納出以 8 字繞行方式完成一折眼鏡棋的步數規律，但繞行範圍太大，並不是一折眼鏡棋的最短步數。一折眼鏡棋繞行步數整理，請見 P20 附表二

（四）我們嘗試以直線移位遊戲的方式進行一折眼鏡棋的移位，其結果如表（5）：

表（5） 一折眼鏡棋移位步數整理			
邊長	最少步數		
3	11	11＝1×3＋2×4	11＝1×（1＋2）＋2×（2＋2）
4	**23**	23＝2×4＋3×5	23＝2×（2＋2）＋3×（3＋2）
5	**39**	39＝3×5＋4×6	39＝3×（3＋2）＋4×（4＋2）
6	**59**	59＝4×6＋5×7	59＝4×（4＋2）＋5×（5＋2）
7	**83**	83＝5×7＋6×8	83＝5×（5＋2）＋6×（6＋2）
8	**111**	101＝6×8＋7×9	101＝6×（6＋2）＋7×（7＋2）
9	**143**	143＝7×9＋8×10	143＝7×（7＋2）＋8×（8＋2）
10	**179**	179＝8×10＋9×11	179＝8×（8＋2）＋9×（9＋2）

我們有以下發現：

1. 一折眼鏡棋總共有四條邊，每邊棋子數增加「1」，單色棋子增加 2 顆，總棋子數量增加 4 顆。

2. 一折眼鏡棋，單色棋子數量均爲奇數。

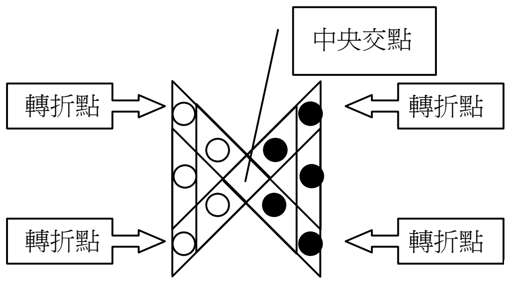
3. 一折眼鏡棋的最短步數是將其拆開成兩組直線移位遊戲。

4. 一折眼鏡棋易位最少步數原則與與雙空格環形移位遊戲、無折眼鏡棋相同。

研究五 二折眼鏡型棋盤與移位規律

（一）我們繼續增加眼鏡棋上的彎折點，我們推測可能會有類似的結果，所有的眼鏡型棋盤也許都可以利用類似的規則找出移位規律與最短步數。

如果增加眼鏡棋兩邊環狀上的彎折點，成爲二折眼鏡棋，單側眼鏡上會變成一個三角形的圖案。



圖（7）二折眼鏡棋棋盤樣式示範

（二）我們歸納出以 8 字繞行方式完成二折眼鏡棋的步數規律，但繞行範圍太大，並不是二折眼鏡棋的最短步數。

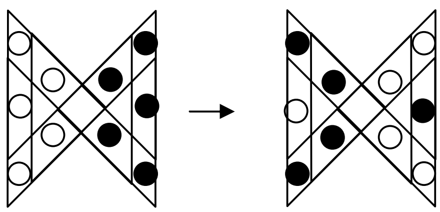
1. 二折眼鏡棋繞行步數整理，請見 P21 附表三
2. 二折眼鏡棋八字繞行法步數分析如下表（6）和表（7）：

表（6）二折眼鏡棋八字繞行法步數分析紀錄（不退位）

邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差		邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	9				3	39		
		76					112	
4	85		72		5	151		72
		148					184	
6	233		72		7	335		72
		220					256	
8	453		72		9	591		72
		292					328	
10	745				11	919		

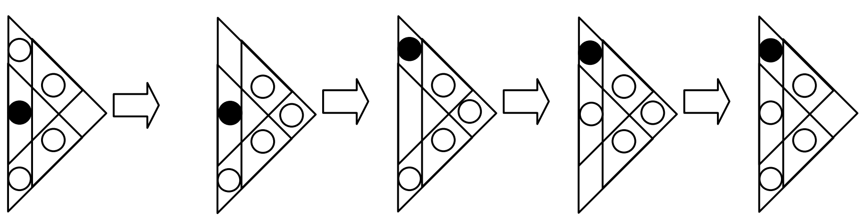
表（7）二折眼鏡棋八字繞行法步數分析紀錄（退位）								
邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差		邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	8				3	37		
		73					109	
4	81		72		5	146		72
		145					181	
6	226		72		7	327		72
		217					253	
8	443		72		9	580		72
		289					325	
10	732				11	905		

（三）將二折眼鏡棋，用直線移位的方式將中心交點兩邊棋子易位，卻發現了不能直接移位的狀況，如下圖（8）：



圖（8）二折眼鏡棋易位

棋子所在的邊，若其中一個端點在中心交點上，那麼棋子可以順利利用直線移位遊戲規律易位，但棋子所在的邊端點均在轉折點上時，便無法直接以直線移位方式將棋子易位。爲了解決這個問題，我們經過多次的嘗試，發現最快的方式便是將無法易位的棋子移位到與中央交點相關的邊上。再利用直線移位遊戲的策略將棋子易位。



圖（9）圖解二折單邊環狀移位範例

（四）二折單側環狀移位記錄與整理請見 P22 附表四

表（8）表（9）是我們利用十字步驟分段的方式，所完成的移位記錄。

表（8）　二折眼鏡棋移位步數說明（退位）

一邊上的棋子數	總步數	前段第一組直線移位	前段第二組直線移位	中段第一組二折環狀移位	中段第二組二折環狀移位	末段第三組直線移位
2	6	3	3			
3	31	8	8	4	4	7
4	68	15	15	12	12	14
5	113	24	24	21	21	23
6	176	35	35	36	36	34
7	243	48	48	50	50	47
8	332	63	63	72	72	62
9	421	80	80	91	91	79
10	536	99	99	120	120	98
11	647	120	120	144	144	119

表（9）　二折眼鏡棋移位步數說明（不退位）

一邊上的棋子數	總步數	前段第一組直線移位	前段第二組直線移位	中段第一組二折環狀移位	中段第二組二折環狀移位	末段第三組直線移位
2	6	3	3			
3	30	8	8	3	4	7
4	66	15	15	10	12	14
5	112	24	24	20	21	23
6	174	35	35	34	36	34
7	242	48	48	49	50	47
8	330	63	63	70	72	62
9	420	80	80	90	91	79
10	534	99	99	118	120	98
11	646	120	120	143	144	119

1. **二折眼鏡棋不能用全部用直線移位遊戲的規則解出最短步數。但是善用直線移位遊戲的規則可以減少移位步數。**
2. 在許多移位遊戲規律中，都會提到使兩色棋子交錯會出現最短步數，我們假設三角形的封閉線上，也可以找到類似的規律，使棋子能在最少的步數下，移位到我們需要的位置。**但我們在嘗試二折環狀移位時發現，一旦棋子顏色交錯，反而會使步數增加。**
3. 為了對調眼鏡棋的棋子顏色，必須將要換色的棋子移位到眼鏡棋的中心交點處。
4. 經過我們的嘗試，用走與跳的移位方式，但必須保持同色棋子相連的方式，使棋子繞行大約 120 度的方式，讓棋子移位到與交點的相接的邊上，是我們能夠測出

的最短的步數。在過程中，如果出現兩色棋子的交錯，就會讓移位步數增加。

5. 因爲兩邊有共點的關係，二折眼鏡棋的末段第三組直線移位，其單色棋子會比前段單色棋子多一顆。

6. **因爲空格位置的調整，如果適時不將空格退回中心交點，邊數爲奇數時步數會再少 1 步，邊數爲偶數時，步數會再少 2 步。所以不退位的步數比退位的步數更少。**

7. **經過整理，二折眼鏡棋十字步驟分段法的移位步數規律如下：**

二折眼鏡棋十字步驟分段法的移位步數整理

一邊上的棋子數爲奇數時
退位走法： 移位步數＝6×邊長 ^{2}－7×邊長－2
不退位走法：移位步數＝6×邊長 ^{2}－7×邊長－3

一邊上的棋子數爲偶數時：
退位走法：移位步數＝6×邊長 ^{2}－6×邊長－4
不退位走法：移位步數＝6×邊長 ^{2}－7×邊長－6

8. 二折眼鏡棋十字步驟分段法步數分析如下表（10）和表（11）：

表（10）二折眼鏡棋十字步驟分段法步數分析紀錄（退位）

邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差	邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	6			3	31		
		62				82	
4	68		46	5	113		48
		108				130	
6	176		48	7	243		48
		156				178	
8	332		48	9	421		48
		204				226	
10	536			11	647		

表（11）二折眼鏡棋十字步驟分段法步數分析紀錄（不退位）								
邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差		邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	6				3	30		
		60					82	
4	66		48		5	112		48
		108					130	
6	174		48		7	242		48
		156					178	
8	330		48		9	420		48
		204					226	
10	534				11	646		

（五）有同學提出了另外一種棋子移位的切割方式，移位時，利用以下的方式會出現更少的移位步數：

1.將二折眼鏡棋中央十字部分，利用直線移位遊戲的規律將棋子換成黑白相間的順序，並將空格留在尾端。

2.將不在十字位置上的棋子，利用十字位置上所搭出的交錯路線，做整組棋盤的繞行使棋子移位到對邊的位置。

3.等所有非十字位置的棋子都已經移位完成，再利用直線移位遊戲的規律將十字位置的棋子移位。

根據以上原則操作結果如表（12）：

表（12）二折眼鏡棋交叉繞行法步數分析紀錄								
邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差		邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	6				3	27		
		50					66	
4	56		38		5	93		41
		88					107	
6	144		40		7	200		40
		128					147	
8	272		40		9	347		40
		168					187	
10	440		40		11	534		40
		208					227	
12	648		40		13	761		40
		248					267	
14	896				15	1028		

雖然這種「交叉繞行」的方式不是直接使用直線移位遊戲的規則，但是利用直線移位遊戲所製造出的兩色棋子顏色相間時的特性，先交錯互換半組直線移位遊戲，會讓中間相交的兩組直線部分，搭出可以利用跳減少步數的區域，而在端點均不在中間交點上的路線，保持異色棋子不交錯的狀態，並佐以「跳」的移位方式減少步驟，等所有與中間交點不共線的位置，都已經換色完畢後，在完成後半段的直線移位遊戲，其總步數會減少更多。

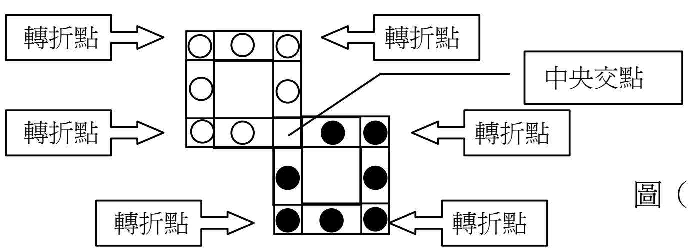
（六）我們將各種二折眼鏡棋的步數記錄整理成表（13）

表（13）各種策略的二折眼鏡棋比較

方式 步數 邊數	8 字繞行		十字步驟分段		交叉繞行
	不退位	退位	退位	不退位	
2	9	8	6	6	6
3	39	37	31	30	27
4	85	81	68	66	56
5	151	146	113	112	93
6	233	226	176	174	144
7	335	327	243	242	200
8	453	443	332	330	272
9	591	580	421	420	347
10	745	732	536	534	440

研究六： 三折眼鏡型棋盤及其規律

（一）繼續增加眼鏡棋上彎折的點，當出現三個彎折時，形成由兩個方框組成的三折眼鏡棋。



圖（10）三折眼鏡棋棋盤樣式示範

三折眼鏡棋，單邊與中心交點不直接相連的邊有兩條，所以和二折眼鏡棋一樣不能直接以直線型移位遊戲的規則找到規則。換完交叉位置的直線移位棋子後，剩下的棋子會集中在與交點無直線相連的邊上。

（二）三折眼鏡棋以 8 字繞形的方式完成移位，其結果整理如 P23 例表（五）

三折眼鏡棋八字繞行法步數分析如下表（14）和表（15）：

表（14）三折眼鏡棋八字繞行法步數分析紀錄（不退位）

邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差	邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	19			3	69		
		140				198	
4	159		128	5	267		128
		268				326	
6	427		128	7	593		128
		396				454	
8	823		128	9	1047		128
		524				582	
10	1347			11	1629		

表（15）三折眼鏡棋八字繞行法步數分析紀錄（退位）

邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差	邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	17			3	66		
		136				194	
4	153		128	5	260		128
		264				322	
6	417		128	7	582		128
		392				450	
8	809		128	9	1032		128
		520				578	
10	1329			11	1610		

（三）我們將利用十字步驟分段的方式所得結果整理如表（16）表（17）:

三折環狀移位步數與歸納整理請參考 P24 附表（六）

表（16）三折眼鏡棋十字步驟分段法(退位)

三折眼鏡棋邊上棋子數	總步數	前段第一組直線移位	前段第二組直線移位	中段第一組三折環狀移位	中段第二組三折環狀移位	末段第一組直線移位	末段第二組直線移位
2	17	3	3	4	4	3	0
3	59	8	8	16	16	8	3
4	133	15	15	40	40	15	8
5	215	24	24	64	64	24	15
6	345	35	35	108	108	35	24
7	467	48	48	144	144	48	35
8	653	63	63	208	208	63	48
9	815	80	80	256	256	80	63
10	1057	99	99	340	340	99	80
11	1259	120	120	400	400	120	99

表（17）三折眼鏡棋十字步驟分段法（不退位)

三折眼鏡棋邊上棋子數	總步數	前段第一組直線移位	前段第二組直線移位	中段第一組三折環狀移位	中段第二組三折環狀移位	末段第一組直線移位	末段第二組直線移位
2	15	3	1	4	4	0	3
3	56	8	6	16	16	2	8
4	130	15	13	40	40	7	15
5	212	24	22	64	64	14	24
6	342	35	33	108	108	23	35
7	464	48	46	144	144	34	48
8	650	63	61	208	208	47	63
9	812	80	78	256	256	62	80
10	1054	99	97	340	340	79	99
11	1256	120	118	400	400	98	120

三折眼鏡棋十字步驟分段法的移位步數整理

一邊上的棋子數爲奇數時

退位走法：　移位步數＝12×邊長^2－18×邊長＋5

不退位走法：移位步數＝12×邊長^2－18×邊長＋2

一邊上的棋子數爲偶數時：

退位走法：移位步數＝12×邊長^2－14×邊長－3

不退位走法：移位步數＝12×邊長^2－14×邊長＋6

（四）三折眼鏡棋十字步驟分段法步數分析如下表（18）和表（19）：

表（18）三折眼鏡棋十字步驟分段法步數分析紀錄（退位）								
邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差		邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	17				3	59		
		116					156	
4	133		96		5	215		96
		212					252	
6	345		96		7	467		96
		308					348	
8	653		96		9	815		96
		404					444	
10	1057				11	1259		

表（19）三折眼鏡棋十字步驟分段法步數分析紀錄（不退位）								
邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差		邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	15				3	56		
		115					156	
4	130		97		5	212		96
		212					252	
6	342		96		7	464		96
		308					348	
8	650		96		9	812		96
		404					444	
10	1054				11	1256		

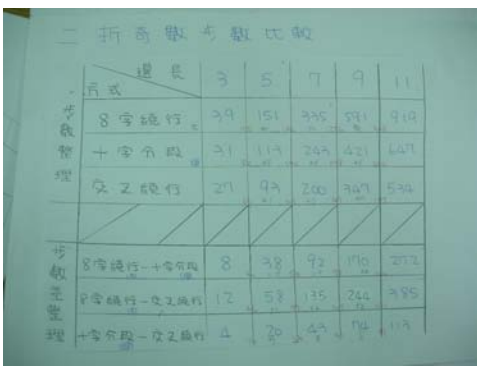
（五）我們將利用交叉繞行的方式所得結果整理如表（20）：

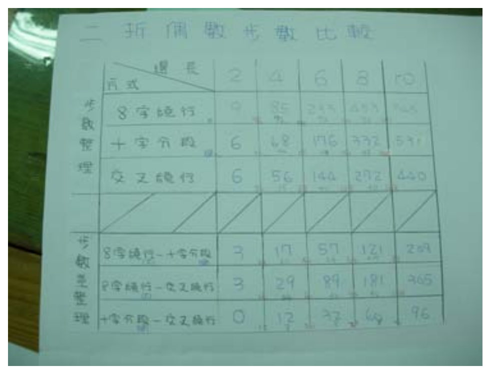
表（20）三折眼鏡棋交叉繞行法步數分析紀錄								
邊上棋子數（偶數組）	總步數	第一階數差	第二階數差		邊上棋子數（奇數組）	總步數	第一階數差	第二階數差
2	15				3	49		
		98					130	
4	113		78		5	179		80
		176					210	
6	289		80		7	389		80
		256					290	
8	545		78		9	679		80
		334					370	
10	879		80		11	1049		80
		414					450	
12	1293				13	1499		

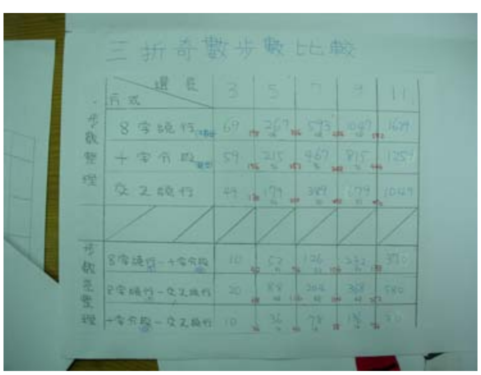
（五）我們將各種三折眼鏡棋的步數記錄整理成表（21）

表（21）各種策略的三折眼鏡棋步數比較：

方式／步數／邊數	8 字繞行		十字步驟分段		交叉繞行
	不退位	退位	退位	不退位	
2	19	17	17	15	15
3	69	66	59	56	49
4	159	153	133	130	113
5	267	260	215	212	179
6	427	417	345	342	289
7	593	582	467	464	389
8	823	809	653	650	545
9	1047	1032	815	812	679
10	1347	1329	1057	1054	879







附表一：無折眼鏡棋繞行每圈步數整理

單環空格數	總步數不退位	總步數最後一步退位	每 圈 步 數（ 圈 次 ）＊ 紅色括號內爲最後一步退位時，末圈的步數									
			一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
2	3	3	2	1（1）								
3	7	7	3	3	1（1）							
4	15	14	4	5	4	2（1）						
5	22	21	5	5	5	5	2（1）					
6	35	33	6	7	6	7	6	3（1）				
7	45	43	7	7	7	7	7	7	3（1）			
8	63	60	8	9	8	9	8	9	8	4（1）		
9	76	73	9	9	9	9	9	9	9	9	4（1）	
10	99	95	10	11	10	11	10	11	10	11	10	5（1）

單環空格數爲奇數時，無折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲：　移位步數＝ 空格數 × 空格數－（空格數＋1）÷2

單環空格數爲奇數時，無折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲：　移位步數＝ 空格數 ×（空格數－1）＋1

單環空格數爲偶數時，無折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲：　移位步數＝ 空格數 × 空格數－1

單環空格數爲偶數時，無折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲：　移位步數＝ 空格數 × 空格數－空格數÷2

附表二：一折眼鏡棋繞行每圈步數整理

邊長	總步數不退位	總步數最後一步退位	每 圈 步 數（ 圈 次 ）＊ 紅色括號內爲最後一步退位時，末圈的步數																	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	17	16	5	5	5	2（1）														
4	35	33	6	7	6	7	6	3（1）												
5	67	64	9	9	9	9	9	9	9	4（1）										
6	99	95	10	11	10	11	10	11	10	11	10	5（1）								
7	149	144	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	6（1）						
8	195	189	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	15	14	7（1）				
9	263	256	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	8（1）		
10	323	315	18	19	18	19	18	19	18	19	18	19	18	19	18	19	18	19	18	9（1）

邊長爲奇數時，一折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲：　移位步數＝　【(邊長－1）x2】^{2} ＋（邊長－2）

邊長爲奇數時，一折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲：　移位步數＝　【(邊長－1）x2】^{2}

邊長爲偶數時，一折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲：　移位步數＝　（邊長x2－2）^{2} －1

邊長爲偶數時，一折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲：　移位步數＝　（邊長x2－2）^{2} －（邊長－1）

附表三：二折折眼鏡棋繞行每圈步數整理

邊長	總步數不退位	總步數最後一步退位	每圈步數（圈次）＊紅色括號內爲最後一步退位時，末圈的步數																										
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
2	9	8	4	3	2（1）																								
3	39	37	7	7	8	7	7	3（1）																					
4	85	81	10	11	10	9	10	9	11	10	5（1）																		
5	151	146	13	13	13	13	14	13	14	13	13	13	13	6（1）															
6	233	226	16	17	16	17	16	15	16	15	16	15	17	16	17	16	8（1）												
7	335	327	19	19	19	19	19	19	20	19	20	19	20	19	19	19	19	19	19	9（1）									
8	453	443	22	23	22	23	22	23	22	21	22	21	22	21	22	21	23	22	23	22	23	22	11（1）						
9	591	580	25	25	25	25	25	25	25	25	26	25	26	25	26	25	26	25	25	25	25	25	25	25	25	12（1）			
10	745	732	28	29	28	29	28	29	28	29	28	27	28	27	28	27	28	27	28	27	28	29	28	29	28	29	28	29	14（1）

邊長爲奇數時，二折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲： 移位步數＝〔（邊長－1）x3〕^{2}＋（邊長－1）x2－1

邊長爲奇數時，二折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲： 移位步數＝〔（邊長－1）x3〕^{2}＋（邊長－1）÷2

邊長爲偶數時，二折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲： 移位步數＝〔（邊長－1）x3〕^{2}＋（邊長－2）× 2

邊長爲偶數時，二折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲： 移位步數＝〔（邊長－1）x3〕^{2}＋（邊長－4）÷ 2

附表四：二折單側環狀移位圈數步數整理表

邊長	步數和	每 圈 步 數（ 圈　次 ）							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2	0								
3	4	4							
4	12	6	6						
5	21	7	7	7					
6	36	9	9	9	9				
7	50	10	10	10	10	10			
8	72	12	12	12	12	12	12		
9	91	13	13	13	13	13	13	13	
10	120	15	15	15	15	15	15	15	15

邊長爲奇數時，二折單側環狀移位圈數步數可以簡化爲：　移位步數＝　（邊長－2）×（邊長×3－1）÷2

邊長爲偶數時，二折單側環狀移位圈數步數可以簡化爲：　移位步數＝　（邊長－2）×（邊長×3）÷2

附表五：三折眼鏡棋繞行每圈步數整理

邊長	總步數不退位	總步數最後一步退位	每 圈 步 數（ 圈 次 ）＊ 紅色括號內爲最後一步退位時，末圈的步數																																			
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
2	19	17	6	5	5	3(1)																																
3	69	66	9	9	10	9	10	9	9	4(1)																												
4	159	153	14	15	14	13	14	13	13	14	13	15	14	7(1)																								
5	267	260	17	17	17	17	18	17	18	17	18	17	18	17	17	17	17	8(1)																				
6	427	417	22	23	22	23	22	21	22	21	22	21	21	22	21	22	21	23	22	23	22	11(1)																
7	593	582	25	25	25	25	25	25	26	25	26	25	26	25	26	25	26	25	26	25	25	25	25	25	25	12(1)												
8	823	809	30	31	30	31	30	31	30	29	30	29	30	29	30	29	29	30	29	30	29	30	29	31	30	31	30	31	30	15(1)								
9	1047	1032	33	33	33	33	33	33	33	33	34	33	34	33	34	33	34	33	34	33	34	33	34	33	34	33	33	33	33	33	33	33	33	16(1)				
10	1347	1329	38	39	38	39	38	39	38	39	38	37	38	37	38	37	38	37	38	37	37	38	37	38	37	38	37	38	37	39	38	39	38	39	38	38	39	19(1)

邊長爲奇數時，三折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲： 移位步數＝ 〔(邊長－1）x4〕^{2} ＋邊長x3－4

邊長爲奇數時，三折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲： 移位步數＝〔(邊長－1）x4〕^{2} ＋（邊長－1）

邊長爲偶數時，三折眼鏡棋繞行步數可以簡化爲： 移位步數＝ 〔(邊長－1）x4〕^{2} ＋（邊長－1）x6－3

邊長爲偶數時，三折眼鏡棋繞行且最後一步退位的步數可以簡化爲： 移位步數＝ 〔(邊長－1）x4〕^{2} ＋（邊長－1）x4－3

附表六：三折單側環狀移位圈數步數整理表

邊數	退位步數	每圈步數（圈次）																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	4	1	3	0																		
3	16	1	5	4	5	1																
4	40	2	7	8	7	7	8	1														
5	64	2	9	8	9	8	9	8	9	2												
6	108	3	11	12	11	12	11	11	12	11	12	2										
7	144	3	13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	3								
8	208	4	15	16	15	16	15	16	15	15	16	15	16	15	16	3						
9	256	4	17	16	17	16	17	16	17	16	17	16	17	16	17	16	17	4				
10	340	5	19	20	19	20	19	20	19	20	19	19	20	19	20	19	20	19	20	4		
11	400	5	21	20	21	20	21	20	21	20	21	20	21	20	21	20	21	20	21	20	21	5

邊長爲奇數時，三折單側環狀移位圈數步數可以簡化爲：　移位步數＝〔（邊數－1）×2〕×〔（邊數－1）×2〕＝〔（邊數－1）×2〕^{2}

邊長爲偶數時，三折單側環狀移位圈數步數可以簡化爲：　移位步數＝（邊數）×（邊數×4－6）＝（邊數×2）^{2}－（邊數×6）

陸、研究結果與展望

一、**在線狀移位遊戲中，當使用固定移位的策略時，都可以觀察出步數的規律。**過去的移位遊戲研究中，都將移位步數精簡至極致爲目標，也就是求出最小值。而在我們的眼鏡棋移位遊戲中，發現其步數的變化與「每邊的棋子數」、「單色棋子數量」、「棋盤彎折數」、「移位策略」等變因均有關。**當「每邊的棋子數」、「單色棋子數量」、「棋盤彎折數」增加時，完成移位的步數也會隨之增加。**

正確的更動移位策略可以有效縮減完成棋子移位的步數。在眼鏡棋中，主要調整策略的方式包括：

（一）增加跳（隔位移位）的方式替代走（鄰位移位）的機會。

（二）增加利用直線移位遊戲的範圍，當可以利用直線移位的棋盤範圍或路線增加，就能使移位其範圍的棋子步數有效減少。

二、在我們的研究中，「雙空格環狀棋盤」、「無折眼鏡棋」、「一折眼鏡棋」，這三種棋盤都能將需要移位的棋子分割成直線移位遊戲的棋盤，其最短步數也可由直線移位遊戲的規律推算。**只要將棋盤上的分成兩組直線型移位遊戲，使兩組直線移位長度差異最小，在利用用直線移位遊戲的交叉戰法，就可以有效找出最短步數。**

三、在我們所設計的「雙空格環狀棋盤」、「無折眼鏡棋」、「一折眼鏡棋」都可以完全利用直線移位遊戲的推算最短步數，但是**從二折眼鏡棋開始，卻出現了全部棋子顏色交錯時反而增加步數的情況，且當「二折眼鏡棋」、「三折眼鏡棋」的邊長超過 3 時，我們所操作出目前最短步數的方式，或多或少都會使部分的棋子離開中心交點區。**目前我們無法證明所記錄的「二折眼鏡棋」與「三折眼鏡棋」出現的最短步數爲其最短步數，加上數據資料不足，暫時無法推算最短步數計算方式。但是**「二折眼鏡棋」與「三折眼鏡棋」同一組棋盤，在八字繞行、十字步驟分段、交叉繞行三種走法中，可以節省的步驟有差數的相關性。**

四、當眼鏡棋的兩邊環狀上彎折數繼續增加，成爲四折眼鏡棋、五折眼鏡棋等，以目前我們所使用的最短步數策略，可以發現直接利用直線移位遊戲縮減移位步數的區域比例降低，與其他棋子數量相同的眼鏡棋棋盤相比，**彎折數越多，步數增加的越多，因爲能利用直線移位的區域比例更低。**

五、移位遊戲的操作過程中，棋子移位的方式可分爲走（鄰位移位）、跳（隔位移位），必須精確的利用跳的走法才能將步數做精準的確認。在我們的研究過程中，多次因爲操作疏失，使結果出現誤差，無法推算正確的規律。因此我們嘗試多種記錄方式與檢核的策略，經過多次的數據校正，深刻體驗到操作紀錄與觀察嚴謹的重要性。

六、在整個研究過程中，**我們在眼鏡棋的繞行步數記錄中發現，將一組每圈的步數整理後比較，這些數列會呈現有順序的變化，不論是首圈步數、末圈步數、或是每圈步數的排列**

方式，除了與「眼鏡棋彎折數」、「棋盤邊長」相關外，也有數列對稱的情況，如果有機會，我們將針對這個部分做更完整的整理。

七、目前移位遊戲的發展相當多樣性，增加顏色、改變棋盤、及空格位置的調整等，這些因素都會使原本的結論有些微的不同，非常適合學習者觀察比較這些調整。**當眼鏡棋增加邊長與彎折數時，步數會隨之改變，與其他移位遊戲交錯練習，也可以用來作爲練習移位遊戲時的一種練習棋盤，增加學習移位遊戲規律時的變化。**

八、我們覺得自己設計棋盤、自己整理紀錄與討論發現、自己嘗試發現規律，是一件讓人很有成就感的事，雖然在研究過程中，常因爲限於瓶頸而苦惱。但是在完成這份研究之後，我們希望有機會向其他同學介紹這一個遊戲，也許會引起大家的共鳴，讓對這個主題有興趣的同學，也能和我們一樣挑戰設計棋盤，試著透過研究的方式學習數學。

柒、相關參考資料

一、第二十四屆中小學科學展覽初小組數學科全國第三名『有趣的移位遊戲』。

二、第三十四屆中小學科學展覽高小組數學科全國第二名『毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現』。

三、第四十一屆中小學科學展覽國中組數學科全國第二名『解開難題的奧秘--「個人移位跳棋」遊戲的探討』。

四、第四十四屆中小學科學展覽國小組數學科全國第一名『三色移位毛毛蟲－三色移位遊戲的探討』。

五、數學遊戲。民89年。新竹市。凡異出版社。

【評語】080410

1. 本作品先簡述與先前作品不同處，以凸顯本作品的特色和賣點。
2. 善用電腦展示棋盤移位過程，創意佳。
3. 作者能利用「交叉繞行」的方式來移位，是本作品的一大發現。
4. 敘述說明可再加強。