中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080401

方之律動--方格板上的「斜」正方形

學校名稱：彰化縣花壇鄉白沙國民小學

作者：	指導老師：
小六 黃健賓 小六 林祈詮 小六 鍾昕陽 小六 白竟言 小六 葉心慈	周荔玫 蘇靖雯

關鍵詞：　斜正方形、百格板、方格板

壹、摘要

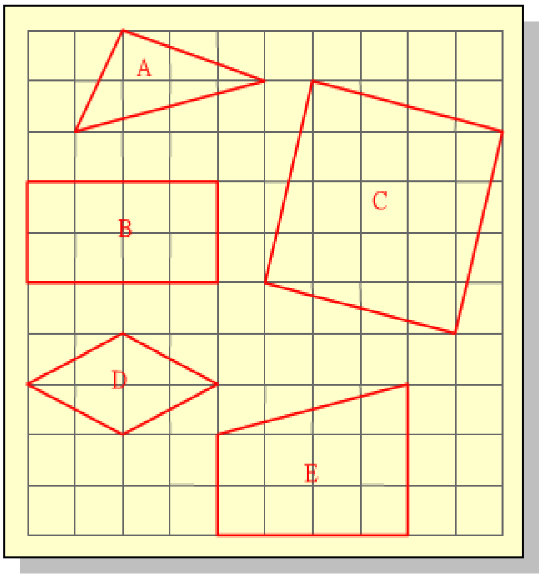
先從正方格板著手，再延伸至長方格板，探討如何從其中找出繁複的「斜」正方形的總數。在尋找中，我們利用統計表的規則性變化，歸納發現存在一個規律性，進而找到一個算出「斜」正方形總數的公式。在老師的引導之下，我們學會了平方和，然後將公式簡化，終於找到了一個最簡的公式 1/12 （2N-M）×（M-1）× M ×（M＋1）。我們也可以從長方格板邊長的「差」快速算出長方格板或正方格中（N－M＝0）的「斜」正方形總數。

指導老師附註

由於學生尚未學到畢氏定理，無法用邊長來歸類正方形。所以引導學生以視覺上來感受「斜」正方形，並將此視覺轉換成類似座標的符號（a , b），它不是座標只是個樣式。

貳、研究動機

上數學課第四單元「形體的性質」時，老師使用百格板來引導我們認識各類形體。有一回，老師要我們在百格板上畫出各種圖形，有正方形、長方形、菱形……等，加強我們對四邊形性質的理解。



老師為了提高我們的學習興趣，提出一個趣味問題供我們思考，「邊長10格的百格板中有許許多多的對角線，適當的４條對角線可以圍成一個斜的正方形，請問百格板上有多少大大小小的斜正方形？」

想到五年級做的科展數學題，當時只得佳作，我們要求老師把這道問題深入探討，尋求再一次的挑戰，於是我們卯足了勁，開始了一連串的討論、研究工作。

叁、研究目的

一、找出正方格板上，有多少個大大小小的「斜正方形」？

二、找出長方格板上，有多少個大大小小的「斜正方形」？

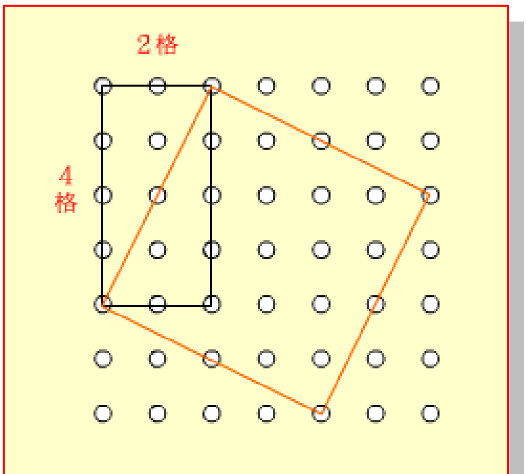
三、運用簡捷的公式，算出所有的「斜正方形」的總數。

肆、名詞解釋

一、正方格板（N×N）：邊長相等的正方形方格板，如 9×9 方格板。

二、長方格板（N×M）：邊長不相等的長方形方格板，如 9×6 方格板。

三、（a , b）：斜正方形的樣式。例如（2 , 4）表示用「橫列２格，直行４格」的長方形對角線當作正方形的一邊所圍成的斜正方形，如圖一。

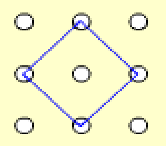


圖一　（2,4）斜正方形

伍、研究過程

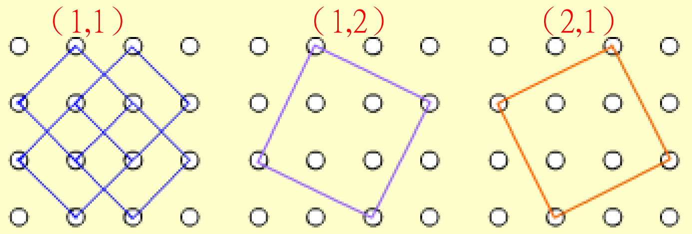
一、邊長二格～五格的方格板中有多少大大小小的斜正方形？

（一）邊長二格的方格板上（2x2），僅僅有 1 個斜正方形，如圖二。



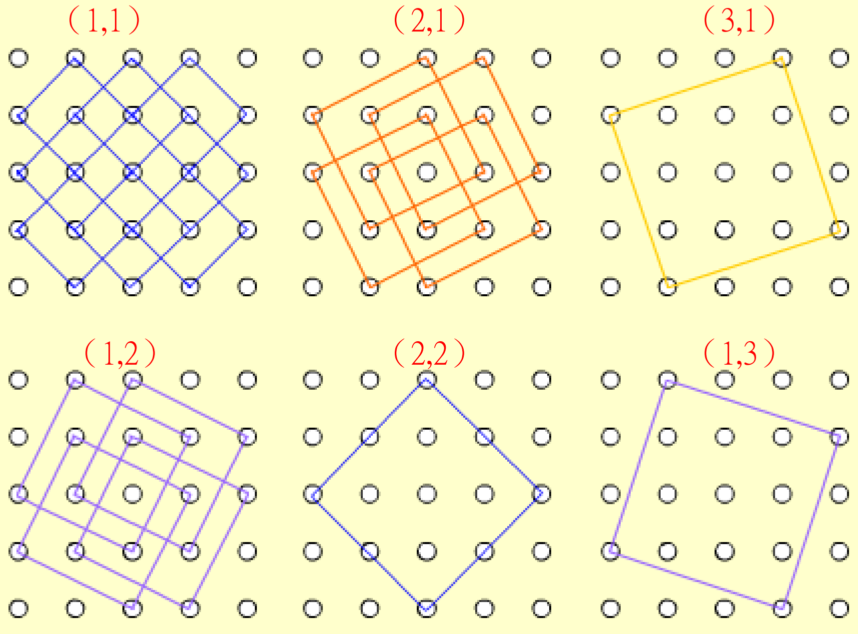
圖二

（二）邊長三格的方格板上（3x3），有 3 種樣式，6 個斜正方形，如圖三。



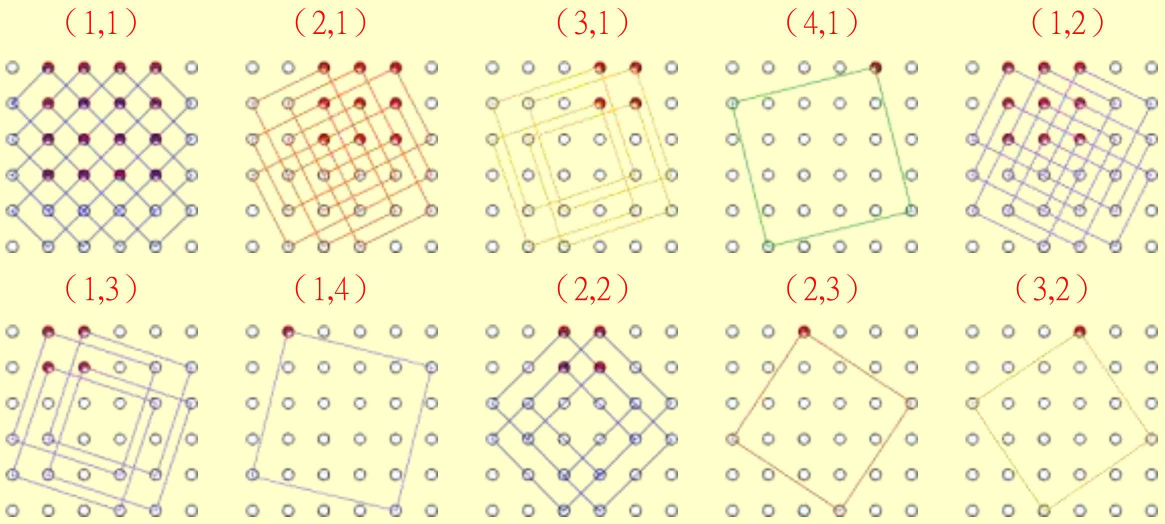
圖三

（三）邊長四格的方格板上（4x4），有 6 種樣式，20 個斜正方形，如圖四。



圖四

（四）邊長五格的方格板上（5x5），有 10 種樣式，50 個斜正方形，如圖五。



圖五

（五）觀察上面各種圖形，利用歸納的方法，整理出表一方格板邊長和斜正方形樣式、個數的關係。

表一

方格板邊長	斜正方形樣式（編號） 斜正方形個數小計（紅字）	斜正方形個數合計	備註
二格 （2x2）	（1,1） 1	1	1x（2−1）x（2−1）
三格 （3x3）	（1,1）（2,1） 4 1 （1,2） 1	6	1x（3−1）x（3−1） 2x（3−2）x（3−2）
四格 （4x4）	（1,1）（2,1）（3,1） 9 4 1 （1,2）（2,2） 4 1 （1,3） 1	20	1x（4−1）x（4−1） 2x（4−2）x（4−2） 3x（4−3）x（4−3）
五格 （5x5）	（1,1）（2,1）（3,1）（4,1） 16 9 4 1 （1,2）（2,2）（3,2） 9 4 1 （1,3）（2,3） 4 1 （1,4） 1	50	1x（5−1）x（5−1） 2x（5−2）x（5−2） 3x（5−3）x（5−3） 4x（5−4）x（5−4）

我們驚奇發現斜正方形的規律性變化。

1．斜正方形樣式與方格板邊長的關係：

斜正方形樣式是所有不大於方格板邊長的兩數和的組合，也就是（a，b）能滿足 $2 \leqq (a+b) \leqq N$ 的正整數解，N＝方格板邊長。全部樣式的總數＝1/2（N）（N-1）。

2．斜正方形個數與樣式的關係：

（1）斜正方形的邊長愈小，斜正方形的個數愈多；邊長愈大，個數愈少。當樣式（a，b）中 a＋b 的值愈小，邊長愈小，個數愈多；當 a＝N-1 或 b＝N-1 時，斜正方形最大，個數最少。

（2）在各種不同邊長的方格板上，斜正方形由大到小個數都是一樣１➞４➞９➞16➞……的變化，也就是 1×1➞2×2➞3×3➞4×4➞……。

（3）樣式（a，b）、（c，d）若滿足 a＋b＝c＋d， 則樣式（a，b）之斜正方形的個數與樣式（c，d）之斜正方形的個數相等。（3，1）和（2，2）、（4，1）和（3，2）、（5，1）和（3，3）……個數都相等。

（4）設 k 為大於１之正整數，則有 k－1 種樣式（a，b），其中 a＋b＝k。

例如 6×6 的方格板中斜正方形樣式：

（1,5）（2,4）（3,3）（4,2）（5,1）有５種斜正方形，個數都是 1×1＝１個；

（1,4）（2,3）（3,2）（4,1）有４種，都是 2×2＝４個；

（1,3）（2,2）（3,1）有３種，都是 3×3＝９個；

（1,2）（2,1）有２種，都是 4×4＝16 個；

（1,1）有１種，是 5×5＝25 個。

3．斜正方形個數與方格板邊長的關係：

很巧的是斜正方形由小到大，樣式從（1,1）開始，接著（2,1）、（3,1）、（4,1）……，加１遞增到比方格板邊長少１為止。斜正方形由小到大的個數從（N－1）的平方倍開始，接著（N－2）、（N－3）、……，減到１的平方倍為止。

例如：6×6 方格板的斜正方形樣式有（1,1）、（2,1）、……、（4,1）、（5,1）等組合，個數有（6－1）×（6－1）、（6－2）×（6－2）、……、（6－5）×（6－5）等組成。

6×6 方格板的斜正方形個數可用右邊的分類表來求解。

斜正方形的總數

$=1\times5\times5+2\times4\times4+3\times3\times3+4\times2\times2+5\times1\times1$

$=1\times25+2\times16+3\times9+4\times4+5\times1$

$=105$

正方格板邊長 6 的分類表

(1,1) 5x5	(2,1) 4x4	(3,1) 3x3	(4,1) 2x2	(5,1) 1x1
(1,2) 4x4	(2,2) 3x3	(3,2) 2x2	(4,2) 1x1	
(1,3) 3x3	(2,3) 2x2	(3,3) 1x1		
(1,4) 2x2	(2,4) 1x1			
(1,5) 1x1				

所以，方格板上斜正方形的計算公式：

$1\times(N-1)\times(N-1)+2\times(N-2)\times(N-2)+3\times(N-3)\times(N-3)+\cdots\cdots$

$+(N-2)\times2\times2+(N-1)\times1\times1$

二、推算 9×9 方格板中大大小小的斜正方形有多少個？

依照上列的算式，看看 9×9 方格板中斜正方形總數，

N＝9，套入算式如下：

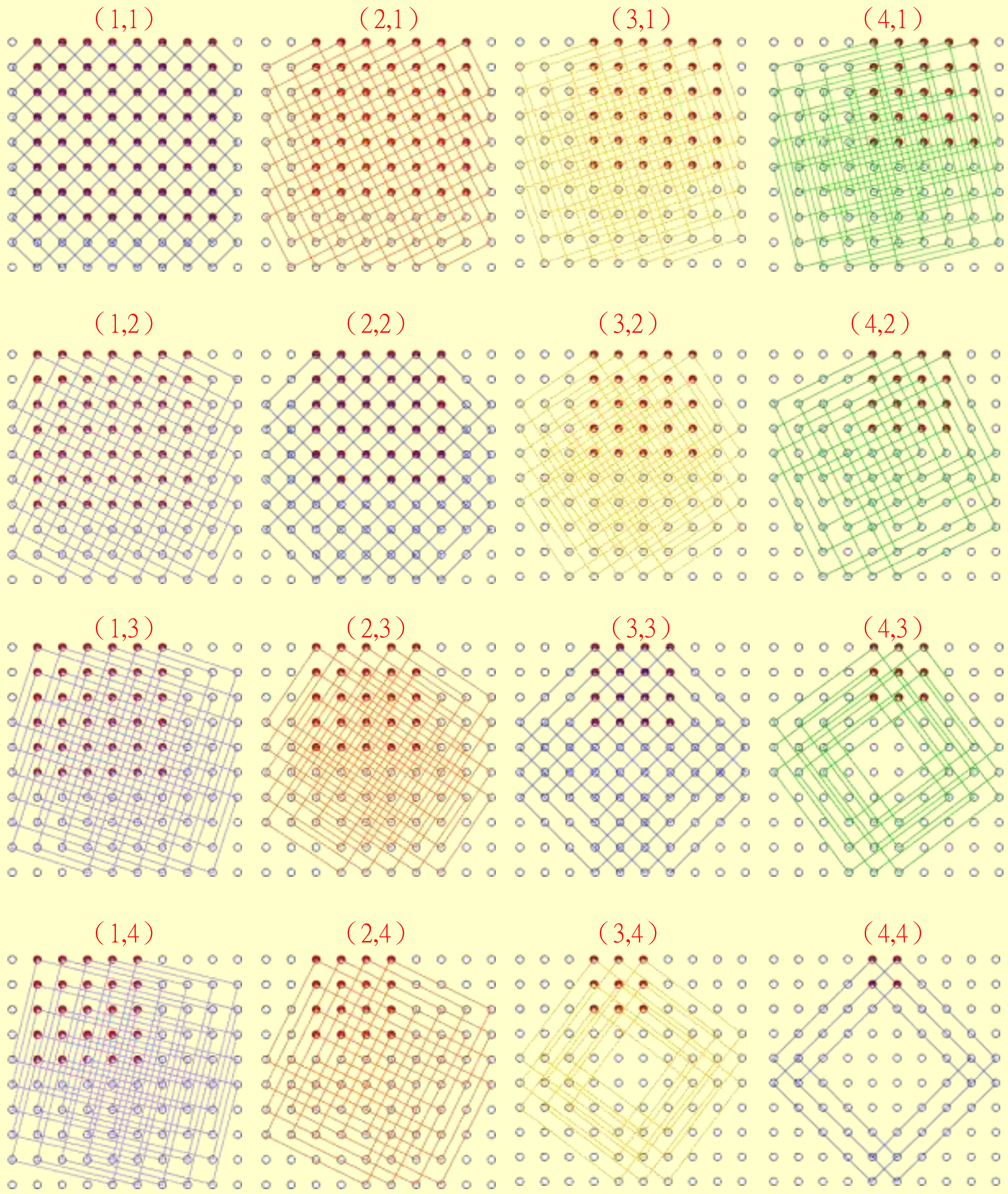
$1\times(9-1)(9-1)+2\times(9-2)(9-2)+3\times(9-3)(9-3)+4\times(9-4)(9-4)+5\times(9-5)(9-5)+6\times(9-6)(9-6)+7\times(9-7)(9-7)+8\times(9-8)(9-8)$

$=1\times8\times8+2\times7\times7+3\times6\times6+4\times5\times5+5\times4\times4+6\times3\times3+7\times2\times2+8\times1\times1$

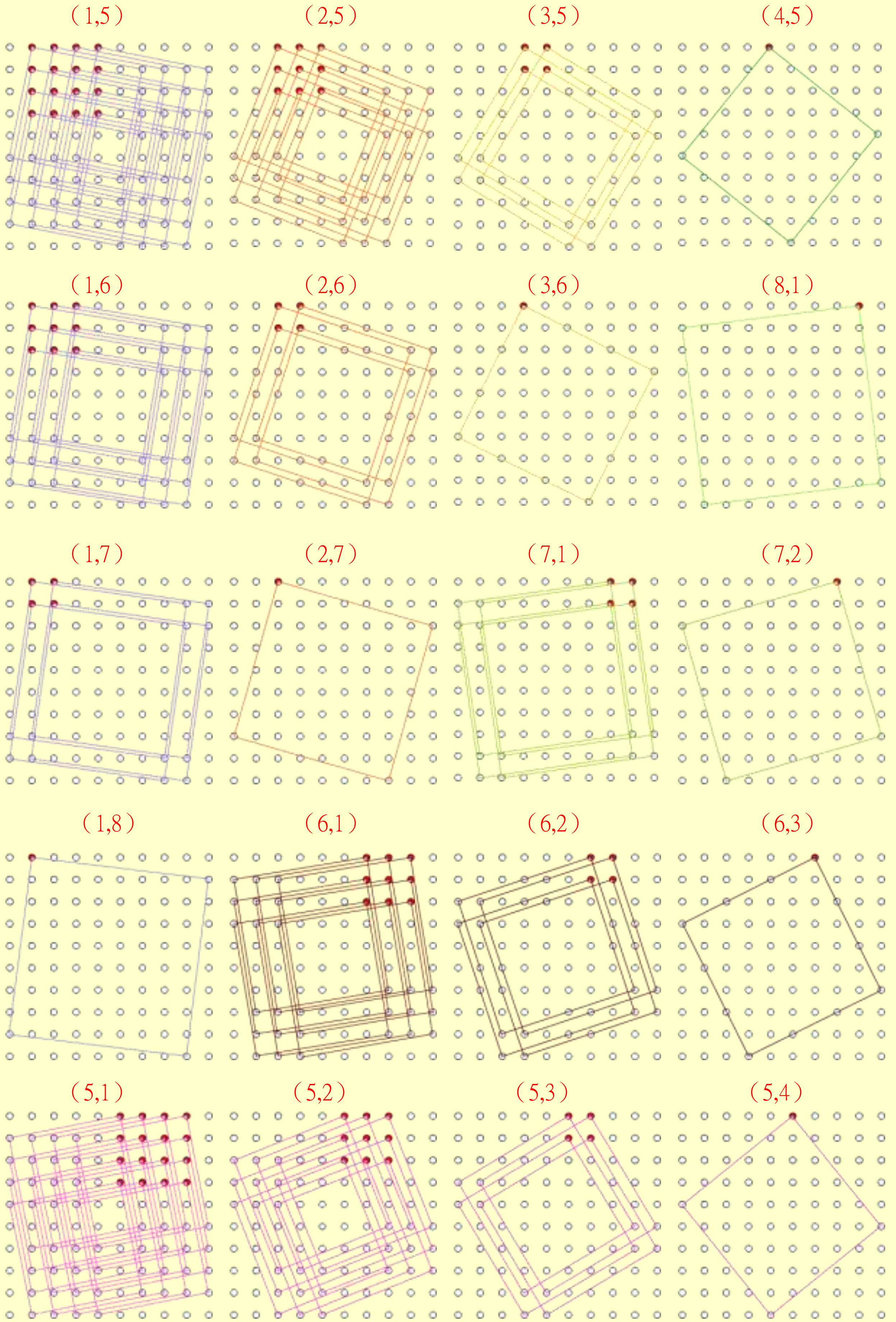
$=64+98+108+100+80+54+28+8$

$=540$

下面的圖六就是全部 9×9 方格板中大大小小的斜正方形，總共是540個，所以可以確定我們推出的算式完全正確。



圖六　　9×9 方格板中大大小小的斜正方形



圖六　　9×9 方格板中大大小小的斜正方形

三、正方格板中有多少大大小小的斜正方形？

從上述的研究，我們了解正方格板中所有斜正方形個數，隨著斜正方形的樣式規律的變化，我們將它列表出來，更能一目了然。如表二。

表二　正方格板中大大小小的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式（a,b）與個數									
	（1,1）a+b ＝ 2	（2,1）a+b ＝ 3	（3,1）a+b ＝ 4	（4,1）a+b ＝ 5	（5,1）a+b ＝ 6	（6,1）a+b ＝ 7	（7,1）a+b ＝ 8	（8,1）a+b ＝ 9	（9,1）a+b ＝ 10	合計
10×10	81	64	49	36	25	16	9	4	1	825
9×9	64	49	36	25	16	9	4	1		540
8×8	49	36	25	16	9	4	1			336
7×7	36	25	16	9	4	1				196
6×6	25	16	9	4	1					105
5×5	16	9	4	1						50
4×4	9	4	1							20
3×3	4	1								6
2×2	1									1
	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	

註：最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

四、長方格板中大大小小的斜正方形有多少？

（一）長方格板中有幾種斜正方形的樣式？

長方形中最大正方形的邊長等於長方形短邊邊長，長方格板中最大的斜正方形應不超過短邊邊長，所以長方格板中的斜正方形樣式是所有不大於短邊邊長的兩數和的組合。設：N×M長方格板N＞M，則斜正方形樣式（a , b）能滿足2≦（a＋b）≦M 的正整數解。如 9 × 6 長方格板，則不大於 6 的兩數和有如下分類表中十五種斜正方形的樣式。

（二）長方格板中斜正方形的個數和長方格板邊長的關係。

我們把正方格板的研究結果，推展到長方格板，也可以適用。

１．長方格板中的斜正方形個數可以長方形面積公式來算出，斜正方形由大到小個數隨著（N－1）×（M－1），（N－2）×（M－2），（N－3）×（M－3）……呈現規律的變化。例如９×６方格板，斜正方形的個數有（9－1）×（6－1）、（9－2）×（6－2）、（9－3）×（6－3）、（9－4）×（6－4）、（9－5）×（6－5）等組成。

方格板邊長９×６的分類表

(1,1) 8x5	(2,1) 7x4	(3,1) 6x3	(4,1) 5x2	(5,1) 4x1
(1,2) 7x4	(2,2) 6x3	(3,2) 5x2	(4,2) 4x1	
(1,3) 6x3	(2,3) 5x2	(3,3) 4x1		
(1,4) 5x2	(2,4) 4x1			
(1,5) 4x1				

2．長方格板中的斜正方形個數相等的樣式，其情況也如同正方格板一樣。（因篇幅關係請參閱：伍、研究過程之一、之（五）之2.之（3）和（4）的說明。）

3．所以，長方格板邊長９×６的斜正方形總數

＝1×8×5＋2×7×4＋3×6×3＋4×5×2＋5×4×1

＝210

計算長方格板上斜正方形總數的算式如下：

1×（N-1）×（M-1）＋2×（N-2）×（M-2）＋3×（N-3）×（M-3）＋……＋（M-1）×（N- M ＋1）× 1

（三）長方格板中大大小小的斜正方形個數。

我們將所有N≦10，M≦10的長方格板中大大小小的斜正方形個數，一一列表出來。如表三-1～表三-8。

表三-1　長方格板中大大小小的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數									
	（1,1）	（2,1）	（3,1）	（4,1）	（5,1）	（6,1）	（7,1）	（8,1）	（9,1）	合計
10×10	81	64	49	36	25	16	9	4	1	825
10×9	72	56	42	30	20	12	6	2		660
10×8	63	48	35	24	15	8	3			504
10×7	54	40	28	18	10	4				364
10×6	45	32	21	12	5					245
10×5	36	24	14	6						150
10×4	27	16	7							80
10×3	18	8								34
10×2	9									9
	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	

註：最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

表三-2　長方格板中大大小小的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數								
	（1,1）	（2,1）	（3,1）	（4,1）	（5,1）	（6,1）	（7,1）	（8,1）	合計
9×9	64	49	36	25	16	9	4	1	540
9×8	56	42	30	20	12	6	2		420
9×7	48	35	24	15	8	3			308
9×6	40	28	18	10	4				210
9×5	32	21	12	5					130
9×4	24	14	6						70
9×3	16	7							30
9×2	8								8
	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	

註：最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

表三-3　　長方格板中大大小小的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數							
	（1,1）	（2,1）	（3,1）	（4,1）	（5,1）	（6,1）	（7,1）	合計
8×8	49	36	25	16	9	4	1	336
8×7	42	30	20	12	6	2		252
8×6	35	24	15	8	3			175
8×5	28	18	10	4				110
8×4	21	12	5					60
8×3	14	6						26
8×2	7							7
	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	

註：最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

表三-4　　長方格板中大大小小的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數						
	（1,1）	（2,1）	（3,1）	（4,1）	（5,1）	（6,1）	合計
7×7	36	25	16	9	4	1	196
7×6	30	20	12	6	2		140
7×5	24	15	8	3			90
7×4	18	10	4				50
7×3	12	5					22
7×2	6						6
	×1	×2	×3	×4	×5	×6	

註：最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

表三-5　長方格板中大大小小的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數					
	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	合計
6x6	25	16	9	4	1	105
6x5	20	12	6	2		70
6x4	15	8	3			40
6x3	10	4				18
6x2	5					5
	×1	×2	×3	×4	×5	

註：最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

表三-6　長方格板中大大小小的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數				
	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	合計
5x5	16	9	4	1	50
5x4	12	6	2		30
5x3	8	3			14
5x2	4				4
	×1	×2	×3	×4	

註：最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

表三-7　長方格板中斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數			
	(1,1)	(2,1)	(3,1)	合計
4x4	9	4	1	20
4x3	6	2		10
4x2	3			3
	×1	×2	×3	

表三-8　長方格板中的斜正方形個數

方格板類型	斜正方形樣式與個數		
	(1,1)	(2,1)	合計
3x3	4	1	6
3x2	2		2
	×1	×2	

五、方格板邊長的差與斜正方形個數的關係。

在製作表三的過程發現：長邊和寬邊差數相等的方格板，所含斜正方形個數，出現相同一組數字的變化。我們想辦法把表三整合起來，做成表四。把邊長差數 0 到 9 列表出來，差數爲 0 就是正方格板，也能適用。

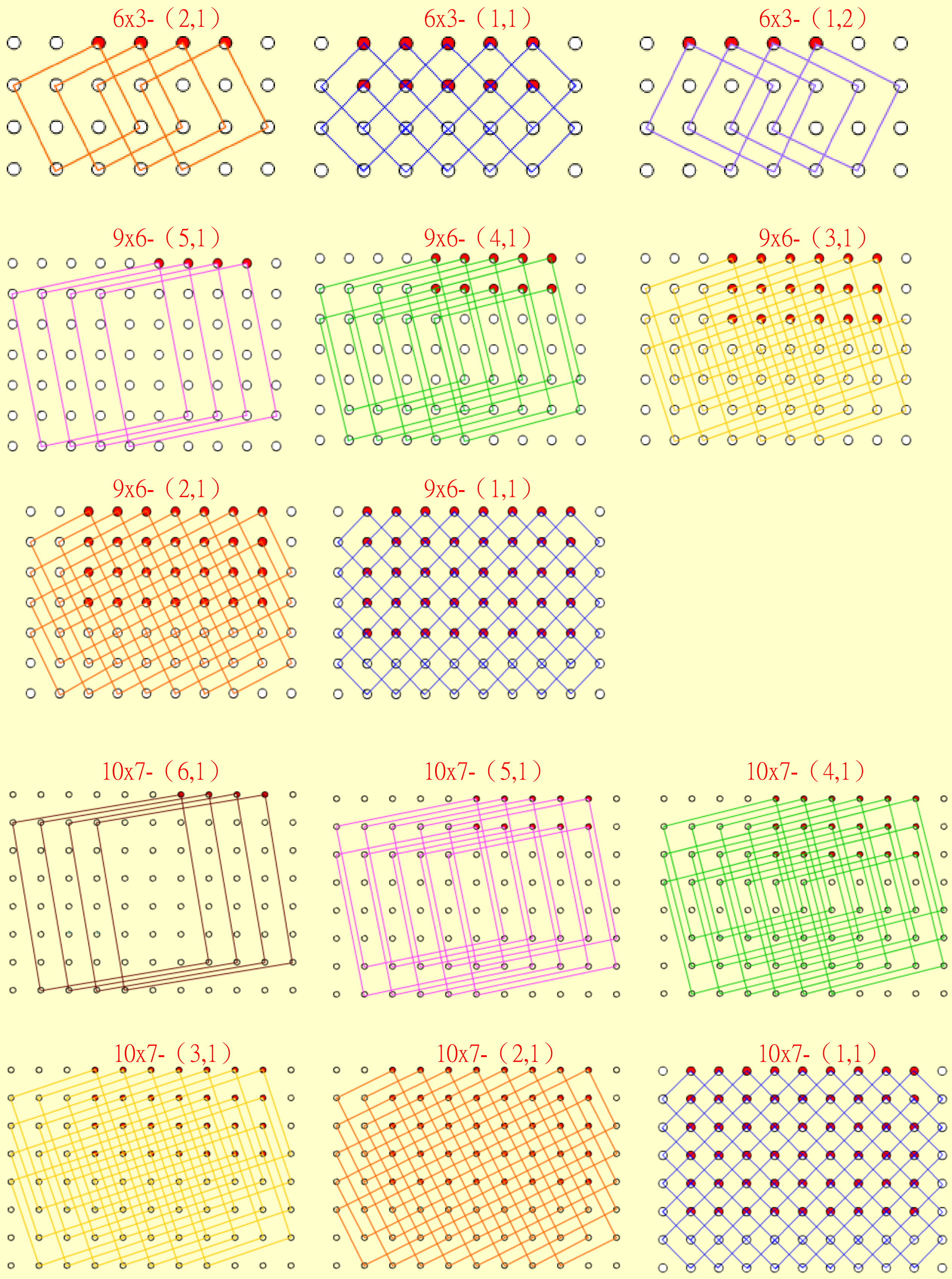
表四　方格板邊長的差與斜正方形個數的關係

邊長差	斜正方形樣式（a . b）與個數								
(N–M)	M－1,1	M－2,1	M－3,1	M－4,1	M－5,1	M－6,1	M－7,1	M－8,1	M－9,1
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	6	12	20	30	42	56	72	90
2	3	8	15	24	35	48	63	80	99
3	4 4x1	10 5x2	18 6x3	28 7x4	40 8x5	54 9x6	70 10x7	88 11x8	108 12x9
4	5	12	21	32	45	60	77	96	117
5	6	14	24	36	50	66	84	104	126
6	7	16	27	40	55	72	91	112	135
7	8	18	30	44	60	78	98	120	144
8	9	20	33	48	65	84	105	128	153
9	10	22	36	52	70	90	112	136	162
	x(M–1)	x(M–2)	x(M–3)	x(M–4)	x(M–5)	x(M–6)	x(M–7)	x(M–8)	x(M–9)

最下一列表示相同個數的類型有幾種就乘上幾倍

（一）所有長、寬差（N－M）相等的方格板，其斜正方形個數，都是同一組數字的變化，如 6x3、9x6、10x7……等，差數３的長方格板，其中斜正方形由大到小的個數都是４➞10➞18➞28➞……斜正方形個數是由斜正方形頂點之一（紅點）所圍成的長方形面積公式算出，如 4＝1x4，10＝2x5，18＝3x6，28＝4x7，40＝5x8，54＝6x9……，如圖七。

（二）任意長方格板中，最大斜正方形的寬邊是 1，長邊就是（N－M）＋1；次大的斜正方形寬邊是 2，長邊就是（N－M）＋2，……。因此，最大斜正方形的的個數有【(N－M）＋1】x1 個；次大的斜正方形個數有【(N－M）＋2】×2 個，……。


6x3-（2,1）
6x3-（1,1）
6x3-（1,2）
9x6-（5,1）
9x6-（4,1）
9x6-（3,1）
9x6-（2,1）
9x6-（1,1）
10x7-（6,1）
10x7-（5,1）
10x7-（4,1）
10x7-（3,1）
10x7-（2,1）
10x7-（1,1）

圖七

（三）斜正方形個數相等的樣式，其情況也如同正方格板一樣。（因篇幅關係請參閱：伍、研究過程之一、之（五）之 2.之（3）和（4）的說明。）

（四）如上所述 a＋b＝k，則有 k－1 種樣式具有相等的個數斜正方形，所以樣式爲（M-1, 1），就有（M-1）種相同個數的斜正方形；樣式（M-2, 1），就有（M-2）種；樣式（M-3, 1），就有（M-3）種……。

現在我們運用表四來計算長方格板中斜正方形的個數：

9x6 方格板中的斜正方形，N＝9、M＝6、差數＝3，不同樣式的斜正方形由大到小個數與樣式關係如下：

樣式（5,1）：寬邊 1，長邊 4，有 1×4＝4 個，6－1＝5 種樣式

樣式（4,1）：寬邊 2，長邊 5，有 2×5＝10 個，6－2＝4 種樣式

樣式（3,1）：寬邊 3，長邊 6，有 3×6＝18 個，6－3＝3 種樣式

樣式（2,1）：寬邊 4，長邊 7，有 4×7＝28 個，6－4＝2 種樣式

樣式（1,1）：寬邊 5，長邊 8，有 5×8＝40 個，6－5＝1 種樣式

斜正方形的總數＝5×1×4＋4×2×5＋3×3×6＋2×4×7＋1×5×8＝210。

六、運用簡捷的公式，算出所有的「斜正方形」。

（一）計算正方格板中斜正方形個數的簡捷公式。

根據找出的規則，我們推出更簡便的公式，來求正方格板中的斜正方形個數，

設 S1＝正方格板中的斜正方形總數

$$S1 = 1\times(N-1)\times(N-1) + 2\times(N-2)\times(N-2) + \cdots + (N-2)\times 2\times 2 + (N-1)\times 1\times 1$$

$$S1 = (N-1)\times 1\times 1 + (N-2)\times 2\times 2 + \cdots + 2\times(N-2)\times(N-2) + 1\times(N-1)\times(N-1)$$

$$2\times S1 = 1\times(N-1)\times N + 2\times(N-2)\times N + \cdots + 2\times(N-2)\times N + 1\times(N-1)\times N$$

$$= N\times【(N-1)\times 1 + (N-2)\times 2 + \cdots + (N-(N-1))\times(N-1)】$$

$$= N\times N\times【1+2+3+\cdots+(N-1)】 - N【1\times 1+2\times 2+3\times 3+\cdots+(N-1)\times(N-1)】$$

「利用梯形公式和平方和公式」

$$= N\times N\times 1/2\times N\times(N-1) - 1/6\, N\times N\times(N-1)\times(2N-1)$$

$$= 1/6\quad N\times N\times(N-1)(N+1)$$

$$S1 = 1/12\quad N\times N\times(N-1)\times(N+1)$$

正方格板斜正方形總數＝1/12　N × N ×（N-1）×（N+1）

（二）計算長方格板中斜正方形個數的簡捷公式。

設 S2＝長方格板中的斜正方形總數 且N＞M

$S2 = 1\times(N-1)\times(M-1)+2\times(N-2)\times(M-2)+\cdots$

$+(M-2)\times(N-M+2)\times 2+(M-1)\times(N-M+1)\times 1$

$S2 = (M-1)\times(N-M+1)\times 1+(M-2)\times(N-M+2)\times 2+\cdots$

$+2\times(N-2)\times(M-2)+(N-1)\times(M-1)$

$2\times S2 = (M-1)\times【(N-1)+N-M+1】+2\times(M-2)\times【N-2+N-M+2】+\cdots$

$+2\times(M-2)【N-M+2+N-2】+1\times(M-1)\times【N-M+1+N-1】$

$=(2N-M)\times\{M\times【1+2+3+\cdots+(N-1)】-$

$【1\times1+2\times2+3\times3+\cdots+(N-1)\times(N-1)】\}$

$=(2N-M)\times\{M\times 1/2【(M-1)\times M】-1/6【(M-1)\times M\times(2\times M-1)】\}$

$=1/6\ (2N-M)\times(M-1)\times M\times(M+1)$

$S2 = 1/12\ (2N-M)\times(M-1)\times M\times(M+1)$

長方格板斜正方形總數＝ $1/12\ (2N-M)\times(M-1)\times M\times(M+1)$

陸、討論

一、討論歷屆類似本研究主題的異同。

我們研究到這一階段，老師又提示探討方格板中有多少個正方形（包含斜與不是斜的正方形）？經過一番努力，我們發現非常有趣的現象，如表五：

（一）方格板上正方形（不是斜的正方形）個數和斜正方形個數，都是同一組數字的變化，由大到小都是１＝1×1➞ ４＝2×2➞ ９＝3×3➞ 16＝4×4➞ ……。

（二）不斜的正方形樣式很單調，樣式（a , b）中都是 a＝b 的正方形，如（1 , 1）、（2 , 2）、（3 , 3）……等，N×N 的方格板中最大正方形 a＝b＝N 就是（N , N），其次爲（N－1 , N－1）、（N－2 , N－2）……（2 , 2）、（1 , 1）。所以不斜的正方形個數 $=1\times1+2\times2+3\times3+\cdots+(N-1)\times(N-1)+N\times N$。

（三）將不斜的正方形的個數加入斜正方形公式中，來求方格板中所有正方形個數。

設 S3＝方格板中的正方形總數，

$S3 = 1\times N\times N+2\times(N-1)\times(N-1)+3\times(N-2)\times(N-2)+\cdots+$

$(N-1)\times 2\times 2+N\times 1\times 1$

（四）長方格板中正方形（不是斜的正方形）個數和斜正方形個數變化也是一樣的一組

數字，樣式（a , b）變化和正方格板又相同，如表六-1。因此比照之下，很快可以推出公式，來求長方格板中所有大大小小的正方形個數。

設長方格板邊長N＞M，S4＝長方格板中的正方形總數：

$$S4 = 1\times N\times M + 2\times(N-1)\times(M-1) + 3\times(N-2)\times(M-2) + \cdots + M\times(N-M+1)\times 1$$

（五）我們的將研究結果和幾年前全國科展作品『正方形的捉迷藏』比對一下，我們僅只探討斜正方形，他們是研究所有正方形，推展出來的公式完全相同。雖然的思考過程和研究方法不同，卻能殊途同歸，數學真是奧妙。

（六）我們從方格板邊長探討斜正方形樣式及其個數的相關性與規律，進而歸納出簡捷公式。其間我們發現運用表格分類尋求規律，更為簡易；使用電腦繪圖軟體作圖，可以更細緻；更重大的發現是我們也探討長方格板，從方格板邊長的差數，就能計算所有斜正方形的總數。當然這些就是與前件作品不同之處了。

二、同心協力討論問題，突破困境。

研究過程中遭遇許多困難，經過老師細心的指導和同學全力協助，總算一一克服。

（一）方格板的邊長越大，斜正方形的個數也越難數，不是漏掉就是重複。我們想出辦法在每個斜正方形上方的一個頂點塗上紅色記號，各種樣式斜正方形的紅色頂點又構成不同大小的正方形（或長方形，長方格板中的斜正方形的紅色頂點，排成的是長方形），只要依面積公式計算出幾個頂點，就可以知道有多少斜正方形。

（二）當斜正方形越畫越多以後，線條常會糾纏在一起，以致難以分辨，有人提議用電腦試試看。我們就請老師指導利用繪圖軟體，畫出6×6～10×10的方格板中所有大大小小的斜正方形，畫出來的圖形效果很不錯，線條很清晰。

（三）從差數算斜正方形的個數，就是我們分工合作，製作很多表三和圖七以後，所觀察到的現象，想出的方式。

（四）至於主題名稱『方之律動』更是大家腦力激盪後最佳收穫了。

（五）數學實在太有趣了，同樣的題材，似乎還有許多的延伸探討，等著我們日後再去挖掘呢！這段期間，不斷請教老師，老師引導我們使用許多數學知識，來解決問題。見識到數學的奧妙，發現科學方法之妙用。這次研究，引發出我們對數學濃濃的興趣來……

表五　　方格板中正方形個數的關係

方格板類型	斜正方形樣式（a,b）與個數										不斜正方形樣式（a,b）與個數											全部合計
	（1,1）	(2,1)	（3,1）	（4,1）	（5,1）	（6,1）	（7,1）	（8,1）	（9,1）	合計	（1,1）	（2,2）	（3,3）	（4,4）	（5,5）	（6,6）	（7,7）	（8,8）	（9,9）	（10,10）	合計	合計
1x1										0	1										1	1
2x2	1									1	4	1									5	6
3x3	4	1								6	9	4	1								14	20
4x4	9	4	1							20	16	9	4	1							30	50
5x5	16	9	4	1						50	25	16	9	4	1						55	105
6x6	25	16	9	4	1					105	36	25	16	9	4	1					91	196
7x7	36	25	16	9	4	1				196	49	36	25	16	9	4	1				140	336
8x8	49	36	25	16	9	4	1			336	64	49	36	25	16	9	4	1			204	540
9x9	64	49	36	25	16	9	4	1		540	81	64	49	36	25	16	9	4	1		285	825
10x10	81	64	49	36	25	16	9	4	1	825	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	385	1210
	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9													
具有相同個數的樣式		（1,2）	（2,2） （1,3）	（3,2） （2,3） （1,4）	（4,2） （3,3） （2,4） （1,5）	（5,2） （4,3） （3,4） （2,5） （1,6）	（6,2） （5,3） （4,4） （3,5） （2,6） （1,7）	（7,2） （6,3） （5,4） （4,5） （3,6） （2,7） （1,8）	（8,2） （7,3） （6,4） （5,5） （4,6） （3,7） （2,8） （1,9）													

表六-1　　長方格板中正方形個數的關係

方格板類型	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(9,1)	合計	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	(10,10)	合計	全部合計
	斜正方形樣式（a,b）與個數										不斜正方形樣式（a,b）與個數											
10x1										0	10										10	10
10x2	9									9	20	9									29	38
10x3	18	8								34	30	18	8								56	90
10x4	27	16	7							80	40	27	16	7							90	170
10x5	36	24	14	6						150	50	36	24	14	6						130	280
10x6	45	32	21	12	5					245	60	45	32	21	12	5					175	420
10x7	54	40	28	18	10	4				364	70	54	40	28	18	10	4				224	588
10x8	63	48	35	24	15	8	3			504	80	63	48	35	24	15	8	3			276	780
10x9	72	56	42	30	20	12	6	2		660	90	72	56	42	30	20	12	6	2		330	990
10x10	81	64	49	36	25	16	9	4	1	825	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	385	1210
	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9													

	×1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9
具有相同個數的樣式		(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)
			(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)
				(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
					(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
						(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)
							(1,7)	(2,7)	(3,7)
								(1,8)	(2,8)
									(1,9)

柒、結論

一、方格板中的斜正方形充滿規律性變化，透過研究我們發現下列各種情形。

（一）斜正方形樣式（a , b）恰等於能滿足 2≦（a＋b）≦N 的正整數解。

（二）樣式（a , b）、（c , d）若滿足 a＋b＝c＋d， 則樣式（a , b）之斜正方形的個數與樣式（c , d）之斜正方形的個數相等。

（三）設 k 為大於 1 之正整數，則有 k－1 種樣式（a , b），其中 a＋b＝k。

（四）斜正方形的個數隨著（邊長－1）的平方開始，接著（邊長－2）的平方、（邊長－3）的平方、（邊長－4）的平方……等規律變化，直到 1 的平方為止。

二、從方格板邊長的差數來推算斜正方形的個數，可以更簡單。

（一）推算方格板上的斜正方形只須計算其頂（紅）點所圍成各種類型的長方形。

（二）各種類型的長方形從寬邊為 1、長邊＝寬邊＋差數起，寬邊、長邊都依連續整數增 1，……直到寬邊＝方格板短邊－1 為止。

（三）以長方形面積公式計算各種樣式的斜正方形個數，然後乘上（方格板短邊－長方形寬邊），最後合計斜正方形總數。

三、在 N×N 的正方格板中，我們可以找出 1/12　N × N×（N-1）×（N＋1）個斜正方形。

四、在 N×M 的長方格板中，我們可以找出 1/12（2N-M）×（M-1）× M ×（M＋1）個斜正方形。

捌、參考資料

一、國民小學數學課本，南一版，六上，第四單元「形體的性質」。

二、Brian Bolt著、林傑斌譯，數學遊樂園之茅塞頓開，初版，台北市，牛頓出版股份有限公司出版，p115，1995年11月。

三、新竹縣寶山鄉雙溪國小，第44屆全國科展數學科國小組優勝作品，正方形的捉迷藏。

【評語】080401

1. 討論相當完整，結構也算清楚。
2. 寫作組織也相當好。
3. 題目選取的創意性較低，致使發揮的空間較少。
4. 理論的推導可以再加強。