

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

080406

當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」

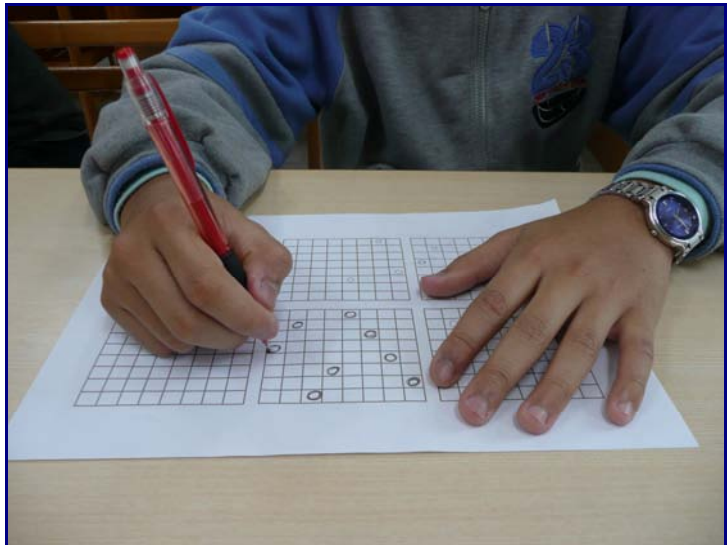
學校名稱：高雄市左營區福山國民小學

| | |
|---|-------------------------|
| 作者： 小六 黃品翰 小六 陳毓笙 小六 林政勛 小五 洪翊倫 小五 王柏鈞 | 指導老師： 陳麗旭 劉安治 |
|---|-------------------------|

關鍵詞： 縱橫刪、皇后棋、等差數列

摘要

在月曆上任意圈選出一塊 4×4 的方陣，並在方陣內任選一個數字，將跟此數位在同一行、同一列的其它數字刪除掉，繼續重複一樣的工作，直到 4×4 的方陣的各行各列都只剩下一個數字，觀察後發現縱橫刪後的四數和等於四角數和。研究過程中，我們發現「八皇后棋」的遊戲方式和「縱橫刪」有異曲同工之妙，將「八皇后棋」與「縱橫刪」的遊戲結合後，發現縱橫斜刪後的八數和均等於四角數和 $\times \frac{8}{4}$ 。我們利用符號將縱橫刪的所有可能列舉計算後證明：只要橫列與縱列均為等差數列的 $n \times n$ 方陣，其縱橫刪後的 n 數和均等於四角數和 $\times \frac{n}{4}$ 。另外，我們也延伸思考出一些與「縱橫刪」、「八皇后棋」相關的數學遊戲，希望將來更能研究出結合其他遊戲的「縱橫刪」新玩法。



▲聚精會神研究中

壹、研究動機

有一天上課運用到 2008 年的月曆時，老師突然想到在「昌爸數學工作坊」的網站中有一個數學遊戲----「縱橫刪」。於是我們幾個志同道合的好友便利用晨光時間討論了起來，發現八皇后棋的排列方式比縱橫刪更有挑戰性，過程中我們運用了數學五下「對稱圖形」及六下「怎樣解題」、「等差數列」單元來進行研究，探討數字和的奧妙！

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

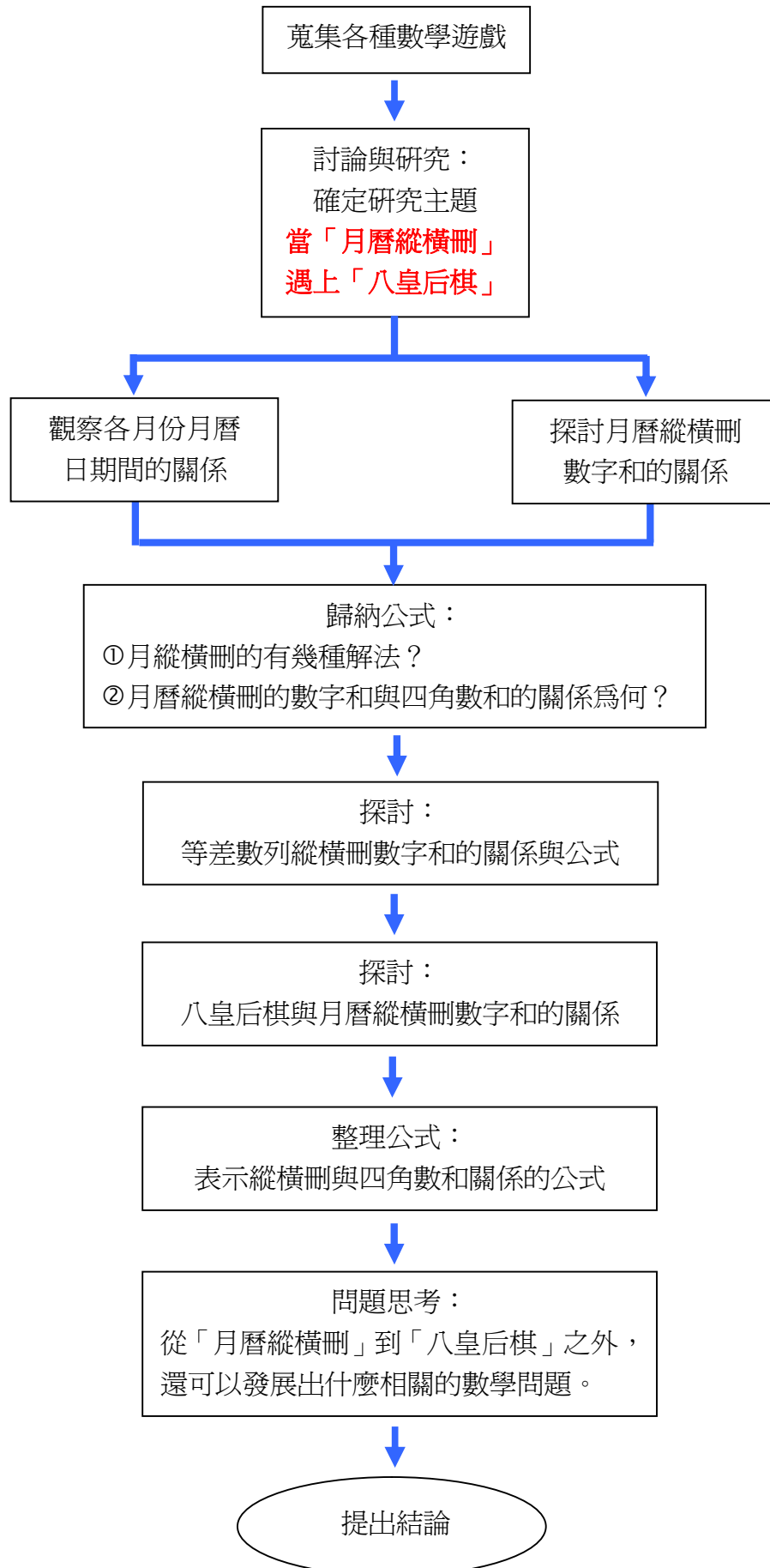
貳、研究目的

- 一、在月曆上任取一方陣，探討其縱橫刪的解法有幾種。
- 二、探討 2008 年月曆縱橫刪的數字和與四角數和的關係為何，並找出公式。
- 三、在一個 4×4 的方陣中，當橫列及縱列的四個數字均為等差數列時，探討縱橫刪的四數和與四角數和的關係為何。
- 四、進一步研究縱橫刪的四數和除了與四角數和有關之外，是否與這個方陣的其他四個數字和相關？
- 五、探討八皇后棋與月曆縱橫刪的關係為何？
- 六、整理出表示縱橫刪與四角數和關係的公式。
- 七、探討從月曆縱橫刪到八皇后棋之外還可以發展出什麼相關的數學問題？

參、研究設備及器材

電腦(網路)、2008 年月曆、筆、計算紙、計算機、數學課本、皇后棋、棋盤

肆、研究過程



伍、研究結果及討論：

一、2008 年月曆縱橫刪的四數和與四角數和的關係為何？

(一) 2008 年月曆 4×4 方陣縱橫刪的四數和是否都與四角數和相等？



▲ 我們正在研究「月曆縱橫刪」。

以下是 2008 年一月份到十二月份的月曆 (空格可依序補上數字), 每人各任意圈選出一塊 4×4 的方陣, 並在方陣內任選一個數字, 同時要將跟此數位在同一行、同一列的其它數字刪除掉; 然後又在剩餘的數字中圈選一個數, 也要將跟此數位在同一行、同一列的其它數字刪除掉; 繼續重複一樣的工作, 直到 4×4 的方陣的各行各列都只剩下一個數字, 然後觀察縱橫刪後的四數和與四角數和的關係。

《2008 年一、四、七月份月曆》

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | | | |

《2008 年二、八月份月曆》

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

任取一方陣

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------|
| 7 | 8 | 9 | 10 | 縱橫刪後四數和： |
| 14 | 15 | 16 | 17 | $7 + 22 + 16 + 31 = 76$ |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 四角數和： |
| 28 | 29 | 30 | 31 | $7 + 10 + 28 + 31 = 76$ |

任取一方陣

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 縱橫刪後四數和： |
| 7 | 8 | 9 | 10 | $0 + 9 + 15 + 24 = 48$ |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 四角數和： |
| 21 | 22 | 23 | 24 | $0 + 3 + 21 + 24 = 48$ |

《2008年三、十一月份月曆》

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

任取一方陣

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------|
| 3 | 4 | 5 | 6 | 縱橫刪後四數和： |
| 10 | 11 | 12 | 13 | $3 + 11 + 26 + 20 = 60$ |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 四角數和： |
| 24 | 25 | 26 | 27 | $3 + 6 + 24 + 27 = 60$ |

《2008年六月份月曆》

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | | | | | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |

任取一方陣

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 縱橫刪後四數和： |
| 9 | 10 | 11 | 12 | $2 + 17 + 11 + 26 = 56$ |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 四角數和： |
| 23 | 24 | 25 | 26 | $2 + 5 + 23 + 26 = 56$ |

《2008年五月份月曆》

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |

任取一方陣

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 縱橫刪後四數和： |
| 8 | 9 | 10 | 11 | $1 + 16 + 24 + 11 = 52$ |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 四角數和： |
| 22 | 23 | 24 | 25 | $1 + 4 + 22 + 25 = 52$ |

《2008年九、十二月份月曆》

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | | | | |

任取一方陣

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 縱橫刪後四數和： |
| 8 | 9 | 10 | 11 | $15 + 23 + 10 + 4 = 52$ |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 四角數和： |
| 22 | 23 | 24 | 25 | $1 + 4 + 22 + 25 = 52$ |

《2008 年十月份月曆》

| Mon | Tue | Wed | Thu | Fri | Sat | Sun |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | | |

任取一方陣

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 15 | 16 | 17 | 18 |
| 22 | 23 | 24 | 25 |

縱橫刪後四數和：

$$22 + 16 + 10 + 4 = 52$$

四角數和：

$$1 + 4 + 22 + 25 = 52$$

研究發現：

在 2008 年的任一月份月曆上任取 4×4 方陣，不管如何縱橫刪，所剩餘的四個數字和均等於該方陣的四角數和。

參考《昌爸數學網站》及觀察這十六個數後，發現相鄰左右兩數均相差 1，相鄰上下兩數均相差 7。我們將任一 4×4 的方陣內的十六個數字以符號表示，如下：

| | | | |
|------|------|------|------|
| X | X+1 | X+2 | X+3 |
| X+7 | X+8 | X+9 | X+10 |
| X+14 | X+15 | X+16 | X+17 |
| X+21 | X+22 | X+23 | X+24 |

根據遊戲規則將所有縱橫刪的可能結果利用樹狀圖列舉如下，共計有 $4! 3! 2! 1! = 24$ 種。

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} X \\ \\ \\ X+14 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X+8 \left\{ \begin{array}{l} X+16 \left\{ \begin{array}{l} X+24 \\ X+17 \end{array} \right. \\ X+23 \left\{ \begin{array}{l} X+24 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+9 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+23 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+22 \left\{ \begin{array}{l} X+9 \left\{ \begin{array}{l} X+24 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+23 \left\{ \begin{array}{l} X+24 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+2 \left\{ \begin{array}{l} X+10 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+16 \left\{ \begin{array}{l} X+10 \\ X+3 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \\ X+1 \left\{ \begin{array}{l} X+9 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+23 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+2 \left\{ \begin{array}{l} X+10 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+9 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+10 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \\ X+8 \left\{ \begin{array}{l} X+9 \left\{ \begin{array}{l} X+24 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+16 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+2 \left\{ \begin{array}{l} X+10 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+15 \left\{ \begin{array}{l} X+24 \\ X+3 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \\ X+1 \left\{ \begin{array}{l} X+9 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+16 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+2 \left\{ \begin{array}{l} X+10 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+8 \left\{ \begin{array}{l} X+9 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+10 \end{array} \right. \\ X+16 \left\{ \begin{array}{l} X+17 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+2 \left\{ \begin{array}{l} X+10 \\ X+3 \end{array} \right. \\ X+15 \left\{ \begin{array}{l} X+24 \\ X+3 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

| 縱橫刪後所得到的四個數字 | 和 | 縱橫刪後所得到的四個數字 | 和 |
|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| X, X+8, X+16, X+24 | 4X+48 | X+7, X+1, X+16, X+24 | 4X+48 |
| X, X+8, X+23, X+17 | 4X+48 | X+7, X+1, X+23, X+17 | 4X+48 |
| X, X+15, X+9, X+24 | 4X+48 | X+7, X+15, X+2, X+24 | 4X+48 |
| X, X+15, X+23, X+10 | 4X+48 | X+7, X+15, X+23, X+3 | 4X+48 |
| X, X+22, X+9, X+17 | 4X+48 | X+7, X+22, X+2, X+17 | 4X+48 |
| X, X+22, X+16, X+10 | 4X+48 | X+7, X+22, X+16, X+3 | 4X+48 |
| X+14, X+1, X+9, X+24 | 4X+48 | X+21, X+1, X+9, X+17 | 4X+48 |
| X+14, X+1, X+23, X+10 | 4X+48 | X+21, X+1, X+16, X+10 | 4X+48 |
| X+14, X+8, X+2, X+24 | 4X+48 | X+21, X+8, X+2, X+17 | 4X+48 |
| X+14, X+8, X+23, X+3 | 4X+48 | X+21, X+8, X+16, X+3 | 4X+48 |
| X+14, X+22, X+2, X+10 | 4X+48 | X+21, X+15, X+2, X+10 | 4X+48 |
| X+14, X+22, X+9, X+3 | 4X+48 | X+21, X+15, X+9, X+3 | 4X+48 |

根據以上表格，我們發現：在任何一年的月曆上任取 4×4 方陣，不管如何縱橫刪，所剩餘的四個數字和均等於該方陣的四角數和： $(X) + (X+3) + (X+21) + (X+24) = 4X+48$ 。

(二) 2008 年月曆 2×2 方陣縱橫刪的二數和與四角數和的關係為何？

根據上述的研究發現在任何一年的月曆上任取 4×4 方陣，不管如何縱橫刪，所剩餘的四個數字和均等於該方陣的四角數和，於是我們很好奇如果改取 2×2 方陣、 3×3 方陣、 5×5 方陣呢？縱橫刪後會剩幾個數字？剩下的數字和與四角數和又有什麼關係？

1. 2×2 的方陣中所有縱橫刪可能結果共計有 $2 \times 1 = 2$ 種，列舉如下：

縱橫刪後所得的兩個數字和：

$$(X) + (X+8) = 2X+8$$

$$(X+7) + (X+1) = 2X+8$$

$$\text{四角數和} : (X) + (X+1) + (X+7) + (X+8) = 4X+16$$

$$(2X+8) = (4X+16) \times \frac{1}{2}$$

發現：在 2×2 的方陣中縱橫刪後所得的兩個數字和 = 四角數和 $\times \frac{1}{2}$

| | |
|-----|-----|
| X | X+1 |
| X+7 | X+8 |

2. 3×3 的方陣中所有縱橫刪可能結果共計有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種，列舉如下：

縱橫刪後所得的三個數字和：

$$(X) + (X + 8) + (X + 16) = 3X + 24$$

$$(X) + (X + 15) + (X + 9) = 3X + 24$$

$$(X + 7) + (X + 1) + (X + 16) = 3X + 24$$

$$(X + 7) + (X + 15) + (X + 2) = 3X + 24$$

$$(X + 14) + (X + 1) + (X + 9) = 3X + 24$$

$$(X + 14) + (X + 8) + (X + 2) = 3X + 24$$

| | | |
|------|------|------|
| X | X+1 | X+2 |
| X+7 | X+8 | X+9 |
| X+14 | X+15 | X+16 |

四角數和： $(X) + (X + 2) + (X + 14) + (X + 16) = 4X + 32$

$$(3X + 24) = (4X + 32) \times \frac{3}{4}$$

發現：在 3×3 的方陣中縱橫刪後所得的三個數字和 = 四角數和 $\times \frac{3}{4}$

3. 5×5 的方陣中所有縱橫刪可能結果共計有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 種

四角數和 =

$$(X) + (X + 4) + (X + 28) + (X + 32)$$

$$= 4X + 64$$

| | | | | |
|------|------|------|------|------|
| X | X+1 | X+2 | X+3 | X+4 |
| X+7 | X+8 | X+9 | X+10 | X+11 |
| X+14 | X+15 | X+16 | X+17 | X+18 |
| X+21 | X+22 | X+23 | X+24 | X+25 |
| X+28 | X+29 | X+30 | X+31 | X+32 |

縱橫刪後所得的五個數字和：(120 個算式僅列出 2 式代表)

$$(X + 7) + (X + 1) + (X + 16) + (X + 24) + (X + 32) = 5X + 80$$

$$(X + 7) + (X + 15) + (X + 2) + (X + 24) + (X + 32) = 5X + 80$$

$$(5X + 80) = (4X + 64) \times \frac{5}{4}$$

發現：在 5×5 的方陣中縱橫刪後所得的五個數字和 = 四角數和 $\times \frac{5}{4}$

根據以上研究結果，推論：

凡在月曆上任取一邊長為 n 的方陣，

其縱橫刪後所得的 n 個數字和 = 四角數和 $\times \frac{n}{4}$

二、在一個 4×4 的方陣中，當橫列及縱列的四個數字均為等差數列時，縱橫刪的四數和有什麼奧妙之處？

(一) 在一個 4×4 的方陣中，當橫列及縱列的四個數字均為等差數列時，縱橫刪的四數和是否也均與四角數和相等？

根據數學課本的課程內容，我們知道一個數列只要後數與前數的差都一樣，就稱之為「等差數列」。觀察月曆的特性發現橫列數字是公差 1 的等差數列，縱列數字是公差 7 的等差數列，我們思考著除了在月曆上進行縱橫刪之外，如果在一個 4×4 的方陣中，當橫列及縱列的四個數字均為等差數列時，縱橫刪的四數和是否也均與四角數和相等？將 16 個數字以符號表示，假設橫列為相差 a 的等差數列，縱列為相差 b 的等差數列。

| | | | |
|----------|--------------|---------------|---------------|
| X | $X + a$ | $X + 2a$ | $X + 3a$ |
| $X + b$ | $X + a + b$ | $X + 2a + b$ | $X + 3a + b$ |
| $X + 2b$ | $X + a + 2b$ | $X + 2a + 2b$ | $X + 3a + 2b$ |
| $X + 3b$ | $X + a + 3b$ | $X + 2a + 3b$ | $X + 3a + 3b$ |

將所有縱橫刪的可能結果表格化，如下：

| 縱橫刪後所得到的四個數字 | 和 |
|--|----------------|
| $X, X + a + b, X + 2a + 2b, X + 3a + 3b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X, X + a + b, X + 2a + 3b, X + 3a + 2b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X, X + a + 2b, X + 2a + b, X + 3a + 3b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X, X + a + 2b, X + 2a + 3b, X + 3a + b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X, X + a + 3b, X + 2a + b, X + 3a + 2b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X, X + a + 3b, X + 2a + 2b, X + 3a + b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + b, X + a, X + 2a + 2b, X + 3a + 3b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + b, X + a, X + 2a + 3b, X + 3a + 2b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + b, X + a + 2b, X + 2a, X + 3a + 3b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + b, X + a + 2b, X + 2a + 3b, X + 3a$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + b, X + a + 3b, X + 2a, X + 3a + 2b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + b, X + a + 3b, X + 2a + 2b, X + 3a$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 2b, X + a, X + 2a + b, X + 3a + 3b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 2b, X + a, X + 2a + 3b, X + 3a + b$ | $4X + 6a + 6b$ |

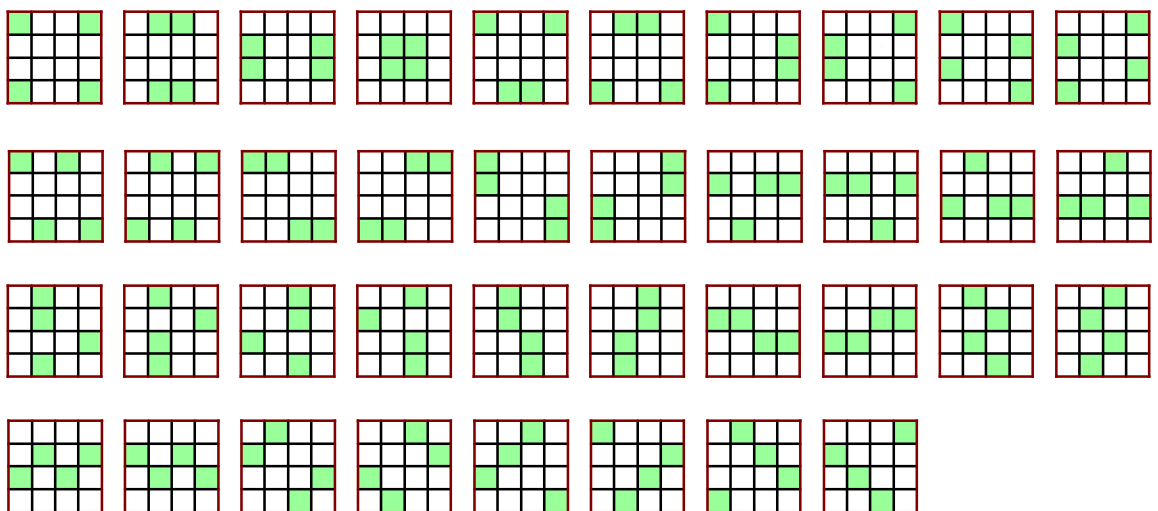
| | |
|---|----------------|
| $X + 2b$, $X + a + b$, $X + 2a$, $X + 3a + 3b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 2b$, $X + a + b$, $X + 2a + 3b$, $X + 3a$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 2b$, $X + a + 3b$, $X + 2a$, $X + 3a + b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 2b$, $X + a + 3b$, $X + 2a + b$, $X + 3a$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 3b$, $X + a$, $X + 2a + b$, $X + 3a + 2b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 3b$, $X + a$, $X + 2a + 2b$, $X + 3a + b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 3b$, $X + a + b$, $X + 2a$, $X + 3a + 2b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 3b$, $X + a + b$, $X + 2a + 2b$, $X + 3a$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 3b$, $X + a + 2b$, $X + 2a$, $X + 3a + b$ | $4X + 6a + 6b$ |
| $X + 3b$, $X + a + 2b$, $X + 2a + b$, $X + 3a$ | $4X + 6a + 6b$ |

四角數和： $(X) + (X + 3a) + (X + 3b) + (X + 3a + 3b) = 4X + 6a + 6b$

因此，除了在月曆之外，只要在一個 4×4 的方陣中，**當橫列及縱列的四個數字均為等差數列時，縱橫刪所剩餘的四個數字和均等於該方陣的四角數和。**

(二) 在一個 4×4 的方陣中，當橫列及縱列的四個數字均為等差數列時，縱橫刪的四數和除了與四角數和相等之外，是否與這個方陣的其他四個數字和相等？

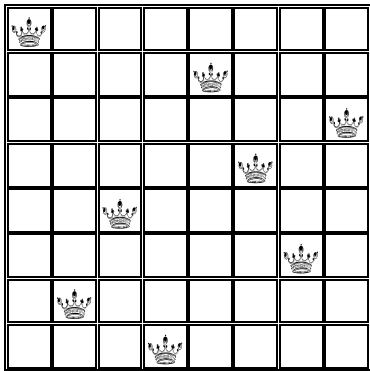
為從上述研究結果，我們已得知任意縱橫刪所剩餘的四個數字和均等於該方陣的四角數和： $4X + 6a + 6b$ 。我們非常好奇，任意縱橫刪所剩餘的四個數字和除了等於該方陣的四角數和之外，是否還等於這個方陣的其他圖形數字和，於是我們更進一步探討其中的奧妙。結果發現：縱橫刪的四數和除了與四角數和相等之外，也與這個方陣的其他四個數字和相等，我們共找出 30 幾個有趣的圖形。(四個綠色方塊代表四個數字)



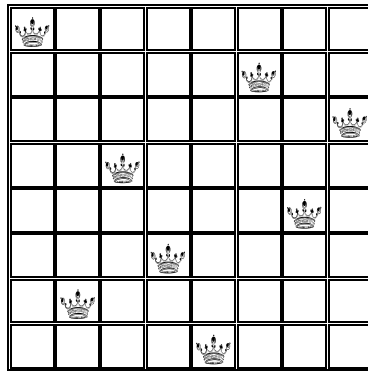
三、八皇后棋與月曆縱橫刪的關係為何？

(一) 八皇后棋的遊戲規則

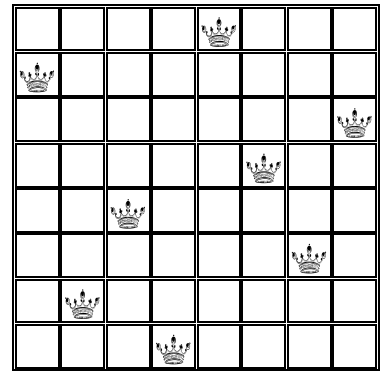
西洋棋中的皇后可以縱向、橫向、斜向的任意移動，但如何在一個 8×8 的正方形格子的棋盤上放置八顆皇后棋，使任一顆皇后不被其他的皇后吃掉呢？也就是先放置一顆皇后棋，與它同一直行、同一橫行、同一斜行的格子都不能再放置皇后棋，以此類推剛好放置八顆皇后棋。數學家高斯曾猜測次問題有 96 個解，但其中有些經過旋轉或反射後會得到重複的解，這些如果將它視為相同的解，則只有 12 個解。我們小組成員發揮團隊力量，把這 12 個解找出來，如下：



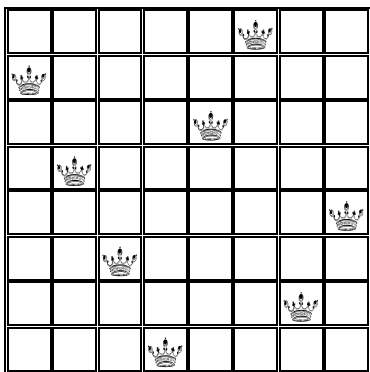
△圖 3-1-1



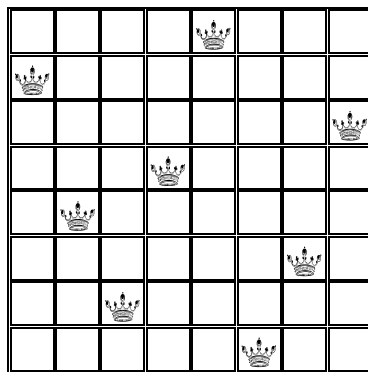
△圖 3-1-2



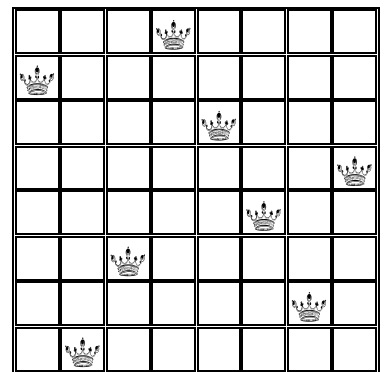
△圖 3-1-3



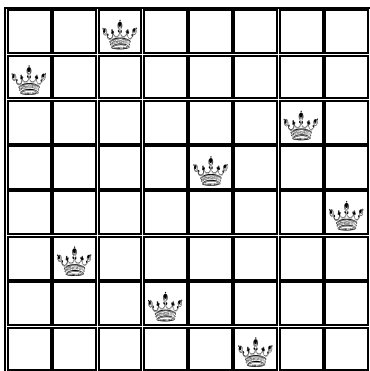
△圖 3-1-4



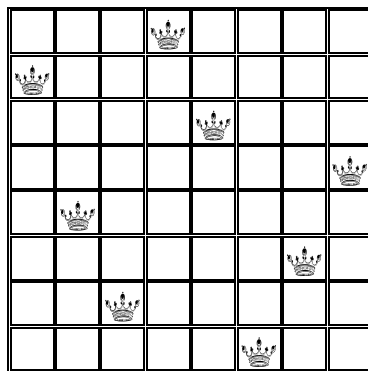
△圖 3-1-5



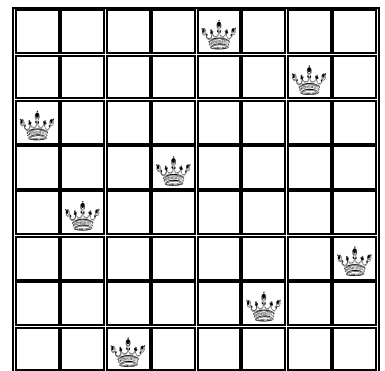
△圖 3-1-6



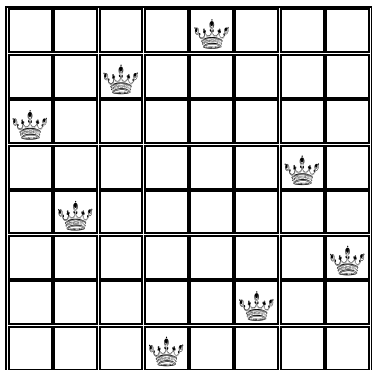
△圖 3-1-7



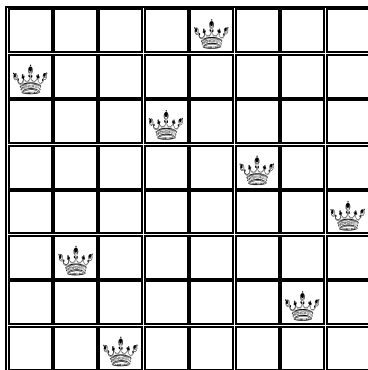
△圖 3-1-8



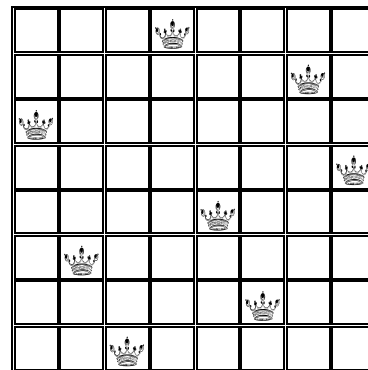
△圖 3-1-9



△圖 3-1-10



△圖 3-1-11



△圖 3-1-12

(二) 八皇后棋與月曆縱橫刪的關係為何？

根據觀察比較發現八皇后棋的排列方式與月曆縱橫刪的遊戲方式極為類似，但條件更嚴苛，除了縱、橫刪之外，還加上斜刪的條件，若只有縱橫刪所得的八個數應有 $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ 種可能的結果，但以皇后棋的刪法，只剩原型 12 種。

若將兩種遊戲合併為：在一個 8×8 橫列及縱列均為等差數列的方陣中，任選一個數字，同時要將跟此數字位在同一縱列、同一橫列、同一斜列的其它數字刪除掉；然後又在剩餘的數字中圈選一個數，也要將跟此數位在同一縱列、同一橫列、同一斜列的其它數字刪除掉；繼續重複一樣的工作，直到 8×8 的方陣的各行各列都只剩下一個數字。將剩下的八個數字加起來的和跟 8×8 的方陣的四角數和比較其關係。(假設橫列為相差 a 的等差數列，縱列為相差 b 的等差數列)

| | | | | | | | |
|------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| X | X+a | X+2a | X+3a | X+4a | X+5a | X+6a | X+7a |
| X+b | X+a+b | X+2a+b | X+3a+b | X+4a+b | X+5a+b | X+6a+b | X+7a+b |
| X+2b | X+a+2b | X+2a+2b | X+3a+2b | X+4a+2b | X+5a+2b | X+6a+2b | X+7a+2b |
| X+3b | X+a+3b | X+2a+3b | X+3a+3b | X+4a+3b | X+5a+3b | X+6a+3b | X+7a+3b |
| X+4b | X+a+4b | X+2a+4b | X+3a+4b | X+4a+4b | X+5a+4b | X+6a+4b | X+7a+4b |
| X+5b | X+a+5b | X+2a+5b | X+3a+5b | X+4a+5b | X+5a+5b | X+6a+5b | X+7a+5b |
| X+6b | X+a+6b | X+2a+6b | X+3a+6b | X+4a+6b | X+5a+6b | X+6a+6b | X+7a+6b |
| X+7b | X+a+7b | X+2a+7b | X+3a+7b | X+4a+7b | X+5a+7b | X+6a+7b | X+7a+7b |

根據上述八皇后棋的 12 種解法，求出這八個數的和，

以圖 3-1-1 為例：

$$(X) + (X + a + 6b) + (X + 2a + 4b) + (X + 3a + 7b) + (X + 4a + b) + (X + 5a + 3b) + (X + 6a + 5b) + (X + 7a + 2b) = 8X + 28a + 28b$$

發現八皇后棋所代表的數字和均等於 $8X + 28a + 28b$ 。

$$\text{四角數和} = (X) + (X + 7a) + (X + 7b) + (X + 7a + 7b) = 4X + 14a + 14b$$

$$\begin{aligned} \text{中間四數和} &= (X + 3a + 3b) + (X + 4a + 3b) + (X + 3a + 4b) + (X + 4a + 4b) \\ &= 4X + 14a + 14b = (8X + 28a + 28b) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{四角數和} = \text{中間四數和} = \text{八皇后棋所代表的數字和} \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{八皇后棋所代表的數字和} &= \text{四角數和} \times 2 = \text{中間四數和} \times 2 \\ &= \text{四角數和} + \text{中間四數和} \end{aligned}$$

根據研究結果一之(二)所得出的公式：

凡在月曆上任取一邊長為 n 的方陣，其縱橫刪後

$$\text{得的 } n \text{ 個數字和} = \text{四角數和} \times \frac{n}{4}$$

將八皇后棋的遊戲方式代入：邊長為 8， $n=8$

$$\text{八皇后棋所代表的數字和} = 8X + 28a + 28b$$

$$\text{四角數和} = 4X + 14a + 14b$$

$$\text{八皇后棋所代表的數字和} (8X + 28a + 28b) = \text{四角數和} (4X + 14a + 14b) \times \frac{8}{4}$$

符合月曆縱橫刪的公式，因此，將研究結果一之(二)所得出的公式擴大範圍為：

凡在一個 $n \times n$ 橫列及縱列均為等差數列的方陣中，

$$\text{其縱橫刪所得的 } n \text{ 個數字和} = \text{四角數和} \times \frac{n}{4}$$

(三) 八皇后棋的八數和除了等於與四角數和的 2 倍之外，是否與這個方陣的其他數字和相等？

我們進一步思考八皇后棋的八數和除了等於與四角數和的 2 倍之外，是否與這個方陣的其他數字和相等。我們觀察發現：若以十字對稱圖形尋找四數和等於 $4X + 14a + 14b$ ，可以找到十六組數字（64j 4=16），如下：

| | | | | | | | |
|------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| X | X+a | X+2a | X+3a | X+4a | X+5a | X+6a | X+7a |
| X+b | X+a+b | X+2a+b | X+3a+b | X+4a+b | X+5a+b | X+6a+b | X+7a+b |
| X+2b | X+a+2b | X+2a+2b | X+3a+2b | X+4a+2b | X+5a+2b | X+6a+2b | X+7a+2b |
| X+3b | X+a+3b | X+2a+3b | X+3a+3b | X+4a+3b | X+5a+3b | X+6a+3b | X+7a+3b |
| X+4b | X+a+4b | X+2a+4b | X+3a+4b | X+4a+4b | X+5a+4b | X+6a+4b | X+7a+4b |
| X+5b | X+a+5b | X+2a+5b | X+3a+5b | X+4a+5b | X+5a+5b | X+6a+5b | X+7a+5b |
| X+6b | X+a+6b | X+2a+6b | X+3a+6b | X+4a+6b | X+5a+6b | X+6a+6b | X+7a+6b |
| X+7b | X+a+7b | X+2a+7b | X+3a+7b | X+4a+7b | X+5a+7b | X+6a+7b | X+7a+7b |

■ $(X) + (X + 7a) + (X + 7b) + (X + 7a + 7b) = 4X + 14a + 14b$

■ $(X + b) + (X + 7a + b) + (X + 6b) + (X + 7a + 6b) = 4X + 14a + 14b$

■ $(X + 2b) + (X + 7a + 2b) + (X + 5b) + (X + 7a + 5b) = 4X + 14a + 14b$

■ $(X + 3b) + (X + 7a + 3b) + (X + 4b) + (X + 7a + 4b) = 4X + 14a + 14b$

■ $(X + a) + (X + 6a) + (X + a + 7b) + (X + 6a + 7b) = 4X + 14a + 14b$

■ $(X + a + b) + (X + 6a + b) + (X + a + 6b) + (X + 6a + 6b) = 4X + 14a + 14b$

■ $(X + a + 2b) + (X + 6a + 2b) + (X + a + 5b) + (X + 6a + 5b) = 4X + 14a + 14b$

■ $(X + a + 3b) + (X + 6a + 3b) + (X + a + 4b) + (X + 6a + 4b) = 4X + 14a + 14b$

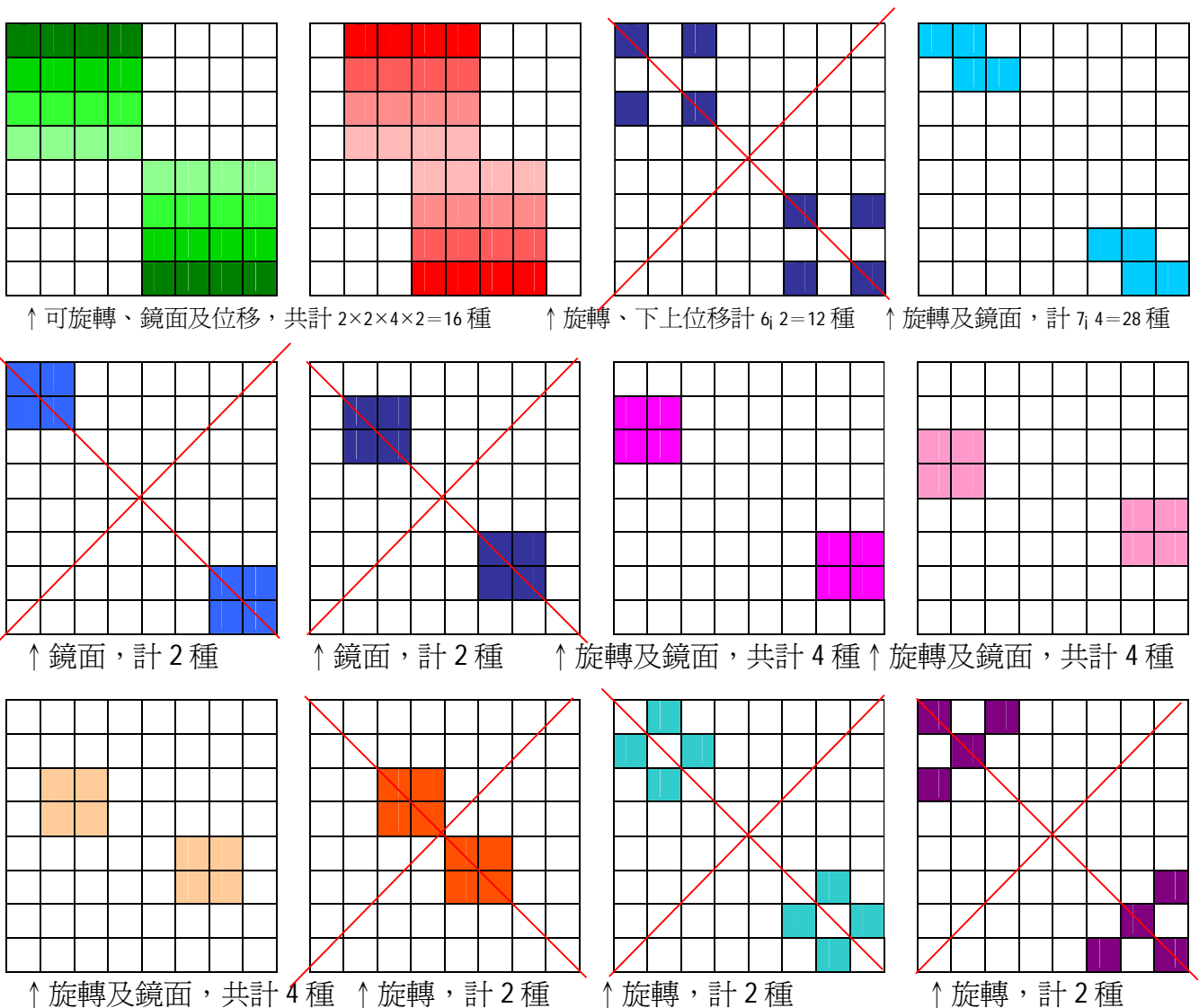
■ $(X + 2a) + (X + 5a) + (X + 2a + 7b) + (X + 5a + 7b) = 4X + 14a + 14b$

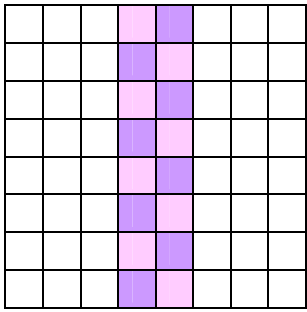
■ $(X + 2a + b) + (X + 5a + b) + (X + 2a + 6b) + (X + 5a + 6b) = 4X + 14a + 14b$

- $(X + 2a + 2b) + (X + 5a + 2b) + (X + 2a + 5b) + (X + 5a + 5b) = 4X + 14a + 14b$
- $(X + 2a + 3b) + (X + 5a + 3b) + (X + 2a + 4b) + (X + 5a + 4b) = 4X + 14a + 14b$
- $(X + 3a) + (X + 4a) + (X + 3a + 7b) + (X + 4a + 7b) = 4X + 14a + 14b$
- $(X + 3a + b) + (X + 4a + b) + (X + 3a + 6b) + (X + 4a + 6b) = 4X + 14a + 14b$
- $(X + 3a + 2b) + (X + 4a + 2b) + (X + 3a + 5) + (X + 4a + 5b) = 4X + 14a + 14b$
- $(X + 3a + 3b) + (X + 4a + 3b) + (X + 3a + 4b) + (X + 4a + 4b) = 4X + 14a + 14b$

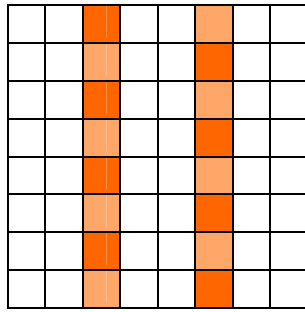
凡在一個 8×8 橫列及縱列均為等差數列的方陣中，八皇后棋所代表的數字和均等於棋盤上相同底色四數和的 2 倍，也就是說八皇后棋所代表的數字和均等於棋盤上任兩組同底色的數字和，我們發現八皇后棋盤變成一張非常漂亮的十六色對稱圖形呢！

另外，我們還設計其他有趣的造型棋盤，八個數字和也等於八皇后棋的數字和： $8X + 28a + 28b$ ，以相同色塊表示一種解法，加上鏡面、旋轉及位移之後，可以變化出非常多種棋盤，如下(紅線為對稱軸)：

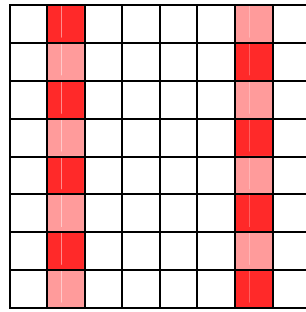




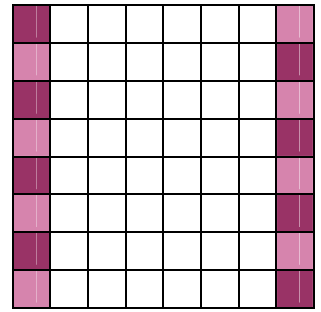
↑ 旋轉，計 $2 \times 2 = 4$ 種



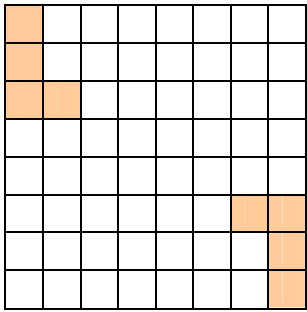
↑ 旋轉，計 $2 \times 2 = 4$ 種



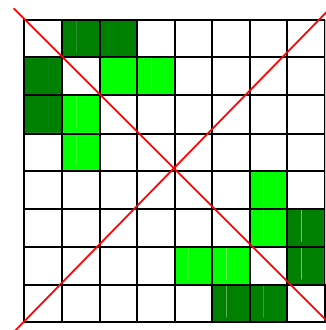
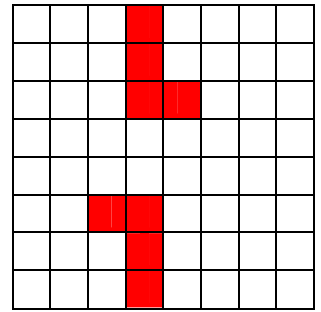
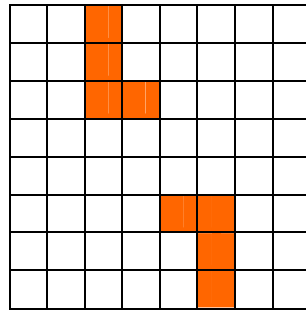
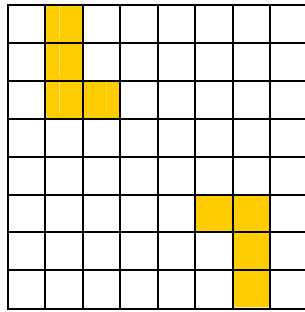
↑ 旋轉，計 $2 \times 2 = 4$ 種



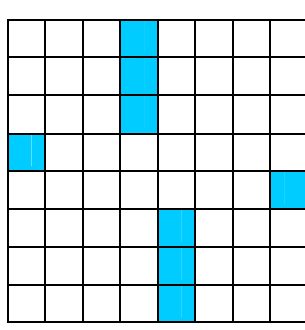
↑ 旋轉，計 $2 \times 2 = 4$ 種



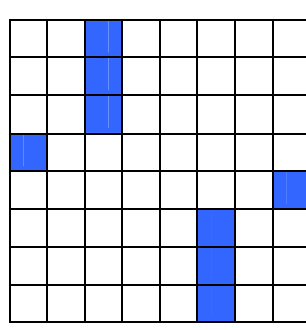
↑ 旋轉、鏡面、往右位移、往下位移，計 $1 \times 4 \times 2 \times 7 \times 6 = 336$ 種，其 4 種和上述對稱圖形重複。



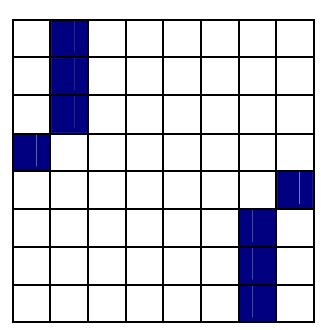
↑ 旋轉、鏡面，計 8 種



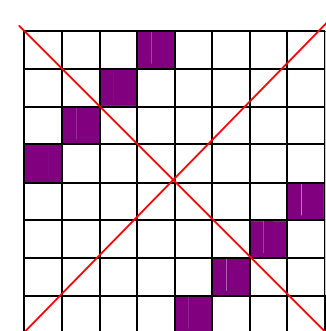
↑ 旋轉、鏡面，計 4 種



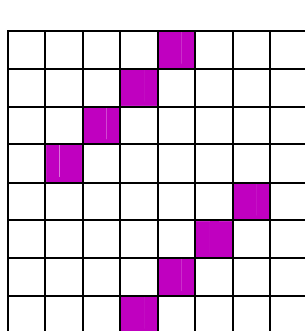
↑ 旋轉、鏡面，計 4 種



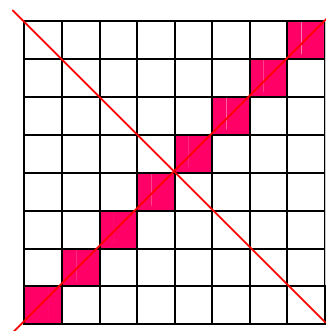
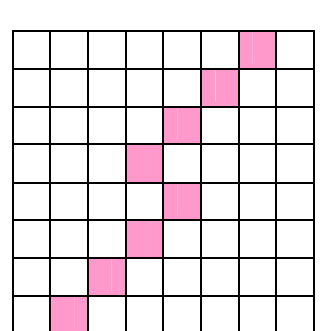
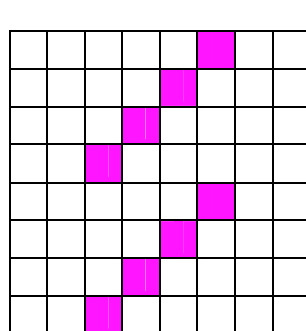
↑ 旋轉、鏡面，計 4 種



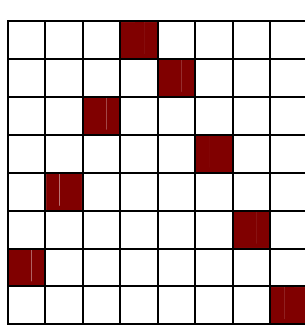
↑ 旋轉，計 2 種



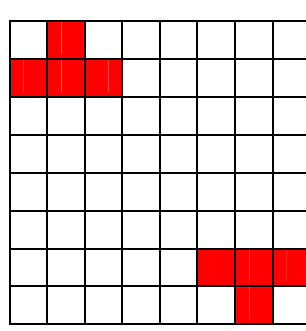
↑ 旋轉、鏡面加位移，計 $4 \times 2 \times 3 = 24$ 種



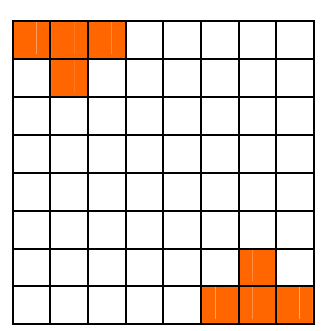
↑ 旋轉，計 2 種



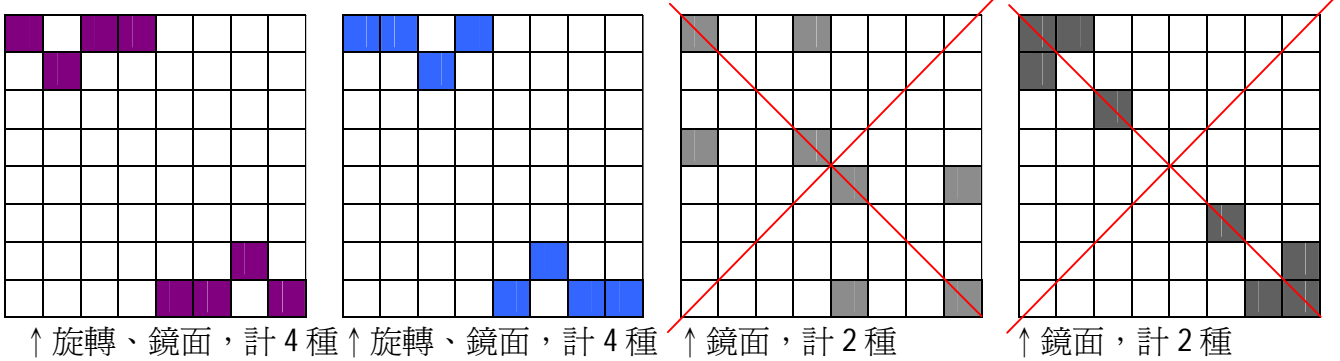
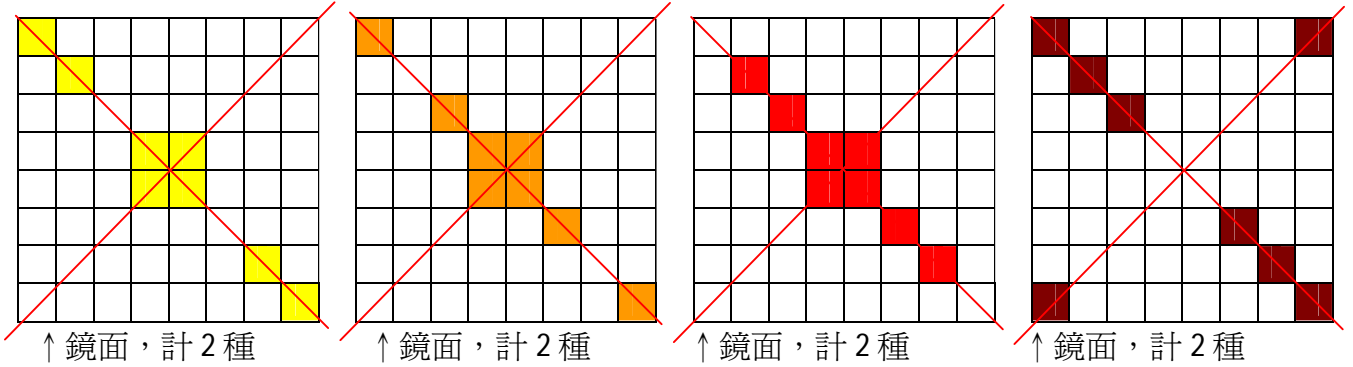
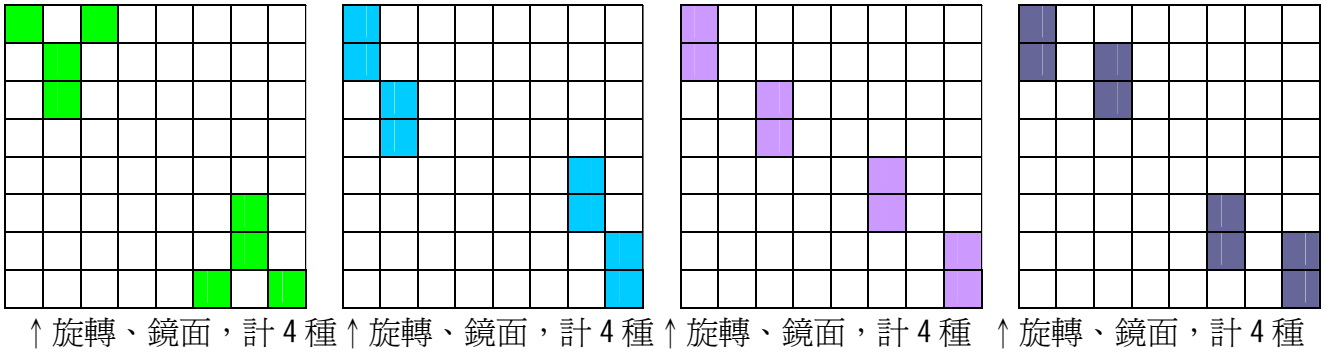
↑ 旋轉、鏡面，計 8 種



↑ 旋轉、鏡面，計 4 種



↑ 旋轉、鏡面，計 4 種



觀察以上造型發現：

1. 俄羅斯方塊：運用二組四方格的組合，在左上方找到一個由四個方格組成的圖形 A，將它上下顛倒、左右相反，在右下角所形成的圖案 B， $A+B=$ 八皇后棋數字和。
2. 左上方的 A 圖形若往右位移，右下方的 B 圖形便要往左位移即能形成一組新解；左上方的 A 圖形若往下位移，右下方的 B 圖形便要往上位移亦能形成一組新解。
3. 階梯組合：因為此 8×8 的正方形棋盤橫列及縱列均為等差數列，往右多 a，往左少 a；往下多 b，往上少 b，凡由中線往左移動 1 格，下一階就必須往右移動 1 格，才能平衡；往上移動 1 格，下一階就必須往下移動 1 格，八個數字總和才能不變 = 八皇后棋數字和。
4. 每個造型旋轉一次 90 度可成一個新解，經過鏡面(左右相反或上下相反)亦可得到新解。
5. 對稱圖形的對稱軸有斜線、直線和橫線，以上造型的對稱軸有 0、2 條等 2 種。

四、從月曆縱橫刪到八皇后棋還能發展出其他數學遊戲嗎？

經過以上研究，我們思考著從「月曆縱橫刪」到「八皇后棋」是否還可以發展出嶄新而有趣的數學題型，以下是我們的新玩法：

(一) 月曆魔方陣

1. 在月曆上任取一 2×2 的方陣，這 4 個數字的總和為何？

$$X + X + 1 + X + 7 + X + 8 = 4X + 16 = (2X + 8) \times 2 \quad \text{公式：縱橫刪數字和} \times 2$$

2. 在月曆上任取一 3×3 的方陣，這 9 個數字的總和為何？

$$\begin{aligned} X + X + 1 + X + 2 + X + 7 + X + 8 + X + 9 + X + 14 + X + 15 + X + 16 &= 9X + 72 \\ &= (3X + 24) \times 3 = (X + 8) \times 3 \times 3 = (X + 8) \times 9 \end{aligned}$$

公式：縱橫刪數字和 $\times 3$ ，或中間數 $\times 9$ ，中間數 = 方陣數字總和 $\div 9$

3. 在月曆上任取一 4×4 的方陣，這 16 個數字的總和為何？

$$\begin{aligned} X + X + 1 + X + 2 + X + 3 + X + 7 + X + 8 + X + 9 + X + 10 + X + 14 + X + 15 + X + \\ 16 + X + 17 + X + 21 + X + 22 + X + 23 + X + 24 \\ = 16X + 192 = (4X + 48) \times 4 = (2X + 24) \times 8 \end{aligned}$$

公式：縱橫刪數字和 $\times 4$ ，或(左上數字 + 右下數字) $\times 8$

4. 在月曆上任取一 5×5 的方陣，這 25 個數字的總和為何？

$$\begin{aligned} X + X + 1 + X + 2 + X + 3 + X + 4 + X + 7 + X + 8 + X + 9 + X + 10 + X + 11 + X + 14 \\ + X + 15 + X + 16 + X + 17 + X + 18 + X + 21 + X + 22 + X + 23 + X + 24 + X + 25 + \\ X + 28 + X + 29 + X + 30 + X + 31 + X + 32 = 25X + 400 = (5X + 80) \times 5 = (X + \\ 16) \times 25 \end{aligned}$$

公式：縱橫刪數字和 $\times 5$ ，或中間數 $\times 25$ ，中間數 = 方陣數字總和 $\div 25$

| | |
|-----|-----|
| X | X+1 |
| X+7 | X+8 |

| | | |
|------|------|------|
| X | X+1 | X+2 |
| X+7 | X+8 | X+9 |
| X+14 | X+15 | X+16 |

| | | | |
|------|------|------|------|
| X | X+1 | X+2 | X+3 |
| X+7 | X+8 | X+9 | X+10 |
| X+14 | X+15 | X+16 | X+17 |
| X+21 | X+22 | X+23 | X+24 |

| | | | | |
|------|------|------|------|------|
| X | X+1 | X+2 | X+3 | X+4 |
| X+7 | X+8 | X+9 | X+10 | X+11 |
| X+14 | X+15 | X+16 | X+17 | X+18 |
| X+21 | X+22 | X+23 | X+24 | X+25 |
| X+28 | X+29 | X+30 | X+31 | X+32 |

5. 凡橫列、縱列均為等差數列的方陣數字總和均等於縱橫刪數字和 $\times n$ 。

$$(X) + (X + a) + (X + 2a) + (X + 3a) + (X + b) + (X + a + b) + (X + 2a + b) + (X + 3a + b) \\ + (X + 2b) + (X + a + 2b) + (X + 2a + 2b) + (X + 3a + 2b) + (X + 3b) + (X + a + 3b) + (X \\ + 2a + 3b) + (X + 3a + 3b) = 16X + 24a + 24b = (4X + 6a + 6b) \times 4 = \text{縱橫刪數字和} \times n$$

| | | | |
|--------|------------|-------------|-------------|
| X | X + a | X + 2a | X + 3a |
| X + b | X + a + b | X + 2a + b | X + 3a + b |
| X + 2b | X + a + 2b | X + 2a + 2b | X + 3a + 2b |
| X + 3b | X + a + 3b | X + 2a + 3b | X + 3a + 3b |

6. 在月曆上任取一 3×3 的方陣，發現第二直行的和、第二橫列的和及兩對角線的和各等於縱橫刪的數字和： $3X + 24$ (中間數的3倍)，除中間數之外移動其它8個數字，使得每一直行、每一橫列、對角線的和都等於縱橫刪的數字和。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|-----|--|
| A | B | C | → | F | A | H | 橫列 | $F + A + H = G + E + C = B + I + D = 3X + 24 = 3E$ |
| D | E | F | | G | E | C | 直行 | $F + G + B = A + E + I = H + C + D = 3X + 24 = 3E$ |
| G | H | I | | B | I | D | 對角線 | $F + E + D = H + E + B = 3X + 24 = 3E$ |

(二) 猜左上角的數字

從月曆中任取一個 2×2 的方陣，當四數和為96時，左上角的數字是多少？

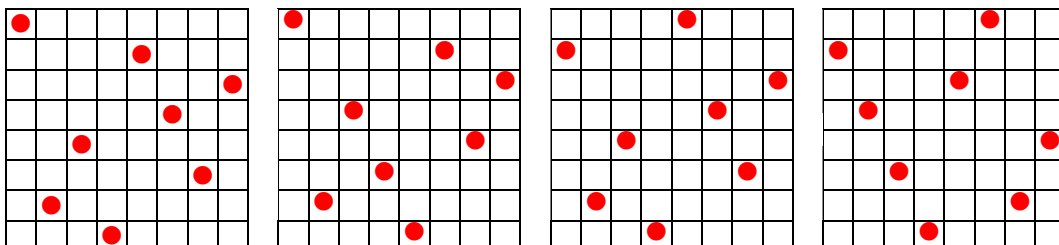
| | |
|-------|-------|
| X | X + 1 |
| X + 7 | X + 8 |

解：縱橫刪等於 $X + X + 8 = 2X + 8$ ，四角數和=縱橫刪數字和 $\times 2$
 $(2X + 8) \times 2 = 96$ ， $X = 96 \div 4 - 4 = 20$

公式：左上角的數字=四數和 $\div 4 - 4$ ，右下角的數字=四數和 $\div 4 + 4$

(三) 八邊形的別墅社區

有一個別墅社區正在興建，它的建築物為八邊形柱體，每一面牆都有窗戶，為了保有隱私，每戶的別墅都不會正對到其他別墅的窗戶，要如何在 8×8 的空地蓋好八戶八邊形的別墅呢？解答：與八皇后棋的12種解法相同，僅舉四解。



陸、結論

一、由研究一發現：

- (一) 邊長為 n 的方陣，其縱橫刪的所有可能結果共有： $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 種。
- (二) 凡在月曆上任取一邊長為 n 的方陣，
其縱橫刪後所得的 n 個數字和 = 四角數和 $\times \frac{n}{4}$

二、由研究二發現：

- (一) 除了在月曆上任選一個方陣之外，只要一個 4×4 的方陣其橫列及縱列的四個數字均為等差數列時，縱橫刪的四數和均與四角數和相等。
- (二) 縱橫刪的四數和除了與四角數和相等之外，也與這個方陣的其他四個數字和相等，我們共找出 30 個有趣的圖形。

三、由研究三發現：

- (一) 在一個 8×8 的正方形格子的棋盤上先放置一顆皇后棋，與它同一直行、同一橫行、同一斜行的格子都不能再放置皇后棋，以此類推剛好放置八顆皇后棋。我們找出 12 個原形解，經過鏡面及旋轉應有 96 個解。
- (二) 八皇后棋所代表的數字和 = 四角數和 $\times 2$ = 中間四數和 $\times 2$ = 四角數和 + 中間四數和。
- (三) 凡在一個 $n \times n$ 橫列及縱列均為等差數列的方陣中，
其縱橫刪所得的 n 個數字和 = 四角數和 $\times \frac{n}{4}$
- (四) 八皇后棋的八數和除了等於與四角數和的 2 倍之外，也與這個方陣的其他八個數字和相等，而且這些數字組合起來，可以在棋盤上形成非常美麗的對稱圖形或是其它有趣的造型。

四、由研究四發現：

從「月曆縱橫刪」到「八皇后棋」，我們發展出有趣的數學題型，如「月曆魔方陣」、「猜左上角的數字」、「八邊形的別墅社區」等。

- (一) 凡橫列、縱列均為等差數列的方陣數字總和均等於縱橫刪數字和 $\times n$ 。
- (二) 若 n 為奇數時，方陣數字總和均等於中間數 $\times n^2$ ，也就是說：
中間數 = 方陣數字總和 $\div n^2$ 。

- (三) 從月曆中任取一個 2×2 的方陣，左上角的數字 = 四數和 $j - 4 - 4$ ，右下角的數字 = 四數和 $j + 4 + 4$ 。
- (四) 在一個別墅社區興建八邊形柱體的建築物，每一面牆都有窗戶，爲了保有隱私，每戶的別墅都不會正對到其他別墅的窗戶，在 8×8 的空地蓋好八戶八邊形的別墅與八皇后棋的 12 種解法相同。

柒、研究心得與參考資料

一、研究心得及未來展望

我們從一些有趣的數學遊戲開始進行研究，當老師提出「縱橫刪」的遊戲時，原以爲非常簡單，但在過程中，我們不斷發展出新的問題以及不同的方向，尤其是組友發現「八皇后棋」與「縱橫刪」的相關後，更是讓我們振奮不已。沒想到在破「八皇后棋」的解法時遇到瓶頸，夥伴們絞盡腦汁，好不容易解出一種答案，轉個方向後又跟同學的解法相同，本想放棄，上網也只能搜尋到兩、三個解法，不過，皇天不負苦心人，歷經幾週的腸枯思竭，終於把十二種原型找到。

不過最興奮的應該是我們找到縱橫刪數字和的公式，這是我們第一次藉由自己的觀察與推衍而歸納出公式，激起我們深入研究數學的興趣。

當研究進行到尾聲，我們思考著從「月曆縱橫刪」到「八皇后棋」還能發展出其他數學遊戲嗎？集小組力量，我們發展出相關的數學題型，並發覺還可以結合魔方陣、等差數列、數獨……研發更多有趣的題目，留待日後繼續研究。

二、參考資料

1. 王登傳、劉臻文(民 92)。規律性在解題的應用。高雄市：前程。
2. 洪淑惠(民 96)。THE BEST 益智數學—邏輯篇。台北市：宇林文化。
3. 五下數學課本。第二單元「線對稱圖形」。南一版
4. 六下數學課本。第八單元「怎樣解題」。南一版。
5. 五下數學課本。第五單元「線對稱圖形」。康軒版。
6. 六下數學課本。第六單元「列式與等式」。康軒版。
7. 六下數學課本。第七單元「怎樣解題」。康軒版。
8. 趣味代數、趣味數學、生活數學。取自昌爸工作坊—數學網站：
<http://www.mathland.idv.tw/>

【評語】 080406

1. 本作品與小學數學教材內容關係極密切。
2. 能將研究結果與棋藝結合，頗富趣味。
3. 能將理念應用於某些建築理念上。