中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040421

Pedal Curve 的切線作圖

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 戴維佑	蕭健忠
高二 蔡宗翰	
高二 顏廷仲	

關鍵詞：pedal curve　plane curve　tangent line

Pedal Curve 的切線作圖

一、摘要：

設 Γ 為一平面曲線而 P 為一定點，自 P 向 Γ 所有的切線作對稱點，則所有對稱點所成的圖形 Γ_1 稱為曲線 Γ 對定點 P 的切線對稱作圖，Γ_1 對定點 P 的切線對稱作圖 Γ_2 稱為曲線 Γ 對定點 P 的 2-th 切線對稱作圖，Γ_2 對定點 P 的切線對稱作圖 Γ_3 稱為曲線 Γ 對定點 P 的 3-th 切線對稱作圖 ,…… 。

以下是本文主要的結果：

結論 A：當 Γ 為一圓形而 P 為圓上一點時，計算其 n–th 切線對稱作圖 的方程式。

結論 B：當 Γ 為任意平滑的參數曲線而 P 為任意一點時，Γ 的切線對稱作圖的切線 性質。

結論 C：當 Γ 為任意平滑的參數曲線而 P 為(0,0)時，計算其 n–th 切線對稱作圖 的方程式。

summary：

Given a plane curve Γ and *a* fixed point P, the locus of the reflection of P about the tangent to the curve Γ is called the reflection to tangent line of Γ with respect to P. We denote Γ_1 as the reflection to tangent line of Γ with respect to P, Γ_2 as the reflection to tangent line of Γ_1 with respect to P, Γ_3 as the reflection to tangent line of Γ_2 with respect to P, and so on, we call Γ_n the n-th reflection to tangent line of Γ with respect to P.

If Γ is a circle, and P is *a* point on the circle, we got the parametric equation of the n–th reflection to tangent line of Γ with respect to P. And, for any parametric plane curve Γ; we got the method to draw the tangent of the reflection to tangent line of Γ.

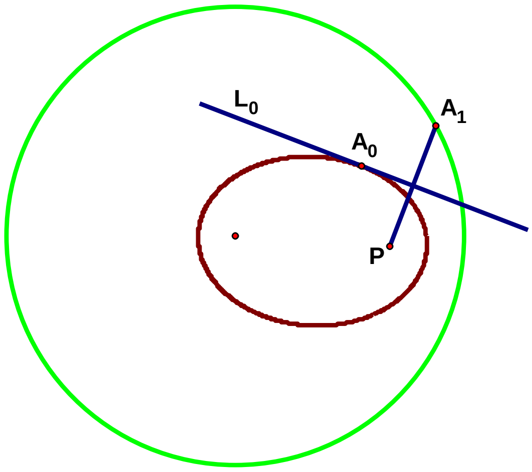
二、內文：

(一)、前言：

1. 研究動機：

2006 年 3 月的某一天，看見了哥哥在用 GSP 在畫橢圓，其中有一個性質：

「設 P 是橢圓的焦點，L_0 是橢圓在 A_0 的切線，A_1 是 P 點關於 L_0 的對稱點，當 A_0 在橢圓上繞一圈，A_1 的軌跡為一個圓。」



我們覺得很有趣，想知道對於其他的圖形，A_1 的軌跡圖形是什麼，在好奇心所驅使之下，便開始這次研究。

2. 研究目的：

設Γ為一曲線而 P 為一定點，自 P 向Γ的所有切線作對稱點，則所有對稱點所成的圖形 Γ_1 稱為曲線Γ對定點 P 的**切線對稱作圖**，Γ_1 對定點 P 的切線對稱作圖 Γ_2 稱為曲線Γ對定點 P 的 2-th 切線對稱作圖，Γ_2 對定點 P 的切線對稱作圖 Γ_3 稱為曲線Γ對定點 P 的 3-th 切線對稱作圖，……。取名切線對稱作圖的原因是：**它是Γ對定點 P 的 pedal curve （垂足曲線），以 P 為中心，伸長 2 倍的圖形。**

利用 GSP 繪圖軟體作圖，我們做出很多漂亮的切線對稱作圖，也觀察到圓形的 n–th 切線對稱作圖有些規則，經由辛苦的計算，證明我們的猜想是正確的。以下是主要的結果：

結論 A：當Γ為一圓形而 P 為圓上一點時，計算其 n–th 切線對稱作圖的方程式。

結論 B：當Γ為任意平滑的參數曲線而 P 為任意一點時，Γ的切線對稱作圖的切線性質。（研究過程(三)）

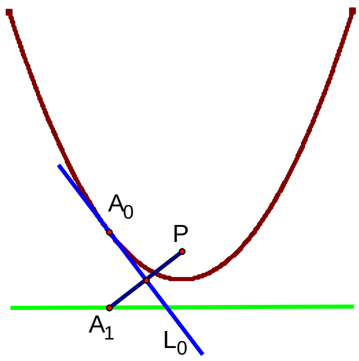
結論 C：當Γ為任意平滑的參數曲線而 P 為(0,0)時，計算其 n–th 切線對稱作圖的方程式。（研究過程(三)）

(二)研究方法與過程

1. 計算一些例子：(Γ_1的圖形以綠色表示)

(1) Γ：拋物線 $x^2=4y$、P 為拋物線焦點(0,1)

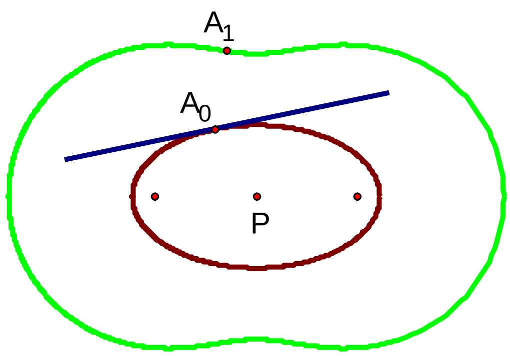
$\Rightarrow\Gamma_1$：的軌跡方程式為：$y=-1$，即拋物線Γ之準線。



(2) Γ：橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$、P 為橢圓中心(0,0)

$\Rightarrow\Gamma_1$：$(x^2+y^2)^2=4b^2y^2+4a^2x^2$，如右圖。

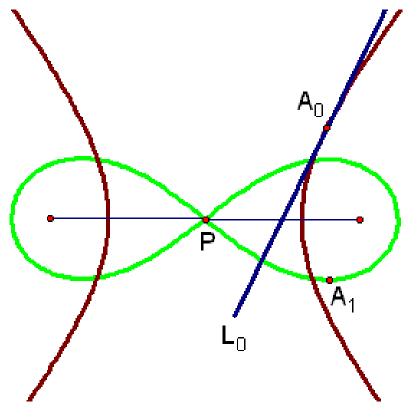
[極坐標方程式：$r^2=4a^2\cos^2\theta+4b^2\sin^2\theta$]



(3) Γ：双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$、P 為双曲線中心(0,0)

$\Rightarrow\Gamma_1$：$(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2-b^2y^2)$，如右圖。

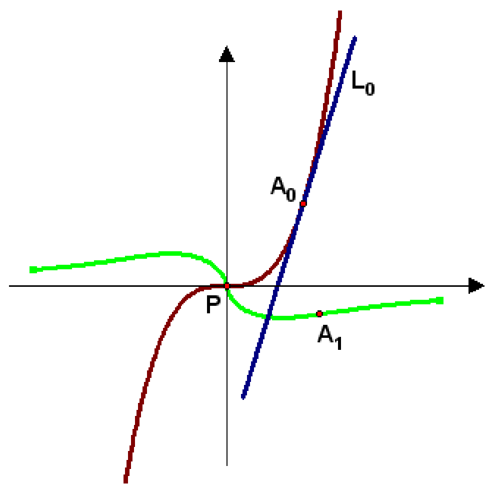
[極坐標方程式：$r^2=4a^2\cos^2\theta-4b^2\sin^2\theta$]



(4) Γ：三次函數 $y=x^3$、P 為(0,0)：

$\Rightarrow\Gamma_1$：$27x^4y^2+54x^2y^4+27y^6+16x^3y=0$，

如右圖。[極坐標方程式：$r^2=\dfrac{-16\cos^3\theta}{27\sin\theta}$]

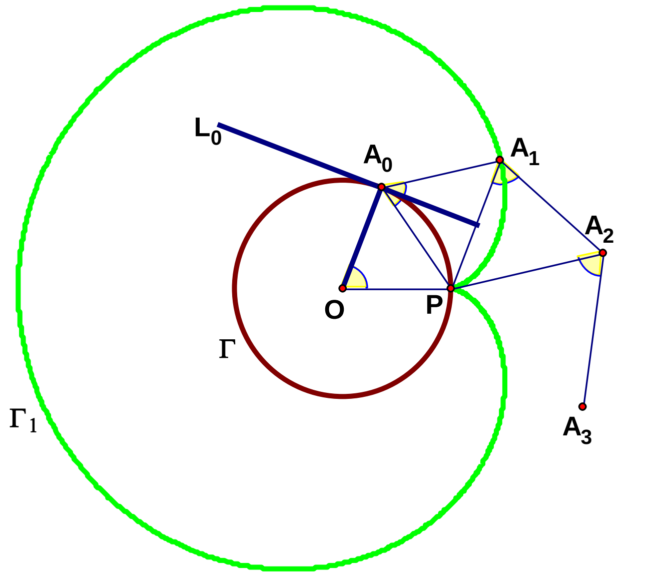


2. P 點不變的 n-th 切線對稱作圖（以圓為例，P 是圓上一點）

令 Γ：$x^2+y^2=1$、$P(1,0)$，$A_0(\cos\theta,\sin\theta)$為 Γ 上的動點，Γ 在 A_0 的切線為

$$L_0：\cos\theta x+\sin\theta\ y=1。$$

設 P 點關於 L_0 的對稱點為 $A_1(x_1,y_1)$，則有向角$\angle PA_0A_1=\angle POA_0=\theta$（弦切角性質）。以 A_1 為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角，所得的點設為 $A_2(x_2,y_2)$，以 A_2 為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角，所得的點設為 $A_3(x_3,y_3)$，依此類推，以 A_i 為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角，所得的點設為 $A_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$。並且假設 A_n 的軌跡圖形為 Γ_n。



求 Γ_n 的參數式（性質 1），並證明 $\overline{PA_n}$ 的中垂線即為曲線 Γ_{n-1} 在 A_{n-1} 處的切線（性質 2）

引理： $\begin{cases} x_n=\cos\theta+x_{n-1}(1-\cos\theta)+y_{n-1}\sin\theta \\ y_n=\sin\theta-x_{n-1}\sin\theta+y_{n-1}(1-\cos\theta) \end{cases}$ **，$n=1,2,3,\ldots$，其中 $x_0=\cos\theta$，$y_0=\sin\theta$ 。**

Proof：令 $z=(x_n-x_{n-1})+(y_n-y_{n-1})i$，$w=(1-x_{n-1})-y_{n-1}i$

$$\Rightarrow z=w\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow (x_n-x_{n-1})+(y_n-y_{n-1})i=[1-x_{n-1}-y_{n-1}i][\cos\theta+i\sin\theta]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n-x_{n-1}=(1-x_{n-1})\cos\theta+y_{n-1}\sin\theta \\ y_n-y_{n-1}=\sin\theta(1-x_{n-1})-\cos\theta\, y_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n=\cos\theta+x_{n-1}(1-\cos\theta)+y_{n-1}\sin\theta \\ y_n=\sin\theta-x_{n-1}\sin\theta+y_{n-1}(1-\cos\theta) \end{cases}，得證。$$

性質 1： $\begin{cases} x_n = C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + C_3^{n+1}\cos 3\theta - \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta \\ y_n = C_1^{n+1}\sin\theta - C_2^{n+1}\sin 2\theta + C_3^{n+1}\sin 3\theta - \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta \end{cases}$

Proof：

(1)當 $n = 1$ 時：

由引理：$\begin{cases} x_1 = \cos\theta + x_0(1-\cos\theta) + y_0\sin\theta = \cos\theta + \cos\theta(1-\cos\theta) + \sin\theta\sin\theta \\ y_1 = \sin\theta - x_0\sin\theta + y_0(1-\cos\theta) = \sin\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin\theta(1-\cos\theta) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y_1 = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$，即 $n = 1$ 時成立。

(2) 設 $n-1$時成立 .

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \cos\theta - x_{n-1}\cos\theta + y_{n-1}\sin\theta \\ &= (C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta - \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta) + \cos\theta \\ &\quad - (C_1^n\cos^2\theta - C_2^n\cos 2\theta\cos\theta + C_3^n\cos 3\theta\cos\theta - \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta\cos\theta) \\ &\quad + (C_1^n\sin^2\theta - C_2^n\sin 2\theta\sin\theta + C_3^n\sin 3\theta\sin\theta - \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\sin n\theta\sin\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta + \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta) + \cos\theta \\ &\quad - \left(C_1^n\frac{1+\cos 2\theta}{2} - C_2^n\frac{\cos 3\theta + \cos\theta}{2} + C_3^n\frac{\cos 4\theta + \cos 2\theta}{2} - \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\frac{\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta}{2}\right) \\ &\quad + \left(C_1^n\frac{1-\cos 2\theta}{2} - C_2^n\frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{2} + C_3^n\frac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{2} - \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta + \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta) + \cos\theta \\ &\quad - (C_1^n\cos 2\theta - C_2^n\cos 3\theta + C_3^n\cos 4\theta + \dots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos(n+1)\theta) \end{aligned}$$

又由巴斯卡定理：$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$

$$\begin{aligned} &= C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + C_3^{n+1}\cos 3\theta - C_4^{n+1}\cos 4\theta + \\ &\quad + (-1)^{n-1}C_n^{n+1}\cos n\theta - (-1)^n C_n^n\cos(n+1)\theta \\ &= C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + C_3^{n+1}\cos 3\theta - C_4^{n+1}\cos 4\theta + \dots \\ &\quad - (-1)^n C_n^{n+1}\cos n\theta + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta \end{aligned}$$

y_n同理可證

由(1)(2)，得證。

性質 2：$\overline{PA_n}$ 的中垂線，即為曲線 Γ_{n-1} 在 A_{n-1} 處的切線 L_{n-1}, $n=1,2,3,\ldots\ldots$。

Proof：設直線 PA_n 的斜率為 $m_{\overline{PA_n}}$ ，直線 L_{n-1} 的斜率為 $m_{L_{n-1}}$，只要證明 $m_{\overline{PA_n}}\times m_{L_{n-1}}=-1$。

(1)當 n 是奇數：

$$\text{由}A_n:\begin{cases}x_n=C_1^{n+1}\cos\theta-C_2^{n+1}\cos2\theta+\ldots\ldots-C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta\\ y_n=C_1^{n+1}\sin\theta-C_2^{n+1}\sin2\theta+\ldots\ldots-C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta\end{cases},\quad P(1,0),$$

$$m_{\overline{PA_n}}=\frac{y_n}{x_n-1}=\frac{C_1^{n+1}\sin\theta-C_2^{n+1}\sin2\theta+\ldots\ldots-C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}\cos\theta-C_2^{n+1}\cos2\theta+\ldots\ldots-C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta-1}$$

又因為 $C_r^n=C_{n-r}^n$，所以經過化簡可得

$$m_{\overline{PA_n}}=\frac{C_1^{n+1}(\sin\theta+\sin n\theta)-C_2^{n+1}(\sin2\theta+\sin(n-1)\theta)+\ldots\ldots-\sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}(\cos\theta+\cos n\theta)-C_2^{n+1}(\cos2\theta+\sin(n-1)\theta)-\cos(n+1)\theta-1}$$

$$=\frac{C_1^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-1)\theta}{2})-C_2^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-3)\theta}{2})+\ldots-2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{C_1^{n+1}(2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-1)\theta}{2})-C_2^{n+1}(2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-3)\theta}{2})+\ldots-2\cos^2\frac{(n+1)\theta}{2}}$$

$$=\tan\frac{(n+1)}{2}\theta$$

$$\text{由}\Gamma_{n-1}:\begin{cases}x_{n-1}=C_1^n\cos\theta-C_2^n\cos2\theta+C_3^n\cos3\theta-\ldots.+C_n^n\cos n\theta\\ y_{n-1}=C_1^n\sin\theta-C_2^n\sin2\theta+C_3^n\sin3\theta-\ldots.+C_n^n\sin n\theta\end{cases}$$

$$m_{L_{n-1}}=\frac{\frac{dy_{n-1}}{d\theta}}{\frac{dx_{n-1}}{d\theta}}=\frac{C_1^n\cos\theta-2\cdot C_2^n\cos2\theta+3\cdot C_3^n\cos3\theta+\ldots.\ n\cdot C_n^n}{-C_1^n\sin\theta+2\cdot C_2^n\sin2\theta-3\cdot C_3^n\sin3\theta-\ldots.\ n\cdot C_n^n}$$

$$=\frac{n\cdot C_0^{n-1}\cos\theta-n\cdot C_1^{n-1}\cos2\theta+n\cdot C_2^{n-1}\cos3\theta-\ldots.+n\cdot C_{n-1}^{n-1}\cos n\theta}{-n\cdot C_0^{n-1}\sin\theta+n\cdot C_1^{n-1}\sin2\theta-n\cdot C_2^{n-1}\sin3\theta+\ldots.-n\cdot C_{n-1}^{n-1}\sin n\theta}$$

$$=-\frac{C_0^{n-1}(\cos\theta+\cos n\theta)-C_1^{n-1}(\cos2\theta+\cos(n-1)\theta)+\ldots.+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{C_0^{n-1}(\sin\theta+\sin n\theta)-C_1^{n-1}(\sin2\theta+\sin(n-1)\theta)+\ldots.+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\sin\frac{n+1}{2}\theta}$$

$$=-\frac{C_0^{n-1}(2\cos\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-1}{2}\theta)-C_1^{n-1}(2\cos\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-3}{2}\theta)+\ldots.+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{C_0^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-1}{2}\theta)-C_1^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-3}{2}\theta)+\ldots.+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\sin\frac{n+1}{2}\theta}$$

$$=-\cot\frac{n+1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow m_{\overline{PA_n}}\times m_{L_{n-1}}=-1$$ 。

(2)當 n 是偶數：

$$由A_n:\begin{cases} x_n = C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + \dots + C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta \\ y_n = C_1^{n+1}\sin\theta - C_2^{n+1}\sin 2\theta + \dots + C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta \end{cases}$$

$$m_{\overline{PA_n}} = \frac{y_n}{x_n - 1} = \frac{C_1^{n+1}\sin\theta - C_2^{n+1}\sin 2\theta + \dots + C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + \dots + C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta - 1}$$

$$= \frac{C_1^{n+1}(\sin\theta - \sin n\theta) - C_2^{n+1}(\sin 2\theta - \sin(n-1)\theta) + \dots + \sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}(\cos\theta - \cos n\theta) - C_2^{n+1}(\cos 2\theta - \cos(n-1)\theta) + \dots + \cos(n+1)\theta - 1}$$

$$= \frac{C_1^{n+1}(-2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-1)\theta}{2}) - C_2^{n+1}(-2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-3)\theta}{2}) + \dots + 2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{C_1^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-1)\theta}{2}) - C_2^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-3)\theta}{2}) + \dots - 2\sin^2\frac{n+1}{2}\theta}$$

$$= -\cot\frac{(n+1)\theta}{2}$$

$$由\Gamma_{n-1}:\begin{cases} x_{n-1} = C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta - \dots - C_n^n\cos n\theta \\ y_{n-1} = C_1^n\sin\theta - C_2^n\sin 2\theta + C_3^n\sin 3\theta - \dots - C_n^n\sin n\theta \end{cases}$$

$$m_{L_{n-1}} = \frac{\frac{dy_{n-1}}{d\theta}}{\frac{dx_{n-1}}{d\theta}} = \frac{C_1^n\cos\theta - 2\cdot C_2^n\cos 2\theta + 3\cdot C_3^n\cos 3\theta - \dots - n\cdot C_n^n\cos n\theta}{-C_1^n\sin\theta + 2\cdot C_2^n\sin 2\theta - 3\cdot C_3^n\sin 3\theta + \dots + n\cdot C_n^n\sin n\theta}$$

$$= \frac{n\cdot C_0^{n-1}\cos\theta - n\cdot C_1^{n-1}\cos 2\theta + n\cdot C_2^{n-1}\cos 3\theta - \dots - n\cdot C_{n-1}^{n-1}\cos n\theta}{-n\cdot C_0^{n-1}\sin\theta + n\cdot C_1^{n-1}\sin 2\theta - n\cdot C_2^{n-1}\sin 3\theta + \dots + n\cdot C_{n-1}^{n-1}\sin n\theta}$$

$$= -\frac{C_0^{n-1}(\cos\theta - \cos n\theta) - C_1^{n-1}(\cos 2\theta - \cos(n-1)\theta) + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(\cos\frac{n}{2}\theta - \cos(\frac{n}{2}+1)\theta)}{C_0^{n-1}(\sin\theta - \sin n\theta) - C_1^{n-1}(\sin 2\theta - \sin(n-1)\theta) + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(\sin\frac{n}{2}\theta - \sin(\frac{n}{2}+1)\theta)}$$

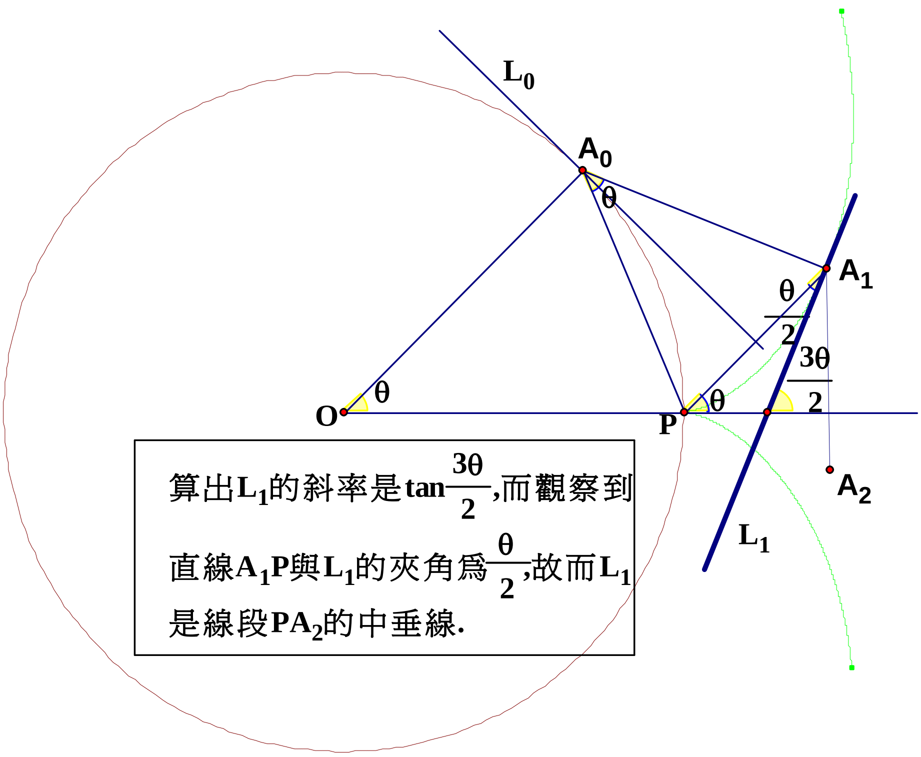
$$= -\frac{C_0^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-1}{2}\theta) - C_1^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-3}{2}\theta) + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta)}{C_0^{n-1}(-2\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-1}{2}\theta) - C_1^{n-1}(-2\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-3}{2}\theta) + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(-2\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta)}$$

$$= \tan\frac{n+1}{2}\theta$$

$\Rightarrow m_{\overline{PA_n}} \times m_{L_{n-1}} = -1$。 由(1)(2)，得證。

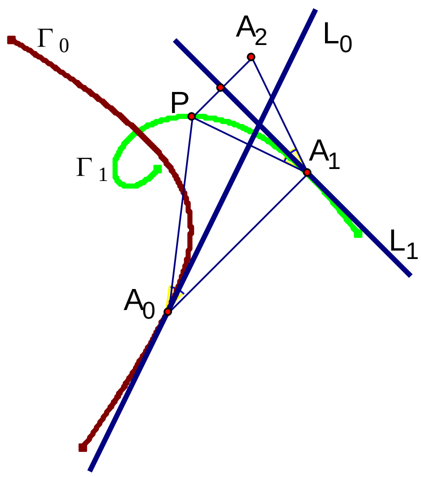
結論 A：由性質 1 與性質 2 得知，Γ_1是Γ_0關於 P 點的切線對稱作圖，Γ_2是Γ_1關於 P 點的切線對稱作圖，Γ_3是Γ_2關於 P 點的切線對稱作圖，...,而Γ_n是Γ_0關於 P 點的 n-th 切線對稱作圖。

性質 2 是本篇文章的關鍵點，經由切線斜率的規律，我們發現，只要以 A_1 為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角即得 A_2,如圖



而以 A_2 為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角即得 A_3，進而猜測一路到底都是對的，這個觀察也使得切線對稱作圖的切線作圖變得容易。我們試著將圓形推廣到一般平面參數曲線，也得到一致的結果。

3. 推廣到一般平面參數曲線



令 $A_0(x_0(t), y_0(t))$是曲線 Γ_0 之上的動點，P 為(0 , 0)，Γ_0 在 A_0 的切線為 L_0。設 P 點關於 L_0 的對稱點為 $A_1(x_1, y_1)$, A_1 的軌跡圖形為 Γ_1，Γ_1 在 A_1 的切線為 L_1。令有向角 $\theta=\angle PA_0A_1$，以 A_1 為旋轉中心，將 P 點旋轉 θ角，所得的點設為 $A_2(x_2, y_2)$。為了證明的方便，我們將參數 t 變換為有向角θ，即 $A_0(x_0(t), y_0(t)) = A_0(x_0(\theta), y_0(\theta))$。

利用複數極式相乘的旋轉意義，求 A_1、A_2 的坐標：

得 $\begin{cases} x_1=(1-\cos\theta)x_0+y_0\sin\theta \\ y_1=-\sin\theta\, x_0+(1-\cos\theta)y_0 \end{cases}$、$\begin{cases} x_2=(1-\cos\theta)x_1+\sin\theta\, y_1 \\ y_2=-\sin\theta\, x_1+(1-\cos\theta)y_1 \end{cases}$,

將 x_1、y_1 代入化簡 $\Rightarrow \begin{cases} x_2=-2(1-\cos\theta)(\cos\theta\, x_0-\sin\theta\, y_0) \\ y_2=-2(1-\cos\theta)(\sin\theta\, x_0+\cos\theta\, y_0) \end{cases}$

結論 B：$\overline{PA_2}$ 的中垂線，即為曲線Γ_1在 A_1 處的切線 L_1。

Proof：Step 1：由 $\overline{PA_1} \perp L_0 \Rightarrow \dfrac{y_0'}{x_0'} \cdot \dfrac{y_1}{x_1} = -1 \Rightarrow x_1 x_0' + y_1 y_0' = 0$，其中 $x_0' = \dfrac{dx_0}{d\theta}, y_0' = \dfrac{dy_0}{d\theta}$。

Step 2：$\begin{cases} x_1' = \sin\theta\, x_0 + \cos\theta\, y_0 + (1-\cos\theta)x_0' + \sin\theta\, y_0' \\ y_1' = -\cos\theta\, x_0 + \sin\theta\, x_0 - \sin\theta\, x_0' + (1-\cos\theta)y_0' \end{cases}$

Step 3：

$$\begin{aligned} & x_2 x_1' + y_2 y_1' \\ &= -2(1-\cos\theta)(\cos\theta\, x_0 - \sin\theta\, y_0)[\sin\theta\, x_0 + \cos\theta\, y_0 + (1-\cos\theta)x_0' + \sin\theta\, y_0'] \\ &\quad -2(1-\cos\theta)(\sin\theta\, x_0 + \cos\theta\, y_0)[-\cos\theta\, x_0 + \sin\theta\, x_0 - \sin\theta\, x_0' + (1-\cos\theta)y_0'] \\ &= -2(1-\cos\theta)\{[(1-\cos\theta)x_0 + \sin\theta\, y_0]x_0' + [-\sin\theta\, x_0 + (1-\cos\theta)y_0]y_0'\} \\ &= -2(1-\cos\theta)[x_1 x_0' + y_1 y_0'] \\ &= 0, \text{由 Step 1.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{y_2}{x_2} \cdot \dfrac{y_1'}{x_1'} = -1 \Rightarrow \overline{PA_2} \perp L_1$，得證。

進一步化簡$\begin{cases} x_2 = -2(1-\cos\theta)(\cos\theta\, x_0 - \sin\theta\, y_0) \\ y_2 = -2(1-\cos\theta)(\sin\theta\, x_0 + \cos\theta\, y_0) \end{cases}$得

$$\begin{cases} x_2 = (-2\cos\theta + 2\cos^2\theta)x_0 + (2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta)y_0 = (1 - 2\cos\theta + \cos 2\theta)x_0 + (2\sin\theta - \sin 2\theta)y_0 \\ y_2 = -(2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta)\, x_0 + (-2\cos\theta + 2\cos^2\theta)\, y_0 = -(2\sin\theta - \sin 2\theta)x_0 + (1 - 2\cos\theta + \cos 2\theta)y_0 \end{cases}$$

故推測參數曲線$\Gamma_0(x_0(\theta), y_0(\theta))$關於 P(0 , 0)點的 n-th 切線對稱作圖$\Gamma_n(x_n(\theta), y_n(\theta))$滿足：

結論 C：
$$\begin{cases} x_n = [\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k\theta)]x_0 - [\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k\theta)]y_0 \\ y_n = [\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k\theta)]x_0 + [\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k\theta)]y_0 \end{cases}$$

Proof：設 n 時成立： 由$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\cos\theta)x_n + \sin\theta\, y_n \\ y_{n+1} = -\sin\theta\, x_n + (1-\cos\theta)y_n \end{cases}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\cos\theta)x_n + \sin\theta\, y_n \\ &= (1-\cos\theta)\{[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k\theta)]x_0 - [\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k\theta)]y_0\} \\ &\quad + \sin\theta\{[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k\theta)]x_0 + [\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k\theta)]y_0\} \\ &= \{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k\theta) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n[\cos\theta\cos(k\theta) - \sin\theta\sin(k\theta)]\}x_0 \\ &\quad + \{-[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k\theta)] + [\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_k^n[\cos\theta\sin(k\theta) + \sin\theta\cos(k\theta)]\}y_0 \end{aligned}$$

$$=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k\theta)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k+1)\theta]x_0$$

$$+[-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k\theta)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k+1)\theta]y_0$$

$$=\{[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \cos(k\theta)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} C_{k-1}^n \cos(k\theta)]-(-1)^n \cos(n+1)\theta]\}x_0$$

$$+\{[-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n \sin(k\theta)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} C_{k-1}^n \sin(k\theta)]+(-1)^n \sin(n+1)\theta]\}y_0$$

$$=\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[C_k^n+C_{k-1}^n]\cos(k\theta)-(-1)^n\cos(n+1)\theta\}x_0$$

$$+\{-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[C_k^n+C_{k-1}^n]\sin(k\theta)+(-1)^n\sin(n+1)\theta\}y_0$$

$$=\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{n+1}\cos(k\theta)-(-1)^n\cos(n+1)\theta\}x_0$$

$$+\{-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{n+1}\sin(k\theta)+(-1)^n\sin(n+1)\theta\}y_0$$

$$=[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_k^{n+1}\cos(k\theta)]x_0-[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_k^{n+1}\sin(k\theta)]y_0$$

y_{n+1} 同理可證。

(三)研究結果與討論

結論 A：令 Γ ：$x^2+y^2=1$、P(1,0)，曲線 Γ 對定點 P 的 n–th 切線對稱作圖 的方程式為

$$\begin{cases} x=C_1^{n+1}\cos\theta-C_2^{n+1}\cos2\theta+C_3^{n+1}\cos3\theta-....+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta \\ y=C_1^{n+1}\sin\theta-C_2^{n+1}\sin2\theta+C_3^{n+1}\sin3\theta-....+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta \end{cases}$$ 。

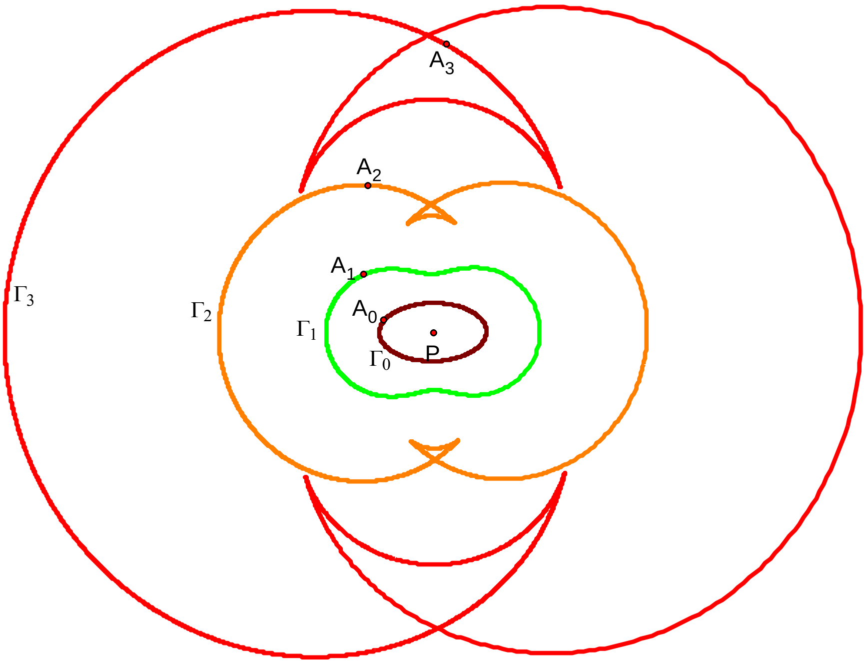
結論 B：令 A_0 是曲線 Γ_0 之上的動點 ，P 為(0 , 0)， Γ_0 在 A_0 的切線為 L。設 P 點關於 L 的對稱點為 A_1 , A_1 的軌跡圖形為 Γ_1。令有向角 $\theta=\angle PA_0A_1$, 以 A_1 為旋轉中心 ，將 P 點旋轉 θ 角 ，所得的點設為 A_2，則 $\overline{PA_2}$ 的中垂線 ，即為曲線 Γ_1 在 A_1 處的切線 L_1 。

結論 C：如結論 B，參數曲線 $\Gamma_0(x_0(\theta), y_0(\theta))$關於 P(0 , 0)點的 n-th 切線對稱作圖 $\Gamma_n(x_n(\theta), y_n(\theta))$方程式為

$$\begin{cases} x_n=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]x_0-[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]y_0 \\ y_n=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]x_0+[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]y_0 \end{cases}$$

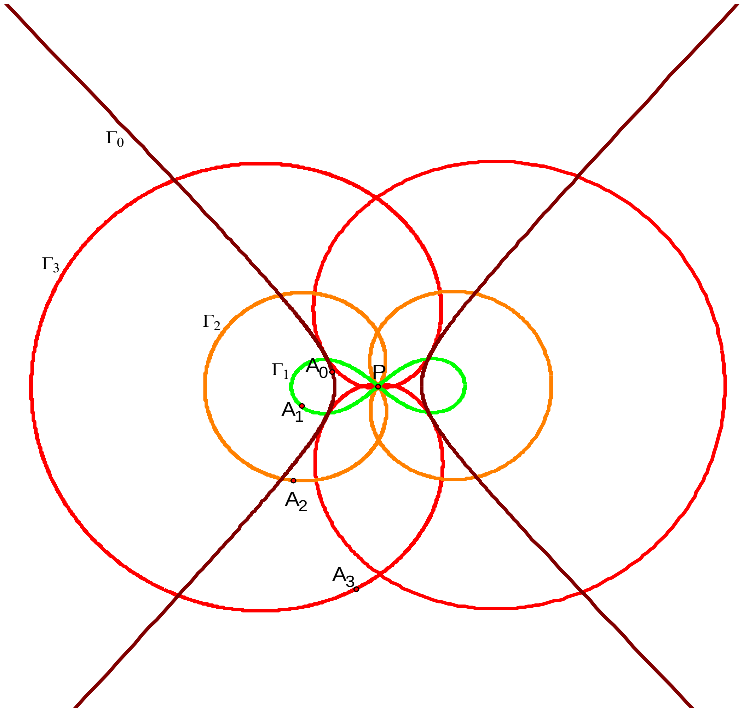
(四)結論與應用：利用結論 B 作 Γ 的 n-th 切線對稱作圖 （GSP 圖形）

(1) Γ：橢圓、P 為橢圓中心

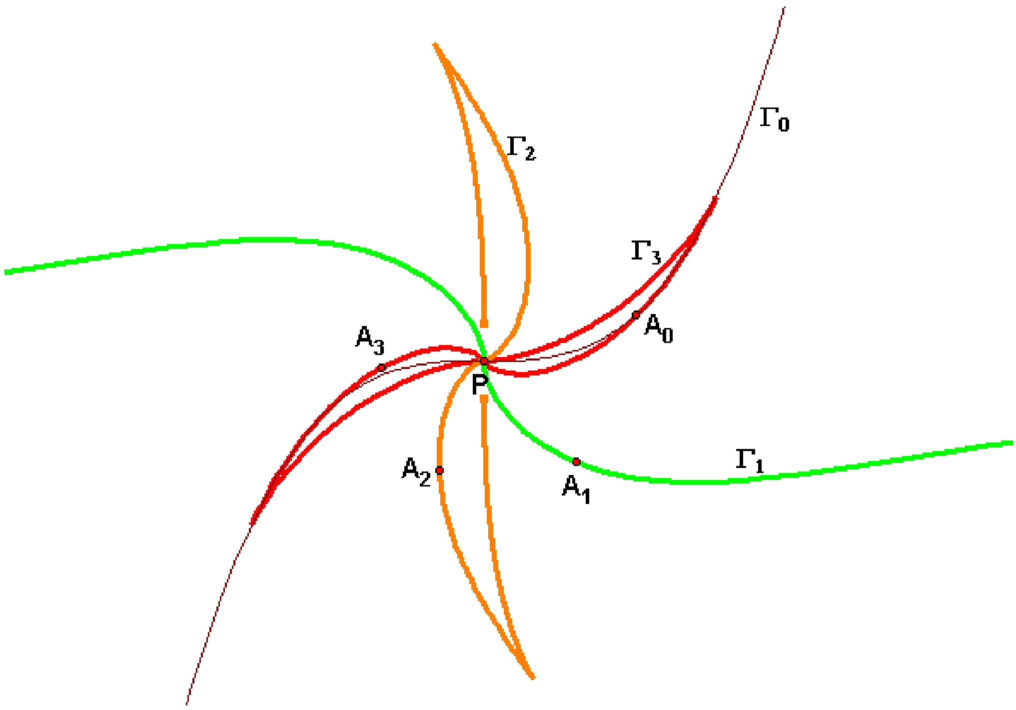


(2) Γ_0：双曲線、

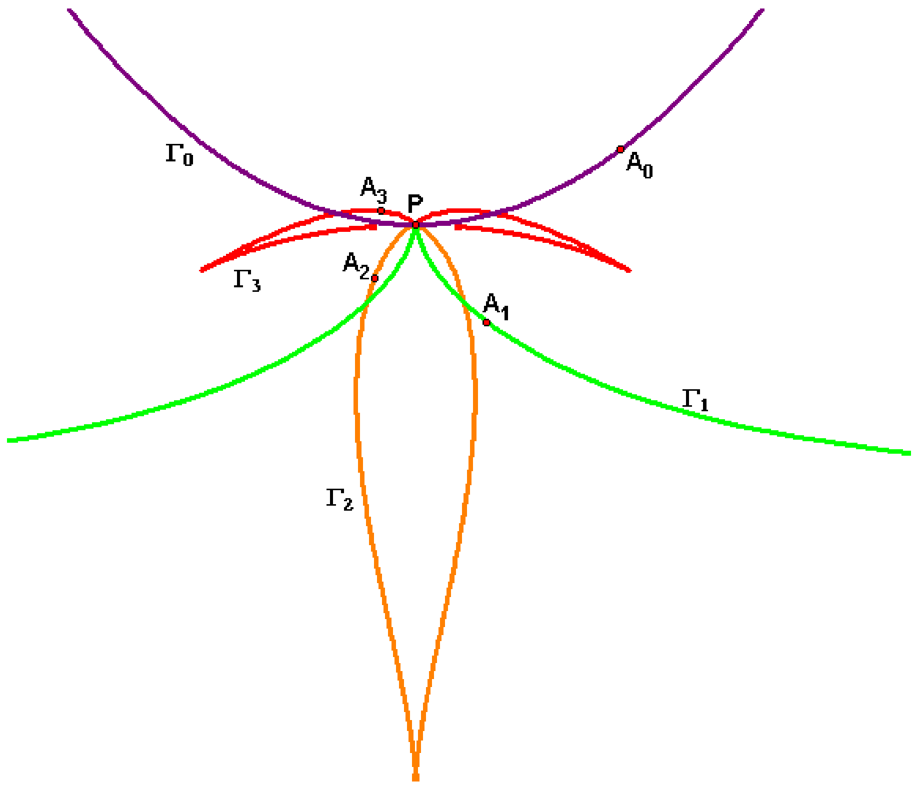
P 為双曲線中心



(3) Γ_0：$y = x^3$、P 為(0 , 0)



(4) Γ_0：$y = x^2$、P 為(0 , 0)



(五)參考資料：

【1】http://en.wikipedia.org/wiki/Pedal_curve

【2】趙文敏： <<等角螺線及其他 >>科學月刊第二十卷第九期、第十期

【3】趙文敏： <<心臟線 >> 科學月刊第二十一卷第五期

【評　語】　　040421　Pedal Curve 的切線作圖

Pedal Curve 基本建立於直觀的幾何作圖，因此該曲線的切線作圖應該沿襲直觀的方法。然而本研究卻倚賴微積分，將原本只需尺規作圖即可完成的步驟混入分析方法，喪失「單純性」的美感。