

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 生活與應用科學科

040806

樂高機器人模擬「指南車」的應用

學校名稱：臺北縣私立徐匯高級中學

作者： 高一 曾觀中 高一 翁嘉宏 高一 簡政緯	指導老師： 白偉民
-----------------------------------	--------------

關鍵詞：指南車 差速器 樂高機器人

樂高機器人模擬「指南車」的應用

摘要

指南車是利用機械的原理，透過各式齒輪的傳動機構，達到指南車上方的人形指針(樂高積木取代)永遠指向同一方向，達到指向的目的。本研究中建構了「單差速」及「雙差速」指南車，並利用它來實驗驗證，並分析指南車指向的原理。

研究中使用 PASCO CI-6538 角度感應器量測指針指向的轉動角度，藉以瞭解所建構單差速及雙差速指南車的指向準確度；實驗結果顯示該二款指南車的準確度很高。

在單差速指南車研究中，我們發現當「兩車輪間距」等於「車輪直徑」時，指針的指向最精準；而在雙差速指南車研究中，我們發現當「兩車輪間距」等於「車輪直徑」的 3 倍時，指針的指向最精準。當不滿足上述關係時，指南針的指向角度將過大或不足，而造成指向誤差。

壹、研究動機

指南車是古代機械文明發展過程中的一項成果，它不同於指南針，指南針是利用地球磁場的作用，使得磁針永遠指向南方，而達到指向的目的，使人們不至於迷失方向。

關於指南車，曾經有一個古老的傳說：相傳在四千多年前，生活在河北河南和山東一帶的九黎族的首領蚩尤最為凶暴。有一年，蚩尤帶領九黎族進入中原為與炎帝爭奪黃河下游地區，展開了一場大戰，炎帝戰敗被趕到「涿鹿」這個地方。於是炎帝向黃帝求救，與之結為聯盟。黃帝統帥二個部落的族人與蚩尤戰於涿鹿之野。炎黃二族便聯合起來，向九黎族宣戰。蚩尤和黃帝在戰場上各自鬥法。蚩尤利用濃霧，使黃帝的部隊迷路。黃帝為了克服霧中作戰的困難發明了「指南車」辨別方向。從此，黃帝的軍隊再也不怕蚩尤的大霧了，人人勇敢善戰，個個奮勇爭先，成功衝出濃霧的重圍。終於戰勝了蚩尤，把他一直追到涿鹿之野殺死，成為中原各部落的共主，這次的戰爭被稱為「涿鹿之戰」，是中國遠古歷史上的一個重大事件。

近來，社團老師指導我們參加樂高機器人的程式設計比賽，在準備機器人程式設計比賽集訓的過程中，老師告訴我們在這一組 NXT 樂高機器人的零件中，有一個「差速齒輪」，利用它可以製作指南車，達到機械式指向的目的，老師的話引起我們的興趣。老師並介紹我們一個網站：[中華大學電機系指南車工作站](http://southpointing.myweb.hinet.net/)（註 1、註 2、註 3），於是我們著手研究指南車的構造及原理，利用樂高機器人積木零件來建構黃帝打敗蚩尤的「指南車」；並希望透過實驗測量，驗證我們所製造指南車的準確度，藉此研究作為其他形式指南車的研究基礎。

貳、研究目的

一、指南車的傳動原理：

透過資料的搜尋整理，我們希望瞭解指南車的傳動原理，並著手規劃設計我們的指南車。

二、自製指南車：

利用搜尋已知的指南車傳動原理自製指南車。藉由指南車的實做練習測試，瞭解指南車齒輪傳動的原理，對相關的機械傳動能有所瞭解。

三、實驗確認指南車指向準確度：

對於指南車的實際操控，我們也希望瞭解所製造的指南車其準確度為何，誤差有多少？透過實驗的設計與驗證，更有信心地提出「單差速」及「雙差速」指南車機構傳動原理的論證，藉此研究作為其他形式指南車的研究基礎。

四、其他類型指南車的研究：

單差速齒輪式、雙差速齒輪式指南車成功後，我們也希望再研究離合齒輪式指南車及行星齒輪式指南車的運作原理。

參、研究設備器材

一、單差速指南車結構零件清單：

我們所使用的器材為樂高積木的零件組，首先介紹我們的指南車結構零件分解圖，希望對有興趣瞭解指南車的研究者有所幫助，我們參考了網路上搜尋到的資料，並加以改善簡化，相關零件清單如下：

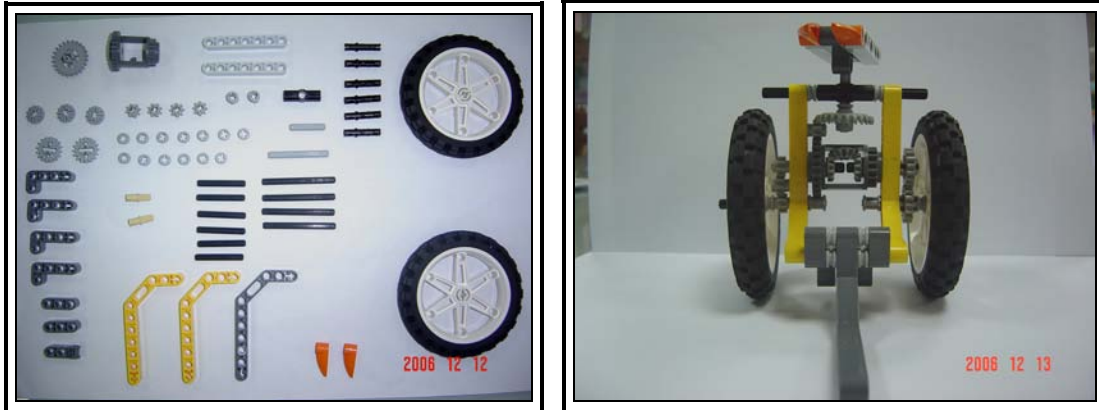


圖 3-1A 「單差速」指南車零件圖、完成圖

二、雙差速指南車結構零件清單：

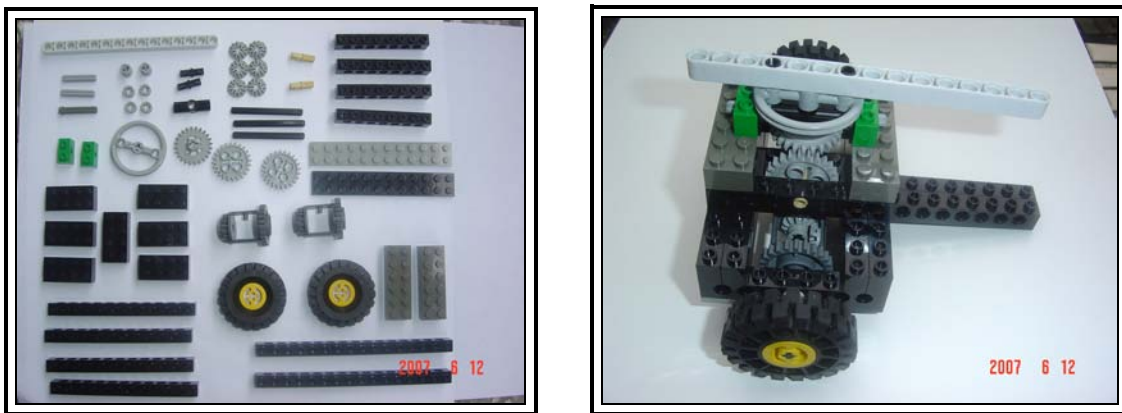


圖 3-1B 「雙差速」指南車零件圖、完成圖

二、實驗量測器材：

- 1.PASCO 角度感應器 CI-6538(Rotary Motion Sensor),精確度為 0.25°
- 2.PASCO 750 訊號轉換介面機及其驅動程式
- 3.PASCO Data Studio 系統，Ver.1.9.5
- 4.樂高機器人 NXT 主機(32bits CPU)
- 5.NXT 步進馬達 2 個，精確度為 1° ，扮演輪子的功能，提供轉動驅動力
- 6.NXT 機器人 LEGO MindStorms 軟體系統(LabVIEW 公司開發)
- 7.支架一個，固定角度感應器用。
- 8.個人電腦、印表機

實驗設備組裝如下，圖中輪胎已拆除，以利裝上 NXT 步進馬達，模擬輪胎轉動的情形：

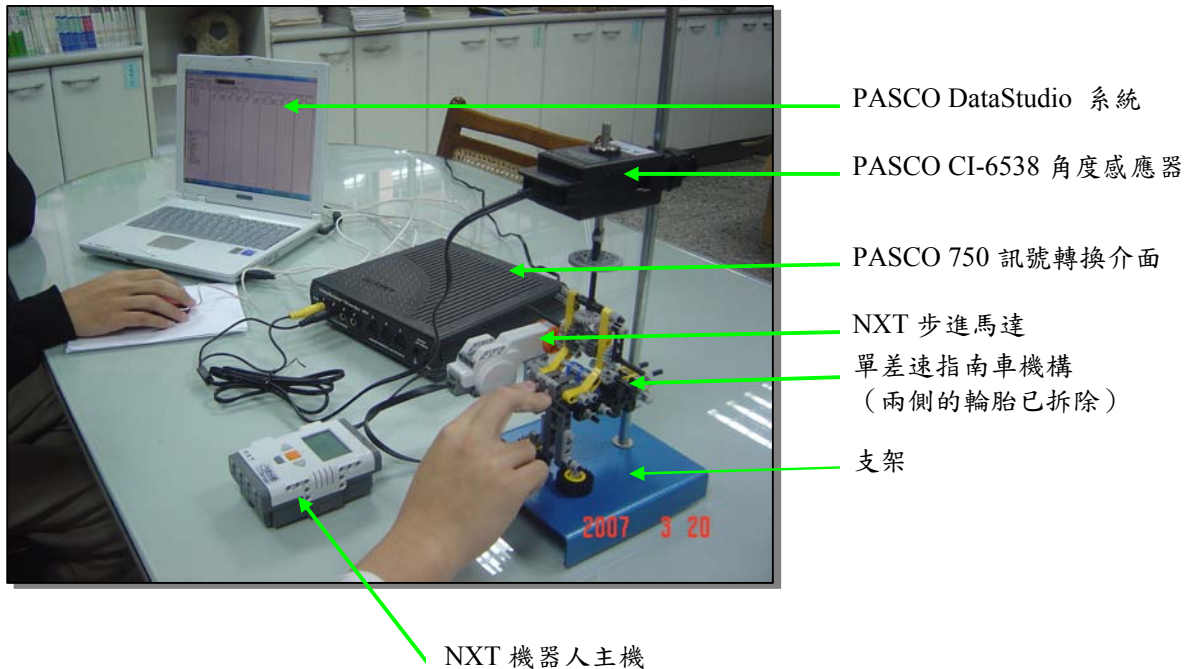


圖 3-2 實驗量測設備圖 (圖中為固定右側，轉動左側)

肆、研究方法及步驟

一、建構單差速齒輪、雙單差速齒輪指南車：

在研究的目標上，我們希望能建構屬於自己的指南車，並瞭解其作用原理，分析其傳動機構，俾利我們對指南車有更進一步的認識。

我們從網路上搜尋指南車的詳細資料，嘗試組裝、測試各種可能的結構，獲得功能相當優良的單差速齒輪、雙單差速齒輪指南車。（註 2、註 3）

二、實驗測量設計步驟：（註 6）

建構好指南車，我們希望瞭解指南車指向的準確度，因此，我們利用 PASCO CI-6538 角度感應器，測量指南車運動時，指針的轉向角度是否如我們所預期？以確認指南車的指向誤差有多少？哪些變因影響了指針指向的準確性？希望能獲得控制。

我們將指南車的車輪拆下，並裝上樂高機器人 NXT 系統中的步進馬達，作為指南車車輪驅動的動力（註 5），如此不但可以檢驗指南車機構是否正常運行，並可以排除指南車運行時，輪子無法與地面完全滾動摩擦的控制變因。我們做了如下的實驗測試，利用電腦紀錄測量指針的轉向角度。

（一）單差速指南車實驗項目：

- B-1. 固定左輪，驅動右輪，模擬指南車左轉。
- B-2. 固定右輪，驅動左輪，模擬指南車右轉。
- B-3. 同步驅動左、右輪，模擬指南車直線前進。
- B-4. 同步驅動左、右輪，模擬指南車直線後退。

（二）雙差速指南車實驗項目：

- C-1. 固定左輪，驅動右輪，模擬指南車左轉。
- C-2. 固定右輪，驅動左輪，模擬指南車右轉。
- C-3. 同步驅動左、右輪，模擬指南車直線前進。
- C-4. 同步驅動左、右輪，模擬指南車直線後退。

伍、研究結果

一、單差速指南車的構成

首先，製作「單差速式齒輪」指南車

利用網路上相關的資料(註 1)，我們成功地組裝「單差速式齒輪」指南車，組裝過程中的重要零件，就是由 3 個傘形齒輪所組裝成的差速式齒輪。組裝圖形如下：

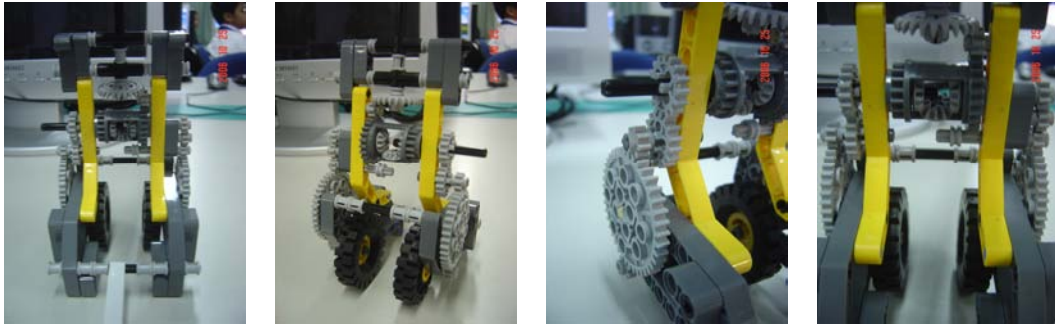


圖 5-1 第一代單差速指南車

我們稱它為第一代指南車吧！由於齒輪數的傳動太多，因此指針的轉動誤差大，而且指南車下方的小輪胎轉動摩擦力大較不順暢，不易驗證輪子直徑與兩輪間距的關係，實驗的結果相當的不好。所以，我們又改良了上述的指南車，更換了不同的零件，創造了第二代單差速指南車。



圖 5-2 第二代單差速指南車

第二代單差速指南車組合如圖 5-2，請注意指南車中的重要零件：差速器。它是這部「單差速器指南車」的靈魂人物。

在日常生活中的應用中，差速器常被使用於汽車後輪的轉動機構，因為當汽車轉彎的時候，靠內側的轉彎半徑與外側的轉彎半徑是不同的；內側的轉彎半徑較小，但外側的轉彎半徑較大。但汽車轉彎時的旋轉中心只能有一個，故外側輪子轉彎的運動路徑較長，而內側輪子轉彎的運動路徑較短。所以，外側輪子(路徑長)比內側輪子(路徑短)要有更快的轉速，如此汽車才能完成轉彎的動作。但是銜接兩個後輪的轉軸只有一根，兩個不同轉速的輪子將使得轉軸因不同的轉速扭力而斷裂，為了避免此一結果，差速器擔任了這一個角色，差速器使得後輪軸上兩側的輪子可以具有不同的轉速，以利汽車轉彎時，能夠順利地完成！（註 7）

二、單差速指南車運行的實驗

(一) 實驗 2-1

目的：觀察製作的指南車是否達到指向的功能

步驟：將指南車的指標指向南方，如圖 5-4(a)~(e) 沿著圓圈逆時針繞行一圈。其中，取「兩輪間距」(圖中黑色的部分)等於「車輪直徑」

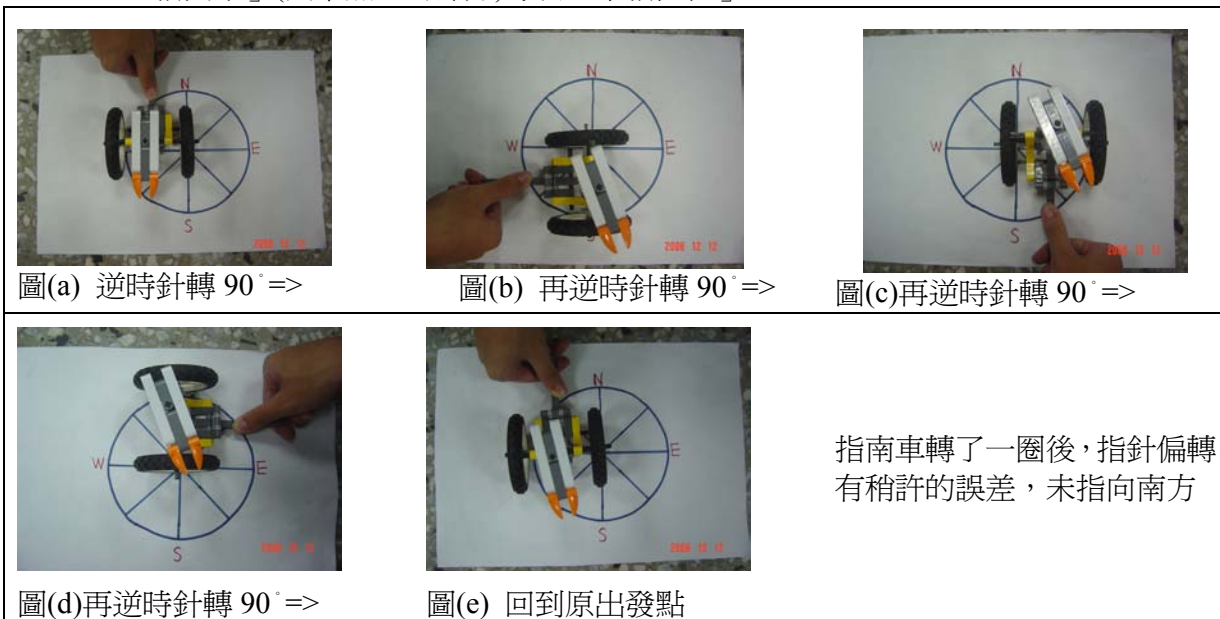


圖 5-4(a)~(e) 單差速指南車實際運行實驗 2-1

(二) 實驗 2-2

目的：這是在測試「兩輪間距」(圖中黑色的部分)與「車輪直徑」的關係

步驟：將「兩車輪間距加寬」後指南車指標偏轉的情形，和沒有加寬的實驗 2-1 相比，如圖 5-5(a)~(e)，偏轉的誤差明顯比之前實驗 2-1 大了許多。

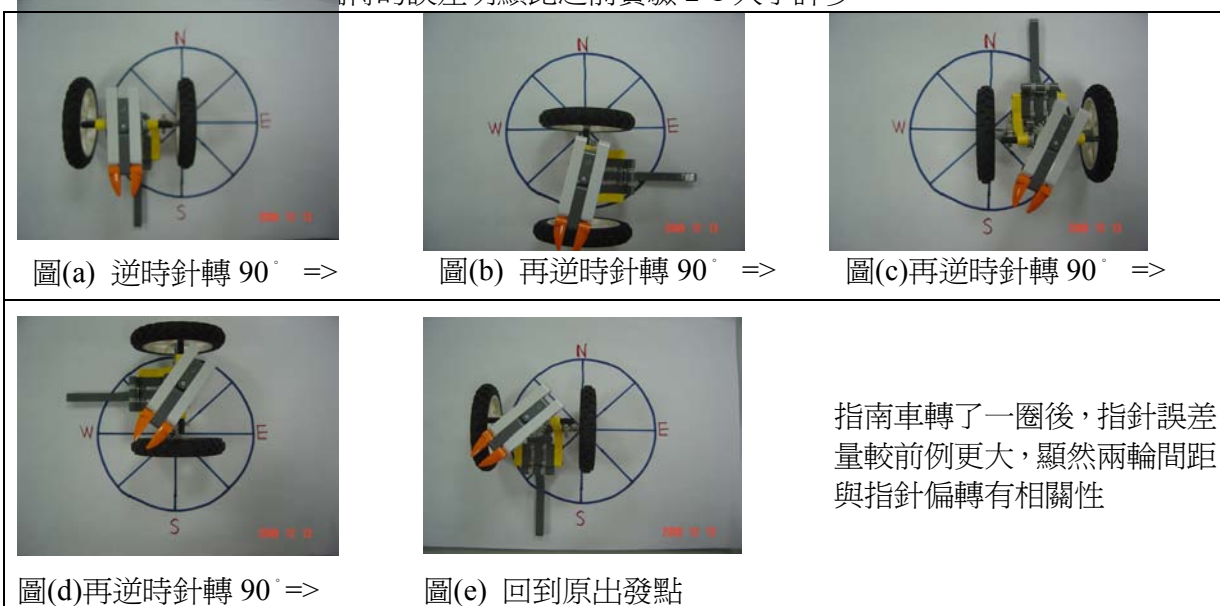


圖 5-5(a)~(e) 單差速指南車實際運行實驗 2-2

三、單差速指南車指針運行角度的量測實驗

由於製作出來的單差速指南車存在有不可避免的誤差，因此我們決定把誤差的值做「量化」的動作，以瞭解我們的單差速指南車準確度到底有多少？

1. 實驗 A

我們使用樂高機器人 NXT 系統中的步進馬達作為指南車車輪驅動的動力。因此，為考慮實驗的準確性，首先，我們想了解 NXT 步進馬達的角度是否有誤差？誤差量有多大？提供後續指南車實驗資料的參考校正。

目的：瞭解 NXT 步進馬達轉數的準確度

實驗設備：如下圖 5-6

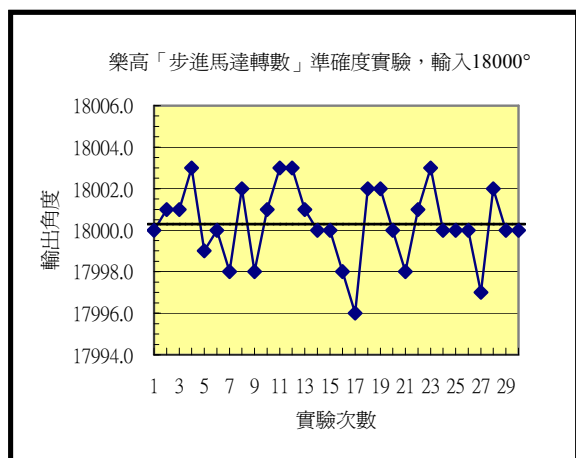


圖 5-6
(左起)PASCO 750 介面機、
NXT 主機、CI-6538 角度感應器、
NXT 步進馬達

實驗步驟：

- (1) 將 NXT 步進馬達與 PASCO CI-6538 角度感應器連結。
- (2) 利用 NXT 機器人設定步進馬達轉 50 圈 ($50 \times 360^\circ = 18000^\circ$)
- (3) 電腦透過 PASCO 750 訊號介面機紀錄 CI-6538 角度感應器所得的角度
- (4) 重複步驟 2，共實驗 30 次。重測時，務必將積木連結處再次壓緊，使誤差量減少。
- (5) 計算 NXT 步進馬達轉數的誤差量

實驗結果：



步進馬達輸入角度 50 圈 = $50 \times 360^\circ = 18000^\circ$ ，PARSO CI-6538 角度感應器量測的平均角度 = 18000.3° ，
圖中虛線為實驗結果的平均值，與我們所需要的角度誤差約 0.3°

故 相對誤差為 =

$$|18000.0 - 18000.3| / 18000.0 = \mathbf{0.0017\%}$$

誤差很小。故我們可以使用樂高 NXT 步進馬達做為我們後續實驗中，擔任車輪驅動力的來源，它的準確度可以獲得信任。

2. 實驗 B-1

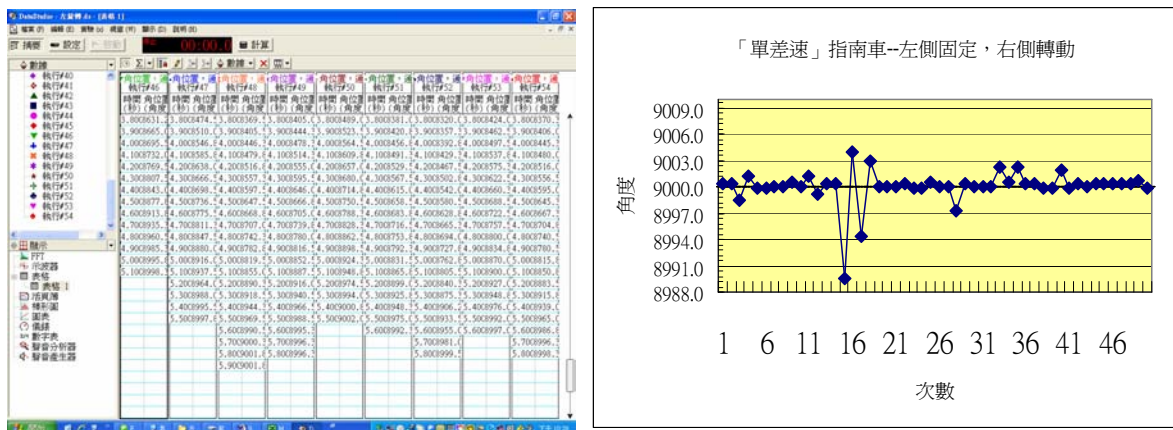
目的：固定指南車左車輪，讓右車輪轉動(即指南車逆時針旋轉)，瞭解指針偏向的準確度到底有多少？

實驗設備：圖 3-2 中指南車輪胎已拆除，以利裝上 NXT 步進馬達，模擬輪胎轉動的情形

實驗步驟：

- (1) 將指南車的方向指標卸除，裝上 CI-6538 角度感應器，並將指南車右側十字輪軸裝上 NXT 步進馬達，作為原動輪。
- (2) 以程式設定步進馬達的旋轉圈數 50 圈，同時以 CI-6538 角度感應器測量方向指標位置實際的旋轉角度。
- (3) 每次實驗後，需將指南車壓緊，使齒輪緊密結合，以減少誤差。
- (4) 重複進行步驟 2~3，並在最後取其平均值，以求出誤差

實驗結果：下圖是從 DataStudio 系統擷取下來的畫面，我們共取 50 組實驗資料，如下圖。



NXT 步進馬達輸入角度 50 圈 = 50 圈 × 360° = 18000.0°，上方指針裝上 CI-6538 角度感應器，測得的轉動平均值 = 17999.99°，誤差值相當地小。

經由此實驗，我們可以確認當指南車逆時針方向旋轉時，上方的指針將順時針旋轉，而且準確度非常的高。因此，若能將輪子與地面的滾動摩擦技術克服，那這是一部相當不錯的單差速指南車。

3. 實驗 B-2

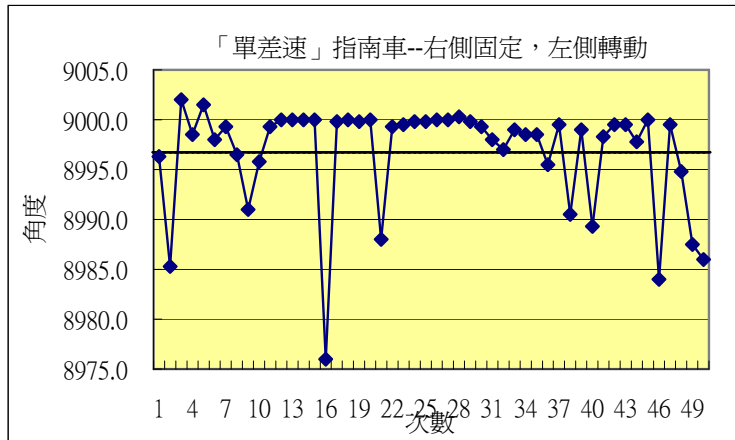
目的：固定指南車右車輪，讓左車輪轉動(即指南車順時針旋轉)，瞭解指針偏向的準確度到底有多少？

實驗設備：如圖 3-2

實驗步驟：

- (1) 將指南車的方向指標卸除，裝上 CI-6538 角度感應器，並將指南車左側十字輪軸裝上 NXT 步進馬達，作為原動輪。
- (2) 以程式設定步進馬達的旋轉圈數 50 圈，同時以 CI-6538 角度感應器測量方向指標位置實際的旋轉角度。
- (3) 每次實驗後，需將指南車壓緊，使齒輪緊密結合。
- (4) 重複進行步驟 2~3，並在最後取其平均值，以求出誤差

實驗結果：我們共取 50 組實驗資料，如圖。結果也令人非常滿意地，



$$\text{相對誤差} = \frac{|18000.00 - 17998.492|}{18000.00} = 0.008\%$$

實驗中，我們將左側輪子旋轉 50 圈，故左側輪子每轉動 1 圈，指向指標的誤差約

$(18000.00 - 17998.492) \div 50 = 0.03$ 度。所以，在此情況指針的指向準確度也相當地高，證實指南車順時針旋轉運行時的指向效果是正確的。

4. 實驗 B-3

目的：指南車左、右車輪均轉動(即指南車前進模擬)，指針偏向的準確度到底有多少？

實驗設備：如圖 5-8



圖 5-8 輪子兩側均安裝步進馬達，模擬指南車前進或後退

實驗步驟：

- (1) 將指南車的方向指標卸除，裝上 CI-6538 角度感應器，並將指南車左右兩側十字輪軸裝上 NXT 步進馬達，作為原動輪。
- (2) 以程式設定步進馬達的旋轉圈數 50 圈，同時以 CI-6538 角度感應器測量方向指標位置實際的旋轉角度。
- (3) 每次實驗後，需將指南車壓緊，使齒輪緊密結合。
- (4) 重複進行步驟 2~3，並在最後取其平均值，以求出誤差

5. 實驗 B-4

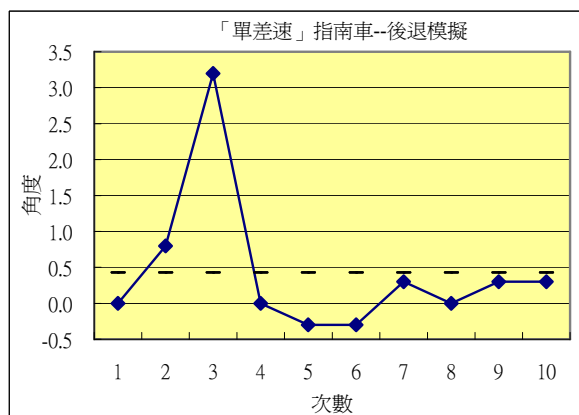
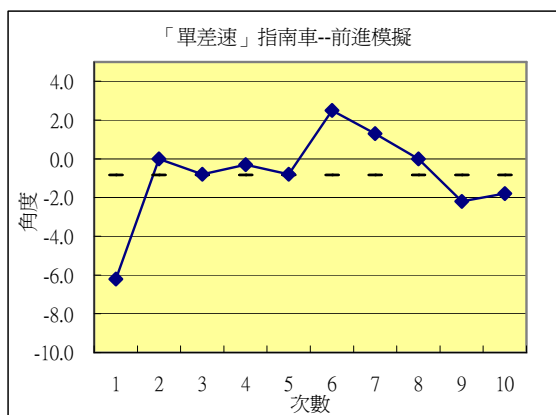
目的：指南車左、右車輪均轉動(即指南車後退模擬)，指針偏向的準確度到底有多少？

實驗設備：同圖 5-8，但須更改機器人主機程式，讓步進馬達反轉

實驗步驟：同上述步驟，但 NXT 步進馬達的轉向要相反，以測試指南車後退。

實驗 B-3、B-4 的實驗結果：

模擬指南車直線前進、後退，我們各量取了 10 次的資料，當指南車前進或後退時，指針指向的偏轉角度應為 0 度。實驗結果，無論指南車前進或後退的實驗測試中，誤差量也都很接近於 0 度。電腦測得的資料如下圖：（負號代表偏轉不足度數）



若將平均偏轉的角度除以實驗圈數 50 圈，我們發現：指南車車輪每前進一圈時，指針指向的誤差量約為±0.01 度，這個結果可以提供為此部指南車爾後前進（減 0.01 度）、後退（加 0.01 度）操作時的角度概算。

四、雙差速指南車指針運行角度的量測實驗

接著，我們想實驗量測「雙差速」指南車，指針轉向的誤差情形。

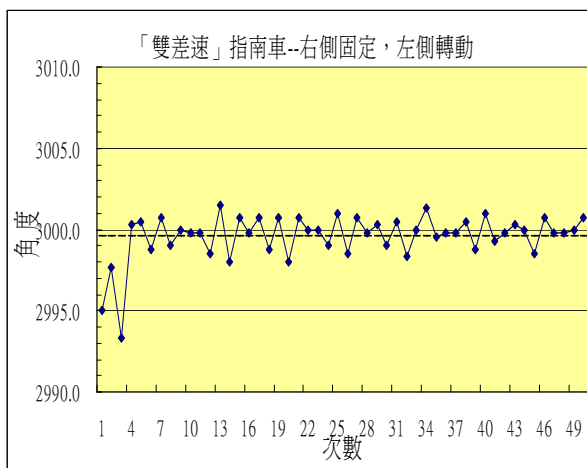
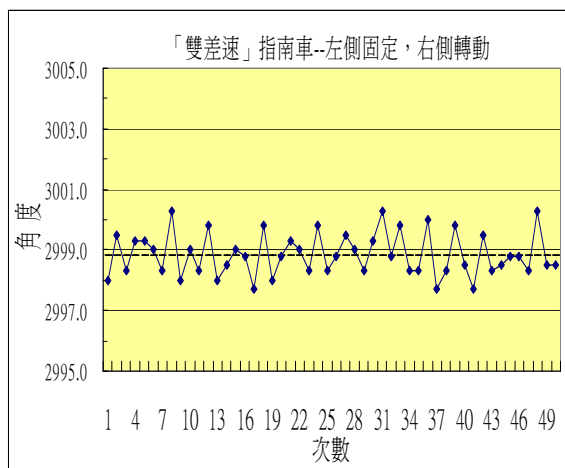
實驗裝置如右圖 5-9 所示，我們使用與之前相同的儀器來作業；將雙差速指南車的車輪、方向指標卸下後，裝上步進馬達，並連接到角度感應器上，由 NXT 主機來帶動步進馬達提供動力以進行實驗。



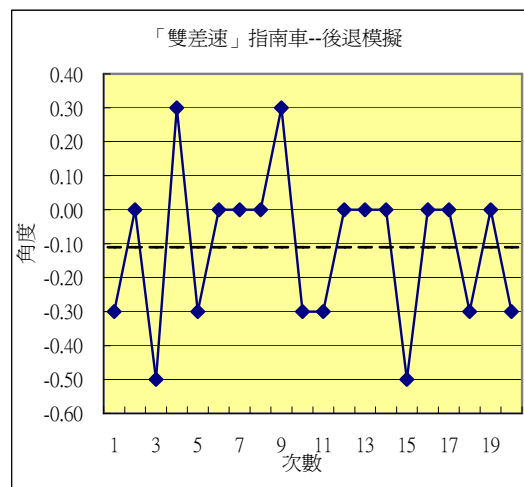
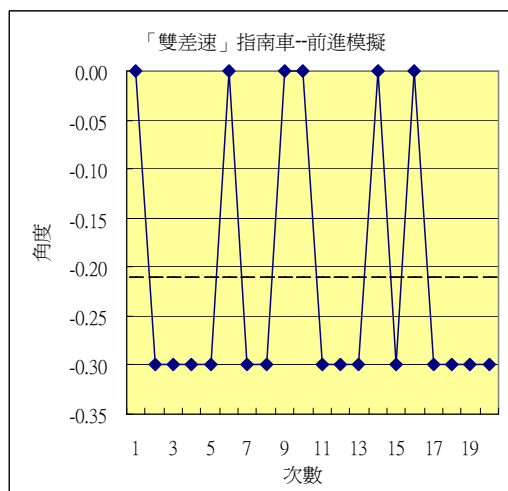
圖 5-9 雙差速實驗裝置

1. 實驗 C-1：左輪固定，右輪轉動(左轉模擬)、實驗 C-2：右輪固定，左輪轉動(右轉模擬)

實驗結果：我們共取 50 組實驗資料，如圖。結果也令人非常滿意地，



2. 實驗 C-3：前進模擬、實驗 C-3：後退模擬，我們共取 20 組實驗資料，如圖。



陸、討論

一、首先，研究「單差速齒輪式指南車」的指向原理：

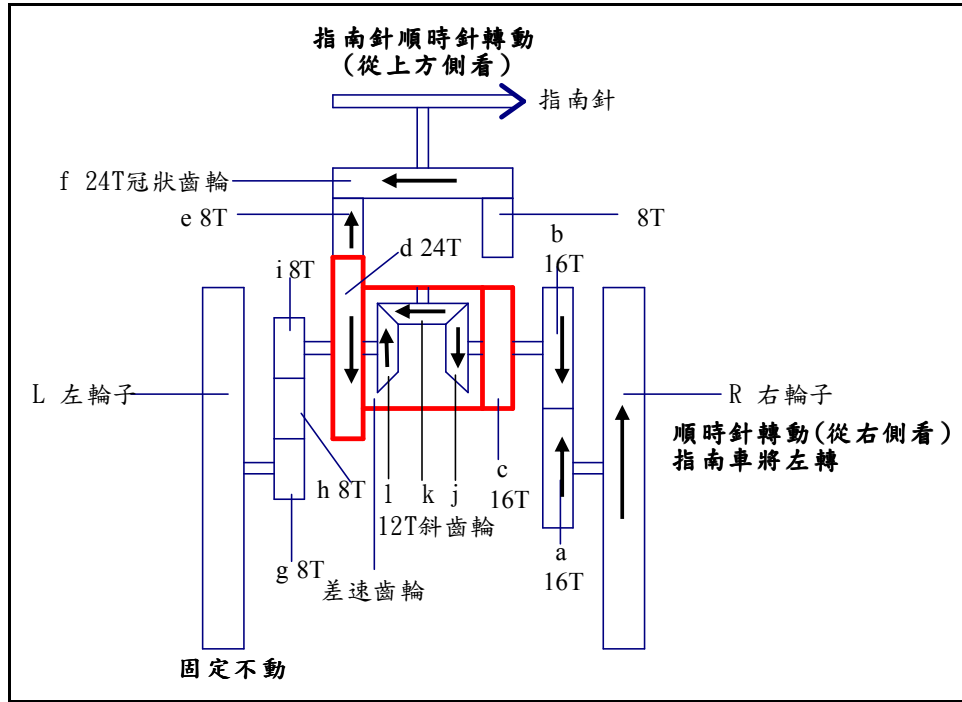


圖 6-1 單差速指南車結構圖，左側固定（紅色部分為差速齒輪，內部有 3 個 12T 斜齒輪）

如圖 6-1，假設車輪直徑為 d ，兩車輪之間距等於 W 。

當指南車左側輪子固定不動，右側輪子轉動時，模擬指南車左轉的動作。（從上方看時，指南車逆時針轉動），如圖 6-2，此時指南車旋轉一圈的路徑長為 $2\pi W$ ；而車輪本身的圓周長為 πd ，表示**指南車以左輪為圓心逆時針旋轉 1 圈時，車輪將會旋轉 $2\pi W/\pi d$ 圈，即 $2W/d$ 圈。**

齒輪傳動的部分，由結構圖 6-1 得知，設 N_i 表 i 齒輪的轉速， T_i 表 i 齒輪的齒數。設 $N_R =$ 右輪的轉速，所以

$$N_R = N_a = N_b = N_j = N_k \dots\dots\dots(1-1)$$

差速齒輪為周轉輪系，我們定義「系值 e 」為末輪轉速與原動輪轉速的比值（註 7、8）。考慮差速器中 N_j 、 N_l 方向相反，且 $T_j = T_l = 12T$ ， N_m 為差速器本身的轉速，則從 j 到 l 的

系值為

$$e_{jl} = -\frac{T_j}{T_l} = \frac{N_l - N_m}{N_j - N_m}$$

又左側固定不動，所以 $N_L = N_g = N_h = N_i = N_f = 0$

故

$$-1 = \frac{0 - N_m}{N_j - N_m} \quad \therefore N_j - N_m = N_m$$

即
$$N_m = \frac{1}{2} N_j \dots \dots \dots (1-2)$$

再考慮差速器 m 到上方指針齒輪 f 的傳動，因齒輪 e 可視為惰輪，可不用計算它的齒數

$$e_{mf} = \frac{N_f}{N_m} = \frac{T_m}{T_f} = \frac{24}{24} = 1 \quad \therefore N_f = N_m \dots \dots \dots (1-3)$$

由上述(1-1) (1-2) (1-3) 式，得知

$$N_f = N_m = \frac{1}{2} N_j = \frac{1}{2} N_b = \frac{1}{2} N_a = \frac{1}{2} N_R \text{ 方向如圖 6-1 所示}$$

故右車輪 N_R 自轉一圈，方向指標 N_f 將反方向旋轉 $\frac{1}{2}$ 圈。圖 6-2 可以幫助我們理解指南車指針指向的要求。

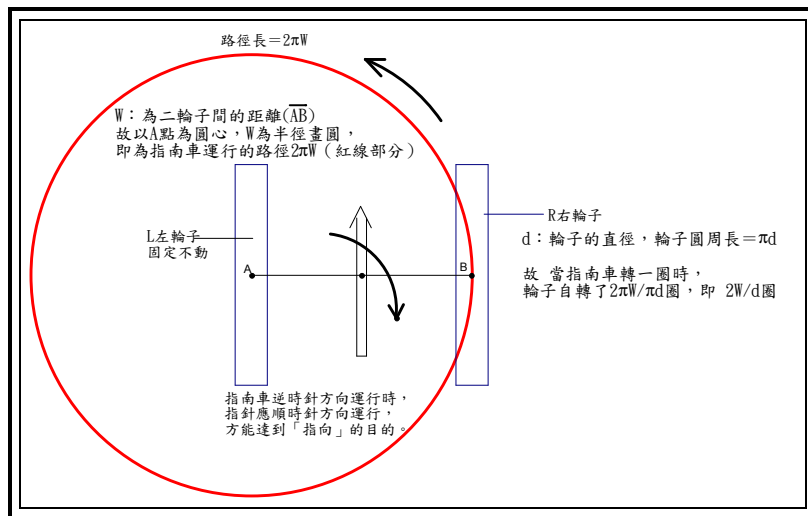


圖 6-2 指南車指向原理

又因指南車旋轉 1 圈時，右輪 N_R 自轉 $2W/d$ 圈。所以，若取 $W = d$ ，則當指南車旋轉一圈，右輪 N_R 將自轉 2 圈，而方向指標 N_f 將反方向旋轉 $2 \times \frac{1}{2}$ 圈；即指南車旋轉一圈時，上方的方向指標也將反方向旋轉 1 圈，而達到「指南」效果。

這裡我們做了一個重要的假設：指南車二輪的間距 $W =$ 輪子的直徑 d ，指南車的指向效果才會發生，否則會產生誤差。

這一點也證明了在實驗 2-1、2-2 的指南車操作時，若你的指南車無法達到 $W = d$ 的要求，則上方指標的偏轉會不準確。但是，當我們拆去二側的輪子，使用樂高 NXT 步進馬達驅動進行實驗時，上方指針的偏差卻非常小，準確度很高。

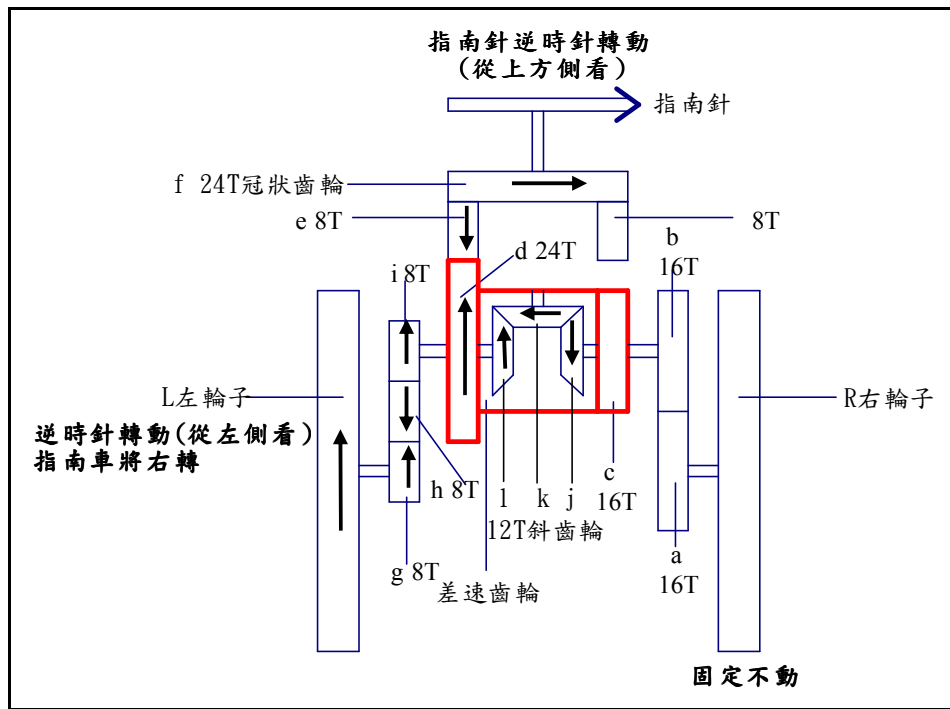


圖 6-3 單差速指南車結構圖，右側固定

相反地，如圖 6-3，當指南車右側輪子固定不動，左側輪子轉動時，模擬指南車右轉的動作。（從上方看時，指南車車體順時針轉動）。

同理，齒輪傳動的部分，由結構圖 6-3 得知， $N_L =$ 左車輪的轉速。

$$N_L = N_g = N_h = N_i = N_l \dots\dots\dots(1-4)$$

考慮差速器中 N_j 、 N_l 方向相反，且 $T_j = T_l = 12T$ ， N_m 為差速器本身的轉速，則從 j 到 l 的

系值為

$$e_{jl} = -\frac{T_j}{T_l} = \frac{N_l - N_m}{N_j - N_m},$$

又右側固定不動，所以 $N_R = N_a = N_b = N_j = 0$

故

$$-1 = \frac{N_l - N_m}{0 - N_m} \quad \therefore N_l - N_m = N_m$$

即

$$N_m = \frac{1}{2} N_l \dots\dots\dots(1-5)$$

再考慮差速器 m 到上方指針齒輪 f 的傳動，因齒輪 e 可視為惰輪，可不用計算它的齒數

$$e_{mf} = \frac{N_f}{N_m} = \frac{T_m}{T_f} = \frac{24}{24} = 1 \quad \therefore N_f = N_m \dots\dots\dots(1-6)$$

由上述(1-4) (1-5) (1-6) 式，得知

$$N_f = N_m = \frac{1}{2} N_l = \frac{1}{2} N_i = \frac{1}{2} N_h = \frac{1}{2} N_g = \frac{1}{2} N_L \text{ 方向如圖 6-3 所示}$$

故左車輪 N_L 自轉一圈，方向指標 N_f 將反方向旋轉 $\frac{1}{2}$ 圈。再取 $W=d$ ，當指南車順時針旋轉 1 圈時，方向指標也將逆時針反方向旋轉 1 圈，達到「指南」效果。

由以上的推論，本研究所提出的指南車不論在左轉、或右轉時，都應有相當好指向功能。

二、研究「雙差速齒輪式指南車」的指向原理：

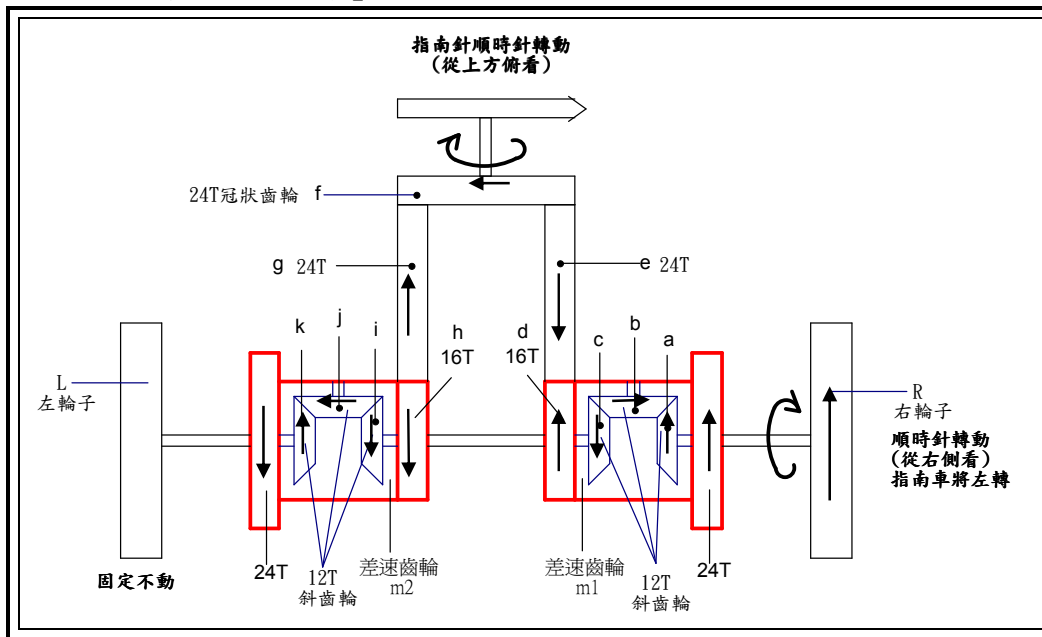


圖 6-4 雙差速指南車結構圖，左側固定 $N_L=0$

(一)、先考慮「左差速器 m_2 」：

左差速器 m_2 中 N_k 、 N_i 方向相反，且 $T_k = T_i = 12T$ ， N_{m_2} 為左差速器本身的轉速，則

$$e_{ki} = -\frac{T_k}{T_i} = \frac{N_i - N_{m_2}}{N_k - N_{m_2}}, \text{ 又右側固定不動，所以 } N_k = 0$$

$$\text{故} \quad -1 = \frac{N_i - N_{m_2}}{0 - N_{m_2}} \quad \therefore N_i - N_{m_2} = N_{m_2}$$

$$\text{即} \quad N_{m_2} = \frac{1}{2} N_i \dots \dots \dots (2-1)$$

(二)、從左差速器 m_2 傳到上方指標 f ：

因齒輪 g 為惰輪，可不用計算它的齒數

$$e_{m_2 f} = \frac{N_f}{N_{m_2}} = \frac{T_{m_2}}{T_f} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \quad \therefore N_f = \frac{2}{3} N_{m_2}$$

$$\therefore N_f = \frac{2}{3} N_{m_2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} N_i = \frac{1}{3} N_i \dots \dots \dots (2-2)$$

(三)、再考慮「右差速器 m_1 」：

右差速器 m_1 中 N_a 、 N_c 方向相反，且 $T_a = T_c = 12T$ ， N_{m1} 為左差速器本身的轉速，則

$$e_{ca} = -\frac{T_c}{T_a} = \frac{N_a - N_{m1}}{N_c - N_{m1}},$$

故
$$-1 = \frac{N_a - N_{m1}}{N_c - N_{m1}} \quad \therefore N_a - N_{m1} = N_{m1} - N_c$$

又因為齒輪 c 、 i 在同一根軸上，故 $N_c = N_i$ $2N_{m1} = N_a + N_c = N_a + N_i$

$$\therefore N_{m1} = \frac{1}{2}(N_a + N_i) \dots\dots\dots(2-3)$$

(四)、從右差速器 m_1 傳到上方指標 f ：

因齒輪 e 為惰輪，可不用計算它的齒數

$$e_{m1f} = \frac{N_f}{N_{m1}} = \frac{T_{m1}}{T_f} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \quad \therefore N_f = \frac{2}{3} N_{m1}$$

$$\therefore N_f = \frac{2}{3} N_{m1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (N_a + N_i) = \frac{1}{3} (N_a + N_i) \dots\dots\dots(2-4)$$

(五)、左差速器 m_2 、右差速器 m_1 的關係：

左、右差速器轉速相同，方向相反(圖 6-4)，以負號表示

所以
$$N_{m1} = -N_{m2}$$

由(2-1)、(2-3)知，
$$\frac{1}{2}(N_a + N_i) = -\frac{1}{2} N_i$$

$$N_a = -2N_i \quad \text{即 } N_i = -\frac{1}{2} N_a \dots\dots\dots(2-5)$$

(六)、小結：

由(2-2)、(2-5)知，
$$N_f = \frac{1}{3} N_i = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} N_a\right) = -\frac{1}{6} N_a = -\frac{1}{6} N_R$$

故右車輪 N_R 自轉一圈，方向指標 N_f 將反方向旋轉 $\frac{1}{6}$ 圈。圖 6-2 可以幫助我們理解指南車指針指向的要求。同前述 W ：兩車輪間距， d ：車輪直徑，當指南車車體旋轉 1 圈時，右輪 N_R 自轉 $2W/d$ 圈。所以，為了達到「指南」效果，應取 $W = 3d$ ，則當指南車旋轉一圈，右輪 N_R 將自轉 6 圈，而方向指標 N_f 將反方向旋轉 $6 \times \frac{1}{6} = 1$ 圈，完成指南的工作。

另外，當雙差速指南車右輪固定、左輪轉動時，因為車體對稱，同理可證明上述關係，在此不予討論。

三、探討「單差速」指南車「兩車輪間距」與「車輪直徑」的關係：

討論「單差速」指南車當 $W \neq d$ 時，即「兩車輪間距 W 」不等於「車輪直徑 d 」，我們假設 $W = d \pm n$ ，其中 n 為任意單位長。以下就這二個情況討論。

(一) $W = d + n$ 時，即兩車輪間距為 $d + n$ 個單位長，當車輪間距大於車輪直徑 n 個單位長時，指南車旋轉一圈的路徑長變為 $2\pi(d + n)$ ，而車輪圓周長並沒有改變，仍然為 πd ，那麼當指南車旋轉一圈，車輪便應該旋轉 $2 + \frac{2n}{d}$ 圈，多旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈，這將使得方向指標旋轉過多。

(二) $W = d - n$ 時，兩車輪間距即為 $d - n$ 個單位長，當車輪間距小於車輪直徑 n 單位長時，指南車旋轉一圈的路徑長變為 $2(d - n)\pi$ ，那麼當指南車旋轉一圈，車輪便應該旋轉 $2 - \frac{2n}{d}$ 圈，少旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈，使方向指標旋轉角度不足。

這也是在「實驗 2-2」中，當我們將兩輪的間距加大，指南車旋轉一周時，指針偏差量加大的原因。經過這些推論，使我們對指南車的指向原理有更深一層的認識。

四、探討「雙差速」指南車「兩車輪間距」與「車輪直徑」的關係：

同理，在「雙差速」指南車的情況，當 $W \neq 3d$ 時，即兩車輪間距 W 不等於車輪直徑 $3d$ ，我們假設 $W = 3d \pm n$ ，其中 n 為任意單位長。以下就這二個情況討論。

(一) $W = 3d + n$ 時，即兩車輪間距為 $3d + n$ 個單位長，當車輪間距大於 3 倍車輪直徑 n 個單位長時，指南車旋轉一圈的路徑長變為 $2\pi(3d + n)$ ，而車輪圓周長並沒有改變，仍然為 πd ，那麼當指南車旋轉一圈，車輪便應該旋轉 $6 + \frac{2n}{d}$ 圈，多旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈，這將使得方向指標旋轉過多。

(二) $W = 3d - n$ 時，兩車輪間距即為 $3d - n$ 個單位長，當車輪間距小於 3 倍車輪直徑 n 個單位長時，指南車旋轉一圈的路徑長變為 $2(3d - n)\pi$ ，那麼當指南車旋轉一圈，車輪便應該旋轉 $6 - \frac{2n}{d}$ 圈，少旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈，使方向指標旋轉角度不足。

老師對我們的研究相當讚許，老師也希望我們能夠在定量上做更精確的驗證，因此，實驗的設計驗證是我們下一個研究方向，我們不止在學理的推論上，將指南車旋轉與指針旋轉的關係一般化，這些推論使得我們對古代機械文明的發展充滿景仰，前人的智慧不可小覷啊！

五、關於指南車旋轉時，指針會有些許的誤差，我們歸納如下原因：

- (一) 兩車輪間距不等於車輪直徑。
- (二) 齒輪傳動數量過多，咬合精密度誤差大。
- (三) 使用齒數較多的齒輪，咬合較佳，可降低誤差。例如實際操控時，雙差速指南車的效果優於單差速指南車。

如前所述，當兩車輪間距不等於車輪直徑 d 時，指南車旋轉一周的路徑常將大於或小於 $2\pi d$ ，但車輪的圓周長卻不改變，依然為 πd ，所以車輪將不會旋轉 2 圈，使方向指標旋轉大於或小於 1 圈，造成指針誤差。

齒輪方面，因兩齒輪並非完全緊密咬合，中間會留有空隙，因此當齒輪數越多，空隙也將越多，那麼在車輪旋轉時，並非完全滾動摩擦，當帶動到方向指標上時，使方向指標的旋轉小於 1 圈，造成系統誤差。

若要把誤差縮減到最小，只要將兩車輪間距與車輪直徑不相差過多，並減少齒輪數量，便能減少誤差。但在我們的實際操作中，卻不是一件容易控制的事。

例如：試想以左、右車輪到車軸中心的距離相互之間相差千分之一而言，僅僅是此部份的誤差就會造成指南車每自轉或公轉一周時，方向指標產生大約些許度數的偏向；因此，只要旋轉十幾周，方向指標就會產生相當角度的偏向，此時以肉眼即可明顯辨別其誤差量，而根本不需要任何的測量儀器，會使得我們的實驗效果大打折扣。(註二)

六、實驗量測結果分析：

1. 樂高 NXT 機器人所提供的步進馬達，準確度相當好，它的最小單位為 1 度，恰好提供作為指南車左轉、右轉、前進、後退等模擬運動的驅動力提供者。
2. 單差速指南車逆時針轉動時，實驗中發現即使指南車車輪轉動了 50 圈，方向指標的誤差量仍幾近為 0 度，指向表現的效果最好。
3. 單差速指南車順時針轉動時，實驗中發現：左側輪子每轉動 1 圈，指向指標的誤差約 0.03 度。
4. 單差速指南車前進或後退運行時，實驗中發現：指南車車輪每前進一圈時，指針指向的誤差量約為 ± 0.01 度，這個結果可以提供為此部指南車，爾後車輪每前進一圈（減 0.01 度）、後退一圈（加 0.01 度）方向指標的修正量。
5. 雙差速指南車逆時針轉動時，實驗中發現：右側輪子每轉動 1 圈，指向指標的誤差約 0.02 度。順時針轉動時，左側輪子每轉動 1 圈，指向指標的誤差約 0.01 度，都優於單差速指南車。

柒、結論

- 一、我們成功地構建「單差速指南車」及「雙差速指南車」，並瞭解它們指南針的指向原理。
- 二、在定性上的研究，
 - (一) 單差速指南車：當「車輪直徑」等於「兩車輪之間距」時，指南針的指向將最精準，當「兩車輪之間距」大於「車輪直徑」時，指南針的指向將過大；反之，當「兩車輪之間距」小於「車輪直徑」時，指南針的指向將不足。
 - (二) 雙差速指南車：當「車輪直徑」等於 3 倍「兩車輪之間距」時，指南針的指向將最精準
- 三、在定量上的研究，
 - (一) 單差速指南車：當兩車輪間距大於車輪直徑 n 個單位長時，這將使得方向指標旋轉過多，多旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈；反之，當兩車輪間距小於車輪直徑 n 個單位長時，這將使得方向指標旋轉過少，少旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈。
 - (二) 雙差速指南車：當兩車輪間距大於 3 倍車輪直徑 n 個單位長時，這將使得方向指標旋轉過多，多旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈；反之，當兩車輪間距小於 3 倍車輪直徑 n 個單位長時，這將使得方向指標旋轉過少，少旋轉了 $\frac{2n}{d}$ 圈。
- 四、實驗量測結果對於我們的指南車結構相當肯定。也為理論分析過程，提供有力的實驗驗證，對於各種指南車運動指針的誤差量，我們也可以掌握。雙差速指南車的指向結果優於單差速指南車。
- 五、在運動時，指南車的車輪若發生打滑現象，則會嚴重破壞方向指標的指向恆定性。此種現象發生的程度可能很微小而很難以肉眼觀察到，但在本例中微小程度的打滑現象已足以嚴重地影響方向指標的指向恆定性。

捌、參考資料

1. 中華大學電機系指南車工作站，
參考網址：<http://southpointing.myweb.hinet.net/>
2. 指南車的製作與原理，
參考網址：<http://www.itrc.org.tw/Publication/Newsletter/no68/p12.php>
3. 指南車，參考網址：<http://hk.geocities.com/chinesecompass/display.html>
4. Jin Sato's LEGO MINDSTORMS , NO STARCH Press,p.20~50,chap3 Gear
5. 譯者：蔡順峰博士，樂高(LEGO) 積木與 ROBOLAB 在工程學上之應用，貝登堡國際股份有限公司 機器人學苑發行。
6. PASCO CI-6538 Rotary Motion Sensor 角度感應器操作手冊
7. 蔣君宏著，機構學，國立編譯館出版，p.620~630，民國 69 年。
8. 楊明恭、廖學正著，機件原理(II)，東大圖書公司出版，p.42~75，民國 95 年。

【評語】 040806 樂高機器人模擬「指南車」的應用

指南車之原理與基本組合之示範均頗精確，顯見研究小組之用心；惟對於創新或實用，諸如指南車在行動時各狀況之模擬，加以探討將可有助更深入之瞭解。