

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080408

手環遊戲

學校名稱：臺北市大同區蓬萊國民小學

作者： 小五 王德諭 小五 白元霽 小五 徐若庭 小五 林羿彰	指導老師： 利育緬 卓美月
---	-------------------------

關鍵詞： 手環、截最少段數、組成連續整數

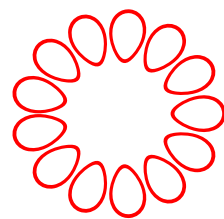
手環遊戲

摘要

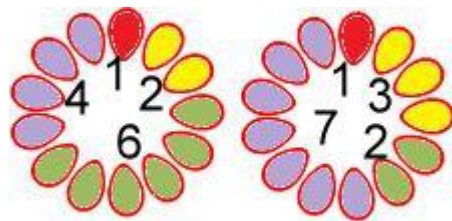
本研究探討利用截最少顏色段數來組合最多連續整數 1、2、3... $k-1$ 、 k 顆珠子的手環，不同顏色段的珠數可以是 1 個、2 個、3 個...，將相鄰顏色的珠子單一、兩兩或三三以上互相組合在一起，組合出最長且最多種不同長度的鍊子。我們發現有趣之處，當手鍊上有 N 種顏色段，最多可產生 $1+N \times (N-1)$ 種串珠的組合，手鍊總珠數為 $1+N \times (N-1)$ 個。而且我們參考並修改相關歷屆作品的研究方法，找出比較快速且可篩選過濾重複組合的方式-----利用 $a \leq b \leq c \leq d \leq e \dots$ 找出段數所代表的數字，再以數字的排列組合找出相關的隱藏組合，最後利用 Excle 程式檢驗。當段數愈多，間隔的組合就愈繁多，從這些繁多的組合中，我們找出 1 段~6 段（也就是總珠子數 1 顆~31 顆）的最佳解。

壹、 研究動機

我們很喜歡在下課時編手鍊及串手環，在一次偶然的機會，我們在 1000 個大腦思考遊戲的書上看到一題截項鍊的數學問題，題目是：「有一串以 13 顆珠子串成的項鍊，請將這串珠子分成數段，盡量最少段，使被截斷的鍊子只可以與相鄰處兩兩或三組以上相互組合出 13 種不同長度的鍊子，分別連續珠數為 1、2、3、4、.....至 13。」這樣的問題激起我們的興趣，於是就開始研究這個「截最少的段數，卻能組合出 1、2、3、4、.....到與整串鍊子長度相同的所有整數珠子個數」的手鍊遊戲。



而這個研究與我們在數學教材的相關性如下：
數學南一版第九冊第十一單元怎樣計算、第十冊第四單元圓、圓周長第十冊第八單元怎樣解題（觀察、察覺數列的規律性）。



貳、 研究目的

- 一、 這串 13 顆珠子串鍊所截斷最少段數（顏色）的最佳解？所截段數能不能再少一點？
- 二、 手環上的珠子總數和所能截成最少段數（顏色）有沒有關係？
 1. 不同長度（珠子總數）的手鍊，其所能截最少顏色段數的最佳解為何？
 2. 利用最少種顏色段數所串成的手鍊，到底可以串出最多珠數是多少的手鍊？
- 三、 利用最少顏色段數所串成的手鍊有沒有特定的規律性？
- 四、 後續研究——改變遊戲規則：不可慮相鄰位置，單純湊數字，截最少段數所串成的手鍊，可串出最多珠數是多少的手鍊？

參、研究過程：

一、十三顆珠子的手鍊

【化繁為簡】想法：①盡量截最少段，從截 2 段、3 段開始嘗試。②從數字 1、2 開始湊。

這串鍊子須組出 13 種不同的長度，分別為總珠數 1、2、3…至 13。我們嘗試將鍊子截成二段、三段都無法找出適合的解，最後將鍊子截成四段，才找出符合規則的二組最佳解，分別是(1-2-6-4)及(1-3-2-7)。

(一) 截成三段

我們試著將串珠截成三段來分析看看：

1. 首先兩段一定是不可缺少的，一段是 1 顆珠子，另一段是 2 顆珠子。若缺了這兩段則無法湊足連貫的珠子顆數 1 和 2。
2. 接著最後一段則是將剩下來的 10 顆珠子為一段，但問題來了，如此一來，我們便無法湊足連貫的珠子顆數 4、5、6、7、8 和 9。
3. 這串 13 顆珠子的鍊子最少只能截成四段，所截成的段數無法少於四段，而被截的四段珠子可以與相鄰處兩兩或三組以上相互組合出 13 種不同長度的鍊子。

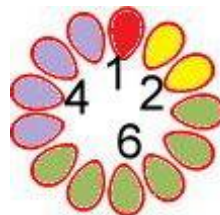


(二) 截成四段 我們找出符合規則的二組最佳解，分別是(1-2-6-4)及(1-3-2-7)。

1. 截成四段(1-2-6-4)

我們從數字 1 開始湊，依序如下：

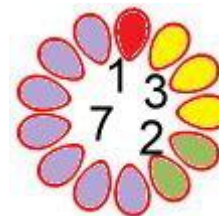
- a. 須要有 1 顆珠子為單獨一段。
- b. 接著在相鄰處選出 2 顆珠子為一段。
- c. 只要 1 與 2 相鄰，即可組合出 3 顆的長度。
- d. 直接選出 4 顆珠子自組成一段與 1 顆珠子相鄰，如此珠數 4 和 5 都有了。
- e. 再來挑選剩下來的 6 顆珠子自成一段，置於珠 4 和珠 2 的中間。
- f. 這樣一來珠數 6、7 ($=4+1+2$)、8 ($=2+6$)、9 ($=1+2+6$)、10 ($=4+6$)、11 ($=1+4+6$)、12 ($=4+6+2$)、13 ($=$ 所有珠數相加) 都出現了。



2. 截成四段(1-3-2-7)

和上一種分法不同：

- a. 除了珠子數 1 顆、2 顆分別單獨為一段。
- b. 另挑出 3 顆珠為一段，置於珠 1 和珠 2 中間。
- c. 這樣一來珠數 4 ($=1+3$)、5 ($=3+2$)、6 ($=1+3+2$) 都出現了。
- d. 扣掉前三段的總珠子數後剩下 7 顆珠子單獨組成一段，置於珠 1 及珠 2 中間。
- e. 剩下的珠數 8 ($=1+7$)、9 ($=7+2$)、10 ($=1+7+2$)、11 ($=7+1+3$)、12 ($=7+2+3$)、13 ($=$ 所有珠數相加) 都出現了。



所以整串 13 顆的鍊子所截段數能不能比截成四段再少一點？答案其實是不行的，如同前面所分析的一樣，最少段數只能截成四段。

二、珠子總數和截最少段數的關係

爲了瞭解鍊子中珠子總數和截最少顏色段的關係，我們分成兩方面來進行探討。第一，以總珠數爲出發點，從最少的總珠數開始，來探討珠子總數和截最少顏色段的關係；第二，利用截最少顏色段來驗證珠子總數和截最少顏色段的關係。

（一）以總珠子個數爲出發點

【抽絲剝繭】研究初期，我們單純利用紙、筆、橡皮擦在紙上作業，以總珠數 2 顆、3 顆、…、9 顆、10 顆、…、13 顆、14 顆爲固定條件，嘗試找出每一種珠子個數的所能截出的最少段數。

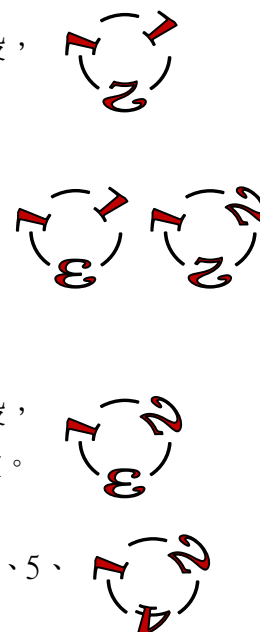
1. 總珠數 2 顆~3 顆（最少截成二段）

- (1) 總珠數爲 1 顆時，只有一顆珠子，當然只有 1 段（顏色），故最佳解是 (1)。
- (2) 總珠數爲 2 顆時，我們無法只截一段來湊連續 1 和 2 珠子數，而最佳解只能截 2 段，分別是 (1、1)，如此可以湊出連續 1 和 2 珠數。
- (3) 總珠數爲 3 顆時，最佳解爲只能截成 2 段，分別是 (1、2)，如此可以湊出連續的 1、2 和 3 的珠子數。



2. 總珠數 4 顆~7 顆（最少截成三段）

- (1) 總珠數爲 4 顆
我們無法只截成二段 $(1, 3)$ 、 $(2, 2)$ 來湊，最佳解爲截成 3 段，分別是 (1、1、2)，如此可湊出連續 1、2、3 和 4 的珠數。
- (2) 總珠數爲 5 顆
我們無法只截成二段 $(1, 4)$ 、 $(2, 3)$ 來湊，最佳解爲 3 段，分別是 (1、1、3) 和 (1、2、2)，如此可湊出連續 1、2、3、4 和 5 的珠數。
- (3) 總珠數爲 6 顆
我們無法只截成二段 $(1, 5)$ 、 $(2, 4)$ 來湊，最佳解爲截成 3 段，分別是 (1、2、3)，如此可湊出連續 1、2、3、4、5 和 6 的珠數。
- (4) 總珠數爲 7 顆
最佳解爲截成 3 段，分別是 (1-2-4)，如此可湊出連續 1、2、3、4、5、6 和 7 的珠數。



3. 總珠數 8 顆~13 顆（最少截成四段）

隨著總珠數增加，情況變得較複雜，如果再依照前面的分析方法，那麼只會亂槍打鳥，無法將所有的最佳解找出來，所以我們決定改變方法，先依序將所有可能的組合一一列出，再篩選出比較適合的解來驗證：

(1) 總珠數為 8 顆

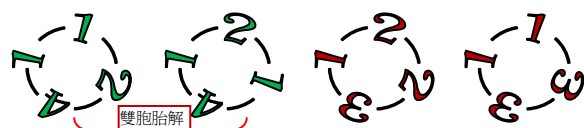
我們無法只截成三段(1-2-5)、(1-3-4)、(2-3-3)來湊。我們將 8 顆截成四段的(a-b-c-d)可能組合，先固定(a-b)，再變換(c-d)，依序推論。

固定(a-b)	變換(c-d)	組數
(1-1)	(1-1-1-5)、(1-1-2-4)、(1-1-3-3)、(1-1-4-2)、(1-1-5-1)	5 種
(1-2)	(1-2-1-4)、(1-2-2-3)、(1-2-3-2)、(1-2-4-1)	4 種
(1-3)	(1-3-1-3)、(1-3-2-2)、(1-3-3-1)	3 種
(1-4)	(1-4-1-2)、(1-4-2-1)	2 種
(1-5)	(1-5-1-1)	1 種
(2-1)	(2-1-1-4)、(2-1-2-3)、(2-1-3-2)、(2-1-4-1)	4 種
(2-2)	(2-2-1-3)、(2-2-2-2)、(2-2-3-1)	3 種
(2-3)	(2-3-1-2)、(2-3-2-1)	2 種
(2-4)	(2-4-1-1)	1 種
(3-1)	(3-1-1-3)、(3-1-2-2)、(3-1-3-1)	3 種
(3-2)	(3-2-1-2)、(3-2-2-1)	2 種
(3-3)	(3-3-1-1)	1 種
(4-1)	(4-1-1-2)、(4-1-2-1)	2 種
(4-2)	(4-2-1-1)	1 種
(5-1)	(5-1-1-1)	1 種

可是實際上仔細加以比對後，發現並沒有這麼多種可能的組合，將相同的組合排列再一起，可能的組合只剩下 8 種而已。

第 1 種	(1-1-2-4)、(1-1-4-2)、(1-2-4-1)、(1-4-2-1)、(2-1-1-4)、(2-4-1-1)、(4-1-1-2)、(4-2-1-1)	可湊出 1、2、...、8
第 2 種	(1-2-1-4)、(1-4-1-2)、(2-1-4-1)、(4-1-2-1)	可湊出 1、2、...、8
第 3 種	(1-2-2-3)、(1-3-2-2)、(2-1-3-1)、(2-2-1-3)、(2-2-3-1)、(2-3-1-2)、(3-1-2-1)、(3-2-2-1)	可湊出 1、2、...、8
第 4 種	(1-2-3-2)、(2-1-2-3)、(2-3-2-1)、(3-2-1-2)	缺少了 4
第 5 種	(1-1-1-5)、(1-1-5-1)、(1-5-1-1)、(5-1-1-1)	缺少了 4
第 6 種	(3-3-1-1)、(1-1-3-3)、(3-1-1-3)、(1-3-3-1)	可湊出 1、2、...、8
第 7 種	(1-3-1-3)、(3-1-3-1)	缺少了 2、6
第 8 種	(2-2-2-2)	缺少了 1、3、5

因此總珠數為 8 顆時，最佳解為截成 4 段，分別四組解 (1-1-2-4)、(1-2-1-4)、(1-2-2-3)、(1-1-3-3)，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7 和 8 的珠數，其中(1-1-2-4)、(1-2-1-4)二組解因數字相同，但在環中位置不同，我們將它當作雙胞胎解。



(2) 總珠數為 9 顆

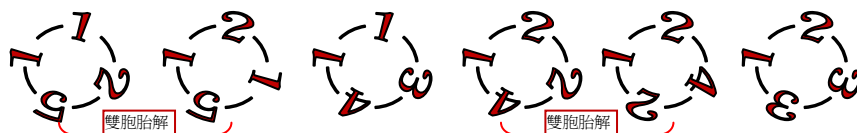
我們將四段組合成 9 顆的可能組合依照次序推論，發現共有下列幾組解：

固定(a-b)	變換(c-d)	組數
(1-1)	(1-1-1-6)、(1-1-2-5)、(1-1-3-4)、(1-1-4-3)、(1-1-5-2)、(1-1-6-1)	6 種
(1-2)	(1-2-1-5)、(1-2-2-4)、(1-2-3-3)、(1-2-4-2)、(1-2-5-1)	5 種
(1-3)	(1-3-1-4)、(1-3-2-3)、(1-3-3-2)、(1-3-4-1)	4 種
(1-4)	(1-4-1-3)、(1-4-2-2)、(1-4-3-1)	3 種
(1-5)	(1-5-1-2)、(1-5-2-1)	2 種
(1-6)	(1-6-1-1)	1 種
(2-1)	(2-1-1-5)、(2-1-2-4)、(2-1-3-3)、(2-1-4-2)、(2-1-5-1)	5 種
(2-2)	(2-2-1-4)、(2-2-2-3)、(2-2-3-2)、(2-2-4-1)	4 種
(2-3)	(2-3-1-3)、(2-3-2-2)、(2-3-3-1)	3 種
(2-4)	(2-4-1-2)、(2-4-2-1)	2 種
(2-5)	(2-5-1-1)	1 種
(3-1)	(3-1-1-4)、(3-1-2-3)、(3-1-3-2)、(3-1-4-1)	4 種
(3-2)	(3-2-1-3)、(3-2-2-2)、(3-2-3-1)	3 種
(3-3)	(3-3-1-2)、(3-3-2-1)	2 種
(3-4)	(3-4-1-1)	1 種
(4-1)	(4-1-1-3)、(4-1-2-2)、(4-1-3-1)	3 種
(4-2)	(4-2-1-2)、(4-2-2-1)	2 種
(4-3)	(4-3-1-1)	1 種
(5-1)	(5-1-1-2)、(5-1-2-1)	2 種
(5-2)	(5-2-1-1)	1 種
(6-1)	(6-1-1-1)	1 種

可是實際上仔細加以比對後，發現並沒有這麼多種可能的組合，將相同的組合排列再一起，可能的組合只剩下 10 種而已。

第 1 種	(1-1-2-5)、(1-1-5-2)、(1-2-5-1)、(1-5-2-1)、(2-1-1-5)、(2-5-1-1)、(5-1-1-2)、(5-2-1-1)	可湊出 1、2、…、9
第 2 種	(1-2-1-5)、(1-5-1-2)、(2-1-5-1)、(5-1-2-1)	可湊出 1、2、…、9
第 3 種	(1-1-3-4)、(1-1-4-3)、(1-3-4-1)、(1-4-3-1)、(3-1-1-4)、(3-4-1-1)、(4-1-1-3)、(4-3-1-1)	可湊出 1、2、…、9
第 4 種	(1-3-1-4)、(1-4-1-3)、(3-1-4-1)、(4-1-3-1)	缺少了 2、7
第 5 種	(1-2-2-4)、(1-4-2-2)、(2-1-4-2)、(2-2-1-4)、(2-2-4-1)、(2-4-1-2)、(4-1-2-2)、(4-2-2-1)	可湊出 1、2、…、9
第 6 種	(1-2-4-2)、(2-1-2-4)、(2-4-2-1)、(4-2-1-2)	可湊出 1、2、…、9
第 7 種	(1-2-3-3)、(1-3-3-2)、(2-1-3-3)、(3-3-1-2)、(3-1-2-3)、(3-2-1-3)、(3-3-1-2)、(3-3-2-1)	可湊出 1、2、…、9
第 8 種	(1-3-2-3)、(3-3-1-3)、(3-1-3-2)、(3-2-3-1)	缺少了 6
第 9 種	(2-2-2-3)、(2-3-2-2)、(3-2-2-1)、(3-3-2-2)	缺少了 1、8
第 10 種	(1-1-1-6)、(1-1-6-1)、(1-6-1-1)、(6-1-1-1)	缺少了 4、5

因此總珠數為 9 顆時，最佳解為截成四段，六組解分別為 (1-1-2-5)、(1-2-1-5)、(1-1-3-4)、(1-2-2-4)、(1-2-4-2)、(1-2-3-3)，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8 和 9 的珠數。其中 (1-1-2-5)、(1-2-1-5) 以及 (1-2-2-4)、(1-2-4-2) 二組解因數字相同，但在環中位置不同，我們將它當作雙胞胎解。



另外從上述總珠數為 8 及總珠數為 9 的分析組數來看：

- ❶ 以總珠數為 8 為例，當 $a=2$ 開始時，除了 (2-2-2-2) 與 (3-1-3-1) 二組未曾出現過，其餘的組數都曾出現過；而且 (2-2-2-2) 與 (3-1-3-1) 這兩組也不符遊戲規則，因為 (2-2-2-2) 中缺乏數字 1、(3-1-3-1) 中缺乏數字 2。
- ❷ 以總珠數為 9 為例，當 $a=2$ 開始時，除了 (2-2-2-2-1) 這組未曾出現過，其餘組數都曾出現過，且 (2-2-2-2-1) 這組也不符遊戲規則，因為 (2-2-2-2-1) 中缺乏數字 1。

所以為避免浪費過多時間在此，所以我們決定只要分析至(a-b)中的 $a \leq 2$ 為止。

(3) 總珠數為 10 顆

我們將四段組合成 10 顆的可能解依序推論，發現共有 $(7+6+5+4+3+2+1) = 28$ 種。

固定(a-b)	變換(c-d)	組數
(1-1)	(1-1-1-7)、(1-1-2-6)、(1-1-3-5)、(1-1-4-4)、(1-1-5-3)、(1-1-6-2)、(1-1-7-1)	7 種
(1-2)	(1-2-1-6)、(1-2-2-5)、(1-2-3-4)、(1-2-4-3)、(1-2-5-2)、(1-2-6-1)	6 種
(1-3)	(1-3-1-5)、(1-3-2-4)、(1-3-3-3)、(1-3-4-2)、(1-3-5-1)	5 種
(1-4)	(1-4-1-4)、(1-4-2-3)、(1-4-3-2)、(1-4-4-1)	4 種
(1-5)	(1-5-1-3)、(1-5-2-2)、(1-5-3-1)	3 種
(1-6)	(1-6-1-2)、(1-6-2-1)	2 種
(1-7)	(1-7-1-1)	1 種

經比對後，發現只剩下可能的組合只剩下 13 種而已。

第 1 種	(1-1-2-6)、(1-1-6-1)、(1-2-6-1)、(1-6-2-1)	缺少了 5
第 2 種	(1-2-1-6)、(1-6-1-1)	缺少了 5
第 3 種	(1-1-3-5)、(1-1-5-3)、(1-3-5-1)、(1-5-3-1)	可湊出 1、2、...、10
第 4 種	(1-3-1-5)、(1-5-1-3)	缺少了 2、8
第 5 種	(1-2-2-5)、(1-5-2-2)	可湊出 1、2、...、10
第 6 種	(1-2-5-2)	缺少了 4、8
第 7 種	(1-2-3-4)、(1-4-3-2)	可湊出 1、2、...、10
第 8 種	(1-2-4-3)、(1-3-4-2)	缺少了 5
第 9 種	(1-4-2-3)	可湊出 1、2、...、10
第 10 種	(1-3-3-3)	缺少了 2、5、8
第 11 種	(1-1-4-4)、(1-4-4-1)	缺少了 3、7
第 12 種	(1-4-1-4)	缺了 2、3、7
第 13 種	(1-1-1-1-1)、(1-1-1-1-1)、(1-1-1-1-1)	缺了 4、5、6

因此總珠數為 10 顆時，最佳解為截成四段，六組解分別為 (1-1-3-5)、(1-2-2-5)、(1-2-3-4)、(1-3-2-4)，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9 和 10 的珠數。



(4) 總珠數為 11 顆

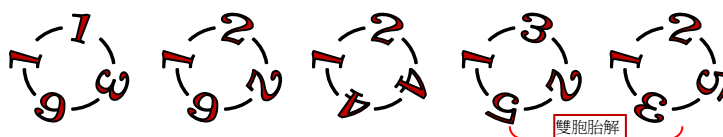
總珠數 11 顆，分成四段，分別加起來 $(8+7+6+5+4+3+2+1) = 36$ 種。

固定(a-b)	變換(c-d)	組數
(1-1)	$(1-1-1-8) \cdot (1-1-2-7) \cdot (1-1-3-6) \cdot (1-1-4-5) \cdot (1-1-5-4) \cdot (1-1-6-3) \cdot (1-1-7-2) \cdot (1-1-8-1)$	8 種
(1-2)	$(1-2-1-7) \cdot (1-2-2-6) \cdot (1-2-3-5) \cdot (1-2-4-4) \cdot (1-2-5-3) \cdot (1-2-6-2) \cdot (1-2-7-1)$	7 種
(1-3)	$(1-3-1-6) \cdot (1-3-2-5) \cdot (1-3-3-4) \cdot (1-3-4-3) \cdot (1-3-5-2) \cdot (1-3-6-1)$	6 種
(1-4)	$(1-4-1-5) \cdot (1-4-2-4) \cdot (1-4-3-3) \cdot (1-4-4-2) \cdot (1-4-5-1)$	5 種
(1-5)	$(1-5-1-4) \cdot (1-5-2-3) \cdot (1-5-3-2) \cdot (1-5-4-1)$	4 種
(1-6)	$(1-6-1-3) \cdot (1-6-2-2) \cdot (1-6-3-1)$	3 種
(1-7)	$(1-7-1-2) \cdot (1-7-2-1)$	2 種
(1-8)	$(1-8-1-1)$	1 種

經過比對，發現並沒有這麼多種解，我們將同一種排列在一起後就只剩下 16 種。

第 1 種	$(1-1-1-8) \cdot (1-1-8-1) \cdot (8-1-1-1)$	缺少了 4、5、6、7
第 2 種	$(1-1-2-7) \cdot (1-1-7-2) \cdot (1-2-7-1) \cdot (1-7-2-1)$	缺少了 5、6
第 3 種	$(1-2-1-7) \cdot (1-7-1-2)$	缺少了 5、6
第 4 種	$(1-1-3-6) \cdot (1-1-6-3) \cdot (1-3-6-1) \cdot (1-6-3-1)$	可湊出 1、2、...、11
第 5 種	$(1-3-1-6) \cdot (1-6-1-3)$	缺少了 2、3、9
第 6 種	$(1-1-4-5) \cdot (1-1-5-4) \cdot (1-4-5-1) \cdot (1-5-4-1)$	缺少了 3、8
第 7 種	$(1-4-1-5) \cdot (1-5-1-4)$	缺少了 2、3、8、9
第 8 種	$(1-2-2-6) \cdot (1-6-2-2)$	可湊出 1、2、...、11
第 9 種	$(1-2-6-2)$	缺少了 4、7
第 10 種	$(1-2-4-4) \cdot (1-4-4-2)$	可湊出 1、2、...、11
第 11 種	$(1-4-2-4)$	缺少了 3
第 12 種	$(1-3-3-4) \cdot (1-4-3-3)$	缺了 2、9
第 13 種	$(1-3-4-3)$	缺少了 2、5、6、9
第 14 種	$(1-3-2-5) \cdot (1-5-2-3)$	可湊出 1、2、...、11
第 15 種	$(1-2-3-5) \cdot (1-5-3-2)$	缺少了 4、7
第 16 種	$(1-2-5-3) \cdot (1-3-5-2)$	可湊出 1、2、...、11

因此總珠數為 11 顆時，最佳解為截成四段，四組解分別為 $(1-1-3-6)$ 、 $(1-2-2-6)$ 、 $(1-2-4-4)$ 、 $(1-3-2-5)$ ，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 和 11 的珠數。



(5) 總珠數為 12 顆

總珠數 12 顆，分成四段，分別加起來 $(9+8+7+6+5+4+3+2+1) = 45$ 種。

固定(a-b)	變換(c-d)	組數
(1-1)	$(1-1-1-9) \cdot (1-1-2-8) \cdot (1-1-3-7) \cdot (1-1-4-6) \cdot (1-1-5-5) \cdot (1-1-6-4) \cdot (1-1-7-3) \cdot (1-1-8-2) \cdot (1-1-9-1)$	9 種
(1-2)	$(1-2-1-8) \cdot (1-2-2-7) \cdot (1-2-3-6) \cdot (1-2-4-5) \cdot (1-2-5-4) \cdot (1-2-6-3) \cdot (1-2-7-2) \cdot (1-2-8-1)$	8 種
(1-3)	$(1-3-1-7) \cdot (1-3-2-6) \cdot (1-3-3-5) \cdot (1-3-4-4) \cdot (1-3-5-3) \cdot (1-3-6-2) \cdot (1-3-7-1)$	7 種
(1-4)	$(1-4-1-6) \cdot (1-4-2-5) \cdot (1-4-3-4) \cdot (1-4-4-3) \cdot (1-4-5-2) \cdot (1-4-6-1)$	6 種
(1-5)	$(1-5-1-5) \cdot (1-5-2-4) \cdot (1-5-3-3) \cdot (1-5-4-2) \cdot (1-5-5-1)$	5 種
(1-6)	$(1-6-1-4) \cdot (1-6-2-3) \cdot (1-6-3-2) \cdot (1-6-4-1)$	4 種
(1-7)	$(1-7-1-3) \cdot (1-7-2-2) \cdot (1-7-3-1)$	3 種
(1-8)	$(1-8-1-2) \cdot (1-8-2-1)$	2 種
(1-9)	$(1-9-1-1)$	1 種

經過比對，發現並沒有這麼多種解，我們將同一種排列在一起後就只剩下 21 種。

第 1 種	(1-1-1-9) ∙ (1-1-9-1) ∙ (9-1-1-1)	缺少了 4、5、6、7、8
第 2 種	(1-1-2-8) ∙ (1-1-8-2) ∙ (1-2-8-1) ∙ (1-8-2-1)	缺少了 5、6、7
第 3 種	(1-2-1-8) ∙ (1-8-1-2)	缺少了 5、6、7
第 4 種	(1-1-3-7) ∙ (1-1-7-3) ∙ (1-3-7-1) ∙ (1-7-3-1)	缺少了 6
第 5 種	(1-3-1-7) ∙ (1-7-1-3)	缺少了 2、6、10
第 6 種	(1-1-4-6) ∙ (1-1-6-4) ∙ (1-4-6-1) ∙ (1-6-4-1)	缺少了 3、9
第 7 種	(1-4-1-6) ∙ (1-6-1-4)	缺少了 2、3、9、10
第 8 種	(1-2-2-7) ∙ (1-7-2-2)	缺少了 6
第 9 種	(1-2-7-2)	缺少了 4、6、8
第 10 種	(1-2-4-5) ∙ (1-5-4-2)	可湊出 1、2、...、12
第 11 種	(1-2-5-4) ∙ (1-4-5-2)	缺少了 6
第 12 種	(1-4-2-5) ∙ (1-5-2-4)	缺少了 3、9
第 13 種	(1-3-3-5) ∙ (1-5-3-3)	缺少了 2、10
第 14 種	(1-3-5-3)	缺少了 2、6、10
第 15 種	(1-3-2-6) ∙ (1-6-2-3)	可湊出 1、2、...、12
第 16 種	(1-2-3-6) ∙ (1-6-3-2)	缺少了 4、8
第 17 種	(1-2-6-3) ∙ (1-3-6-2)	缺少了 5、7
第 18 種	(1-1-5-5) ∙ (1-5-5-1)	缺少了 1、3、4、8、9
第 19 種	(1-5-1-5)	缺少了 1、2、3、4、8、9、10
第 20 種	(1-3-4-4) ∙ (3-4-4-1)	缺少了 2、6、10
第 21 種	(1-4-3-4)	缺少了 2、6、10

因此總珠數為 12 顆時，最佳解為截成四段，二組解分別為 (1-2-4-5)、(1-3-2-6)，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 和 12 的珠數。



(6) 總珠數為 13 顆

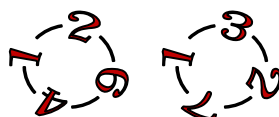
總珠數 13 顆，分成四段，總共 $(10+9+8+7+6+5+4+3+2+1) = 55$ 種。

固定(a-b)	變換(c-d)	組數
(1-1)	(1-1-1-10) ∙ (1-1-2-9) ∙ (1-1-3-8) ∙ (1-1-4-7) ∙ (1-1-5-6) ∙ (1-1-6-5) ∙ (1-1-7-4) ∙ (1-1-8-3) ∙ (1-1-9-2) ∙ (1-1-10-1)	10 種
(1-2)	(1-2-1-9) ∙ (1-2-2-8) ∙ (1-2-3-7) ∙ (1-2-4-6) ∙ (1-2-5-5) ∙ (1-2-6-4) ∙ (1-2-7-3) ∙ (1-2-8-2) ∙ (1-2-9-1)	9 種
(1-3)	(1-3-1-8) ∙ (1-3-2-7) ∙ (1-3-3-6) ∙ (1-3-4-5) ∙ (1-3-5-4) ∙ (1-3-6-3) ∙ (1-3-7-2) ∙ (1-3-8-1)	8 種
(1-4)	(1-4-1-7) ∙ (1-4-2-6) ∙ (1-4-3-5) ∙ (1-4-4-4) ∙ (1-4-5-3) ∙ (1-4-6-2) ∙ (1-4-7-1)	7 種
(1-5)	(1-5-1-6) ∙ (1-5-2-5) ∙ (1-5-3-4) ∙ (1-5-4-3) ∙ (1-5-5-2) ∙ (1-5-6-1)	6 種
(1-6)	(1-6-1-5) ∙ (1-6-2-4) ∙ (1-6-3-3) ∙ (1-6-4-2) ∙ (1-6-5-1)	5 種
(1-7)	(1-7-1-4) ∙ (1-7-2-3) ∙ (1-7-3-2) ∙ (1-7-4-1)	4 種
(1-8)	(1-8-1-3) ∙ (1-8-2-2) ∙ (1-8-3-1)	3 種
(1-9)	(1-9-1-2) ∙ (1-9-2-1)	2 種
(1-10)	(1-10-1-1)	1 種

經過比對，發現只剩下 25 種。

第 1 種	(1-1-1-10)・(1-1-10-1)・(1-10-1-1)	缺少了 4、5、6、7、8、9
第 2 種	(1-1-2-9)・(1-1-9-2)・(1-2-9-1)・(1-9-2-1)	缺少了 5、6、7、8
第 3 種	(1-2-1-9)・(1-9-1-2)	缺少了 5、6、7、8
第 4 種	(1-1-3-8)・(1-1-8-3)・(1-3-8-1)・(1-8-3-1)	缺少了 5、6、7
第 5 種	(1-3-1-8)・(1-8-1-3)	缺少了 2、5、6、7、11
第 6 種	(1-1-4-7)・(1-7-4-1)	缺少了 2、3、10
第 7 種	(1-4-1-7)・(1-7-1-4)	缺少了 2、3、10
第 8 種	(1-2-2-8)・(1-8-2-2)	缺少了 6、7
第 9 種	(1-2-8-2)	缺少了 4、6、7、9
第 10 種	(1-3-4-6)・(1-6-4-3)	缺少了 5、8
第 11 種	(1-3-5-5)・(1-5-5-3)	可湊出 1、2、…、13
第 12 種	(1-3-3-7)・(1-3-7-3)	缺少了 3、10
第 13 種	(1-3-3-6)・(1-6-3-3)	缺少了 2、5、8、11
第 14 種	(1-3-6-3)	缺少了 2、5、7、8、11
第 15 種	(1-3-2-7)・(1-7-2-3)	可湊出 1、2、…、13
第 16 種	(1-2-3-7)・(1-7-3-2)	缺少了 4、9
第 17 種	(1-2-7-3)・(1-3-7-2)	缺少了 5、8
第 18 種	(1-1-5-6)・(5-6-1-1)・(1-5-6-1)・(1-6-5-1)	缺少了 3、4、9、10、11
第 19 種	(1-5-1-6)・(6-1-5-1)	缺少了 2、3、4、9、10、11
第 20 種	(1-3-4-5)・(1-5-4-3)	缺少了 2、11
第 21 種	(1-4-3-5)・(1-5-3-4)	缺少了 2、10、11
第 22 種	(1-3-5-4)・(1-4-5-3)	缺少了 2、6、7、11
第 23 種	(1-2-5-5)・(1-5-5-2)	缺少了 4、9
第 24 種	(1-5-2-5)	缺少了 3、4、9、10
第 25 種	(1-4-4-4)	缺少了 2、3、6、7、10、11

因此總珠數為 13 顆時，最佳解為截成四段，二組解分別為 (1-2-6-4)・(1-3-2-7)，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 和 13 的珠數。



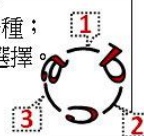
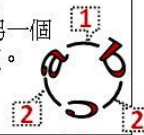
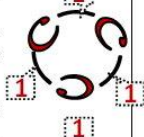
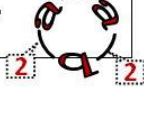
【化繁為簡】

隨著總珠數增加，加上所截斷數也持續增加著，讓情況分析起來較複雜。如果再利用先前分析的方式，那麼我們可能會許多花時間在一開始要找的可能組合數上，而且這些組合數會多到驚人。

根據先前在總珠數 8 顆~13 顆的研究，我們發現因為手環可以以任何角度來觀看，所以有一些分析出來的組合其實是同一類。例如：(1-2-1-9)・(1-9-1-2)・(2-1-9-1)・(9-1-2-1) 是一樣的，不管從順時針或逆時針來看，他們都是同一種，因此我們決定變更尋找可能解的方式，請詳見下表分析：

最後我們決定先只針對數字來分析，確定每一組數字後，再利用數字位置變換間的組合來找出所有可能的解，最後將這些的可能的解一一核對，看看是否符合規則。

- ❶ 原本我們將總珠數 13 顆分成四段，共有 220 種的可能的解，分析起來較費時費力。
- ❷ 我們利用 $a \leq b \leq c \leq d$ 的方式將可能解縮減一半，因為多數的解同屬相同的一種。
- ❸ 先決條件為 $a+b+c+d=13$ 以及 $a \leq b \leq c \leq d$ 。
- ❹ 首先從 $(a-b)=(1-1)$ 開始，接著讓 $c=1$ ，則 $d=13-a-b-c=13-1-1-1=10$ ，故 $(c-d)=(1-10)$ 。
接續仍固定 $(a-b)=(1-1)$ ，變化 $(c-d)$ 的值，讓 $(c-d) \Rightarrow (1-10) \Rightarrow (2-9) \Rightarrow (3-8) \Rightarrow (4-7) \Rightarrow (5-6)$ 為止。
再者變更 $(a-b)=(1-2)$ ，變化 $(c-d)$ 的值，讓 $(c-d) \Rightarrow (2-8) \Rightarrow (2-7) \Rightarrow (3-6) \Rightarrow (4-5)$ 為止。
依此類推繼續變換，直到 $(a-b)=(2-2)$ 之前停止。
因為當 $b=2, c=2$ ，則 $d=13-2-2-2=7$ ，則 $(a-b-c-d)=(2-2-2-2)$ ，
這樣這組解將會因一開始就缺乏數字 1 而遭到刪除。
- ❺ 而當我們大量縮減可能的解後，接著就必須從針對某組解來找出所有可能的類似解，因為可能因數字在圓圈上的位置不同，而有不同的變化。
- ❻ 至於如何判斷同一組數字是否有另外的「雙胞胎解」，則請詳見右下表的位置分析。

(a-b)	(c-d)	可能的組合有	最佳解	圈圈位置分析
(1-1)	(1-10)	1 種 (1-1-1-10)	×	1. 當(a-b-c-d)出現四種不同的數字時： a、b、c 三個數字出現時，只能算一種； 接著 d 若要排入圈圈中，就有 3 種選擇。 因此當 4 個數字都不同時， 共有 3 種排列方式。 
	(2-9)	2 種 (1-1-2-9), (1-2-1-9)	×	
	(3-8)	2 種 (1-1-3-8), (1-3-1-8)	×	
	(4-7)	2 種 (1-1-4-7), (1-4-1-7)	×	
	(5-6)	2 種 (1-1-5-6), (1-5-1-6)	×	
(1-2)	(2-8)	2 種 (1-2-2-8), (1-2-8-2)	×	2. 當(a-b-c-c)出現三種不同的數字時： 將 a、b、c 排入圈圈中，最後再將另一個 c 排入圈圈中，則 c 只剩下 2 個選項。 因此出現 3 種不同數字時， 共有 2 種排列方式。 
	(3-7)	3 種 (1-2-3-7), (1-2-7-3), (1-3-2-7)	(1-3-2-7)	
	(4-6)	3 種 (1-2-4-6), (1-2-6-4), (1-6-2-4)	(1-2-6-4)	
	(5-5)	2 種 (1-2-5-5), (1-5-2-5)	×	
(1-3)	(3-6)	2 種 (1-3-3-6), (1-3-6-3)	缺乏數字 2 故被淘汰	3. 當(a-c-c-c)出現三種不同的數字時： 將 c、c、c 排入圈圈中，最後再將 a 排入圈圈中，則 a 只剩下 1 個選項。 
(1-4)	(4-4)	1 種 (1-4-4-4)		
(2-2)	(2-7)	1 種 (2-2-2-7)	缺乏數字 1 故被淘汰	4. 當(a-a-b-b)出現二種不同的數字時： 將 a、a、b 排入圈圈中，最後再將 a 排入圈圈中，則 b 只剩下 2 個選項。 
	(3-6)	2 種 (2-2-3-6), (2-3-2-6)		
	(4-5)	2 種 (2-2-4-5), (2-4-2-5)		
(2-3)	(3-5)	2 種 (2-3-3-5), (2-3-5-3)		
	(4-4)	2 種 (2-3-4-4), (2-4-3-4)		
(3-3)	(3-4)	1 種 (3-3-3-4)		

不過隨著段數與珠數增加，可能的組合愈來愈多，為了縮短研究的時間，在老師建議下，我們參考一篇文獻--神奇的尺裡頭的研究工具（我們參考研究中的程式設計，在自己加以改變），利用Excle 試算表來輔助計算，以便快速找出每一種不同長度鍊子的最佳解。

L19				
	A	B	C	D
1	欄名	公式	公式說明	數字
2	珠1	a	輸入的四個數值	1
3	珠2	b		2
4	珠3	c		6
5	珠4	d		4
6	結果	=COUNTIF(B20:B32,0)	(計算珠數1到13出現幾次0)	0
7	組合1	=a	單一位數	1
8	組合2	=b		2
9	組合3	=c		6
10	組合4	=d		4
11	組合5	=a+b	兩兩相加後的值	3
12	組合6	=b+c		8
13	組合7	=c+d		10
14	組合8	=d+a		5
15	組合9	=a+b+c	每三個相加後的值	9
16	組合10	=b+c+d		12
17	組合11	=c+d+a		11
18	組合12	=d+a+b		7
19	組合13	=a+b+c+d	全部珠子數相加的值	13
20	檢查1	=COUNTIF(B7:B19,1)	檢查出現珠數1顆的次數	1
21	檢查2	=COUNTIF(B7:B19,2)	檢查出現珠數2顆的次數	1
22	檢查3	=COUNTIF(B7:B19,3)	檢查出現珠數3顆的次數	1
23	檢查4	=COUNTIF(B7:B19,4)	檢查出現珠數4顆的次數	1
24	檢查5	=COUNTIF(B7:B19,5)	檢查出現珠數5顆的次數	1
25	檢查6	=COUNTIF(B7:B19,6)	檢查出現珠數6顆的次數	1
26	檢查7	=COUNTIF(B7:B19,7)	檢查出現珠數7顆的次數	1
27	檢查8	=COUNTIF(B7:B19,8)	檢查出現珠數8顆的次數	1
28	檢查9	=COUNTIF(B7:B19,9)	檢查出現珠數9顆的次數	1
29	檢查10	=COUNTIF(B7:B19,10)	檢查出現珠數10顆的次數	1
30	檢查11	=COUNTIF(B7:B19,11)	檢查出現珠數11顆的次數	1
31	檢查12	=COUNTIF(B7:B19,12)	檢查出現珠數12顆的次數	1
32	檢查13	=COUNTIF(B7:B19,13)	檢查出現珠數13顆的次數	1
33				

4. 總珠數 14 顆~19 顆及 21 顆（最少截成五段）

(1) 總珠數為 14 顆

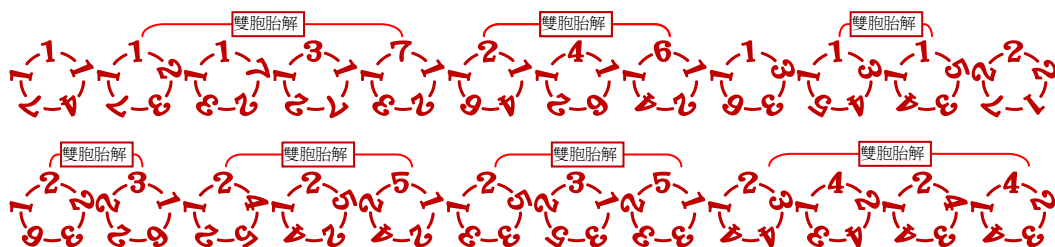
隨著總珠數增加為 14 顆，我們嘗試著將其截分為四段，但是我們試了好幾次，都無法將 14 顆截成四段來組合出所有 1、2……至 14 的珠數。

(a-b)	(c-d)		可能的組合	最佳解
(1-1)	(1-11)	1 種	(1-1-1-11)	×
	(2-10)	2 種	(1-1-2-10)、(1-2-1-10)	×
	(3-9)	2 種	(1-1-3-9)、(1-3-1-9)	×
	(4-8)	2 種	(1-1-4-8)、(1-4-1-8)	×
	(5-7)	2 種	(1-1-5-7)、(1-5-1-7)	×
	(6-6)	2 種	(1-1-6-6)、(1-6-1-6)	×
(1-2)	(2-9)	2 種	(1-2-2-9)、(1-2-9-2)	×
	(3-8)	3 種	(1-2-3-8)、(1-2-8-3)、(1-8-2-3)	×
	(4-7)	3 種	(1-2-4-7)、(1-2-7-4)、(1-7-2-4)	×
	(5-6)	3 種	(1-2-5-6)、(1-2-6-5)、(1-6-2-5)	×
(1-3)	(3-7)	2 種	(1-3-3-7)、(1-3-7-3)	×
	(4-6)	3 種	(1-3-4-6)、(1-3-6-4)、(1-6-3-4)	×
	(5-5)	2 種	(1-5-5-5)、(1-5-3-5)	×
(1-4)	(4-5)	2 種	(1-4-4-5)、(1-4-5-4)	×

由於無法截為四段，故我們將串鍊截為五段，利用 $(a-b-c-d-e) \Rightarrow (a-b-c) + (d-e)$ 分析。

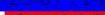
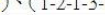
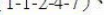
(a-b-c)	(d-e)		可能的組合	24 組最佳解
(1-1-1)	(1-10)	1 種	(1-1-1-1-10)	
	(2-9)	2 種	(1-1-1-2-9)、(1-2-1-1-9)	
	(3-8)	2 種	(1-1-1-3-8)、(1-3-1-1-8)	(1-1-1-4-7)
	(4-7)	2 種	(1-1-1-4-7)、(1-4-1-1-7)	(1-1-2-3-7) (1-1-7-2-3) (1-3-1-7-2) (1-7-1-2-3)
	(5-6)	2 種	(1-1-1-5-6)、(1-5-1-1-6)	(1-2-1-4-6) (1-4-1-6-2) (1-6-1-2-4)
(1-1-2)	(2-8)	4 種	(1-1-2-2-8)、(1-2-1-2-8)、(1-2-2-1-8)、(2-1-1-2-8)	(1-1-4-6-6)
	(3-7)	6 種	(1-1-2-3-7)、(1-1-3-7-2)、(1-1-7-2-3)、(1-2-1-3-7)、(1-3-1-7-2)、(1-7-1-2-3)	(1-1-4-6-6)
	(4-6)	6 種	(1-1-2-4-6)、(1-1-4-6-2)、(1-1-6-2-4)、(1-2-1-4-6)、(1-4-1-6-2)、(1-6-1-2-4)	(1-1-4-6-6)
	(5-5)	4 種	(1-1-5-5-2)、(1-5-1-5-2)、(1-5-5-1-2)、(5-1-1-5-2)	(1-1-3-4-5) (1-1-5-3-4)
	(3-6)	4 種	(1-1-3-3-6)、(1-3-1-3-6)、(1-3-3-1-6)、(3-1-1-3-6)	
(1-1-3)	(4-5)	6 種	(1-1-3-4-5)、(1-1-4-5-3)、(1-1-5-3-4)、(1-3-1-4-5)、(1-4-1-5-3)、(1-5-1-3-4)	(1-2-2-3-6) (2-3-1-6-2) (1-2-4-5-2) (1-2-5-2-4)
	(1-1-4)	2 種	(1-1-4-4-4)、(1-4-4-1-4)	(2-5-1-2-4)
(1-2-2)	(2-7)	2 種	(2-2-2-1-7)、(2-2-1-2-7)	(1-2-5-3-3) (2-3-1-3-5) (2-5-1-3-3)
	(3-6)	6 種	(1-2-2-3-6)、(1-2-3-6-2)、(1-2-6-2-3)、(2-2-1-3-6)、(2-3-1-6-2)、(2-6-1-2-3)	(2-3-1-4-4) (1-4-1-4-5) (1-2-4-4-4) (1-4-2-3-4)
	(4-5)	6 種	(1-2-2-4-5)、(1-2-4-5-2)、(1-2-5-2-4)、(2-2-1-4-5)、(2-4-1-5-2)、(2-5-1-2-4)	
(1-2-3)	(3-5)	6 種	(1-2-3-3-5)、(1-2-3-5-3)、(1-2-5-3-3)、(2-3-1-3-5)、(2-3-1-5-3)、(2-5-1-3-3)	
	(4-4)	6 種	(1-2-3-4-4)、(1-3-2-4-4)、(3-1-2-4-4)、(1-4-2-4-3)、(1-2-4-3-4)、(1-4-2-3-4)	
(1-3-3)	(3-4)	2 種	(3-3-3-1-4)、(3-3-1-3-4)	

我們發現總珠數為 14 顆時，最佳解為截成五段，分別有下列 24 組最佳解，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13 和 14 的珠數。

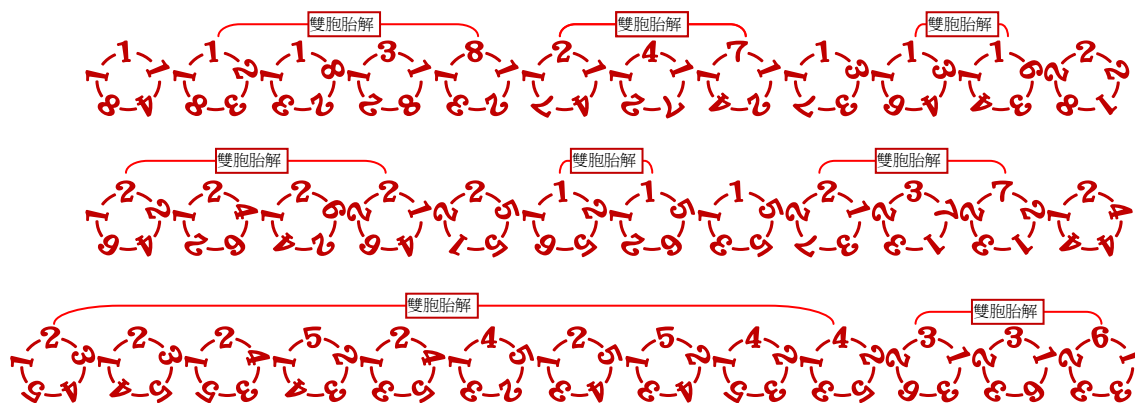


(2) 總珠數為 15 顆

因總珠數 14 顆只能截為五段，所以總珠數 15 顆也截分為五段來進行分析。

(a-b-c)	(d-e)		可能的組合	37 組最佳解
(1-1-1)	(1-11)	1 種	(1-1-1-1-11)	
	(2-10)	2 種	(1-1-1-2-10)、(1-2-1-1-10)	
	(3-9)	2 種	(1-1-1-3-9)、(1-3-1-1-9)	
	(4-8)	2 種	 、(1-4-1-1-8)	(1-1-2-3-8) (1-1-8-2-3)  (1-8-1-2-3)
	(5-7)	2 種	(1-1-1-5-7)、(1-5-1-1-7)	 (1-4-1-7-2) 
	(6-6)	2 種	(1-1-1-6-6)、(1-6-1-1-6)	
(1-1-2)	(2-9)	4 種	(1-1-2-2-9)、(1-2-1-2-9)、(1-2-2-1-9)、(2-1-1-2-9)	 、 
	(3-8)	6 種	 、(1-1-3-8-2)、  、(1-2-1-3-8)、  、(1-8-1-2-3)	
	(4-7)	6 種	(1-1-2-4-7)、  、(1-1-7-2-4)、(1-2-1-4-7)、  、 	
	(5-6)	6 種	 、  、(1-1-6-2-5)、(1-2-1-5-6)、(1-5-1-6-2)、(1-6-1-2-5)	
	(3-7)	4 種	 、(1-3-1-3-7)、(1-3-3-1-7)、(3-1-1-3-7)	
(1-1-3)	(4-6)	6 種	 、(1-1-4-6-3)、  、(1-3-1-4-6)、(1-4-1-6-3)、(1-6-1-3-4)	 (2-3-7-1-3) 
	(5-5)	4 種	 、(1-5-1-5-3)、(1-5-5-1-3)、(5-1-1-5-3)	
(1-1-4)	(4-5)	4 種	(1-1-4-4-5)、(1-4-1-4-5)、(1-4-4-1-5)、(4-1-1-4-5)	 (1-3-4-6-2)  (2-2-1-4-6)
(1-2-2)	(2-8)	2 種	 、(2-2-1-2-8)	
	(3-7)	6 種	 、(2-2-3-7-1)、  、(2-1-2-3-7)、(2-3-2-7-1)、 	 、 
	(4-6)	6 種	 、  、  、(2-2-1-4-6)、(2-4-1-6-2)、(2-6-1-2-4)	
	(5-5)	4 種	 、(2-5-2-5-1)、(2-5-5-2-1)、(5-2-2-5-1)	
(1-2-3)	(3-6)	6 種	(1-2-3-3-6)、(1-2-3-6-3)、(1-2-6-3-3)、  、  、 	 (1-2-3-5-4)  (1-5-2-3-4)  (1-4-5-2-3)  (1-5-2-4-3)  (1-4-2-5-3)
	(4-5)	12 種	 、  、  、(1-5-2-3-4)、(1-2-5-3-4)、   、  、  、  、  、(1-5-4-2-3)	
(1-2-4)	(4-4)	2 種	 、(1-4-4-2-4)	
(1-3-3)	(3-5)	2 種	(1-3-3-3-5)、(3-3-1-3-5)	
	(4-4)	4 種	(3-3-4-4-1)、(3-4-3-4-1)、(3-4-4-3-1)、(4-3-3-4-1)	

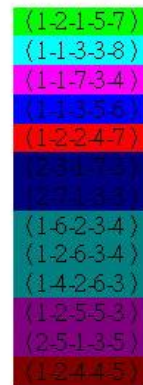
我們發現總珠數為 15 顆時，最佳解為截成五段，分別有下列 37 組最佳解，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14 和 15 的珠數。



(3) 總珠數為 16 顆

隨著總珠數增加為 16 顆，截分為五段。

(a-b-c)	(d-e)	可能的組合	13 組最佳解
(1-1-1)	(1-12)	1 種	(1-1-1-1-12)
	(2-10)	2 種	(1-1-1-2-11) 、 (1-2-1-1-11)
	(3-10)	2 種	(1-1-1-3-10) 、 (1-3-1-1-10)
	(4-9)	2 種	(1-1-1-4-9) 、 (1-4-1-1-9)
	(5-8)	2 種	(1-1-1-5-8) 、 (1-5-1-1-8)
	(6-7)	2 種	(1-1-1-6-7) 、 (1-6-1-1-7)
(1-1-2)	(2-10)	4 種	(1-1-2-2-10) 、 (1-2-1-2-10) 、 (1-2-2-1-10) 、 (2-1-1-2-10)
	(3-9)	6 種	(1-1-2-3-9) 、 (1-1-3-9-2) 、 (1-1-9-2-3) 、 (1-2-1-3-9) 、 (1-3-1-9-2) 、 (1-9-1-2-3)
	(4-8)	6 種	(1-1-2-4-8) 、 (1-1-4-8-2) 、 (1-1-8-2-4) 、 (1-2-1-4-8) 、 (1-4-1-8-2) 、 (1-8-1-2-4)
	(5-7)	6 種	(1-1-2-5-7) 、 (1-1-5-7-2) 、 (1-1-7-2-5) 、 (1-2-1-5-7) 、 (1-5-1-7-2) 、 (1-7-1-2-5)
	(6-6)	4 種	(1-1-6-6-2) 、 (1-6-1-6-2) 、 (1-6-6-1-2) 、 (6-1-1-6-2)
	(3-8)	4 種	(1-1-3-3-8) 、 (1-3-1-3-8) 、 (1-3-3-1-8) 、 (3-1-1-3-8)
(1-1-3)	(4-7)	6 種	(1-1-3-4-7) 、 (1-1-4-7-3) 、 (1-1-7-3-4) 、 (1-3-1-4-7) 、 (1-4-1-7-3) 、 (1-7-1-3-4)
	(5-6)	6 種	(1-1-3-5-6) 、 (1-1-5-6-3) 、 (1-1-6-3-5) 、 (1-3-1-5-6) 、 (1-5-1-6-3) 、 (1-6-1-3-5)
(1-1-4)	(4-6)	4 種	(1-1-4-4-6) 、 (1-4-1-4-6) 、 (1-4-4-1-6) 、 (4-1-1-4-6)
	(5-5)	4 種	(1-1-5-5-4) 、 (1-5-1-5-4) 、 (1-5-5-1-4) 、 (5-1-1-5-4)
(1-2-2)	(2-9)	2 種	(2-2-2-1-9) 、 (2-2-1-2-9)
	(3-8)	6 種	(2-2-1-3-8) 、 (2-2-3-8-1) 、 (2-3-8-1-3) 、 (2-1-2-3-8) 、 (2-3-2-8-1) 、 (2-8-2-1-3)
	(4-7)	6 種	(1-2-2-4-7) 、 (1-2-4-7-2) 、 (1-2-7-2-4) 、 (2-2-1-4-7) 、 (2-4-1-7-2) 、 (2-7-1-2-4)
	(5-6)	6 種	(1-2-2-5-6) 、 (1-2-5-6-2) 、 (1-2-6-2-5) 、 (2-2-1-5-6) 、 (2-5-1-6-2) 、 (2-6-1-2-5)
(1-2-3)	(3-7)	6 種	(1-2-3-3-7) 、 (1-2-3-7-3) 、 (1-2-7-3-3) 、 (2-3-1-3-7) 、 (2-3-1-7-3) 、 (2-7-1-3-3)
	(4-6)	12 種	(1-2-3-4-6) 、 (1-2-3-6-4) 、 (1-2-4-3-6) 、 (1-6-2-3-4) 、 (1-2-6-3-4) 、 (1-2-4-6-3) 、 (1-6-4-3-6) 、 (1-6-2-4-3) 、 (1-4-2-3-6) 、 (1-4-2-6-3) 、 (1-4-6-2-3) 、 (1-6-4-2-3)
	(5-5)	6 種	(1-2-3-5-5) 、 (1-2-5-5-3) 、 (1-2-5-3-5) 、 (2-5-1-3-5) 、 (2-5-1-5-3) 、 (2-3-1-5-5)
(1-2-4)	(4-5)	6 種	(1-2-5-4-4) 、 (1-2-4-4-5) 、 (1-2-4-5-4) 、 (2-4-1-5-4) 、 (2-4-1-4-5) 、 (2-5-1-4-4)
(1-3-3)	(3-6)	2 種	(1-3-3-3-6) 、 (3-3-1-3-6)
	(4-5)	6 種	(1-3-3-4-5) 、 (1-3-4-5-3) 、 (1-3-5-3-4) 、 (3-3-1-4-5) 、 (3-4-1-5-3) 、 (3-5-1-3-4)
(1-3-4)	(4-4)	2 種	(1-4-4-4-3) 、 (4-4-1-4-3)



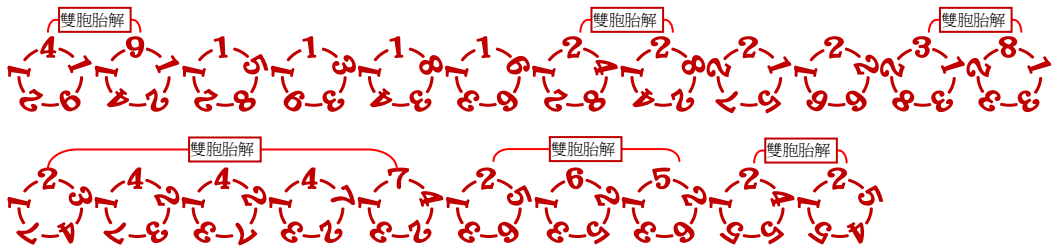
我們發現總珠數 16 顆，最佳解為截成五段，分別有下列 13 組最佳解，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15 和 16 的珠數。



(4) 總珠數為 17 顆 隨著總珠數增加為 17 顆，截分為五段。

(a-b-c)	(d-e)	可能的組合	23 組最佳解
(1-1-1)	(1-13)	1 種 (1-1-1-1-13)	(1-4-1-9-2) (1-9-1-2-4) (1-1-5-8-2) (1-1-3-3-9) (1-1-6-6-3) (1-2-2-5-7) (1-2-2-6-6) (2-3-1-3-8) (2-8-1-3-3) (1-2-3-4-7) (1-4-2-3-7) (1-4-7-2-3) (1-2-5-6-3) (1-6-2-5-3) (1-5-2-6-3) (1-2-4-5-5) (1-2-5-4-5)
	(2-12)	2 種 (1-1-1-2-12) 、 (1-2-1-1-12)	
	(3-11)	2 種 (1-1-1-3-11) 、 (1-3-1-1-11)	
	(4-10)	2 種 (1-1-1-4-10) 、 (1-4-1-1-10)	
	(5-9)	2 種 (1-1-1-5-9) 、 (1-5-1-1-9)	
	(6-8)	2 種 (1-1-1-6-8) 、 (1-1-6-1-8)	
	(7-7)	2 種 (1-1-1-7-7) 、 (1-1-7-1-7)	
(1-1-2)	(2-11)	4 種 (1-1-2-2-11) 、 (1-2-1-2-11) 、 (2-1-1-2-11)	
	(3-10)	6 種 (1-1-2-3-10) 、 (1-1-3-10-2) 、 (1-1-10-2-3) 、 (1-2-1-3-10) 、 (1-3-1-10-2) 、 (1-10-1-2-3)	
	(4-9)	6 種 (1-1-2-4-9) 、 (1-1-4-9-2) 、 (1-1-9-2-4) 、 (1-2-1-4-9) 、 (1-4-1-9-2) 、 (1-9-1-2-4)	
	(5-8)	6 種 (1-1-2-5-8) 、 (1-1-5-8-2) 、 (1-1-8-2-5) 、 (1-2-1-5-8) 、 (1-5-1-8-2) 、 (1-8-1-2-5)	
	(6-7)	6 種 (1-1-2-6-7) 、 (1-1-6-7-2) 、 (1-1-7-2-6) 、 (1-2-1-6-7) 、 (1-6-1-7-2) 、 (1-7-1-2-6)	
(1-1-3)	(3-9)	4 種 (1-1-3-3-9) 、 (1-3-1-3-9) 、 (1-3-3-1-9) 、 (3-1-1-3-9)	
	(4-8)	6 種 (1-1-3-4-8) 、 (1-1-4-8-3) 、 (1-1-8-3-4) 、 (1-3-1-4-8) 、 (1-4-1-8-3) 、 (1-8-1-3-4)	
	(5-7)	6 種 (1-1-3-5-7) 、 (1-1-5-7-3) 、 (1-1-7-3-5) 、 (1-3-1-5-7) 、 (1-5-1-7-3) 、 (1-7-1-3-5)	
	(6-6)	4 種 (1-1-6-6-3) 、 (1-6-1-6-3) 、 (1-6-6-1-3) 、 (6-1-1-6-3)	
(1-1-4)	(4-7)	4 種 (1-1-4-4-7) 、 (1-4-1-4-7) 、 (1-4-4-1-7) 、 (4-1-1-4-7)	
	(5-6)	6 種 (1-1-4-5-6) 、 (1-1-5-6-4) 、 (1-1-6-4-5) 、 (1-4-1-5-6) 、 (1-5-1-6-4) 、 (1-6-1-4-5)	
(1-1-5)	(5-5)	2 種 (1-1-5-5-5) 、 (1-5-5-1-5)	
(1-2-2)	(2-10)	2 種 (2-2-2-1-10) 、 (2-2-1-2-10)	
	(3-9)	6 種 (2-2-1-3-9) 、 (2-2-3-9-1) 、 (2-3-9-1-3) 、 (2-1-2-3-9) 、 (2-3-2-9-1) 、 (2-9-2-1-3)	
	(4-8)	6 種 (1-2-2-4-8) 、 (1-2-4-8-2) 、 (1-2-8-2-4) 、 (2-2-1-4-8) 、 (2-4-1-8-2) 、 (2-8-1-2-4)	
	(5-7)	6 種 (1-2-2-5-7) 、 (1-2-5-7-2) 、 (1-2-7-2-5) 、 (2-2-1-5-7) 、 (2-5-1-7-2) 、 (2-7-1-2-5)	
	(6-6)	4 種 (1-2-2-6-6) 、 (1-2-6-6-2) 、 (1-2-6-2-6) 、 (2-6-1-6-2)	
(1-2-3)	(3-8)	6 種 (1-2-3-3-8) 、 (1-2-3-8-3) 、 (1-2-8-3-3) 、 (2-3-1-3-8) 、 (2-3-1-8-3) 、 (2-8-1-3-3)	
	(4-7)	12 種 (1-2-3-4-7) 、 (1-2-3-7-4) 、 (1-2-4-3-7) 、 (1-7-2-3-4) 、 (1-2-7-3-4) 、 (1-2-4-7-3) 、 (1-2-7-4-3) 、 (1-7-2-4-3) 、 (1-4-2-3-7) 、 (1-4-2-7-3) 、 (1-4-7-2-3) 、 (1-7-4-2-3)	
	(5-6)	12 種 (1-2-3-5-6) 、 (1-2-3-6-5) 、 (1-2-5-3-6) 、 (1-6-2-3-5) 、 (1-2-6-3-5) 、 (1-2-5-6-3) 、 (1-2-6-5-3) 、 (1-6-2-5-3) 、 (1-5-2-3-6) 、 (1-5-2-6-3) 、 (1-5-6-2-3) 、 (1-6-5-2-3)	
	(6-6)	4 種 (1-2-6-6-3) 、 (1-6-6-6-3) 、 (1-6-6-3-6) 、 (6-6-6-6-3)	
(1-2-4)	(4-6)	6 種 (1-2-4-4-6) 、 (1-2-4-6-4) 、 (1-2-6-4-4) 、 (2-4-1-6-4) 、 (2-4-1-4-6) 、 (2-6-1-4-4)	
	(5-5)	6 種 (1-2-4-5-5) 、 (1-2-5-5-4) 、 (1-2-5-4-5) 、 (2-5-1-4-5) 、 (2-5-1-5-4) 、 (2-4-1-5-5)	
(1-3-3)	(3-7)	2 種 (1-3-3-3-7) 、 (3-3-1-3-7)	
	(4-6)	6 種 (1-3-3-4-6) 、 (1-3-4-6-3) 、 (1-3-6-3-4) 、 (3-3-1-4-6) 、 (3-4-1-6-3) 、 (3-6-1-3-4)	
	(5-5)	4 種 (1-3-3-5-5) 、 (1-3-5-5-3) 、 (1-3-5-3-5) 、 (3-5-1-5-3)	
(1-3-4)	(4-5)	6 種 (1-3-5-4-4) 、 (1-3-4-4-5) 、 (1-3-4-5-4) 、 (3-4-1-5-4) 、 (3-4-1-4-5) 、 (3-5-1-4-4)	
(1-4-4)	(4-4)	1 種 (1-4-4-4-4)	

我們發現總珠數為 17 顆時，最佳解為截成五段，有 23 組最佳解，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16 和 17 的珠數。



(5) 總珠數為 18 顆

隨著總珠數增加為 18 顆，截分為五段。

(過程部份詳見下頁)

我們發現總珠數 18 顆，最佳解為截成五段，有 7 組最佳解，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17 和 18 的珠數。



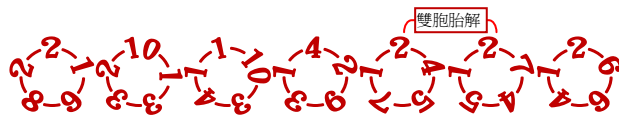
(a-b-c)	(d-e)	可能的組合	9 組最佳解
(1-1-1)	(1-14)	1 種	(1-1-1-1-14)
	(2-13)	2 種	(1-1-1-2-13)、(1-2-1-1-13)
	(3-12)	2 種	(1-1-1-3-12)、(1-3-1-1-12)
	(4-11)	2 種	(1-1-1-4-11)、(1-4-1-1-11)
	(5-10)	2 種	(1-1-1-5-10)、(1-5-1-1-10)
	(6-9)	2 種	(1-1-1-6-9)、(1-1-6-1-9)
	(7-8)	2 種	(1-1-1-7-8)、(1-1-7-1-8)
(1-1-2)	(2-12)	4 種	(1-1-2-2-12)、(1-2-1-2-12)、(1-2-2-1-12)、(2-1-1-2-12)
	(3-11)	6 種	(1-1-2-3-11)、(1-1-3-11-2)、(1-1-11-2-3)、(1-2-1-3-11)、(1-3-1-11-2)、(1-11-1-2-3)
	(4-10)	6 種	(1-1-2-4-10)、(1-1-4-10-2)、(1-1-10-2-4)、(1-2-1-4-10)、(1-4-1-10-2)、(1-10-1-2-4)
	(5-9)	6 種	(1-1-2-5-9)、(1-1-5-9-2)、(1-1-9-2-5)、(1-2-1-5-9)、(1-5-1-9-2)、(1-9-1-2-5)
	(6-8)	6 種	(1-1-2-6-8)、(1-1-6-8-2)、(1-1-8-2-6)、(1-2-1-6-8)、(1-6-1-8-2)、(1-8-1-2-6)
	(7-7)	4 種	(1-1-7-7-2)、(1-7-1-7-2)、(1-7-7-1-2)、(7-1-1-7-2)
	(3-10)	4 種	(1-1-3-3-10)、(1-3-1-3-10)、(1-3-3-1-10)、(3-1-1-3-10)
(1-1-3)	(4-9)	6 種	(1-1-3-4-9)、(1-1-4-9-3)、(1-1-9-3-4)、(1-3-1-4-9)、(1-4-1-9-3)、(1-9-1-3-4)
	(5-8)	6 種	(1-1-3-5-8)、(1-1-5-8-3)、(1-1-8-3-5)、(1-3-1-5-8)、(1-5-1-8-3)、(1-8-1-3-5)
	(6-7)	6 種	(1-1-3-6-7)、(1-1-6-7-3)、(1-1-7-3-6)、(1-3-1-6-7)、(1-6-1-7-3)、(1-7-1-3-6)
	(4-8)	4 種	(1-1-4-4-8)、(1-4-1-4-8)、(1-4-4-1-8)、(4-1-1-4-8)
(1-1-4)	(5-7)	6 種	(1-1-4-5-7)、(1-1-5-7-4)、(1-1-7-4-5)、(1-4-1-5-7)、(1-5-1-7-4)、(1-7-1-4-5)
	(6-6)	4 種	(1-1-6-6-4)、(1-6-1-6-4)、(1-6-6-1-4)、(6-1-1-6-4)
	(1-1-5)	5-6	4 種
(1-2-2)	(2-11)	2 種	(2-2-2-1-11)、(2-2-1-2-11)
	(3-10)	6 種	(2-2-1-3-10)、(2-2-3-10-1)、(2-3-10-1-3)、(2-1-2-3-10)、(2-3-2-10-1)、(2-10-2-1-3)
	(4-9)	6 種	(1-2-2-4-9)、(1-2-4-9-2)、(1-2-9-2-4)、(2-2-1-4-9)、(2-4-1-9-2)、(2-9-1-2-4)
	(5-8)	6 種	(1-2-2-5-8)、(1-2-5-8-2)、(1-2-8-2-5)、(2-2-1-5-8)、(2-5-1-8-2)、(2-8-1-2-5)
	(6-7)	6 種	(1-2-2-6-7)、(1-2-6-7-2)、(1-2-7-2-6)、(2-2-1-6-7)、(2-6-1-7-2)、(2-7-1-2-6)
	(3-9)	6 種	(1-2-3-3-9)、(1-2-3-9-3)、(1-2-9-3-3)、(2-3-1-3-9)、(2-3-1-9-3)、(2-9-1-3-3)
(1-2-3)	(4-8)	12 種	(1-2-3-4-8)、(1-2-3-8-4)、(1-2-4-3-8)、(1-8-2-3-4)、(1-2-8-3-4)、(1-2-4-8-3)、(1-2-8-4-3)、(1-8-2-4-3)、(1-4-2-3-8)、(1-4-2-8-3)、(1-4-8-2-3)、(1-8-4-2-3)
	(5-7)	12 種	(1-2-3-5-7)、(1-2-3-7-5)、(1-2-5-3-7)、(1-7-2-3-5)、(1-2-7-3-5)、(1-2-5-7-3)、(1-2-7-5-3)、(1-7-2-5-3)、(1-5-2-3-7)、(1-5-2-7-3)、(1-5-7-2-3)、(1-7-5-2-3)
	(6-6)	6 種	(1-2-3-6-6)、(1-2-6-6-3)、(1-2-6-3-6)、(2-6-1-3-6)、(2-6-1-6-3)、(2-3-1-6-6)
	(4-7)	6 種	(1-2-7-4-4)、(1-2-4-4-7)、(1-2-4-7-4)、(2-4-1-7-4)、(2-4-1-4-7)、(2-7-1-4-4)
(1-2-4)	(5-6)	12 種	(1-2-4-5-6)、(1-2-4-6-5)、(1-2-5-4-6)、(1-6-2-4-5)、(1-2-6-4-5)、(1-2-5-6-4)、(1-2-6-5-4)、(1-6-2-5-4)、(1-5-2-4-6)、(1-5-2-6-4)、(1-5-6-2-4)、(1-6-5-2-4)
	(1-2-5)	(5-5)	2 種
(1-3-3)	(3-8)	2 種	(1-3-3-3-8)、(3-3-1-3-8)
	(4-7)	6 種	(1-3-3-4-7)、(1-3-4-7-3)、(1-3-7-3-4)、(3-3-1-4-7)、(3-4-1-7-3)、(3-7-1-3-4)
	(5-6)	6 種	(1-3-3-5-6)、(1-3-5-7-3)、(1-3-6-3-5)、(3-3-1-5-6)、(3-5-1-6-3)、(3-6-1-3-5)
(1-3-4)	(4-6)	6 種	(1-3-6-4-4)、(1-3-4-4-6)、(1-3-4-6-4)、(3-4-1-6-4)、(3-4-1-4-6)、(3-6-1-4-4)
	(5-5)	6 種	(1-3-4-5-5)、(1-3-5-5-4)、(1-3-5-4-5)、(3-5-1-4-5)、(3-5-1-5-4)、(3-4-1-5-5)
(1-4-4)	(4-5)	1 種	(1-4-4-4-5)、(4-4-1-4-5)

(6) 總珠數為 19 顆 隨著總珠數增加為 19 顆，截分為五段。

(a-b-c)	(d-e)	可能的組合	7 組最佳解
(1-1-1)	(1-15)	1 種	(1-1-1-1-15)
	(2-14)	2 種	(1-1-1-2-14)、(1-2-1-1-14)
	(3-13)	2 種	(1-1-1-3-13)、(1-3-1-1-13)
	(4-12)	2 種	(1-1-1-4-12)、(1-4-1-1-12)
	(5-11)	2 種	(1-1-1-5-11)、(1-5-1-1-11)
	(6-10)	2 種	(1-1-1-6-10)、(1-1-6-1-10)
	(7-9)	2 種	(1-1-1-7-9)、(1-1-7-1-9)
(1-1-2)	(2-13)	4 種	(1-1-2-2-13)、(1-2-1-2-13)、(1-2-2-1-13)、(2-1-1-2-13)
	(3-12)	6 種	(1-1-2-3-12)、(1-1-3-12-2)、(1-1-12-2-3)、(1-2-1-3-12)、(1-3-1-12-2)、(1-12-1-2-3)
	(4-11)	6 種	(1-1-2-4-11)、(1-1-4-11-2)、(1-1-11-2-4)、(1-2-1-4-11)、(1-4-1-11-2)、(1-11-1-2-4)
	(5-10)	6 種	(1-1-2-5-10)、(1-1-5-10-2)、(1-1-10-2-5)、(1-2-1-5-10)、(1-5-1-10-2)、(1-10-1-2-5)
	(6-9)	6 種	(1-1-2-6-9)、(1-1-6-9-2)、(1-1-9-2-6)、(1-2-1-6-9)、(1-6-1-9-2)、(1-9-1-2-6)
	(7-8)	6 種	(1-1-2-7-8)、(1-1-7-8-2)、(1-1-8-2-7)、(1-2-1-7-8)、(1-7-1-8-2)、(1-8-1-2-7)
	(3-11)	4 種	(1-1-3-3-11)、(1-3-1-3-11)、(1-3-3-1-11)、(3-1-1-3-11)
(1-1-3)	(4-10)	6 種	(1-1-3-4-10)、(1-1-4-10-3)、(1-1-10-3-4)、(1-3-1-4-10)、(1-4-1-10-3)、(1-10-1-3-4)
	(5-9)	6 種	(1-1-3-5-9)、(1-1-5-9-3)、(1-1-9-3-5)、(1-3-1-5-9)、(1-5-1-9-3)、(1-9-1-3-5)
	(6-8)	6 種	(1-1-3-6-8)、(1-1-6-8-3)、(1-1-8-3-6)、(1-3-1-6-8)、(1-6-1-8-3)、(1-8-1-3-6)
	(7-7)	4 種	(1-1-7-7-3)、(1-7-1-7-3)、(1-7-7-1-3)、(7-1-1-7-3)
(1-1-4)	(4-9)	4 種	(1-1-4-4-9)、(1-4-1-4-9)、(1-4-4-1-9)、(4-1-1-4-9)
	(5-8)	6 種	(1-1-4-5-8)、(1-1-5-8-4)、(1-1-8-4-5)、(1-4-1-5-8)、(1-5-1-8-4)、(1-8-1-4-5)
	(6-7)	6 種	(1-1-4-6-7)、(1-1-6-7-4)、(1-1-7-4-6)、(1-4-1-6-7)、(1-6-1-7-4)、(1-7-1-4-6)
(1-1-5)	(5-7)	4 種	(1-1-5-5-7)、(1-5-1-5-7)、(1-5-5-1-7)、(5-1-1-5-7)
	(6-6)	4 種	(1-1-6-6-5)、(1-6-1-6-5)、(1-6-6-1-5)、(6-1-1-6-5)

(a-b-c)	(d-e)		可能的組合	7 組最佳解
(1-2-2)	(2-12)	2 種	(2-2-2-1-12) 、 (2-2-1-2-12)	
	(3-11)	6 種	(2-2-1-3-11) 、 (2-2-3-11-1) 、 (2-3-11-1-3) 、 (2-1-2-3-11) 、 (2-3-2-11-1) 、 (2-11-2-1-3)	
	(4-10)	6 種	(1-2-2-4-10) 、 (1-2-4-10-2) 、 (1-2-10-2-4) 、 (2-2-1-4-10) 、 (2-4-1-10-2) 、 (2-10-1-2-4)	
	(5-9)	6 種	(1-2-2-5-9) 、 (1-2-5-9-2) 、 (1-2-9-2-5) 、 (2-2-1-5-9) 、 (2-5-1-9-2) 、 (2-9-1-2-5)	
	(6-8)	6 種	(1-2-2-6-8) 、 (1-2-6-8-2) 、 (1-2-8-2-6) 、 (2-2-1-6-8) 、 (2-6-1-8-2) 、 (2-8-1-2-6)	
	(7-7)	4 種	(2-2-7-7-1) 、 (2-7-2-7-1) 、 (2-7-7-2-1) 、 (7-2-2-7-1)	
(1-2-3)	(3-10)	6 種	(1-2-3-3-10) 、 (1-2-3-10-3) 、 (1-2-10-3-3) 、 (2-3-1-3-10) 、 (2-3-1-10-3) 、 (2-10-1-3-3)	
	(4-9)	12 種	(1-2-3-4-9) 、 (1-2-3-9-4) 、 (1-2-4-3-9) 、 (1-2-9-3-4) 、 (1-2-9-3-4) 、 (1-2-4-9-3) 、 (1-2-9-4-3) 、 (1-9-2-4-3) 、 (1-4-2-3-9) 、 (1-4-2-9-3) 、 (1-4-9-2-3) 、 (1-9-4-2-3)	
	(5-8)	12 種	(1-2-3-5-8) 、 (1-2-3-8-5) 、 (1-2-5-3-8) 、 (1-8-2-3-5) 、 (1-2-8-3-5) 、 (1-2-5-8-3) 、 (1-2-8-5-3) 、 (1-8-2-5-3) 、 (1-5-2-3-8) 、 (1-5-2-8-3) 、 (1-5-8-2-3) 、 (1-8-5-2-3)	
	(6-7)	12 種	(1-2-3-6-7) 、 (1-2-3-7-6) 、 (1-2-6-3-7) 、 (1-7-2-3-6) 、 (1-2-7-3-6) 、 (1-2-6-7-3) 、 (1-2-7-6-3) 、 (1-7-2-6-3) 、 (1-6-2-3-7) 、 (1-6-2-7-3) 、 (1-6-7-2-3) 、 (1-7-6-2-3)	
(1-2-4)	(4-8)	6 種	(1-2-8-4-4) 、 (1-2-4-4-8) 、 (1-2-4-8-4) 、 (2-4-1-8-4) 、 (2-4-1-4-8) 、 (2-8-1-4-4)	
	(5-7)	12 種	(1-2-4-5-7) 、 (1-2-4-7-5) 、 (1-2-5-4-7) 、 (1-7-2-4-5) 、 (1-2-7-4-5) 、 (1-2-5-7-4) 、 (1-2-7-5-4) 、 (1-7-2-5-4) 、 (1-5-2-4-7) 、 (1-5-2-7-4) 、 (1-5-7-2-4) 、 (1-7-5-2-4)	
	(6-6)	6 種	(1-2-4-6-6) 、 (1-2-6-6-4) 、 (1-2-6-4-6) 、 (2-6-1-4-6) 、 (2-6-1-6-4) 、 (2-4-1-6-6)	
(1-2-5)	(5-6)	6 種	(1-2-6-5-5) 、 (1-2-5-5-6) 、 (1-2-5-6-5) 、 (2-5-1-6-5) 、 (2-5-1-5-6) 、 (2-6-1-5-5)	
(1-3-3)	(3-9)	2 種	(1-3-3-3-9) 、 (3-3-1-3-9)	
	(4-8)	6 種	(1-3-3-4-8) 、 (1-3-4-8-3) 、 (1-3-8-3-4) 、 (3-3-1-4-8) 、 (3-4-1-8-3) 、 (3-8-1-3-4)	
	(5-7)	6 種	(1-3-3-5-7) 、 (1-3-5-7-3) 、 (1-3-7-3-5) 、 (3-3-1-5-7) 、 (3-5-1-7-3) 、 (3-7-1-3-5)	
	(6-6)	4 種	(1-3-3-6-6) 、 (1-3-6-6-3) 、 (1-3-6-3-6) 、 (3-6-1-6-3)	
(1-3-4)	(4-7)	6 種	(1-3-7-4-4) 、 (1-3-4-4-7) 、 (1-3-4-7-4) 、 (3-4-1-7-4) 、 (3-4-1-4-7) 、 (3-7-1-4-4)	
	(5-6)	12 種	(1-3-4-5-6) 、 (1-3-4-6-5) 、 (1-3-5-4-6) 、 (1-6-3-4-5) 、 (1-3-6-4-5) 、 (1-3-5-6-4) 、 (1-6-5-4-3) 、 (1-6-3-5-4) 、 (1-5-3-4-6) 、 (1-5-3-6-4) 、 (1-5-6-3-4) 、 (1-6-5-3-4)	
(1-3-5)	(5-5)	1 種	(1-5-5-5-3)	
(1-4-4)	(4-6)	1 種	(1-4-4-4-6) 、 (4-4-1-4-6)	
	(5-5)	4 種	(1-4-4-5-5) 、 (1-4-5-5-4) 、 (1-4-5-4-5) 、 (4-5-1-5-4)	

我們發現總珠數 19 顆，最佳解為截成五段，有 7 組最佳解，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18 和 19 的珠數。



(7) 總珠數為 20 顆 隨著總珠數增加為 20 顆，截分為五段。

(a-b-c)	(d-e)		可能的組合	0 組最佳解
(1-1-1)	(1-16)	1 種	(1-1-1-1-16)	
	(2-15)	2 種	(1-1-1-2-15) 、 (1-2-1-1-15)	
	(3-14)	2 種	(1-1-1-3-14) 、 (1-3-1-1-14)	
	(4-13)	2 種	(1-1-1-4-13) 、 (1-4-1-1-13)	
	(5-12)	2 種	(1-1-1-5-12) 、 (1-5-1-1-12)	
	(6-11)	2 種	(1-1-1-6-11) 、 (1-6-1-1-11)	
	(7-10)	2 種	(1-1-1-7-10) 、 (1-7-1-1-10)	
	(8-9)	2 種	(1-1-1-8-9) 、 (1-8-1-1-9)	
(1-1-2)	(2-14)	4 種	(1-1-2-2-14) 、 (1-2-1-2-14) 、 (1-2-2-1-14) 、 (2-1-1-2-14)	
	(3-13)	6 種	(1-1-2-3-13) 、 (1-1-3-13-2) 、 (1-1-13-2-3) 、 (1-2-1-3-13) 、 (1-3-1-13-2) 、 (1-13-1-2-3)	
	(4-12)	6 種	(1-1-2-4-12) 、 (1-1-4-12-2) 、 (1-1-12-2-4) 、 (1-2-1-4-12) 、 (1-4-1-12-2) 、 (1-12-1-2-4)	
	(5-11)	6 種	(1-1-2-5-11) 、 (1-1-5-11-2) 、 (1-1-11-2-5) 、 (1-2-1-5-11) 、 (1-5-1-11-2) 、 (1-11-1-2-5)	
	(6-10)	6 種	(1-1-2-6-10) 、 (1-1-6-10-2) 、 (1-1-10-2-6) 、 (1-2-1-6-10) 、 (1-6-1-10-2) 、 (1-10-1-2-6)	
	(7-9)	6 種	(1-1-2-7-9) 、 (1-1-7-9-2) 、 (1-1-9-2-7) 、 (1-2-1-7-9) 、 (1-7-1-9-2) 、 (1-9-1-2-7)	
	(8-8)	4 種	(1-1-8-8-2) 、 (1-8-1-8-2) 、 (1-8-8-1-2) 、 (8-1-1-8-2)	
	(3-12)	4 種	(1-1-3-3-12) 、 (1-3-1-3-12) 、 (1-3-3-1-12) 、 (3-1-1-3-12)	
(1-1-3)	(4-11)	6 種	(1-1-3-4-11) 、 (1-1-4-11-3) 、 (1-1-11-3-4) 、 (1-3-1-4-11) 、 (1-4-1-11-3) 、 (1-11-1-3-4)	
	(5-10)	6 種	(1-1-3-5-10) 、 (1-1-5-10-3) 、 (1-1-10-3-5) 、 (1-3-1-5-10) 、 (1-5-1-10-3) 、 (1-10-1-3-5)	
	(6-9)	6 種	(1-1-3-6-9) 、 (1-1-6-9-3) 、 (1-1-9-3-6) 、 (1-3-1-6-9) 、 (1-6-1-9-3) 、 (1-9-1-3-6)	
	(7-8)	6 種	(1-1-3-7-8) 、 (1-1-7-8-3) 、 (1-1-8-3-7) 、 (1-3-1-7-8) 、 (1-7-1-8-3) 、 (1-8-1-3-7)	
	(4-10)	4 種	(1-1-4-4-10) 、 (1-4-1-4-10) 、 (1-4-4-1-10) 、 (4-1-1-4-10)	
(1-1-4)	(5-9)	6 種	(1-1-4-5-9) 、 (1-1-5-9-4) 、 (1-1-9-4-5) 、 (1-4-1-5-9) 、 (1-5-1-9-4) 、 (1-9-1-4-5)	
	(6-8)	6 種	(1-1-4-6-8) 、 (1-1-6-8-4) 、 (1-1-8-4-6) 、 (1-4-1-6-8) 、 (1-6-1-8-4) 、 (1-8-1-4-6)	
	(7-7)	4 種	(1-1-7-7-4) 、 (1-7-1-7-4) 、 (1-7-7-1-4) 、 (7-1-1-7-4)	
	(5-8)	4 種	(1-1-5-5-8) 、 (1-5-1-5-8) 、 (1-5-5-1-8) 、 (5-1-1-5-8)	
(1-1-5)	(6-7)	6 種	(1-1-5-6-7) 、 (1-1-6-7-5) 、 (1-1-7-5-6) 、 (1-5-1-6-7) 、 (1-6-1-7-5) 、 (1-7-1-5-6)	
(1-1-6)	(6-6)	2 種	(6-6-6-1-1) 、 (6-6-1-6-6)	

(a-b-c)	(d-e)	可能的組合	0 組最佳解
(1-2-2)	(2-13)	2 種 (2-2-2-1-13) ∨ (2-2-1-2-13)	
	(3-12)	6 種 (2-2-1-3-12) ∨ (2-2-3-12-1) ∨ (2-3-12-1-3) ∨ (2-1-2-3-12) ∨ (2-3-2-12-1) ∨ (2-12-2-1-3)	
	(4-11)	6 種 (1-2-2-4-11) ∨ (1-2-4-11-2) ∨ (1-2-11-2-4) ∨ (2-2-1-4-11) ∨ (2-4-1-11-2) ∨ (2-11-1-2-4)	
	(5-10)	6 種 (1-2-2-5-10) ∨ (1-2-5-10-2) ∨ (1-2-10-2-5) ∨ (2-2-1-5-10) ∨ (2-5-1-10-2) ∨ (2-10-1-2-5)	
	(6-9)	6 種 (1-2-2-6-9) ∨ (1-2-6-9-2) ∨ (1-2-9-2-6) ∨ (2-2-1-6-9) ∨ (2-6-1-9-2) ∨ (2-9-1-2-6)	
	(7-8)	6 種 (1-2-2-7-8) ∨ (1-2-7-8-2) ∨ (1-2-8-2-7) ∨ (2-2-1-7-8) ∨ (2-7-1-8-2) ∨ (2-8-1-2-7)	
(1-2-3)	(3-11)	6 種 (1-2-3-3-11) ∨ (1-2-3-11-3) ∨ (1-2-11-3-3) ∨ (2-3-1-3-11) ∨ (2-3-1-11-3) ∨ (2-11-1-3-3)	
	(4-10)	12 種 (1-2-3-4-10) ∨ (1-2-3-10-4) ∨ (1-2-4-3-10) ∨ (1-10-2-3-4) ∨ (1-2-10-3-4) ∨ (1-2-4-10-3) ∨ (1-2-10-4-3) ∨ (1-10-2-4-3) ∨ (1-4-2-3-10) ∨ (1-4-2-10-3) ∨ (1-4-10-2-3) ∨ (1-10-4-2-3)	
	(5-9)	12 種 (1-2-3-5-9) ∨ (1-2-3-9-5) ∨ (1-2-5-3-9) ∨ (1-9-2-3-5) ∨ (1-2-9-3-5) ∨ (1-2-5-9-3) ∨ (1-2-9-5-3) ∨ (1-9-2-5-3) ∨ (1-5-2-3-9) ∨ (1-5-2-9-3) ∨ (1-5-9-2-3) ∨ (1-9-5-2-3)	
	(6-8)	12 種 (1-2-3-6-8) ∨ (1-2-3-8-6) ∨ (1-2-6-3-8) ∨ (1-8-2-3-6) ∨ (1-2-8-3-6) ∨ (1-2-6-8-3) ∨ (1-2-8-6-3) ∨ (1-8-2-6-3) ∨ (1-6-2-3-8) ∨ (1-6-2-8-3) ∨ (1-6-8-2-3) ∨ (1-8-6-2-3)	
	(7-7)	6 種 (1-2-3-7-7) ∨ (1-2-7-7-3) ∨ (1-2-7-3-7) ∨ (2-7-1-3-7) ∨ (2-7-1-7-3) ∨ (2-3-1-7-7)	
	(4-9)	6 種 (1-2-9-4-4) ∨ (1-2-4-4-9) ∨ (1-2-4-9-4) ∨ (2-4-1-9-4) ∨ (2-4-1-4-9) ∨ (2-9-1-4-4)	
(1-2-4)	(5-8)	12 種 (1-2-4-5-8) ∨ (1-2-4-8-5) ∨ (1-2-5-4-8) ∨ (1-8-2-4-5) ∨ (1-2-8-4-5) ∨ (1-2-5-8-4) ∨ (1-2-8-5-4) ∨ (1-8-2-5-4) ∨ (1-5-2-4-8) ∨ (1-5-2-8-4) ∨ (1-5-8-2-4) ∨ (1-8-5-2-4)	
	(6-7)	12 種 (1-2-4-6-7) ∨ (1-2-4-7-6) ∨ (1-2-6-4-7) ∨ (1-7-2-4-6) ∨ (1-2-7-4-6) ∨ (1-2-6-7-4) ∨ (1-2-7-6-4) ∨ (1-7-2-6-4) ∨ (1-6-2-4-7) ∨ (1-6-2-7-4) ∨ (1-6-7-2-4) ∨ (1-7-6-2-4)	
	(5-7)	6 種 (1-2-5-7-5) ∨ (1-2-5-5-7) ∨ (1-2-5-7-5) ∨ (2-5-1-7-5) ∨ (2-5-1-5-7) ∨ (2-7-1-5-5)	
(1-2-5)	(6-6)	6 種 (1-2-5-6-6) ∨ (1-2-6-6-5) ∨ (1-2-6-5-6) ∨ (2-6-1-5-6) ∨ (2-6-1-6-5) ∨ (2-5-1-6-6)	
(1-3-3)	(3-10)	2 種 (1-3-3-3-10) ∨ (3-3-1-3-10)	
	(4-9)	6 種 (1-3-3-4-9) ∨ (1-3-4-9-3) ∨ (1-3-9-3-4) ∨ (3-3-1-4-9) ∨ (3-4-1-9-3) ∨ (3-9-1-3-4)	
	(5-8)	6 種 (1-3-3-5-8) ∨ (1-3-5-8-3) ∨ (1-3-8-3-5) ∨ (3-3-1-5-8) ∨ (3-5-1-8-3) ∨ (3-8-1-3-5)	
	(6-7)	6 種 (1-3-3-6-7) ∨ (1-3-6-7-3) ∨ (1-3-7-3-6) ∨ (3-3-1-6-7) ∨ (3-6-1-7-3) ∨ (3-7-1-3-6)	
(1-3-4)	(4-8)	6 種 (1-3-8-4-4) ∨ (1-3-4-4-8) ∨ (1-3-4-8-4) ∨ (3-4-1-8-4) ∨ (3-4-1-4-8) ∨ (3-8-1-4-4)	
	(5-7)	12 種 (1-3-4-5-7) ∨ (1-3-4-7-5) ∨ (1-3-5-4-7) ∨ (1-7-3-4-5) ∨ (1-3-7-4-5) ∨ (1-3-5-7-4) ∨ (1-3-7-5-4) ∨ (1-7-3-5-4) ∨ (1-5-3-4-7) ∨ (1-5-3-7-4) ∨ (1-5-7-3-4) ∨ (1-7-5-3-4)	
	(6-6)	6 種 (1-3-4-6-6) ∨ (1-3-6-6-4) ∨ (1-3-6-4-6) ∨ (3-6-1-4-6) ∨ (3-6-1-6-4) ∨ (3-4-1-6-6)	
(1-3-5)	(5-6)	6 種 (1-3-6-5-5) ∨ (1-3-5-5-6) ∨ (1-3-5-6-5) ∨ (3-5-1-6-5) ∨ (3-5-1-5-6) ∨ (3-6-1-5-5)	
(1-4-4)	(4-7)	1 種 (1-4-4-4-7) ∨ (4-4-1-4-7)	
(1-4-5)	(5-6)	6 種 (1-4-4-5-6) ∨ (1-4-5-7-4) ∨ (1-4-6-4-5) ∨ (4-4-1-5-6) ∨ (4-5-1-6-4) ∨ (4-6-1-4-5)	
(1-4-5)	(5-5)	2 種 (1-4-5-5-5) ∨ (1-5-4-5-5)	

將總珠數 20 顆所有可能的組合情形列出，我們並未找到截為五段的最佳解，最佳解只能為截成六段。在此僅列出總珠數 20 顆分成 6 段的四個最佳解。



(8) 總珠數為 21 顆 隨著總珠數增加為 21 顆，截分為五段。

(a-b-c)	(d-e)	可能的組合	1 組最佳解
(1-1-1)	(1-17)	1 種 (1-1-1-1-17)	
	(2-16)	2 種 (1-1-1-2-16) ∨ (1-2-1-1-16)	
	(3-15)	2 種 (1-1-1-3-15) ∨ (1-3-1-1-15)	
	(4-14)	2 種 (1-1-1-4-14) ∨ (1-4-1-1-14)	
	(5-13)	2 種 (1-1-1-5-13) ∨ (1-5-1-1-13)	
	(6-12)	2 種 (1-1-1-6-12) ∨ (1-1-6-1-12)	
	(7-11)	2 種 (1-1-1-7-11) ∨ (1-1-7-1-11)	
	(8-10)	2 種 (1-1-1-8-10) ∨ (1-1-8-1-10)	
	(9-9)	2 種 (1-1-1-9-9) ∨ (1-1-9-1-9)	
(1-1-2)	(2-15)	4 種 (1-1-2-2-15) ∨ (1-2-1-2-15) ∨ (1-2-2-1-15) ∨ (2-1-1-2-15)	
	(3-14)	6 種 (1-1-2-3-14) ∨ (1-1-3-14-2) ∨ (1-2-1-3-14) ∨ (1-3-1-14-2) ∨ (1-14-1-2-3) ∨ (1-14-1-2-3)	
	(4-13)	6 種 (1-1-2-4-13) ∨ (1-1-4-13-2) ∨ (1-1-13-2-4) ∨ (1-2-1-4-13) ∨ (1-4-1-13-2) ∨ (1-13-1-2-4)	
	(5-12)	6 種 (1-1-2-5-12) ∨ (1-1-5-12-2) ∨ (1-1-12-2-5) ∨ (1-2-1-5-12) ∨ (1-5-1-12-2) ∨ (1-12-1-2-5)	
	(6-11)	6 種 (1-1-2-6-11) ∨ (1-1-6-11-2) ∨ (1-1-11-2-6) ∨ (1-2-1-6-11) ∨ (1-6-1-11-2) ∨ (1-11-1-2-6)	
	(7-10)	6 種 (1-1-2-7-10) ∨ (1-1-7-10-2) ∨ (1-1-10-2-7) ∨ (1-2-1-7-10) ∨ (1-7-1-10-2) ∨ (1-10-1-2-7)	
	(8-9)	6 種 (1-1-2-8-9) ∨ (1-1-8-9-2) ∨ (1-1-9-2-8) ∨ (1-2-1-8-9) ∨ (1-8-1-9-2) ∨ (1-9-1-2-8)	
	(3-13)	4 種 (1-1-3-3-13) ∨ (1-3-1-3-13) ∨ (1-3-3-1-13) ∨ (3-1-1-3-13)	
(1-1-3)	(4-12)	6 種 (1-1-3-4-12) ∨ (1-1-4-12-3) ∨ (1-1-12-3-4) ∨ (1-3-1-4-12) ∨ (1-4-1-12-3) ∨ (1-12-1-3-4)	
	(5-11)	6 種 (1-1-3-5-11) ∨ (1-1-5-11-3) ∨ (1-1-11-3-5) ∨ (1-3-1-5-11) ∨ (1-5-1-11-3) ∨ (1-11-1-3-5)	
	(6-10)	6 種 (1-1-3-6-10) ∨ (1-1-6-10-3) ∨ (1-1-10-3-6) ∨ (1-3-1-6-10) ∨ (1-6-1-10-3) ∨ (1-10-1-3-6)	
	(7-9)	6 種 (1-1-3-7-9) ∨ (1-1-7-9-3) ∨ (1-1-9-3-7) ∨ (1-3-1-7-9) ∨ (1-7-1-9-3) ∨ (1-9-1-3-7)	
	(8-8)	4 種 (1-1-8-8-3) ∨ (1-8-1-8-3) ∨ (1-8-8-1-3) ∨ (8-1-1-8-3)	
	(4-11)	4 種 (1-1-4-4-11) ∨ (1-4-1-4-11) ∨ (1-4-4-1-11) ∨ (4-1-1-4-11)	
(1-1-4)	(5-10)	6 種 (1-1-4-5-10) ∨ (1-1-5-10-4) ∨ (1-1-10-4-5) ∨ (1-4-1-5-10) ∨ (1-5-1-10-4) ∨ (1-10-1-4-5)	
	(6-9)	6 種 (1-1-4-6-9) ∨ (1-1-6-9-4) ∨ (1-1-9-4-6) ∨ (1-4-1-6-9) ∨ (1-6-1-9-4) ∨ (1-9-1-4-6)	
	(7-8)	6 種 (1-1-4-7-8) ∨ (1-1-7-8-4) ∨ (1-1-8-4-7) ∨ (1-4-1-7-8) ∨ (1-7-1-8-4) ∨ (1-8-1-4-7)	
	(5-9)	4 種 (1-1-5-5-9) ∨ (1-5-1-5-9) ∨ (1-5-5-1-9) ∨ (5-1-1-5-9)	
(1-1-5)	(6-8)	6 種 (1-1-5-6-8) ∨ (1-1-6-8-5) ∨ (1-1-8-5-6) ∨ (1-5-1-6-8) ∨ (1-6-1-8-5) ∨ (1-8-1-5-6)	
	(7-7)	4 種 (1-1-7-7-5) ∨ (1-7-1-7-5) ∨ (1-7-7-1-5) ∨ (7-1-1-7-5)	
(1-1-6)	(6-7)	4 種 (1-1-6-6-7) ∨ (1-6-1-6-7) ∨ (1-6-6-1-7) ∨ (6-1-1-6-7)	

(a-b-c)	(d-e)		可能的組合	1 組最佳解
(1-2-2)	(2-14)	2 種	(2-2-2-1-14) ∨ (2-2-1-2-14)	(1-5-2-10-3)
	(3-13)	6 種	(2-2-1-3-13) ∨ (2-2-3-13-1) ∨ (2-3-13-1-3) ∨ (2-1-2-3-13) ∨ (2-3-2-13-1) ∨ (2-13-2-1-3)	
	(4-12)	6 種	(1-2-2-4-12) ∨ (1-2-4-12-2) ∨ (1-2-12-2-4) ∨ (2-2-1-4-12) ∨ (2-4-1-12-2) ∨ (2-12-1-2-4)	
	(5-11)	6 種	(1-2-2-5-11) ∨ (1-2-5-11-2) ∨ (1-2-11-2-5) ∨ (2-2-1-5-11) ∨ (2-5-1-11-2) ∨ (2-11-1-2-5)	
	(6-10)	6 種	(1-2-2-6-10) ∨ (1-2-6-10-2) ∨ (1-2-10-2-6) ∨ (2-2-1-6-10) ∨ (2-6-1-10-2) ∨ (2-10-1-2-6)	
	(7-9)	6 種	(1-2-2-7-9) ∨ (1-2-7-9-2) ∨ (1-2-9-2-7) ∨ (2-2-1-7-9) ∨ (2-7-1-9-2) ∨ (2-9-1-2-7)	
	(8-8)	4 種	(2-2-8-8-1) ∨ (2-8-2-8-1) ∨ (2-8-8-2-1) ∨ (8-2-2-8-1)	
(1-2-3)	(3-12)	6 種	(1-2-3-3-12) ∨ (1-2-3-12-3) ∨ (1-2-12-3-3) ∨ (2-3-1-3-12) ∨ (2-3-1-12-3) ∨ (2-12-1-3-3)	
	(4-11)	12 種	(1-2-3-4-11) ∨ (1-2-3-11-4) ∨ (1-2-4-3-11) ∨ (1-11-2-3-4) ∨ (1-2-11-3-4) ∨ (1-2-4-11-3) ∨ (1-2-11-4-3) ∨ (1-11-2-4-3) ∨ (1-4-2-3-11) ∨ (1-4-2-11-3) ∨ (1-4-11-2-3) ∨ (1-11-4-2-3)	
	(5-10)	12 種	(1-2-3-5-10) ∨ (1-2-3-10-5) ∨ (1-2-5-3-10) ∨ (1-10-2-3-5) ∨ (1-2-10-3-5) ∨ (1-2-5-10-3) ∨ (1-2-10-5-3) ∨ (1-10-2-5-3) ∨ (1-5-2-3-10) ∨ (1-5-2-10-3) ∨ (1-5-10-2-3) ∨ (1-10-5-2-3)	
	(6-9)	12 種	(1-2-3-6-9) ∨ (1-2-3-9-6) ∨ (1-2-6-3-9) ∨ (1-9-2-3-6) ∨ (1-2-9-3-6) ∨ (1-2-6-9-3) ∨ (1-2-9-6-3) ∨ (1-9-2-6-3) ∨ (1-6-2-3-9) ∨ (1-6-2-9-3) ∨ (1-6-9-2-3) ∨ (1-9-6-2-3)	
	(7-8)	12 種	(1-2-3-7-8) ∨ (1-2-3-8-7) ∨ (1-2-7-3-8) ∨ (1-8-2-3-7) ∨ (1-2-8-3-7) ∨ (1-2-7-8-3) ∨ (1-2-8-7-3) ∨ (1-8-2-7-3) ∨ (1-7-2-3-8) ∨ (1-7-2-8-3) ∨ (1-7-8-2-3) ∨ (1-8-7-2-3)	
(1-2-4)	(4-10)	6 種	(1-2-10-4-4) ∨ (1-2-4-4-10) ∨ (1-2-4-10-4) ∨ (2-4-1-10-4) ∨ (2-4-1-4-10) ∨ (2-10-1-4-4)	
	(5-9)	12 種	(1-2-4-5-9) ∨ (1-2-4-9-5) ∨ (1-2-5-4-9) ∨ (1-9-2-4-5) ∨ (1-2-9-4-5) ∨ (1-2-5-9-4) ∨ (1-2-9-5-4) ∨ (1-9-2-5-4) ∨ (1-5-2-4-9) ∨ (1-5-2-9-4) ∨ (1-5-9-2-4) ∨ (1-9-5-2-4)	
	(6-8)	12 種	(1-2-4-6-8) ∨ (1-2-4-8-6) ∨ (1-2-6-4-8) ∨ (1-8-2-4-6) ∨ (1-2-8-4-6) ∨ (1-2-6-8-4) ∨ (1-2-8-6-4) ∨ (1-8-2-6-4) ∨ (1-6-2-4-8) ∨ (1-6-2-8-4) ∨ (1-6-8-2-4) ∨ (1-8-6-2-4)	
	(7-7)	6 種	(1-2-4-7-7) ∨ (1-2-7-7-4) ∨ (1-2-7-4-7) ∨ (2-7-1-4-7) ∨ (2-7-1-7-4) ∨ (2-4-1-7-7)	
(1-2-5)	(5-8)	6 種	(1-2-8-5-5) ∨ (1-2-5-5-8) ∨ (1-2-5-8-5) ∨ (2-5-1-8-5) ∨ (2-5-1-5-8) ∨ (2-8-1-5-5)	
	(6-7)	12 種	(1-2-5-6-7) ∨ (1-2-5-7-6) ∨ (1-2-6-5-7) ∨ (1-7-2-5-6) ∨ (1-2-7-5-6) ∨ (1-2-6-7-5) ∨ (1-2-7-6-5) ∨ (1-7-2-6-5) ∨ (1-6-2-5-7) ∨ (1-6-2-7-5) ∨ (1-6-7-2-5) ∨ (1-7-6-2-5)	
(1-3-3)	(3-11)	2 種	(1-3-3-3-11) ∨ (3-3-1-3-11)	
	(4-10)	6 種	(1-3-3-4-10) ∨ (1-3-4-10-3) ∨ (1-3-10-3-4) ∨ (3-3-1-4-10) ∨ (3-4-1-10-3) ∨ (3-10-1-3-4)	
	(5-9)	6 種	(1-3-3-5-9) ∨ (1-3-5-9-3) ∨ (1-3-9-3-5) ∨ (3-3-1-5-9) ∨ (3-5-1-9-3) ∨ (3-9-1-3-5)	
	(6-8)	6 種	(1-3-3-6-8) ∨ (1-3-6-8-3) ∨ (1-3-8-3-6) ∨ (3-3-1-6-8) ∨ (3-6-1-8-3) ∨ (3-8-1-3-6)	
	(7-7)	4 種	(1-3-3-7-7) ∨ (1-3-7-7-3) ∨ (1-3-7-3-7) ∨ (3-7-1-7-3)	

(a-b-c)	(d-e)		可能的組合	1 組最佳解
(1-3-4)	(4-9)	6 種	(1-3-9-4-4) ∨ (1-3-4-4-9) ∨ (1-3-4-9-4) ∨ (3-4-1-9-4) ∨ (3-4-1-4-9) ∨ (3-9-1-4-4)	
	(5-8)	12 種	(1-3-4-5-8) ∨ (1-3-4-8-5) ∨ (1-3-5-4-8) ∨ (1-8-3-4-5) ∨ (1-3-8-4-5) ∨ (1-3-5-8-4) ∨ (1-3-8-5-4) ∨ (1-8-3-5-4) ∨ (1-5-3-4-8) ∨ (1-5-3-8-4) ∨ (1-5-8-3-4) ∨ (1-8-5-3-4)	
	(6-7)	12 種	(1-3-4-6-7) ∨ (1-3-4-7-6) ∨ (1-3-6-4-7) ∨ (1-7-3-4-6) ∨ (1-3-7-4-6) ∨ (1-3-6-7-4) ∨ (1-3-7-6-4) ∨ (1-7-3-6-4) ∨ (1-6-3-4-7) ∨ (1-6-3-7-4) ∨ (1-6-7-3-4) ∨ (1-7-6-3-4)	
(1-3-5)	(5-7)	6 種	(1-3-7-5-5) ∨ (1-3-5-5-7) ∨ (1-3-5-7-5) ∨ (3-5-1-7-5) ∨ (3-5-1-5-7) ∨ (3-7-1-5-5)	
	(6-6)	6 種	(1-3-5-6-6) ∨ (1-3-6-6-5) ∨ (1-3-6-5-6) ∨ (3-6-1-5-6) ∨ (3-6-1-6-5) ∨ (3-5-1-6-6)	
(1-4-4)	(4-8)	2 種	(1-4-4-4-8) ∨ (4-4-1-4-8)	
	(5-7)	6 種	(1-4-4-5-7) ∨ (1-4-5-7-4) ∨ (1-4-7-4-5) ∨ (4-4-1-5-7) ∨ (4-5-1-7-4) ∨ (4-7-1-4-5)	
	(6-6)	4 種	(1-4-4-6-6) ∨ (1-4-6-6-4) ∨ (1-4-6-4-6) ∨ (4-6-1-6-4)	
(1-4-5)	(5-6)	6 種	(1-4-6-5-5) ∨ (1-4-5-5-6) ∨ (1-4-5-6-5) ∨ (4-5-1-6-5) ∨ (4-5-1-5-6) ∨ (4-6-1-5-5)	
(1-5-5)	(5-5)	1 種	(1-5-5-5-5)	

我們發現總珠數 21 顆，最佳解為截成五段，只有 1 組最佳解，都可湊出連續 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20 和 21 的珠數。



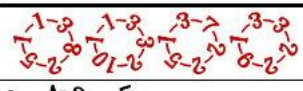
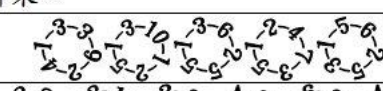
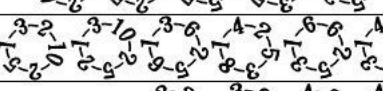
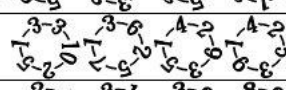
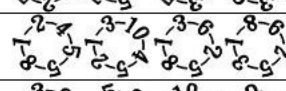
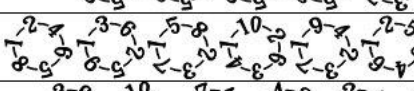
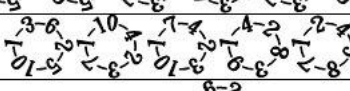
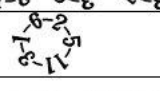
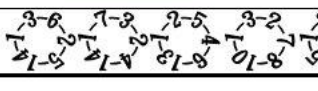
5. 總珠數 22 顆~28 顆及 31 顆（最少截成六段）

在本段的研究書寫部分限於篇幅限制，無法呈現太多繁多的過程，我們省略了數萬筆的資料，所以我們僅呈現部分最佳解，其餘詳見附件及研究日誌補充說明。

在本研究中較特別的部分有二：

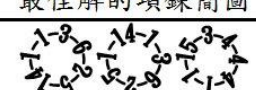
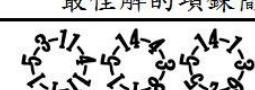
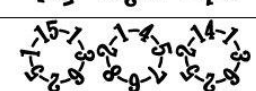
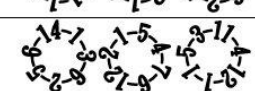
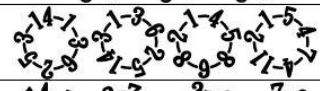
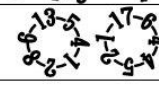
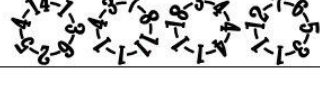
第一，我們嘗試將總珠數 22 顆截為五段，但卻找不到最佳解，於是我們將此串 22 顆鍊子截分成六段，而我們也找出了最佳解，詳見下表。

第二，總珠數 29 顆、30 顆無法找到截為六段的最佳解，我們僅列出七段最佳解。

編號	珠數	段數	最佳解的項鍊簡圖
20	20 顆	6 色	找不到截為 5 段的組合，只能截為 6 段，先列出 4 個解來。 
22	22 顆	6 色	
23	23 顆	6 色	
24	24 顆	6 色	
25	25 顆	6 色	
26	26 顆	6 色	
27	27 顆	6 色	
28	28 顆	6 色	
29	29 顆	7 色	找不到截為六段的組合，只能截為七段，先列出一組解代表。 
30	30 顆	7 色	找不到截為六段的組合，只能截為七段，先列出一組解代表。 
31	31 顆	6 色	

6. 總珠數 32 顆~38 顆（最少截成七段）

地方展比賽後，我們繼續最少段數七段的研究，最少段數七段的可能組數分析就比六段的可能組數多上七倍之多，不過我們依然可以找出：

編號	珠數	段數	最佳解的項鍊簡圖	編號	珠數	段數	最佳解的項鍊簡圖
32	32 顆	7 色		36	36 顆	7 色	
33	33 顆	7 色		37	37 顆	7 色	
34	34 顆	7 色		39	39 顆	7 色	
35	35 顆	7 色					

而我們也發現其中有趣的地方：

- 其中我們仍可發現這些解中，存在和之前發現一樣的規律性，也就是隨著珠子數持續增加，其最佳解多半類似，改變的只有某一段的珠子數遞增。

例：總珠數 32⇒總珠數 33⇒總珠數 34⇒總珠數 35⇒總珠數 36⇒總珠數 37



- 但上述規律並不適用在總珠數 38 顆中，因為（7-14-1-3-6-2-5）中的所有的續數字 1 到數字 38 中，獨獨缺少了數字 19。



(二) 利用截最少段(顏色)來驗證

1. 最少段數為一段 當最少段數為 1 段，總珠數只能為一顆珠子。
2. 最少段數為二段

總珠數為 2、3 顆時，我們找出最少段數為二段，若假設這兩段為 a、b 顆，則推論所有可能的組合為【a】、【b】、【a+b】三種。



	可能的答案	【a】	【b】	【a+b】	可湊出連續珠數
①	(a=1, b=1)	a=1	b=1	a+b=2	1、2
②	(a=1, b=2)	a=1	b=2	a+b=3	1、2、3

發現：當最少段數為二段時，我們所找出最多的總珠子數為 3 顆。

3. 最少段數為三段

總珠數為 4 顆~7 顆時，我們找出最少段數為三段 a、b、c 顆，則推論所有可能的組合為【a】、【b】、【c】、【a+b】、【b+c】、【c+a】、【a+b+c】七種。而分別以整數取代的答案有六組符合：



可能答案	【a】	【b】	【c】	【a+b】	【b+c】	【c+a】	【a+b+c】	湊出連續珠數
(1, 1, 1)	a=1	b=1	c=1	a+b=2	b+c=2	c+a=2	a+b+c=3	1、2、3
(1, 1, 2)	a=1	b=1	c=2	a+b=2	b+c=3	c+a=3	a+b+c=4	1、2、3、4
(1, 1, 3)	a=1	b=1	c=3	a+b=2	b+c=4	c+a=4	a+b+c=5	1、2、3、4、5
(1, 1, 4)	a=1	b=1	c=4	a+b=2	b+c=5	c+a=5	a+b+c=6	×
(1, 1, 5)	a=1	b=1	c=5	a+b=2	b+c=6	c+a=6	a+b+c=7	×
(1, 1, 6)	a=1	b=1	c=6	a+b=2	b+c=7	c+a=7	a+b+c=8	×
(1, 2, 2)	a=1	b=2	c=2	a+b=3	b+c=4	c+a=3	a+b+c=5	1、2、3、4、5
(1, 2, 3)	a=1	b=2	c=3	a+b=3	b+c=5	c+a=4	a+b+c=6	1、2、3、4、5、6
(1, 2, 4)	a=1	b=2	c=4	a+b=3	b+c=6	c+a=5	a+b+c=7	1、2、3、4、5、6、7
(1, 2, 5)	a=1	b=2	c=5	a+b=3	b+c=8	c+a=6	a+b+c=8	×
(1, 3, 3)	a=1	b=3	c=3	a+b=4	b+c=6	c+a=4	a+b+c=7	×

發現：七個組合中，每一個代表一個不重複的數字，我們最多可以列出 1~7，總共七個數字。因此當最少為三段【a】、【b】、【c】時，最多的總珠子也只有七顆而已。

4. 最少段數為四段

總珠數為 8 顆~13 顆時，我們找出最少的四段，假設這四段為 a、b、c、d 顆，則所有可能的組合為【a】、【b】、【c】、【d】、【a+b】、【b+c】、【c+d】、【d+a】、【a+b+c】、【b+c+d】、【c+d+a】、【d+a+b】、【a+b+c+d】十三種。我們利用 $a \leq b \leq c \leq d$ 方式，一開始先從(c-d)依序簡變更：



(a-b)	可能的組合(須注意數字間位置的變換例: (1-2-3-6)~(1-3-2-6))	符合的解	總珠子數
(1-1)	(1-1-1-1), (1-1-1-2), (1-1-1-3), (1-1-1-4), (1-1-1-5), (1-1-2-2), (1-1-2-3), (1-1-2-4), (1-1-2-6), (1-1-3-3), (1-1-3-4), (1-1-3-7), (1-1-4-4), (1-1-5-5),	(1-1-1-1) ⇒ 4, (1-1-1-2) ⇒ 5, (1-1-1-3) ⇒ 6 (1-1-1-4) ⇒ 7, (1-1-2-1) ⇒ 5, (1-1-2-2) ⇒ 6 (1-1-2-3) ⇒ 7, (1-1-2-4) ⇒ 8, (1-1-3-1) ⇒ 6 (1-1-3-2) ⇒ 7, (1-1-3-3) ⇒ 8, (1-1-3-4) ⇒ 9	
(1-2)	(1-2-2-2), (1-2-2-3), (1-2-2-4), (1-2-2-5), (1-2-2-6), (1-2-2-7), (1-2-3-3), (1-2-3-4), (1-2-3-5), (1-2-3-6)~(1-3-2-6), (1-2-4-2), (1-2-4-3), (1-2-4-4), (1-2-4-5), (1-2-4-6), (1-2-5-5), (1-2-6-6),	(1-2-1-2) ⇒ 6, (1-2-1-3) ⇒ 7, (1-2-1-4) ⇒ 8 (1-2-1-5) ⇒ 9, (1-2-2-2) ⇒ 7, (1-2-2-3) ⇒ 8 (1-2-2-4) ⇒ 9, (1-2-2-5) ⇒ 10, (1-2-2-6) ⇒ 11 (1-2-3-3) ⇒ 9, (1-2-3-4) ⇒ 10, (1-2-4-2) ⇒ 9 (1-2-5-3) ⇒ 11, (1-3-2-6) ⇒ 12, (1-2-6-4) ⇒ 13	
(1-3)	(1-3-3-3), (1-3-3-4),	×	
(1-4)	(1-4-4-4), (1-4-4-5), (1-4-5-5), (1-4-5-6),	×	
(1-5)	(1-5-5-5), (1-5-5-6),	×	
(2-2)	(2-2-2-2),	×	

我們僅列出總珠數 10、11、12、13 三種情形，(1-3-2-7)及(1-2-6-4)能湊出最多且完整連續的總珠數，詳見下表：

可能答案	[a]	[b]	[c]	[d]	[a+b]	[b+c]	[c+d]	[d+a]	[a+b+c]	[b+c+d]	[c+d+a]	[d+a+b]	[a+b+c+d]	湊出連續珠數
(1-2-3-4)	a=1	b=2	c=3	d=4	a+b=5	b+c=5	c+d=7	d+a=5	a+b+c=6	b+c+d=9	c+d+a=8	d+a+b=7	a+b+c+d=10	1、2、3……、10
(1-2-5-3)	a=1	b=2	c=5	d=3	a+b=3	b+c=7	c+d=8	d+a=6	a+b+c=6	b+c+d=10	c+d+a=9	d+a+b=6	a+b+c+d=11	1、2、3……、10、11
(1-3-2-6)	a=1	b=3	c=2	d=6	a+b=4	b+c=5	c+d=8	d+a=7	a+b+c=6	b+c+d=11	c+d+a=9	d+a+b=10	a+b+c+d=12	1、2、3……、10、11、12
(1-2-6-4)	a=1	b=2	c=6	d=4	a+b=3	b+c=8	c+d=10	d+a=5	a+b+c=9	b+c+d=12	c+d+a=11	d+a+b=7	a+b+c+d=13	1、2、3……、10、11、12、13

發現：

上面 13 種組合【a】、【b】、【c】、【d】、【a+b】、【b+c】、【c+d】、【d+a】、【a+b+c】、【b+c+d】、【c+d+a】、【d+a+b】、【a+b+c+d】，每一個代表一個不重複的數字，我們最多可以列出 1、2、3……11、12、13，總共 13 個數字。因此當最少段數為三段【a】、【b】、【c】、【d】時，最多組合的總珠子也只有 13 顆而已。

5. 最少段數為五段

總珠數為 14 顆~19 顆以及 20 顆時，這七種的解（備註：20 顆珠數無法只截成最少的五段），我們找出最少段數為五段，若假設這五段為 a、b、c、d、e 顆，則推論所有可能的組合為【a】、【b】、【c】、【d】、【e】、【a+b】、【b+c】、【c+d】、【d+e】、【e+a】、【a+b+c】、【b+c+d】、【c+d+e】、【d+e+a】、【e+a+b】、【a+b+c+d】、【b+c+d+e】、【c+d+e+a】、【d+e+a+b】、【e+a+b+c】、【a+b+c+d+e】 21 種。



我們利用 $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ 方式，一開始先從(d-e)依序簡變更，請見下表：

(a-b-c)	可能的組合（須注意數字間位置的變換例：(1-2-3-6)~(1-3-2-6)）	符合的解	總珠子數
(1-1-1)	(1-1-1-1-1)、(1-1-1-1-2)、(1-1-1-1-3)、(1-1-1-1-4)、(1-1-1-1-5)、 (1-1-1-1-6) 、 (1-1-1-2-2)、(1-1-1-2-3)、(1-1-1-2-4)、(1-1-1-2-5)、(1-1-1-2-6)、 (1-1-1-2-7) 、 (1-1-1-3-3)、(1-1-1-3-4)、(1-1-1-3-7)、 (1-1-1-3-9) 、 (1-1-1-4-4)、(1-1-1-4-5)、(1-1-1-4-6)、(1-1-1-4-7)、(1-1-1-4-8)、 (1-1-1-4-9) 、 (1-1-1-5-5) 、	(1-1-1-1-1) $\Rightarrow$ 5、(1-1-1-1-2) $\Rightarrow$ 6、(1-1-1-1-3) $\Rightarrow$ 7、 (1-1-1-1-4) $\Rightarrow$ 8、(1-1-1-1-5) $\Rightarrow$ 9、(1-1-1-2-2) $\Rightarrow$ 7、 (1-1-1-2-3) $\Rightarrow$ 8、(1-1-1-2-4) $\Rightarrow$ 9、(1-1-1-2-5) $\Rightarrow$ 10、 (1-1-1-2-6) $\Rightarrow$ 11、(1-1-1-3-3) $\Rightarrow$ 8、(1-1-1-3-4) $\Rightarrow$ 10、 (1-1-1-3-5) $\Rightarrow$ 11、(1-1-1-3-6) $\Rightarrow$ 12、(1-1-1-3-7) $\Rightarrow$ 13、 (1-1-1-4-4) $\Rightarrow$ 11、(1-1-1-4-5) $\Rightarrow$ 12、(1-1-1-4-6) $\Rightarrow$ 13、 (1-1-1-4-7) $\Rightarrow$ 14、(1-1-1-4-8) $\Rightarrow$ 15	
(1-1-2)	(1-1-2-2-2)、(1-1-2-2-3)、(1-1-2-2-4)、(1-1-2-2-5)、(1-1-2-2-6)、 (1-1-2-2-7) 、 (1-1-2-2-8) 、 (1-1-2-3-3)、(1-1-2-3-4)、(1-1-2-3-5)、(1-1-2-3-6)、(1-1-2-3-7)、(1-1-2-3-8)、 (1-1-2-3-9) 、 (1-1-2-4-4)、(1-1-2-4-5)、(1-4-6-1-2)、(1-4-7-2-1)、(4-1-8-1-2)、(4-1-9-1-2)、 (1-1-2-4-10) 、 (1-1-2-5-5)、(1-1-2-5-6)、(1-5-7-1-2)、(1-5-8-2-1)、 (1-1-2-5-10) 、 (1-1-2-6-6) 、 (1-1-2-6-7) 、	(1-1-2-2-2) $\Rightarrow$ 8、(1-1-2-2-3) $\Rightarrow$ 9、(1-1-2-2-4) $\Rightarrow$ 10、 (1-1-2-2-5) $\Rightarrow$ 11、(1-1-2-2-6) $\Rightarrow$ 12、(1-1-2-3-3) $\Rightarrow$ 10、 (1-1-2-3-4) $\Rightarrow$ 11、(1-1-2-3-5) $\Rightarrow$ 12、(1-1-2-3-6) $\Rightarrow$ 13、 (1-1-2-3-7) $\Rightarrow$ 14、(1-1-2-3-8) $\Rightarrow$ 15、(1-1-2-4-4) $\Rightarrow$ 12、 (1-1-2-4-5) $\Rightarrow$ 13、(1-4-6-1-2) $\Rightarrow$ 14、(1-4-7-2-1) $\Rightarrow$ 15、 (4-1-8-1-2) $\Rightarrow$ 16、(4-1-9-1-2) $\Rightarrow$ 17、(1-1-2-5-5) $\Rightarrow$ 14、 (1-1-2-5-6) $\Rightarrow$ 15、(1-5-7-1-2) $\Rightarrow$ 16、(1-5-8-2-1) $\Rightarrow$ 17、 (1-1-3-3-3) $\Rightarrow$ 11、(1-1-3-3-4) $\Rightarrow$ 12、(1-1-3-3-5) $\Rightarrow$ 13、 (1-1-3-3-6) $\Rightarrow$ 14、(1-1-3-3-7) $\Rightarrow$ 15、(1-1-3-3-8) $\Rightarrow$ 16、 (1-1-3-3-9) $\Rightarrow$ 17、(1-1-3-4-4) $\Rightarrow$ 13、(1-1-3-4-5) $\Rightarrow$ 14、 (1-1-3-5-5) $\Rightarrow$ 15、(1-1-3-5-6) $\Rightarrow$ 16、(1-1-3-6-6) $\Rightarrow$ 17、 (1-2-2-2-2) $\Rightarrow$ 9、(1-2-2-2-3) $\Rightarrow$ 10、(1-2-2-2-4) $\Rightarrow$ 11、 (1-2-2-2-5) $\Rightarrow$ 12、(1-2-2-2-6) $\Rightarrow$ 13、(1-2-2-2-7) $\Rightarrow$ 14、 (1-2-2-2-8) $\Rightarrow$ 15、(1-2-2-3-3) $\Rightarrow$ 11、(1-2-2-4-3) $\Rightarrow$ 12、 (1-2-2-3-5) $\Rightarrow$ 13、(1-2-2-3-6) $\Rightarrow$ 14、(1-2-2-7-3) $\Rightarrow$ 15、 (1-3-2-2-8) $\Rightarrow$ 16、(1-3-2-2-9) $\Rightarrow$ 17、(1-2-2-4-4) $\Rightarrow$ 13、 (1-2-4-5-2) $\Rightarrow$ 14、(1-2-4-6-2) $\Rightarrow$ 15、(1-2-4-7) $\Rightarrow$ 16、 (1-4-2-8-2) $\Rightarrow$ 17、(1-2-2-5-5) $\Rightarrow$ 15、(1-2-2-6-6) $\Rightarrow$ 17、 (1-2-2-8-6) $\Rightarrow$ 17、(1-2-3-3-3) $\Rightarrow$ 12、(1-2-3-3-4) $\Rightarrow$ 13、 (1-3-2-5-3) $\Rightarrow$ 14、(1-3-2-6-3) $\Rightarrow$ 15、(1-3-3-2-7) $\Rightarrow$ 16、 (1-3-3-2-8) $\Rightarrow$ 17、(1-3-3-2-9) $\Rightarrow$ 18、(1-3-3-2-10) $\Rightarrow$ 19、 (1-2-3-4-4) $\Rightarrow$ 14、(1-2-3-4-5) $\Rightarrow$ 15、(1-2-3-4-7) $\Rightarrow$ 17、 (1-2-3-4-8) $\Rightarrow$ 18、(1-4-2-9-3) $\Rightarrow$ 19、(2-1-3-5-5) $\Rightarrow$ 16、 (2-1-3-6-5) $\Rightarrow$ 17、(2-5-1-3-8) $\Rightarrow$ 19、 (2-5-1-3-10) $\Rightarrow$ 21 、 (1-2-4-4-4) $\Rightarrow$ 15、(1-2-4-4-5) $\Rightarrow$ 16、(1-2-6-4-4) $\Rightarrow$ 17、 (1-2-4-5-5) $\Rightarrow$ 17、(1-2-6-5-4) $\Rightarrow$ 18、(1-2-4-5-7) $\Rightarrow$ 19、 (2-1-4-6-6) $\Rightarrow$ 19、(1-2-5-5-5) $\Rightarrow$ 18、	
(1-1-3)	(1-1-3-3-3)、(1-1-3-3-4)、(1-1-3-3-5)、(1-1-3-3-6)、(1-1-3-3-7)、(1-1-3-3-8)、(1-1-3-3-9)、 (1-1-3-3-10) 、 (1-1-3-4-4)、(1-1-3-4-5)、(1-1-6-3-4)、(1-1-7-3-4)、(1-1-8-3-4)、(1-1-9-3-4)、(1-1-10-3-4)、 (1-1-3-4-11) 、 (1-1-3-5-5)、(1-1-3-5-6)、 (1-1-3-5-7) 、 (1-1-3-5-8) 、 (1-1-3-6-6)、 (1-1-3-6-7) 、 (1-1-3-6-8) 、 (1-1-3-7-7) 、 (1-1-4-4-4) 、 (1-1-4-4-5) 、		
(1-1-4)	(1-1-4-4-4) 、 (1-1-4-4-5) 、		
(1-2-2)	(1-2-2-2-2)、(1-2-2-2-3)、(1-2-2-2-4)、(1-2-2-2-5)、(1-2-2-2-6)、(1-2-2-2-7)、(1-2-2-2-8)、 (1-2-2-2-9) 、 (1-2-2-3-3)、(1-2-2-4-3)、(1-2-2-3-5)、(1-2-2-3-6)、(1-2-2-7-3)、(1-3-2-2-8)、(1-3-2-2-9)、 (1-2-2-3-10) 、 (1-2-2-4-4)、(1-2-4-5-2)、(1-2-4-6-2)、(1-2-2-4-7)、(1-4-2-8-2)、 (1-2-2-4-9) 、 (1-2-2-4-10) 、 (1-2-2-5-5)、 (1-2-2-5-6) 、 (1-2-2-6-6)、 (1-2-2-6-7) 、 (1-2-2-6-8) 、 (1-2-3-3-3)、(1-2-3-3-4)、(1-3-2-5-3)、(1-3-2-6-3)、(1-3-3-2-7)、(1-3-3-2-8)、(1-3-3-2-9)、 (1-3-3-2-10)、 (1-2-3-3-10) 、 (1-2-3-4-4)、(1-2-3-4-5)、(1-2-3-4-7)、(1-2-3-4-8)、(1-4-2-9-3)、 (1-2-3-4-10) 、 (2-1-3-5-5)、(2-1-3-6-5)、(2-5-1-3-8)、 (1-2-3-5-9) 、(2-5-1-3-10)、 (1-2-3-5-11) 、 (1-3-2-6-6) 、 (1-3-2-6-7) 、		
(1-2-3)	(1-2-3-3-3)、(1-2-3-3-4)、(1-2-3-3-5)、(1-2-3-3-6)、(1-2-3-3-7)、(1-2-3-3-8)、(1-2-3-3-9)、 (1-2-3-3-10) 、 (1-2-3-4-4)、(1-2-3-4-5)、(1-2-3-4-7)、(1-2-3-4-8)、(1-4-2-9-3)、 (1-2-3-4-10) 、 (2-1-3-5-5)、(2-1-3-6-5)、(2-5-1-3-8)、 (1-2-3-5-9) 、(2-5-1-3-10)、 (1-2-3-5-11) 、 (1-3-2-6-6) 、 (1-3-2-6-7) 、		
(1-2-4)	(1-2-4-4-4)、(1-2-4-4-5)、(1-2-6-4-4)、 (1-2-4-4-7) 、 (1-2-4-5-5)、(1-2-6-5-4)、(1-2-4-5-7)、 (1-2-4-5-8) 、 (1-2-4-5-9) 、 (2-1-4-6-6)、 (1-2-4-6-7) 、 (1-2-4-6-8) 、		
(1-2-5)	(1-2-5-5-5)、		
(1-3-3)	(1-3-3-3-3) 、		

發現：

- 右表是總珠數 21 的解(2-5-1-3-10)細部分析： $\{a\} \cdot \{b\} \cdot \{c\} \cdot \{d\} \cdot \{e\} \cdot \{a+b\} \cdot \{b+c\} \cdot \{c+d\} \cdot \{d+e\} \cdot \{e+a\} \cdot \{a+b+c\} \cdot \{b+c+d\} \cdot \{c+d+e\} \cdot \{d+e+a\} \cdot \{e+a+b\} \cdot \{a+b+c+d\} \cdot \{b+c+d+e\} \cdot \{c+d+e+a\} \cdot \{d+e+a+b\} \cdot \{e+a+b+c\} \cdot \{a+b+c+d+e\}$ 代表 21 不重複的數字，我們最多可以列出 1、2、3、……20、21，共 21 個數字，因此當最少段數為五段 $\{a\} \cdot \{b\} \cdot \{c\} \cdot \{d\} \cdot \{e\}$ 時，最多組合的總珠子為 21 顆。
- 在分析過程中，我們發現五段珠子可以組合連續總珠數的珠子個數，最少為 5 顆，最多為 21 顆，且總珠數自 5 顆、6 顆、7 顆……18 顆、19 顆以及 21 顆，和先前的研究一樣，我們找不到最少能載為五段且總珠數為 20 顆的串鍊。

可能答案	(2-5-1-3-10)	可能答案	(2-5-1-3-10)
$\{a\}$	$a=2$	$\{b+c+d\}$	$b+c+d=9$
$\{b\}$	$b=5$	$\{c+d+e\}$	$c+d+e=14$
$\{c\}$	$c=1$	$\{d+e+a\}$	$d+e+a=15$
$\{d\}$	$d=3$	$\{e+a+b\}$	$e+a+b=17$
$\{e\}$	$e=10$	$\{a+b+c+d\}$	$a+b+c+d=11$
$\{a+b\}$	$a+b=7$	$\{b+c+d+e\}$	$b+c+d+e=19$
$\{b+c\}$	$b+c=6$	$\{c+d+e+a\}$	$c+d+e+a=16$
$\{c+d\}$	$c+d=4$	$\{d+e+a+b\}$	$d+e+a+b=20$
$\{d+e\}$	$d+e=13$	$\{e+a+b+c\}$	$e+a+b+c=18$
$\{e+a\}$	$e+a=12$	$\{a+b+c+d+e\}$	$a+b+c+d+e=21$
$\{a+b+c\}$	$a+b+c=8$	湊出連續珠數	1、2……21

6. 最少段數為六段

總珠數為 22 顆~30 顆，這 8 種串鍊的解，我們找出最少段數為六段，若假設這六段為 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 顆，則推論所有可能的組合為 $\{a\} \cdot \{b\} \cdot$



$\{c\} \cdot \{d\} \cdot \{e\} \cdot \{f\} \cdot \{a+b\} \cdot \{b+c\} \cdot \{c+d\} \cdot \{d+e\} \cdot \{e+f\} \cdot \{f+a\} \cdot \{a+b+c\} \cdot \{b+c+d\} \cdot \{c+d+e\} \cdot \{d+e+f\} \cdot \{e+f+a\} \cdot \{f+a+b\} \cdot \{a+b+c+d\} \cdot \{b+c+d+e\} \cdot \{c+d+e+f\} \cdot \{d+e+f+a\} \cdot \{e+f+a+b\} \cdot \{f+a+b+c\} \cdot \{a+b+c+d+e+f\}$ 31 種。

分析過程請詳見附件，下表是總珠數 31 解(1-3-6-2-5-14)細部分析，我們發現：

- $\{a\} \cdot \{b\} \cdot \{c\} \cdot \{d\} \cdot \{e\} \cdot \{f\} \cdot \{a+b\} \cdot \{b+c\} \cdot \{c+d\} \cdot \{d+e\} \cdot \{e+f\} \cdot \{f+a\} \cdot \{a+b+c\} \cdot \{b+c+d\} \cdot \{c+d+e\} \cdot \{d+e+f\} \cdot \{e+f+a\} \cdot \{f+a+b\} \cdot \{a+b+c+d\} \cdot \{b+c+d+e\} \cdot \{c+d+e+f\} \cdot \{d+e+f+a\} \cdot \{e+f+a+b\} \cdot \{f+a+b+c\} \cdot \{a+b+c+d+e+f\}$ 代表 31 個不重複的數字，我們最多可以列出 1、2、3、……30、31，共 31 個數字，因此當最少段數為五段 $\{a\} \cdot \{b\} \cdot \{c\} \cdot \{d\} \cdot \{e\} \cdot \{f\}$ 時，最多組合的總珠子為 31 顆。
- 在分析過程中，我們發現五段珠子可以組合連續總珠數的珠子個數，最少為 6 顆，最多為 31 顆。

可能答案	(1-3-6-2-5-14)	可能答案	(1-3-6-2-5-14)
$\{a\}$	$a=1$	$\{e+f+a\}$	$e+f+a=20$
$\{b\}$	$b=3$	$\{f+a+b\}$	$f+a+b=18$
$\{c\}$	$c=6$	$\{a+b+c+d\}$	$a+b+c+d=12$
$\{d\}$	$d=2$	$\{b+c+d+e\}$	$b+c+d+e=16$
$\{e\}$	$e=5$	$\{c+d+e+f\}$	$c+d+e+f=27$
$\{f\}$	$f=14$	$\{d+e+f+a\}$	$d+e+f+a=22$
$\{a+b\}$	$a+b=4$	$\{e+f+a+b\}$	$e+f+a+b=23$
$\{b+c\}$	$b+c=9$	$\{f+a+b+c\}$	$f+a+b+c=24$
$\{c+d\}$	$c+d=8$	$\{a+b+c+d+e\}$	$a+b+c+d+e=17$
$\{d+e\}$	$d+e=7$	$\{b+c+d+e+f\}$	$b+c+d+e+f=30$
$\{e+f\}$	$e+f=19$	$\{c+d+e+f+a\}$	$c+d+e+f+a=28$
$\{f+a\}$	$f+a=15$	$\{d+e+f+a+b\}$	$d+e+f+a+b=25$
$\{a+b+c\}$	$a+b+c=10$	$\{e+f+a+b+c\}$	$e+f+a+b+c=29$
$\{b+c+d\}$	$b+c+d=11$	$\{f+a+b+c+d\}$	$f+a+b+c+d=26$
$\{c+d+e\}$	$c+d+e=13$	$\{a+b+c+d+e+f\}$	$a+b+c+d+e+f=31$
$\{d+e+f\}$	$d+e+f=21$	湊出連續珠數	1、2……31

三、變更遊戲規則的手環遊戲

在地方科展覽比賽中，評審曾經問我們，若不依照我們原先規定的遊戲規則來玩，單純以湊數字方式來研究，結果會是如何？我們嘗試解題後，發現原來這也十分有趣，經過研究後，我們發現了一些好玩且有規律性的部分，如下列所示：

- 1.規則變更：將一串項鍊盡量分成最少段，使被截斷的鍊珠部分個別拆開來重新組合，組出珠數 1、2、3…至整條項鍊的珠數。
- 2.研究過程：以截斷數為主軸，從一段、二段…增加研究起，因為不需考慮相鄰位置的緣故，所以研究變得很簡單，可利用之前找數字 $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ 方式先找出數字組合，再湊數字即可。

段數	(a≤b≤c)	湊出數字	段數	(a≤b≤c≤d)	湊出數字	(a≤b≤c≤d)	湊出數字	(a≤b≤c≤d)	湊出數字
一	1	1	四	1-1-1-1	1~4	1-1-3-4	1~9	1-2-3-4	1~10
二	1-1	1~2		1-1-1-2	1~5	1-1-3-5	1~10	1-2-3-5	1~11
	1-2	1~3		1-1-1-3	1~6	1-1-3-6	1~11	1-2-3-6	1~12
	1-3	缺 2		1-1-1-4	1~7	1-1-3-7	缺 6	1-2-3-7	1~13
三	1-1-1	1~3		1-1-1-5	1~8	1-1-4-4	缺 3-7	1-2-3-8	缺 7
	1-1-2	1~4		1-1-2-2	1~6	1-2-2-2	1~7	1-2-4-4	1~11
	1-1-3	1~5		1-1-2-3	1~7	1-2-2-3	1~8	1-2-4-5	1~12
	1-2-2	1~5		1-1-2-4	1~8	1-2-2-4	1~9	1-2-4-6	1~13
	1-2-3	1~6		1-1-2-5	1~9	1-2-2-5	1~10	1-2-4-7	1~14
	1-2-4	1~7		1-1-2-6	缺 5	1-2-2-6	1~11	1-2-4-8	1~15
	1-2-5	缺 4		1-1-2-7	缺 5-6	1-2-2-7	缺 6	1-2-4-9	缺 8
	1-3-3	缺 2-5		1-1-3-3	1~8	1-2-3-3	1~9	1-2-5-5	缺 4

段數	數字組合	湊出數字	數字組合	湊出數字	數字組合	湊出數字	數字組合	湊出數字	數字組合	湊出數字	數字組合	湊出數字
五	1-1-1-1-1	1~5	1-1-2-3-7	1~14	1-1-3-7-7	缺 6-13	1-2-2-6-8	1~19	1-2-3-6-7	1~19	1-2-4-5-12	1~24
	1-1-1-1-2	1~6	1-1-2-3-8	1~15	1-2-2-2-2	1~9	1-2-2-6-9	1~20	1-2-3-6-8	1~20	1-2-4-5-13	1~25
	1-1-1-1-3	1~7	1-1-2-3-9	缺 8	1-2-2-2-3	1~10	1-2-2-6-10	1~21	1-2-3-6-9	1~21	1-2-4-5-14	缺 12
	1-1-1-1-4	1~8	1-1-3-3-3	1~11	1-2-2-2-4	1~11	1-2-2-6-11	1~22	1-2-3-6-10	1~22	1-2-4-6-6	1~19
	1-1-1-1-5	1~9	1-1-3-3-4	1~12	1-2-2-2-5	1~12	1-2-2-6-12	1~23	1-2-3-6-11	1~23	1-2-4-6-7	1~20
	1-1-1-1-6	缺 5	1-1-3-3-5	1~13	1-2-2-2-6	1~13	1-2-2-6-13	缺 12	1-2-3-6-12	1~24	1-2-4-6-8	1~21
	1-1-1-2-2	1~7	1-1-3-3-6	1~14	1-2-2-2-7	1~14	1-2-2-7-7	缺 6	1-2-3-6-13	1~25	1-2-4-6-9	1~22
	1-1-1-2-3	1~8	1-1-3-3-7	1~15	1-2-2-2-8	1~15	1-2-3-3-3	1~12	1-2-3-6-14	缺 13	1-2-4-6-10	1~23
	1-1-1-2-4	1~9	1-1-3-3-8	1~16	1-2-2-2-9	缺 8	1-2-3-3-4	1~13	1-2-3-7-7	1~20	1-2-4-6-11	1~24
	1-1-1-2-5	1~10	1-1-3-3-9	1~17	1-2-2-3-3	1~11	1-2-3-3-5	1~14	1-2-3-7-8	1~21	1-2-4-6-12	1~25
	1-1-1-2-6	1~11	1-1-3-3-10	缺 9	1-2-2-3-4	1~12	1-2-3-3-6	1~15	1-2-3-7-9	1~22	1-2-4-6-13	1~26
	1-1-1-2-7	缺 6	1-1-3-4-4	1~13	1-2-2-3-5	1~13	1-2-3-3-7	1~16	1-2-3-7-10	1~23	1-2-4-6-14	1~27
	1-1-1-3-3	1~9	1-1-3-4-5	1~14	1-2-2-3-6	1~14	1-2-3-3-8	1~17	1-2-3-7-11	1~24	1-2-4-6-15	缺 14
	1-1-1-3-4	1~10	1-1-3-4-6	1~15	1-2-2-3-7	1~15	1-2-3-3-9	1~18	1-2-3-7-12	1~25	1-2-4-7-7	1~21
	1-1-1-3-5	1~11	1-1-3-4-7	1~16	1-2-2-3-8	1~16	1-2-3-3-10	1~19	1-2-3-7-13	1~26	1-2-4-7-8	1~22
	1-1-1-3-6	1~12	1-1-3-4-8	1~17	1-2-2-3-9	1~17	1-2-3-3-11	缺 10	1-2-3-7-14	1~27	1-2-4-7-9	1~23
	1-1-1-3-7	1~13	1-1-3-4-9	1~18	1-2-2-3-10	缺 9	1-2-3-4-4	1~14	1-2-3-7-15	缺 14	1-2-4-7-10	1~24
	1-1-1-3-8	缺 7	1-1-3-4-10	1~19	1-2-2-4-4	1~13	1-2-3-4-5	1~15	1-2-3-8-8	缺 7	1-2-4-7-11	1~25
	1-1-1-4-4	1~11	1-1-3-4-11	缺 10	1-2-2-4-5	1~14	1-2-3-4-6	1~16	1-2-4-4-4	1~15	1-2-4-7-12	1~26
	1-1-1-4-5	1~12	1-1-3-5-5	1~15	1-2-2-4-6	1~15	1-2-3-4-7	1~17	1-2-4-4-5	1~16	1-2-4-7-13	1~27
	1-1-1-4-6	1~13	1-1-3-5-6	1~16	1-2-2-4-7	1~16	1-2-3-4-8	1~18	1-2-4-4-6	1~17	1-2-4-7-14	1~28
	1-1-1-4-7	1~14	1-1-3-5-7	1~17	1-2-2-4-8	1~17	1-2-3-4-9	1~19	1-2-4-4-7	1~18	1-2-4-7-15	1~29
	1-1-1-4-8	1~15	1-1-3-5-8	1~18	1-2-2-4-9	1~18	1-2-3-4-10	1~20	1-2-4-4-8	1~19	1-2-4-7-16	缺 15
	1-1-1-4-9	缺 8	1-1-3-5-9	1~19	1-2-2-4-10	1~19	1-2-3-4-11	1~21	1-2-4-4-9	1~20	1-2-4-8-8	1~23
	1-1-2-2-2	1~8	1-1-3-5-10	1~20	1-2-2-4-11	缺 10	1-2-3-4-12	缺 11	1-2-4-4-10	1~21	1-2-4-8-9	1~24
	1-1-2-2-3	1~9	1-1-3-5-11	1~21	1-2-2-5-5	1~15	1-2-3-5-5	1~16	1-2-4-4-11	1~22	1-2-4-8-10	1~25
	1-1-2-2-4	1~10	1-1-3-5-12	缺 11	1-2-2-5-6	1~16	1-2-3-5-6	1~17	1-2-4-4-12	1~23	1-2-4-8-11	1~26
	1-1-2-2-5	1~11	1-1-3-6-6	1~17	1-2-2-5-7	1~17	1-2-3-5-7	1~18	1-2-4-4-13	缺 12	1-2-4-8-12	1~27
	1-1-2-2-6	1~12	1-1-3-6-7	1~18	1-2-2-5-8	1~18	1-2-3-5-8	1~19	1-2-4-5-5	1~17	1-2-4-8-13	1~28
	1-1-2-2-7	1~13	1-1-3-6-8	1~19	1-2-2-5-9	1~19	1-2-3-5-9	1~20	1-2-4-5-6	1~18	1-2-4-8-14	1~29
	1-1-2-2-8	缺 7	1-1-3-6-9	1~20	1-2-2-5-10	1~20	1-2-3-5-10	1~21	1-2-4-5-7	1~19	1-2-4-8-15	1~30
	1-1-2-3-3	1~10	1-1-3-6-10	1~21	1-2-2-5-11	1~21	1-2-3-5-11	1~22	1-2-4-5-8	1~20	1-2-4-8-16	1~31
	1-1-2-3-4	1~11	1-1-3-6-11	1~22	1-2-2-5-12	缺 11	1-2-3-5-12	1~23	1-2-4-5-9	1~21	1-2-4-8-17	缺 16
	1-1-2-3-5	1~12	1-1-3-6-12	1~23	1-2-2-6-6	1~17	1-2-3-5-13	缺 12	1-2-4-5-10	1~22	1-2-4-9-9	缺 8
	1-1-2-3-6	1~13	1-1-3-6-13	缺 12	1-2-2-6-7	1~18	1-2-3-6-6	1~18	1-2-4-5-11	1~23		

從上述研究過程中，我們發現以此規則來湊出最多的數字，有一定的規律性，如下所示：

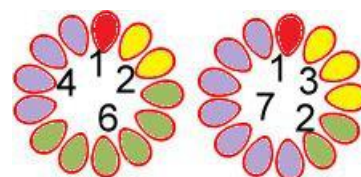
段數	數字組合	湊出連續數字	最大數字	備註
一	1 顆	1	1	1.我們可預測出戴六段的數字組合為： 2.依此規律性繼續推測至戴成 n 段時，這 n 段的組合為：
二	1 顆、2 顆	1、2、3	3	
三	1 顆、2 顆、4 顆	1、2、3、4、5、6、7	7	
四	1 顆、2 顆、4 顆、8 顆	1、2、3~13、14、15	15	
五	1 顆、2 顆、4 顆、8 顆、16 顆	1、2、3~29、30、31	31	
六	1 顆、2 顆、4 顆、8 顆、16 顆、32 顆	1、2、3~61、62、63	63	
n 段	1 顆、2 顆、4 顆、8 顆、~ $2^{(n-1)}$ 顆	1、2、3~ (2^n-3) 、 (2^n-2) 、 (2^n-1)	(2^n-1)	

肆、研究結果：

一、這串 13 顆珠子串鍊所截斷最少段數（顏色）的最佳解？所截段數能不能再少一點？

(1) 13 顆珠鍊最少可截四段，相鄰處可相互組合 13 種不同長度的鍊子，我們找出二組最佳解，分別是(1-2-6-4)及(1-3-2-7)。

(2) 最少段數為四段，無法再將 13 顆串珠截低於四段。

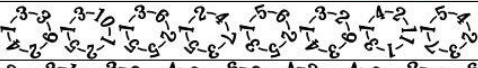
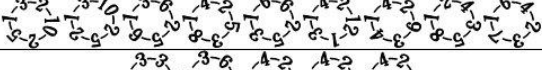
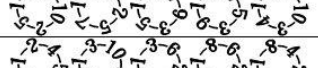
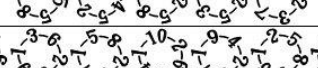
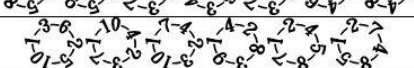
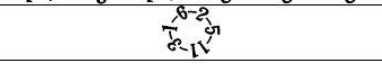
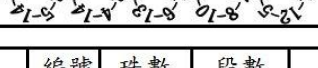


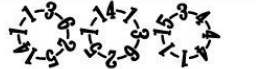
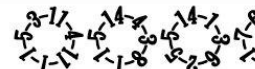
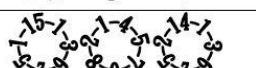
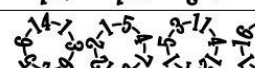
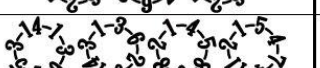
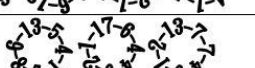
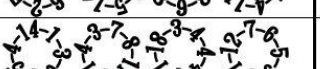
二、不同長度（最多珠子）的手鍊，所能截斷最少段數（顏色）的最佳解為何？

下表為從串珠總數 1、2……至總珠數 31，我們找出符合規則的最佳解及串鍊簡圖。

編號	總珠數	色種段數	最佳解的手鍊簡圖	編號	總珠數	色種段數	最佳解的手鍊簡圖
1	1 顆	1 色	一顆珠子	8	8 顆	4 色	
2	2 顆	2 色		9	9 顆	4 色	
3	3 顆	2 色		10	10 顆	4 色	
4	4 顆	3 色		11	11 顆	4 色	
5	5 顆	3 色		12	12 顆	4 色	
6	6 顆	3 色		13	13 顆	4 色	
7	7 顆	3 色					

珠數	段數	最佳解的項鍊簡圖
14 顆	5 色	
15 顆	5 色	
16 顆	5 色	
17 顆	5 色	
18 顆	5 色	
19 顆	5 色	
21 顆	5 色	

編號	珠數	段數	最佳解的項鍊簡圖
20	20 顆	6 色	找不到截為 5 段的組合，只能截為 6 段，先列出 4 個解來。 
22	22 顆	6 色	
23	23 顆	6 色	
24	24 顆	6 色	
25	25 顆	6 色	
26	26 顆	6 色	
27	27 顆	6 色	
28	28 顆	6 色	
29	29 顆	7 色	找不到截為六段的組合，只能截為七段，先列出一組解代表。 
30	30 顆	7 色	找不到截為六段的組合，只能截為七段，先列出一組解代表。 
31	31 顆	6 色	

編號	珠數	段數	最佳解的項鍊簡圖	編號	珠數	段數	最佳解的項鍊簡圖
32	32 顆	7 色		36	36 顆	7 色	
33	33 顆	7 色		37	37 顆	7 色	
34	34 顆	7 色		39	39 顆	7 色	
35	35 顆	7 色					

三、鍊子上的珠子總數和所能截成最少段數（顏色）有沒有關係？

我們發現鍊子上的總珠個數和所能截成的最少段數是有特定關係的。請見下表，也就是說這鍊子如果有 N 段，那麼整條鍊子能湊出最多種不同組合的珠數就是 $1+N \times (N-1)$ 種。

段數	簡圖	湊出最多不同的珠數組合	統計
1		{a}	1組
2		{a+b} {a}、{b}	1組 2組
3		{a+b+c} {a+b}、{b+c}、{c+a} {a}、{b}、{c}	1組 3組 3組
4		{a+b+c+d} {a+b+c}、{b+c+d}、{c+d+a}、{d+a+b} {a+b}、{b+c}、{c+d}、{d+a} {a}、{b}、{c}、{d}	1組 4組 4組 4組
5		{a+b+c+d+e} {a+b+c+d}、{b+c+d+e}、{c+d+e+a}、{d+e+a+b}、{e+a+b+c} {a+b+c}、{b+c+d}、{c+d+e}、{d+e+a}、{e+a+b} {a+b}、{b+c}、{c+d}、{d+a} {a}、{b}、{c}、{d}、{e}	1組 5組 5組 5組 5組
6		{a+b+c+d+e+f} {a+b+c+d+e}、{b+c+d+e+f}、{c+d+e+f+a}、{d+e+f+a+b}、{e+f+a+b+c}、{f+a+b+c+d} {a+b+c+d}、{b+c+d+e}、{c+d+e+f}、{d+e+f+a}、{e+f+a+b}、{f+a+b+c} {a+b+c}、{b+c+d}、{c+d+e}、{d+e+f}、{e+f+a}、{f+a+b} {a+b}、{b+c}、{c+d}、{d+e}、{e+f}、{f+a} {a}、{b}、{c}、{d}、{e}、{f}	1組 6組 6組 6組 6組 6組

我們找出利用 1~6 段（顏色）所組成鍊子的最佳解，可以串出最長（最多）的串珠。

段數	簡圖	湊出最長的珠子個數	公式算法
1		$1=1$	$1 + 1 \times (1-1)$
2		$3=1+2$	$1 + 2 \times (2-1)$
3		$7=1+3+3$	$1 + 3 \times (3-1)$
4		$13=1+4+4+4$	$1 + 4 \times (4-1)$
5		$21=1+5+5+5+5$	$1 + 5 \times (5-1)$
6		$31=1+6+6+6+6+6$	$1 + 6 \times (6-1)$

如果這條串鍊所產生 $1 + N \times (N-1)$ 種組合的總珠子個數都沒有重複，那麼總珠子個數就是 $1 + N \times (N-1)$ 個；但若有重複的部分的話，那總珠數就不會超過 $1 + N \times (N-1)$ 個。

伍、討論與結論：

一、鍊子總長度與最少截段數

我們從歷屆科展作品中找到了第 46 屆全國科展數學科第一名—神奇的尺這件作品，作品內容--「找出可測量長度最長並有最少 N 個間隔的節約尺，而這 N 個間隔的節約尺，可以量出從 1cm、2cm、3cm……量到 Kcm，共 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ 種間隔」。

尺長 (cm)	1	2-3	4-6	7-9	10-13	14-17	18-23	24-29	30
最少間隔 (個)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

而我們的作品內容--「找出截最少段數的一條鍊子，能組合出 1、2、3、4…… k 顆的串珠，最少段數的珠子可以是 1 個、2 個、3 個……，當手鍊上有 N 段，最多可以產生 $1 + N \times (N-1)$ 種組合，手鍊上總珠子數為 $1 + N \times (N-1)$ 個。」

珠鍊長度 (個)	1	2-3	4-7	8-13	14-19 及 21	22-28 及 31
最少間隔 (個)	1	2	3	4	5	6

二件作品相似處以及不同之處：

相似處：兩件作品的規則類似，都是利用最少間隔來組合最長（最多）的尺或鍊子，且須湊出連續整數的組合。

不同處：神奇的尺的間隔排列成線性，兩端點處的間隔彼此無法相互組合；而手鍊的間隔則是形成一個圓環，可順時針也可逆時針相互組合。鍊環所形成組合較多，也較複雜，但以相同的段數卻可形成較長的鍊長。

二、截斷段數的組合

可能的組合解會受到截斷段數和總珠子個數兩種因素的影響。我們一開始就以總珠子數為研究的必要條件，例如：

- ❶ 當截斷段數為 3，總珠子個數是 7，一開始我們限定第一、第二段的珠子數都為 1、1 時，則可能解的第一個組合就是 (1-1-5)；第三段的珠子數就是 $7-2=5$ 。
- ❷ 當截斷段數為 4，總珠子個數是 13 時，則可能解的第一個組合就是 (1-1-1-10)；第四段的珠子數就是 $13-1-1-1=10$ 。
- ❸ 所以如果串鍊的被截斷數是 m ，總珠子數是 K ，那麼第一個個組合的前面 $m-1$ 段的總珠子數是 1，而最後一段的總珠子數就是 $K-(m-1)$ 個。
- ❹ 我們由第一個解的組合 (1-1.....-($K-(m-1)$)) 中的最後段珠數開始往下遞減計算的，依序改變各個段數的珠子數。
- ❺ 而透過上述方式所推論手鍊可能解的組合的情形並未如預期的多，因為我們所探討的是手鍊（手環），須扣除重複的組數。為避免多於重複的組數出現，我們採取分析 $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$ 分析方式，持續分析至 $a < 2$ 就停止。
- ❻ 找到特定的數字後，再利用環上變換位置找出一些相似的雙胞胎解來驗證。

三、最佳解的規律

(一) 大多數的最佳解會出現以 1 顆珠子一段、2 顆珠子一段、3 顆珠子一段的情形。

(二) 大部分的最佳解會透過基本較少的珠子數 1、2、3....珠子相互結合，例如：1-3 相鄰可得 4 顆；2-3 相鄰會結合成 5 顆。依序類推，當總珠子數開始增大超過 20 多顆後，其中有一段珠子個數會比其他四段珠子總和個數和差不多。

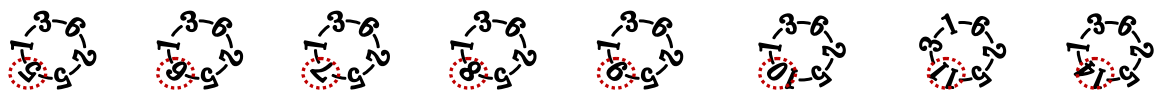
例如：總珠數 7、總珠數 13、總珠數 21、總珠數 31



(三) 截斷數為五段時，珠子個數增大為 20 多顆，最佳解就開始出現中 1 顆珠子一段、2 顆珠子一段、3 顆珠子一段、5 顆珠子為一段的各種組合。

(四) 我們以總珠子個數為研究主軸時，發現每一種長度的鍊子最佳解，隨著珠子數增加，其最佳解多半類似，且改變的只有某一段的珠子數遞增。

例：總珠數 22⇒總珠數 23⇒總珠數 24⇒總珠數 25⇒總珠數 26⇒總珠數 27⇒總珠數 28⇒總珠數 31



例：總珠數 32⇒總珠數 33⇒總珠數 34⇒總珠數 35⇒總珠數 36⇒總珠數 37



(四) 另外我們也發現了一種湊數字的方法，雖然無法將所每一種的可能解找出來，但卻可透過其一段的幾組解，再加入一段一顆、或一段 2 顆、或一段 2 顆的方式找出最佳解。詳見說明：

例 1：從最少段四段的總珠數 13 $\Rightarrow\Rightarrow$ 最少段五段總珠數 14 時，只要在四段 13 顆手環中數字 2 與數字 7 中加入一段一顆，即符合遊戲規則，如下圖所示：

總珠數 13 (四段) $\Rightarrow\Rightarrow$ 總珠數 14 (五段)



例 2：從最少段五段的總珠數 21 $\Rightarrow\Rightarrow$ 最少段六段總珠數 22 時，只要在五段 21 顆中適合位置加入一段一顆，即可符合遊戲規則，如下圖所示：

總珠數 21 (五段) $\Rightarrow\Rightarrow$ 總珠數 22 (六段)



例 3：從最少段六段的總珠數 31 $\Rightarrow\Rightarrow$ 最少段七段總珠數 32 時，只要在六段 31 顆中適合位置加入一段一顆，即可符合遊戲規則，如下圖所示：

總珠數 31 (六段) $\Rightarrow\Rightarrow$ 總珠數 32 (七段)



例 4：從最少五段的總珠數 21 $\Rightarrow\Rightarrow$ 最少六段總珠數 23 時 (或 24 顆)，只要在六段 31 顆中適合位置加入一段 2 顆或一段 3 顆，即可符合規則，如下圖所示：

總珠數 21 $\Rightarrow\Rightarrow$ 總珠數 23

總珠數 21 $\Rightarrow\Rightarrow$ 總珠數 24



例 5：從最少段四段總珠數 19 $\Rightarrow\Rightarrow$ 最少段五段總珠數 22 時，只要加入一段 3 顆，即可符合遊戲規則，例如：總珠數 19 (四段) $\Rightarrow\Rightarrow$ 總珠數 22 (五段)



四、本研究在生活上的應用：

1.節約環狀尺

以總長度 31 公分為例，我們只需要最少六段不同長度單位的尺片組合，就可連續畫出 1 公分～31 依序將六片尺 1 公分、3 公分、6 公分、2 公分、5 公分、14 公連接在一起，串接成環狀尺。

材質主要以可彎曲、可拆解、可組合、又可拉直當作尺來測量，目前我們已魔鬼沾材質來施作，請參考下面 31 公分的成品。

使用方式：

1.若需要畫一條 13 公分的直線，則可拆掉 5 與 14 中間的接縫，以 5 公分為起點，從淺藍、紫色到綠色末端， $5+2+6=13$ 公分。

2.若須利用環狀尺測量物體的長度，首先以 14 公分測試，

❶若多於 14 公分，則利用橘色色塊再搭配相鄰的色塊組合來測量。

❷若少於 14 公分，則利用橘色外的相鄰色塊組合來測量。



利用魔鬼氈作成總長度 31 公分的環狀尺成品



陸、參考資料：

PCuSER 電腦人文化。Ivan Moscovich 著。蔣勵、康俊譯。2007.07.1 版。台灣。IQ 向上！

1000 個大腦思考遊戲（下）。

國立台灣科學教育館。中華民國第 46 屆中小學科學展覽優勝作品專輯。2006.06.1 版。

台北市。中小學科學展覽高小組數學科全國第一名。『神奇的尺』。

第一屆全國高中數學教學研討會論文集。市立成功高中洪鵬凱。不盡相異物排列－著色與環狀排列問題研究。

【評語】 080408

1. 本作品是探討利用最少顏色段數來組合多種不同長度的鍊子。作品趣味生活化，並找到一些公式，更利用 excel 程式來檢驗，找出最佳解，研究精神可嘉。
2. 由於節約環狀尺可隨意拆解，是直尺的改良產品，此為本件作品的一大特色。