中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040418

L-轉換

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 林耿任	張淑娟
高二 黃羿涵	王啟聰
高二 楊宗穎	

關鍵詞：九點圓　退化情形　線性迴歸

<u>題目：L-轉換</u>

壹、摘要

「L-轉換」主要以三角形為基準，定義轉換方式為「頂點以其對邊作鏡射」，進而探討鏡射後的結果。

首先以 **GSP** 軟體作圖，初步發現任意三角形經過多次鏡射後會接近正三角形，接著以正三角形作為出發點，探究何種三角形經過變換後會成為正三角形，進而發現只有 **30°-75°-75°**、**60°-60°-60°**、**150°-15°-15°**此三種**等腰三角形**三角形經過一次變換後會形成正三角形。

進一步探討是否所有等腰三角形經過數次變換後皆會成為正三角形？我們利用解析方法證出等腰三角形經過多次鏡射後都會收斂至正三角形或「退化成一直線」。

貳、研究動機

第 **51** 屆國際數學科展中有一作品「**C** 轉換」，其內容主要探索△**ABC** 對其重心 **G** 作對稱所得的新三角形△**A'B'C'**之幾何性質，該文章也得到美國大會一等獎，因此我們想改變其變換方法，探索不同的幾何性質，是以我們擬對邊做變換以探索一全新的幾何問題。

參、研究目的

本研究是探討一個任意三角形的各頂點以其對邊為鏡射軸，所鏡射出來的新三角形為何？

一、探討何種三角形經過鏡射變換後可得正三角形。

二、探討等腰三角形經過數次鏡射變換後可得何種三角形及變換前後三角形的關係。

三、探討何種三角形經過鏡射變換後會退化為一直線。

四、探討任意三角形經過數次鏡射變換後的特性。

肆、研究設備及器材

幾何軟體 **GSP4.03**、**Mathematic 4.0** 版軟體、統計軟體 **SPSS10.0**

伍、研究過程及方法

一、正三角形的前身

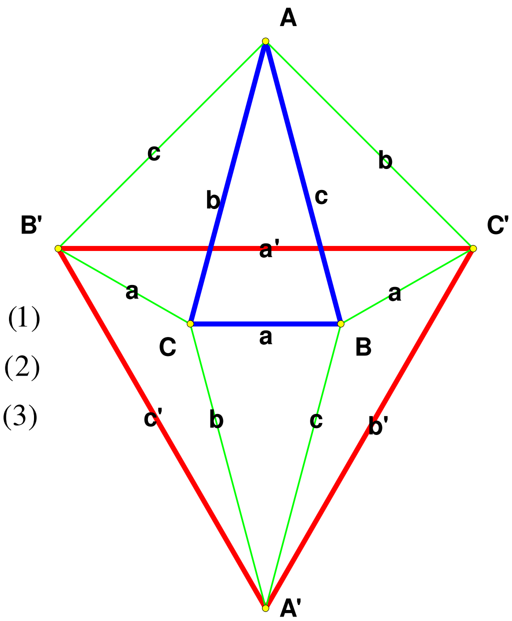
利用 **GSP** 軟體繪圖，我們發現正三角形的前身似乎僅有三個，因此我們利用三角函數以及解析幾何的手法加以驗證並證明。

試証僅有 30°-75°-75°、150°-15°-15°、60°-60°-60°的三角形經過一次鏡射變換後可形成正三角形

《証一》：利用三角函數

令 $\angle BAC$ 爲 α，$\angle ABC$ 爲 β，$\angle ACB$ 爲 γ　$\overline{BC}$ 爲 a，$\overline{AC}$ 爲 b，$\overline{AB}$ 爲 c

$\overline{B'C'}$ 爲 a'，$\overline{A'C'}$ 爲 b'，$\overline{A'B'}$ 爲 c'



由圖可得 $\begin{cases} a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 3\alpha \\ b'^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos 3\beta \\ c'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 3\gamma \end{cases}$

經整理後得 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2ca\cos 3\beta - 2bc\cos 3\alpha \to (1) \\ b^2 - c^2 = 2ab\cos 3\gamma - 2ca\cos 3\beta \to (2) \\ c^2 - b^2 = 2bc\cos 3\alpha - 2ab\cos 3\gamma \to (3) \end{cases}$

1. $a = 2R\sin\alpha$，$b = 2R\sin\beta$，$c = 2R\sin\gamma$

$$4R^2\sin^2\alpha - 4R^2\sin^2\beta$$
$$= 8R^2\sin\alpha\cos 3\beta\sin\gamma - 8R^2\cos 3\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\beta = 2\sin\gamma\left(\sin\alpha\cos 3\beta - \cos 3\alpha\sin\beta\right)$$

$$\Rightarrow \cos^2\beta - \cos^2\alpha = 2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\left(4\cos^3\beta - 3\cos\beta\right)$$
$$-2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)4\sin\alpha\cos^3\beta - 2\sin(\alpha+\beta)4\sin\beta\cos^3\alpha$$
$$-2\sin(\alpha+\beta)3\sin(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow 7\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta)\left(8\sin\alpha\cos^3\beta - 8\sin\beta\cos^3\alpha\right)$$

$$\Rightarrow 7\sin(\alpha-\beta) = 8\left(\sin\alpha\cos^3\beta - \sin\beta\cos^3\alpha\right)$$

2. 令 $\sin(\alpha-\beta) \neq 0$，$\alpha \neq \beta$

$$7\sin(\alpha-\beta)=8(\sin\alpha\cos\beta\cos\beta\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\cos\alpha\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow 7\sin(\alpha-\beta)=8\left(\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\times\frac{1}{2}(\cos2\beta+1)\right)$$

$$-8\left(\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))\times\frac{1}{2}(\cos2\alpha+1)\right)$$

$$\Rightarrow 7\sin(\alpha-\beta)=2\begin{pmatrix}\sin(\alpha+\beta)\cos2\beta+\sin(\alpha-\beta)\cos2\beta+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\ -\sin(\alpha+\beta)\cos2\alpha+\sin(\alpha-\beta)\cos2\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 7\sin(\alpha-\beta)=2\begin{pmatrix}\sin(\alpha+\beta)(\cos2\beta-\cos2\alpha)\\ +\sin(\alpha-\beta)(\cos2\alpha+\cos2\beta)+2\sin(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 7\sin(\alpha-\beta)=2(2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta))$$

$$+2(2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta))+2(2\sin(\alpha-\beta))$$

3. 同除 $\sin(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow \frac{7}{4}=\sin^2(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+1$ $\qquad\Rightarrow \frac{7}{4}=\sin^2\gamma+\cos^2\alpha-\sin^2\beta+1$

$\Rightarrow \frac{3}{4}=\sin^2\gamma+\cos^2\alpha-\sin^2\beta\rightarrow(4)$

同理可得

$\frac{3}{4}=\sin^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2\gamma\rightarrow(5)$

$\frac{3}{4}=\sin^2\beta+\cos^2\gamma-\sin^2\alpha\rightarrow(6)$

4. 由 (4) & (6) 解方程式得

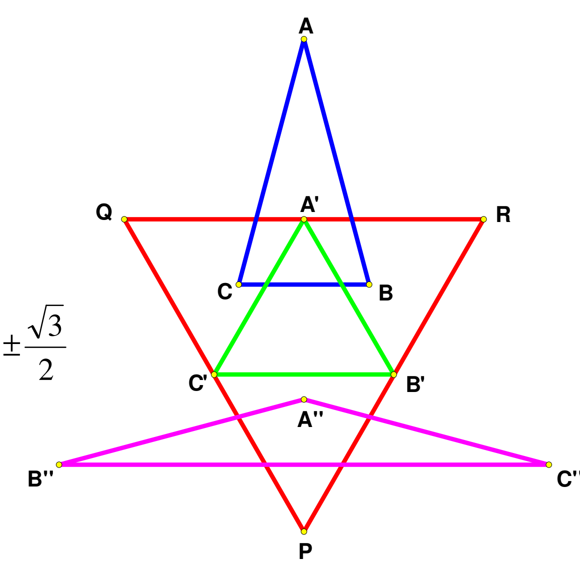
$\frac{3}{2}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1$

$\Rightarrow \frac{3}{2}=2\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \frac{3}{4}=\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha=30^\circ or 150^\circ$

代回 (4) 得 $\sin^2\beta=\sin^2\gamma$

$\therefore \beta=\gamma$ or $\beta=\pi-\gamma$(不合三角形的三角)



故得知正三角形的前身僅有 **30°-75°-75°**、**150°-15°-15°**、**60°-60°-60°**的三角形

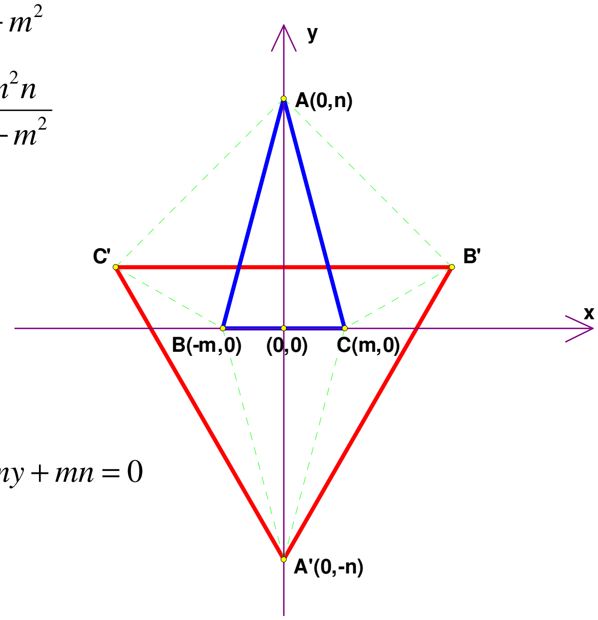
《証二》：利用座標向量

$$\because \overline{AC}=(m,-n)\Rightarrow\begin{cases}x=0+mt\\ y=n-nt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}nx=nmt\\ my=mn-mnt\end{cases}\Rightarrow nx+my-mn=0$$

$$\therefore t=\frac{-(-mn-mn)}{n^2+m^2}=\frac{2mn}{n^2+m^2}$$

$$\therefore B_x'=x_0+2at=-m+2n\frac{2mn}{n^2+m^2}=\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2}$$

$$B_y'=y_0+2bt=0+2\times m\times\frac{2mn}{n^2+m^2}=\frac{4m^2n}{n^2+m^2}$$



$$\therefore B'=\left(\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2},\frac{4m^2n}{n^2+m^2}\right)$$

$$\because \overline{AB}=(-m,-n)\Rightarrow\begin{cases}x=0-mt\\ y=n-nt\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}nx=-nmt\\ my=mn-mnt\end{cases}\Rightarrow nx-my+mn=0$$

$$\therefore t=\frac{(-mn-mn)}{n^2+m^2}=\frac{-2mn}{n^2+m^2}$$

$$\therefore C_x'=x_0+2at=m+2\times n\times\frac{-2mn}{n^2+m^2}=\frac{-3mn^2+m^3}{n^2+m^2}$$

$$C_y'=y_0+2bt=0+2\times(-m)\times\frac{-2mn}{n^2+m^2}=\frac{4m^2n}{n^2+m^2}$$

$$\therefore C'=\left(\frac{-3mn^2+m^3}{n^2+m^2},\frac{4m^2n}{n^2+m^2}\right)$$

$$\because \overline{BC}=(2m,0)\Rightarrow\begin{cases}x=m+2mt\\ y=0-0t\end{cases}\Rightarrow 0x+y-0=0\qquad \therefore t=\frac{-n}{0^2+1^2}=(-n)$$

$$\therefore A_x'=x_0+2at=0$$

$$A_y'=y_0+2bt=n+2\times 1\times(-n)=(-n)$$

$$\therefore A'=(0,-n)=\left(0,\frac{-nm^2-n^3}{n^2+m^2}\right)$$

$\overline{A'C'}=\left(\frac{-3mn^2+m^3}{n^2+m^2},\frac{n^3+5m^2n}{n^2+m^2}\right)$ $\overline{A'B'}=\left(\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2},\frac{n^3+5m^2n}{n^2+m^2}\right)$ $\overline{B'C'}=(m,-n)=\left(\frac{-6mn^2+2m^3}{n^2+m^2},0\right)$

∵正三角形面積＝$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$\therefore \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{-6mn^2+2m^3}{n^2+m^2} & 0\\ \frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2} & \frac{n^3+5m^2n}{n^2+m^2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{-6mn^2+2m^3}{n^2+m^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2\left(-3mn^2+m^3\right)\times\left(n^3+5m^2n\right)}{\left(n^2+m^2\right)^2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\left(-3mn^2+m^3\right)}{\left(n^2+m^2\right)}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{2\left(-3mn^2+m^3\right)\times\left(n^3+5m^2n-\sqrt{3}m^3+3\sqrt{3}mn^2\right)}{\left(n^2+m^2\right)^2}=0$$

(1) $-3mn^2+m^3=0\Rightarrow m\left(m^2-3n^2\right)=0$ （此種解圍不出三角形）

∵若 B(-m,0)，C(m,0)，A(0,n)三點構成△ABC

由兩邊之和大於第三邊 $\left(n^2+m^2\right)+\left(n^2+m^2\right)>4m^2$

但當 $m^2=3n^2$，$n^2>3n^2$ 矛盾，不符合三角形規則 ∴不存在

(2) $n^3+5m^2n-\sqrt{3}m^3+3\sqrt{3}mn^2=0$

$\Rightarrow\left[n+m\left(\sqrt{3}-2\right)\right]\left(n^2+m^2\left(3+2\sqrt{3}\right)+\left(2+2\sqrt{3}\right)mn\right)=0$

$\Rightarrow\left[n+m\left(\sqrt{3}-2\right)\right]\left(n+m\sqrt{3}\right)\left(n+2+m\sqrt{3}\right)=0$

∵ $\tan\theta=\frac{n}{m}$ $\Rightarrow\tan\theta_1=2-\sqrt{3}$，$\tan\theta_2=2+\sqrt{3}$，$\tan\theta_3=-\sqrt{3}$

但 $\tan\theta$ 有可能爲 ΔABC 或 ΔACB 中的函數

所以三角形底角爲 $\theta=15^\circ$、60°、75°

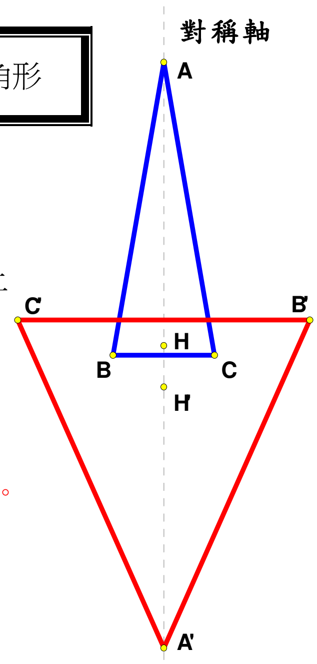
故三角形的角度分別爲 **30°-75°-75°**、**150°-15°-15°**及 **60°-60°-60°**

得正三角形的前身有三種。

二、等腰三角形的變換

(一)

試証等腰三角形經過鏡射變換後的新三角形也必爲等腰三角形



《証明》:

已知 ΔABC 爲等腰三角形

$\because$ ΔABC 以 $\overleftrightarrow{AA'}$ 爲鏡射軸 $\therefore$ 鏡射後得 A' 也在 $\overleftrightarrow{AA'}$ 上

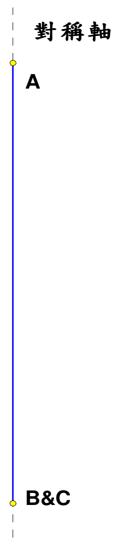
且 B 到 $\overline{AC}$ 的距離等於 C 到 $\overline{AB}$ 的距離，

則可推知新形成的 $\Delta A'B'C'$ 也必爲等腰三角形。

【註】: **1.**原三角形與新三角形的垂心會位於三角形對稱軸上。

2.H 與 **H'**分別爲△**ABC** 與△**A'B'C'**的垂心。

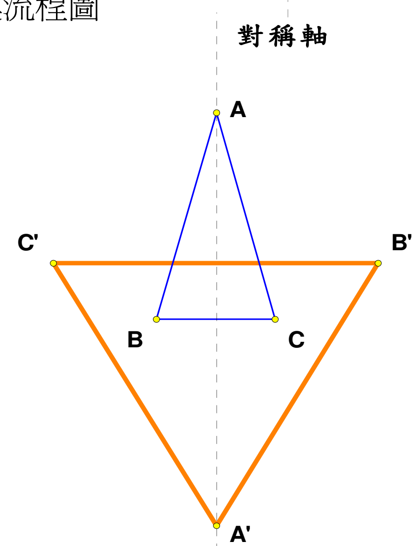
(二) 原等腰三角形頂角與新等腰三角形頂角的變換流程圖



$\Longrightarrow$

原三角形頂角角度增加到 30°

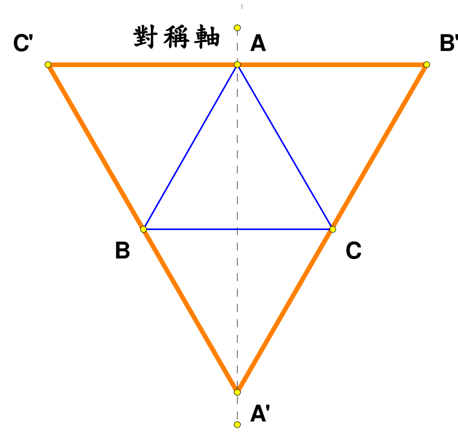
新三角形頂角角度增加到 60°



$\Longrightarrow$

原三角形頂角角度增加到 60°

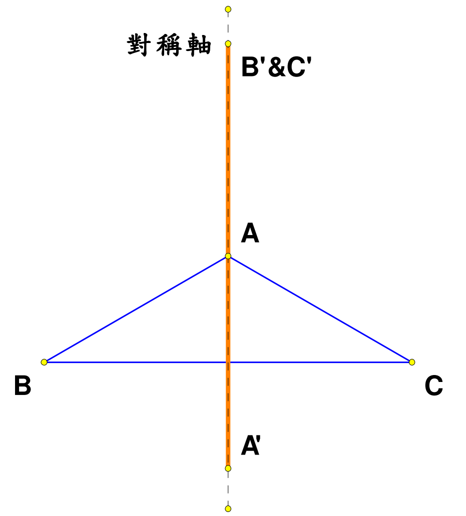
新三角形頂角角度先減後增到 60°



$\Rightarrow$

原三角形頂角角度增加到 120°

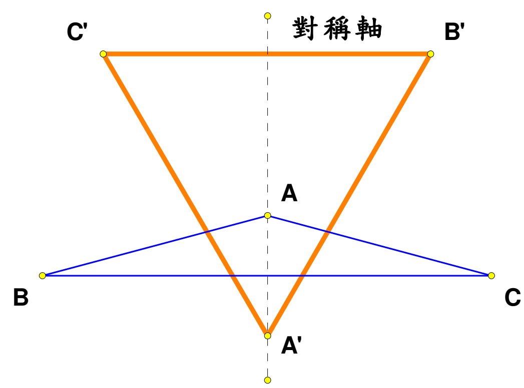
新三角形頂角角度減少到 0°



$\Rightarrow$

原三角形頂角角度增加到 150°

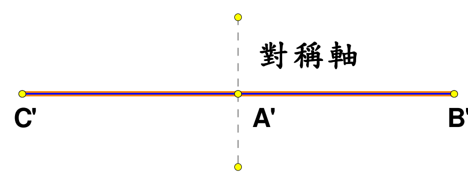
新三角形頂角角度增加到 60°



$\Rightarrow$

原三角形頂角角度增加到 180°

新三角形頂角角度增加到 180°



(三)

試証等腰三角形過多次鏡射變換後必收斂到正三角形或一直線

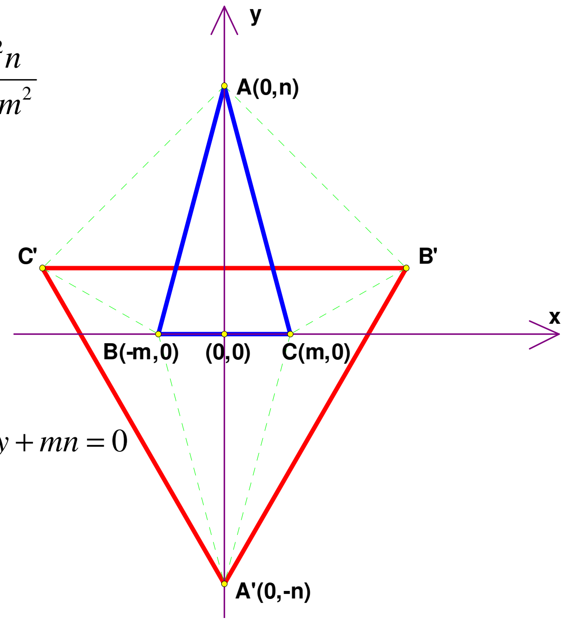
《証明》：

$$\because \overline{AC}=(m,-n)\Rightarrow\begin{cases}x=0+mt\\ y=n-nt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}nx=nmt\\ my=mn-mnt\end{cases}\Rightarrow nx+my-mn=0$$

$$\therefore t=\frac{-(-mn-mn)}{n^2+m^2}=\frac{2mn}{n^2+m^2}$$

$$\therefore B_x'=x_0+2at=-m+2n\frac{2mn}{n^2+m^2}=\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2}$$

$$B_y' = y_0 + 2bt = 0 + 2\times m\times\frac{2mn}{n^2+m^2} = \frac{4m^2n}{n^2+m^2}$$



$$\therefore B' = \left(\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2}, \frac{4m^2n}{n^2+m^2}\right)$$

$$\because \overline{AB} = (-m,-n) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 - mt \\ y = n - nt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} nx = -nmt \\ my = mn - mnt \end{cases} \Rightarrow nx - my + mn = 0$$

$$\therefore t = \frac{(-mn-mn)}{n^2+m^2} = \frac{-2mn}{n^2+m^2}$$

$$\therefore C_x' = x_0 + 2at = m + 2\times n\times\frac{-2mn}{n^2+m^2} = \frac{-3mn^2+m^3}{n^2+m^2}$$

$$C_y' = y_0 + 2bt = 0 + 2\times(-m)\times\frac{-2mn}{n^2+m^2} = \frac{4m^2n}{n^2+m^2}$$

$$\therefore C' = \left(\frac{-3mn^2+m^3}{n^2+m^2}, \frac{4m^2n}{n^2+m^2}\right)$$

$$\because \overline{BC} = (2m,0) \Rightarrow \begin{cases} x = m + 2mt \\ y = 0 - 0t \end{cases} \Rightarrow 0x + y - 0 = 0 \quad \therefore t = \frac{-n}{0^2+1^2} = (-n)$$

$$\therefore A_x' = x_0 + 2at = 0,\ \ A_y' = y_0 + 2bt = n + 2\times1\times(-n) = (-n)$$

$$\therefore A' = (0,-n) = \left(0, \frac{-nm^2-n^3}{n^2+m^2}\right)$$

又 $A' = \left(0, \frac{-nm^2-n^3}{n^2+m^2}\right)$ ， $B' = \left(\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2}, \frac{4m^2n}{n^2+m^2}\right)$ ， $C' = \left(\frac{-3mn^2+m^3}{n^2+m^2}, \frac{4m^2n}{n^2+m^2}\right)$

A'到$\overline{B'C'}$的距離為$\frac{5nm^2+n^3}{n^2+m^2}$ ， B'到 **y** 軸的距離為$\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2}$

$\therefore$ 由圖可得

$$\frac{5nm^2+n^3}{n^2+m^2} = \tan\theta\,\frac{3mn^2-m^3}{n^2+m^2}$$

$$5m^2n+n^3=\tan\theta 3mn^2-\tan\theta m^3 \quad \Rightarrow 5m^2n+n^3-3\tan\theta mn^2+\tan\theta m^3=0$$

同除 m^3 並令 $\dfrac{n}{m}=X$ 得

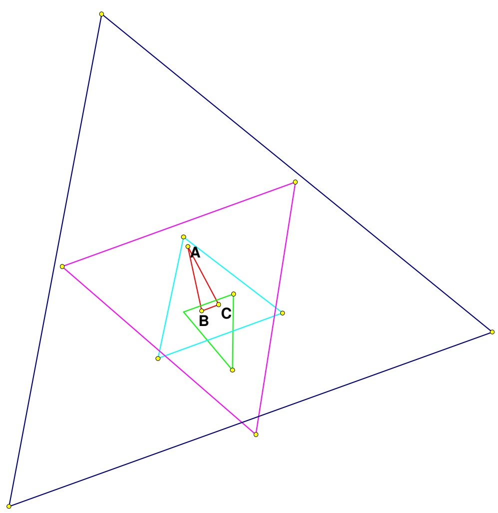
$$X^3+5X-3\tan\theta_n X^2+\tan\theta_n=0 \quad \Rightarrow X^3-3\tan\theta_n X^2+5X+\tan\theta_n=0$$

$\Rightarrow \tan\theta_n=\dfrac{X^3+5X}{3X^2-1}$ ，令 $X=\tan\theta_{n-1}$ 為其前身的根，

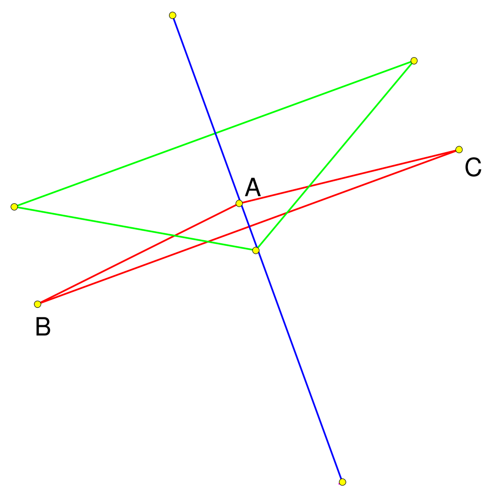
$\tan\theta_n=\dfrac{\tan^3\theta_{n-1}+5\tan\theta_{n-1}}{3\tan^2\theta_{n-1}-1}$ ，令 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_{n-1}=\alpha \Rightarrow \alpha=\dfrac{\alpha^3+5\alpha}{3\alpha^2-1}$

$\Rightarrow 3\alpha^3-\alpha=\alpha^3+5\alpha \Rightarrow 2\alpha^3-6\alpha=0$ 　　則 $\alpha=0$ or $\pm\sqrt{3}$

故得知任何等腰三角形經過多次鏡射變換後必收斂為正三角形或退化成一直線。



等腰三角形經數次鏡射收斂為正三角形



等腰三角形經數次鏡射退化為一直線

(四)

試証一等腰三角形的三個等腰前身的兩底角頂點必分別在以新三角形的兩腰中點爲圓心的圓上

《証明》：(如右圖)

証明前身三點在以 $\overline{AB}$ 爲半徑之圓上

$\overleftrightarrow{BB_i} \perp \overleftrightarrow{MA_i}$ 且相交於 O_i

令 $\overline{A_iB_i} = R_i$ ， $\angle A_iB_iB = \theta_i$ ， $i = 1,2,3$

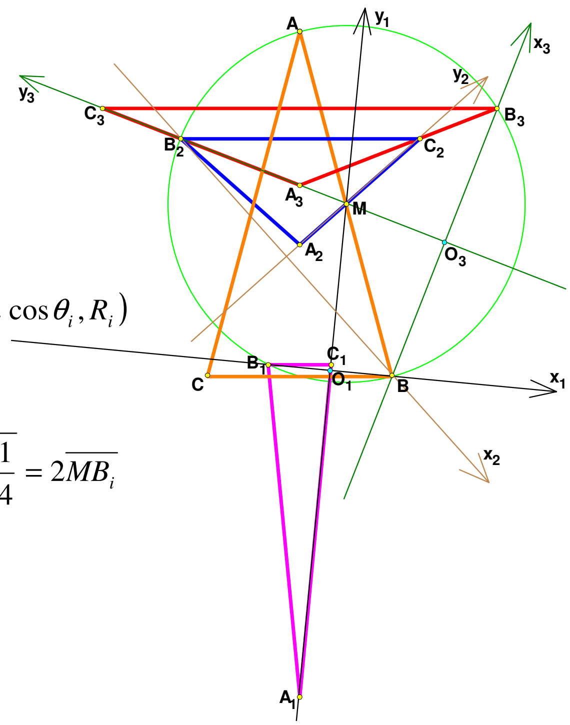
$B_i(-R_i\cos\theta_i, 0)$ ， $B(R_i\cos\theta_i, 0)$ ， $A(-R_i\cos\theta_i, R_i)$

又取 $\overline{AB}$ 中點 $M\left(0, \dfrac{R_i}{2}\right)$

則 $\overline{AB} = R_i\sqrt{4\cos^2\theta_i + 1} = 2R_i\sqrt{\cos^2\theta_i + \dfrac{1}{4}} = 2\overline{MB_i}$

即 B_1 、 B_2 、 B_3 共圓

同理可證 C_1 、 C_2 、 C_3 也必共圓



(五)

試証等腰三角形 **ABC** 兩腰中點連線的中心恰爲三角形 $\mathbf{B_1B_2B_3}$ 九點圓的圓心

《証明》：

由 $\mathbf{B_1}$、$\mathbf{B_2}$、$\mathbf{B_3}$ 三點共圓得知 **O** 點爲△$\mathbf{B_1B_2B_3}$ 的外心

1.連接 **C**、$\mathbf{C_1}$ 及 $\mathbf{A_1}$、**H**，且 $\overline{CC_1} \perp \overline{A_1H}$

又 $\mathbf{M_1}$ 爲 $\overline{B_2B_3}$ 中點 $\therefore \overline{OM_1} \perp \overline{B_2B_3}$

$\therefore \overline{A_1H}$ 平行 $\overline{OM_1}$

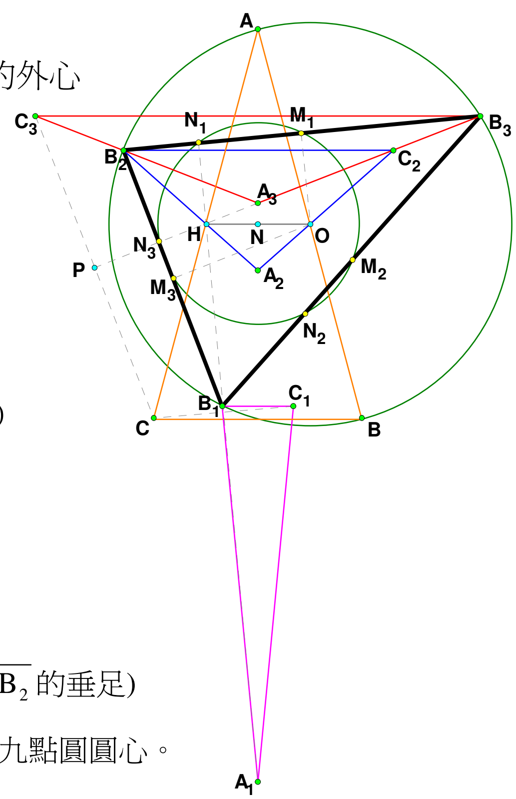
∴將 $\overline{A_1H}$ 延長交 $\overline{B_2B_3}$ 於 $\mathbf{N_1}$ ($\mathbf{N_1}$ 爲 $\overline{B_2B_3}$ 的垂足)

2.作 $\overline{CC_3} \perp \overline{B_3P}$

又 $\mathbf{M_3}$ 爲 $\overline{B_1B_2}$ 中點 $\therefore \overline{OM_3} \perp \overline{B_1B_2}$

$\therefore \overline{B_3P}$ 平行 $\overline{OM_3}$ $\therefore \overline{B_3P}$ 交 $\overline{B_1B_2}$ 於 $\mathbf{N_3}$ ($\mathbf{N_3}$ 爲 $\overline{B_1B_2}$ 的垂足)

則 **H** 爲△$\mathbf{B_1B_2B_3}$ 的垂心，所以 **N** 爲△$\mathbf{B_1B_2B_3}$ 的九點圓圓心。



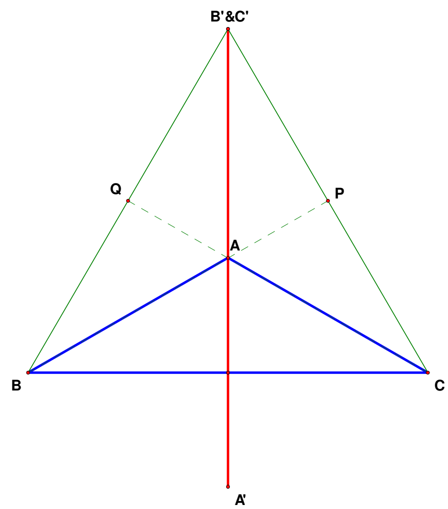
三、三角形經過鏡射變換後的退化情形

除了 **30°-30°-120°**三角形經過一次鏡射後會形成一條直線外，我們發現似乎還有其他的鈍角三角形經過一次鏡射變換後會成爲一條直線。

(一)

證明 **30°-30°-120°**三角形經過一次鏡射後會形成一條直線

《証明》：



已知ΔABC爲 **30°-30°-120°**三角形

$\because\ \angle ABC = 30^\circ$ 且 $\overline{CQ} \perp \overline{BQ}$

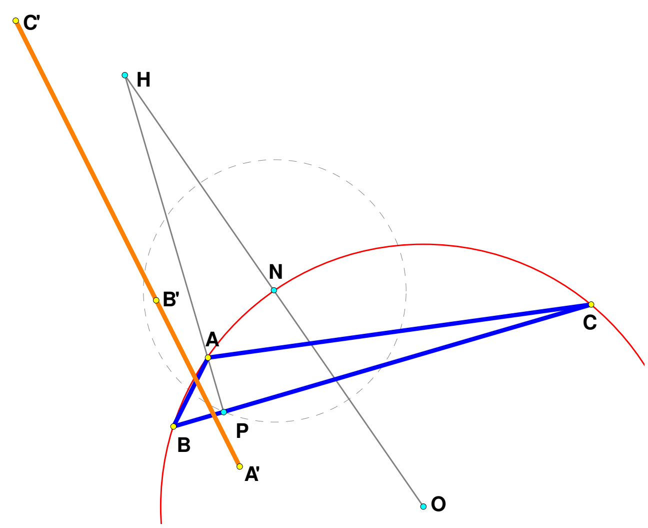
$\therefore\ \angle CBQ = 60^\circ$

同理可得$\angle BCP = 60^\circ$

所以可知 **B**、**C** 兩點經過鏡射後會在同一點

(二)

求作一三角形使其九點圓圓心在外接圓圓上，並作此三角形經鏡射變換後的圖形



《作法》：(如上圖)

1.以 **O** 點爲圓心畫一圓，在圓上任意取一點 **N**，**O** 點再以 **N** 點爲對稱之點爲 **H**。

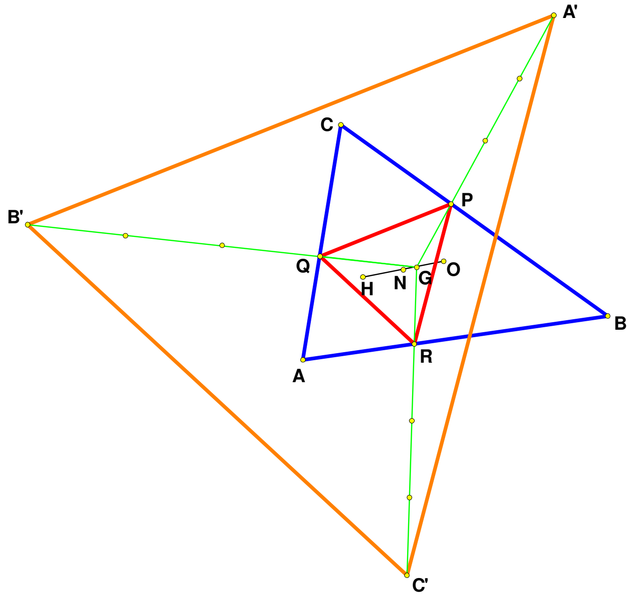
2.以 **N** 點爲圓心，$\overline{\text{ON}}$的一半爲半徑畫圓。

3.在圓上取任意一點 **P**，連接$\overline{\text{HP}}$，並以 **P** 點做與$\overline{\text{HP}}$垂直的直線交圓 **O** 於 **B**、**C** 兩點，且$\overline{\text{HP}}$與圓交於一點爲 **A**，連接 **A**、**B**、**C** 三點所形成之三角形，鏡射後即退化成一直線。

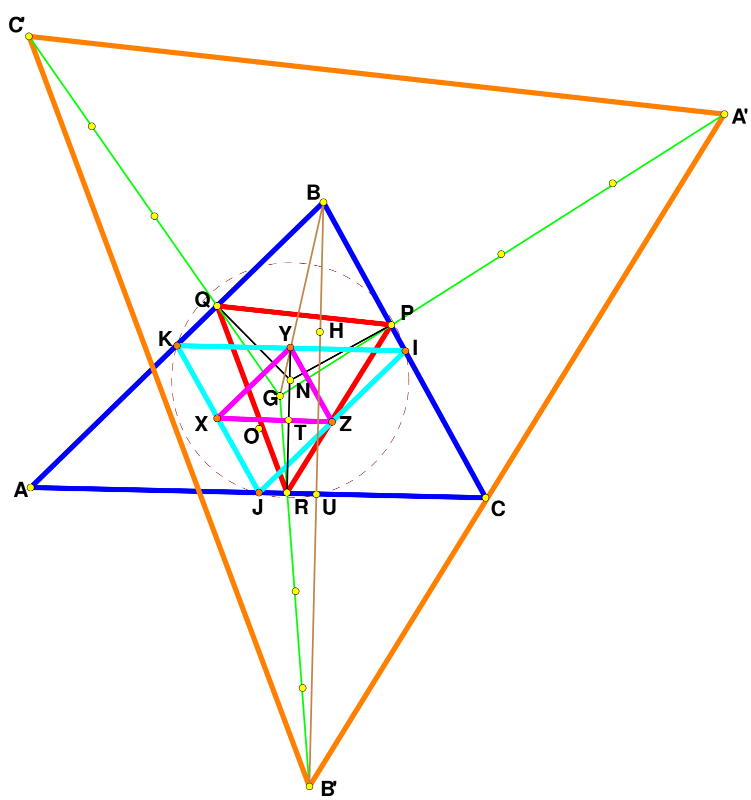
(三)

試証若三角形九點圓圓心在外接圓圓上則此三角形經鏡射變換後必退化為一直線

《引理》:



G 點為三角形 **ABC** 的重心，**N** 點為九點圓圓心。從 **N** 點做到 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的垂線並交於 **R**、**P**、**Q** 三點。三射線 $\overrightarrow{A'P}$ 、 $\overrightarrow{B'Q}$ 、 $\overrightarrow{C'R}$ 交一點恰為△**ABC** 的重心 **G**，此時 $\overline{GA'}=4\overline{GP}$ ， $\overline{GB'}=4\overline{GQ}$ ， $\overline{GC'}=4\overline{GR}$ ，故可以得知△**ABC** 是以 **G** 點固定而縮放 $\Delta A'B'C'$ 的 $\frac{1}{4}$ 。

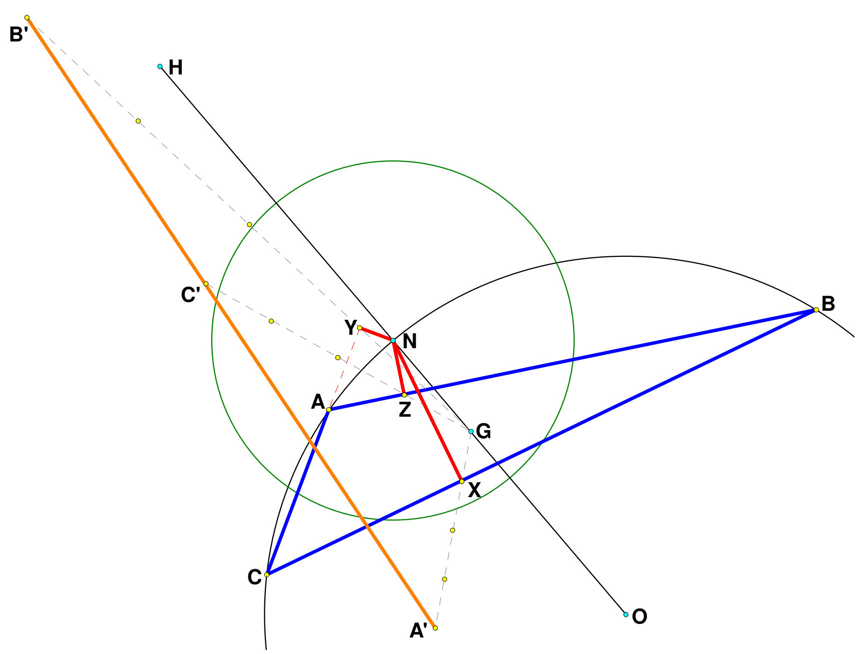


《引理証明》(如上圖)

1.先取△**ABC** 三邊中點 **K**、**I**、**J** 連線，在取△**KIJ** 三邊中點 **X**、**Y**、**Z** 連線。**Y** 點以 $\overline{XZ}$ 作對稱得到 **R** 點，且 **R** 點落在 $\overline{AC}$ 上。又 $\overline{RY}$ 爲 $\overline{KI}$ 的中垂線，因爲△**ABC** 的九點圓會過三邊中點 **K**、**I**、**J**，表示九點圓爲△**KIJ** 的外接圓，故九點圓圓心 **N** 會在 $\overline{KI}$ 的中垂線 $\overline{RY}$ 上。**X**、**Z** 點分別以 $\overline{YZ}$ 、$\overline{XY}$ 作對稱得 **P**、**Q** 兩點，所以△**PQR** 是以 **N** 點作至三邊的垂足所形成的三角形。

2. 因爲△**XYZ** 的高 $\overline{YT}=\frac{1}{2}\overline{YR}$ (**Y** 點以 $\overline{XZ}$ 作對稱得到 **R** 點)，且 $\overline{YR}=\frac{1}{2}\overline{BU}$ ，故 $\overline{YT}=\frac{1}{4}\overline{BU}$ 。**B** 點以 $\overline{AC}$ 作對稱得 B'，所以 $\overline{BU}=\overline{B'U}$ 。則 $\overline{YR}=\frac{1}{4}\overline{BB'}$，且 $\overline{YR}$ 平行 $\overline{BB'}$，所以 $\Delta GYR=\frac{1}{4}\Delta GBB'$，可以得知 $\overline{GB'}=4\overline{GR}$ 。同理可得 $\overline{GA'}=4\overline{GP}$ 、 $\overline{GC'}=4\overline{GQ}$ 。所以鏡射後的△ $A'B'C'$ 爲△**PQR** 的四倍。

《証明》:



假設 $\angle ACN=\alpha,\ \angle NAB=\beta,\ \angle NAY=\gamma$

$\because \angle ACN=\frac{1}{2}$ AN 弧的度數 $=\angle ABN=\alpha$

$\therefore \tan\alpha=\frac{\overline{NY}}{\overline{CY}}=\frac{\overline{NZ}}{\overline{BZ}}$ 即 $\frac{\overline{BZ}}{\overline{CY}}=\frac{\overline{NZ}}{\overline{NY}}$ ------(1)

$\because \angle NAB = \frac{1}{2}$ NB 弧的度數 $= \angle NCB = \beta$

$\therefore \ \tan\beta = \frac{\overline{NZ}}{\overline{AZ}} = \frac{\overline{NX}}{\overline{CX}}$ 即 $\frac{\overline{CX}}{\overline{AZ}} = \frac{\overline{NX}}{\overline{NZ}}$ ------(2)

$\because$**N**、**A**、**C**、**B** 四點共圓 $\therefore \angle NAC + \angle NBC = 180°$

又 $\angle NAC + \angle NAY = 180°$ $\therefore \angle NBC = \angle NAY = \gamma$

又 $\tan\gamma = \frac{\overline{NY}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{NX}}{\overline{BX}}$，因此 $\frac{\overline{AY}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{NY}}{\overline{NX}}$ -------(3)

由(1)(2)(3)得知：$\frac{\overline{BZ}}{\overline{CY}} \times \frac{\overline{CX}}{\overline{AZ}} \times \frac{\overline{AY}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{NZ}}{\overline{NY}} \times \frac{\overline{NX}}{\overline{NZ}} \times \frac{\overline{NY}}{\overline{NX}} = 1$

亦即：$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = 1$

因此由孟氏定理知 **X**、**Y**、**Z** 三點共線

又由引理得知：

$\overline{GA'} = 4\overline{GX}$ $\overline{GB'} = 4\overline{GY}$ $\overline{GC'} = 4\overline{GZ}$

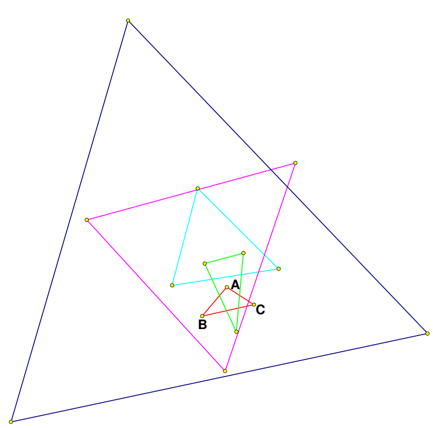
因此得知 A'、B'、C' 三點共線。

四、任意三角形的鏡射變換

(一)

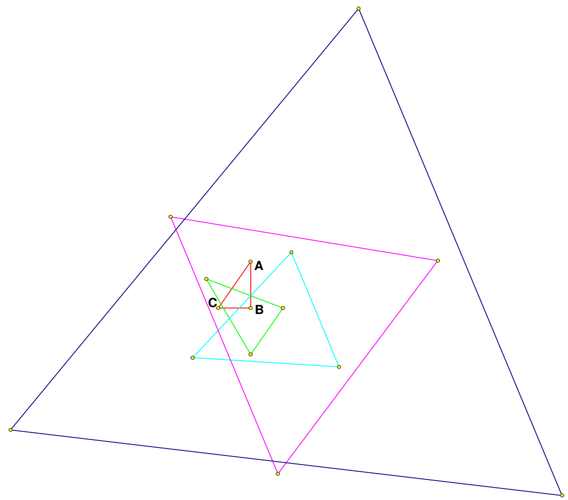
利用 GSP 軟體觀察三角形的變換情形

1. 銳角三角形經過數次變換(原三角形為△**ABC**)



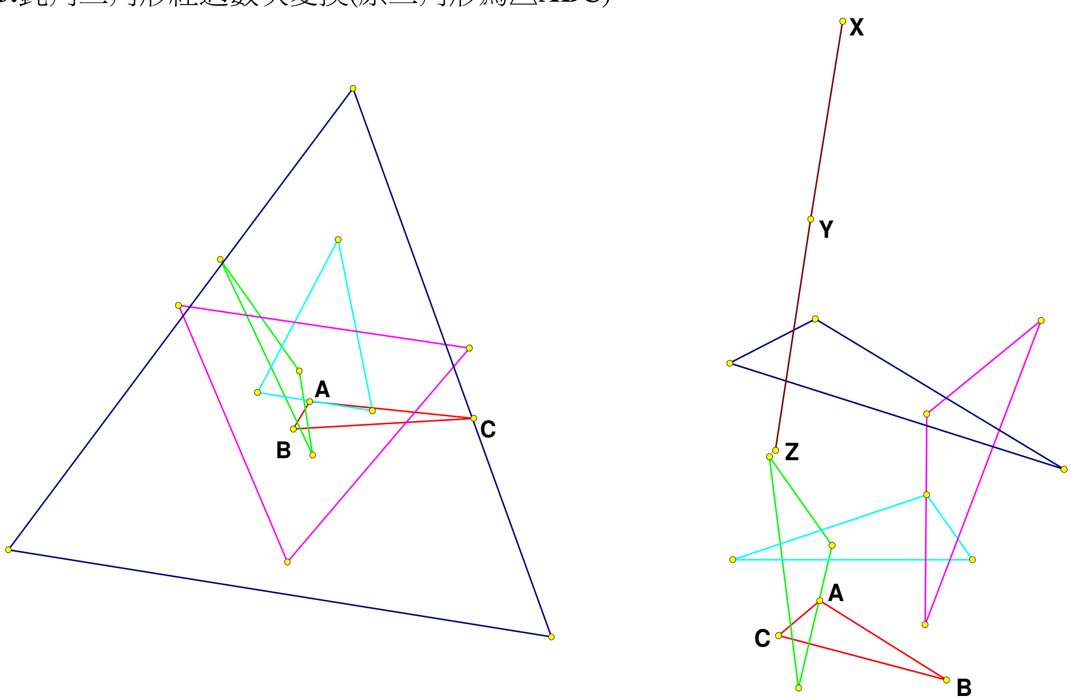
由圖形我們觀察到－銳角三角形經過多次變換後會趨近於等腰三角形

2.直角三角形經過數次變換(原三角形為△**ABC**)



由圖形我們觀察到－直角三角形經過多次變換後會趨近於等腰三角形

3.鈍角三角形經過數次變換(原三角形為△**ABC**)



由此圖我們觀察到－鈍角三角形經過多次鏡射變換後會趨近於等腰三角形或一直線

(二)

試証必存在三內角不相等的三角形經過一次鏡射變換後會形成等腰三角形

《証明》：

設$\beta \neq \gamma$，當$a'=b'$時，得$\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma=-\frac{1}{4}$

令$\beta > \gamma$：

1.當$\alpha=\gamma$時：$\sin^2\beta=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \beta=30° \text{ or } 150°$ **(30°**不合)

2.當$\alpha=\beta$時：$\sin^2\gamma=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma=\frac{1}{2}$

$\therefore \gamma=30° \text{ or } 150°$ **(150°**不合)

3. 當$\alpha \neq \beta \neq \gamma$時：

$\because \ 8\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=1$

$\Rightarrow 2\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{4\cos\alpha} \quad \Rightarrow 2\sin(\alpha+\gamma)\sin\gamma=\frac{1}{4\cos\alpha}$

$\Rightarrow 2(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)\sin\gamma=\frac{1}{4\cos\alpha}$

$\Rightarrow 2(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)\sin\gamma=\frac{1}{4\cos\alpha}$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\gamma\sin\gamma+2\cos\alpha\sin^2\gamma=\frac{1}{4\cos\alpha}$

$\Rightarrow \sin\alpha\sin2\gamma-\cos\alpha\cos2\gamma=\frac{1}{4\cos\alpha}-\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos(\alpha+2\gamma)=\cos\alpha-\frac{1}{4\cos\alpha} \quad \Rightarrow \cos(\alpha+2\gamma)=\frac{4\cos^2\alpha-1}{4\cos\alpha}$

$\because \cos\alpha>0$

$\Rightarrow -1 \leq \frac{4\cos^2\alpha-1}{4\cos\alpha} \leq 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq \cos\alpha \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha \geq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \text{ or } \cos\alpha \leq \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\therefore \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \leq \cos\alpha \leq 1$ $\quad \therefore$必存在

又 (1)當$\cos(\alpha+2\gamma) \geq 0$時：

$\because \cos\alpha>0 \quad \therefore \cos(\alpha+2\gamma)=\cos\alpha-\frac{1}{4\cos\alpha} \leq \cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha+2\gamma \geq \alpha \quad \Rightarrow \gamma \geq 0$，即必存在$\gamma$

故必存在$\alpha \neq \beta \neq \gamma$的一組解；

(2)當 $\cos(\alpha+2\gamma)<0$ 時：

$\alpha+2\gamma>90°>\alpha$　$\therefore$ 必存在 γ

故必存在 $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ 的一組解。

(三)利用統計軟體 **SPSS10.0** 預測任意銳角三角形經一次變換後的情形

令 ∠A= var00001、∠B= var00002、∠C= var00003

∠A'= var00004、∠B'= var00005、∠C'=var00006

經迴歸分析用∠B、∠C 預測∠A' 得表如下：

模式	未標準化係數		標準化係數	t	顯著性
	B 之估計值	標準誤	Beta 分配		
(常數)	-47.733	11.650		-4.097	.000
var00002	1.354	.133	1.380	10.211	.000
var00003	.371	.086	.583	4.318	.000

經迴歸分析用∠A、∠C 預測∠B' 得表如下：

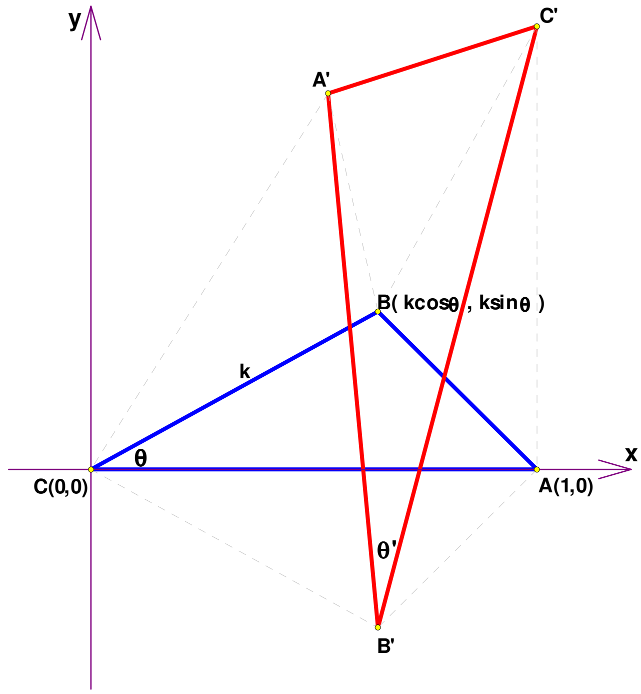
模式	未標準化係數		標準化係數	t	顯著性
	B 之估計值	標準誤	Beta 分配		
(常數)	26.095	9.492		2.749	.008
var00001	.612	.101	.613	6.035	.000
var00003	-.179	.053	-.344	-3.387	.001

經迴歸分析用∠A、∠B 預測∠C' 得表如下：

模式	未標準化係數		標準化係數	t	顯著性
	B 之估計值	標準誤	Beta 分配		
(常數)	167.077	10.275		16.261	.000
var00001	-.424	.143	-.224	-2.964	.005
var00002	-1.158	.115	-.762	-10.081	.000

(四)

試証必存在任意三角形經 **N** 次變換後必收斂至正三角形或退化為一直線



首先假設 $\overline{AC}=1, \overline{BC}=k, \angle BCA=\theta$ ，以 C 為原點建立直角座標系，得 $A(1,0), B(k\cos\theta, k\sin\theta)$ ，接著利用對稱及向量的觀念，可以得出：

$$A'(\cos 2\theta, \sin 2\theta),\ B'(k\cos\theta, -k\sin\theta),\quad C'\left(\frac{2k^2\sin^2\theta}{k^2-2\cos\theta+1}, \frac{2k\sin\theta(1-k\cos\theta)}{k^2-2\cos\theta+1}\right)$$

並求得 $m_{A'B'}=\dfrac{\sin 2\theta + k\sin\theta}{\cos 2\theta - k\cos\theta}, m_{B'C'}=\dfrac{k^2\sin\theta+3\sin\theta-2k\sin 2\theta}{2k-k^2\cos\theta-\cos\theta}$ ，

而 $\tan\theta' = \pm\dfrac{m_{A'B'}-m_{B'C'}}{1-m_{A'B'}m_{B'C'}}$

$$=\pm\frac{2k\sin\theta\cos\theta+(-3k^2-1)\sin 2\theta\cos\theta+(-k^2-3)\sin\theta\cos 2\theta + 2k\sin 2\theta\cos 2\theta+2k\sin 2\theta+2k^2\sin\theta}{(-k^2+3)\sin\theta\sin 2\theta+(-k^2-1)\cos\theta\cos 2\theta+(k^3+3k)\sin^2\theta - 2k\sin^2 2\theta+(k^3+k)\cos^2\theta+2k\cos 2\theta-2k^2\cos\theta}$$

$$=\pm\frac{8k\sin\theta\cos^3\theta+(-8k^2-8)\sin\theta\cos^2\theta+2k\sin\theta\cos\theta+(3k^2+3)\sin\theta}{-8k\sin^2\theta\cos^2\theta+(-2k^2+6)\sin^2\theta\cos\theta+3k\sin^2\theta+(-2k^2-2)\cos^3\theta+5k\cos^2\theta+(-k^2+1)\cos\theta+k^3-2k}$$

令 $\theta=\theta_n, \theta'=\theta_{n+1}$，

當 $n\to\infty$ 時， $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_n=\tan\alpha$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{8k\sin\theta\cos^3\theta + \left(-8k^2-8\right)\sin\theta\cos^2\theta + 2k\sin\theta\cos\theta + \left(3k^2+3\right)\sin\theta}{\begin{array}{c}-8k\sin^2\theta\cos^2\theta + \left(-2k^2+6\right)\sin^2\theta\cos\theta + 3k\sin^2\theta \\ + \left(-2k^2-2\right)\cos^3\theta + 5k\cos^2\theta + \left(-k^2+1\right)\cos\theta + k^3 - 2k\end{array}}$$

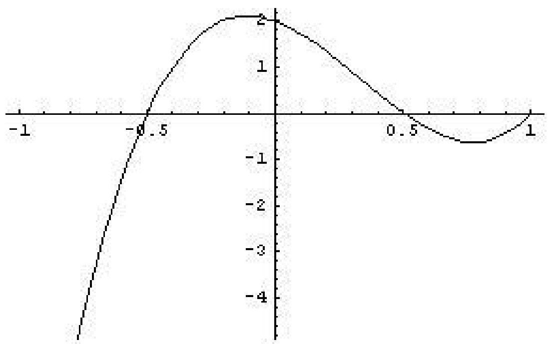
$$\begin{aligned}\Rightarrow\ & 8k\cos^4\theta + \left(-8k^2-8\right)\cos^3\theta + 2k\cos^2\theta + \left(3k^2+3\right)\cos\theta \\ & = -8k\sin^2\theta\cos^2\theta + \left(-2k^2+6\right)\sin^2\theta\cos\theta + 3k\sin^2\theta + \left(-2k^2-2\right)\cos^3\theta \\ & \quad + 5k\cos^2\theta + \left(-k^2+1\right)\cos\theta + k^3 - 2k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ & 2\mathrm{k}\cos^2\theta - 8\mathrm{k}^2\cos^3\theta - 8\cos^3\theta + 3\mathrm{k}^2\cos\theta + 3\cos\theta + 8\mathrm{k}\cos^4\theta \\ & = -2\mathrm{k}^2\cos\theta + 2\mathrm{k}^2\cos^3\theta + 6\cos\theta - 6\cos^3\theta + \mathrm{k}^3 - 2\mathrm{k} + 3\mathrm{k} - 3\mathrm{k}\cos^2\theta \\ & \quad + 5\mathrm{k}\cos^2\theta - \mathrm{k}^2\cos\theta + \cos\theta - 2\mathrm{k}^2\cos^3\theta - 2\cos^3\theta - 8\mathrm{k}\cos^2\theta + 8\mathrm{k}\cos^4\theta\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{8k^2\cos^3\alpha - 8k\cos^2\alpha + \left(-6k^2+4\right)\cos\alpha + k^3 + k = 0}$$

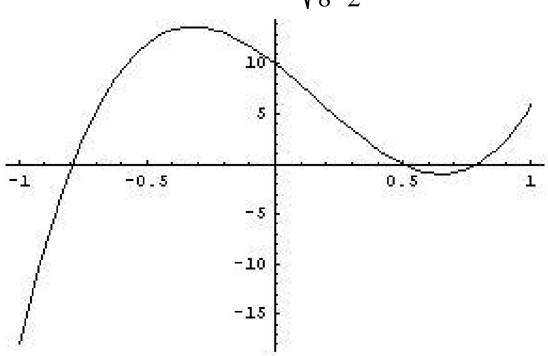
利用 **Mathematic 4.0** 版軟體，計算後可得：

(1) 當 $k=1$ 時： $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2},\ 1$



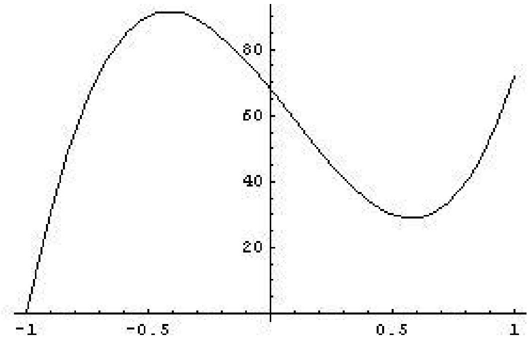
由此表示：k=1 時，原三角形爲等腰三角形，且鏡射後的三角形角度洽符合先前的証明，藉由此種方法，可以得証任一等腰三角形經無數次鏡射變換後必收斂爲正三角形或退化成一直線。

(2) 當 $k=2$ 時： $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{8}}, \frac{1}{2}$



由此表示：必存在除了原三角形爲等腰三角形外，有任意三角形經無數次鏡射變換後亦可收斂成正三角形。

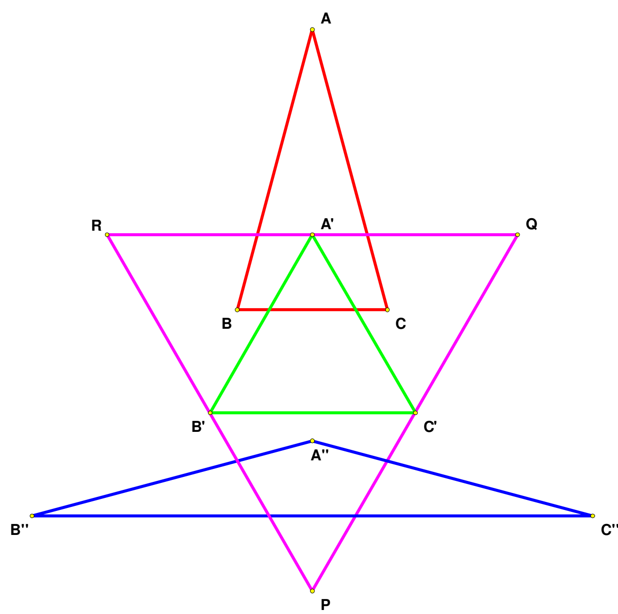
(3) 當 $k=4$ 時： $\cos\alpha=-1,\ \dfrac{5}{8}\pm\dfrac{3}{8}i$



由此表示：必存在除了原三角形爲等腰三角形外，有任意三角形經無數次鏡射變換後亦可退化成一直線。

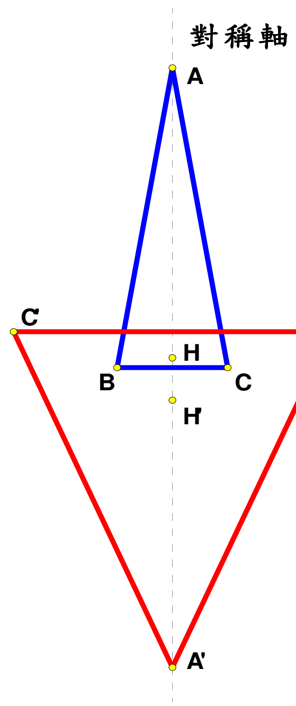
陸、研究結果

一、僅有 **30°-75°-75°**、**150°-15°-15°**、**60°-60°-60°**的三角形經過一次鏡射變換後可形成正三角形-----(証明詳見 **p.2**)



二、等腰三角形的變換

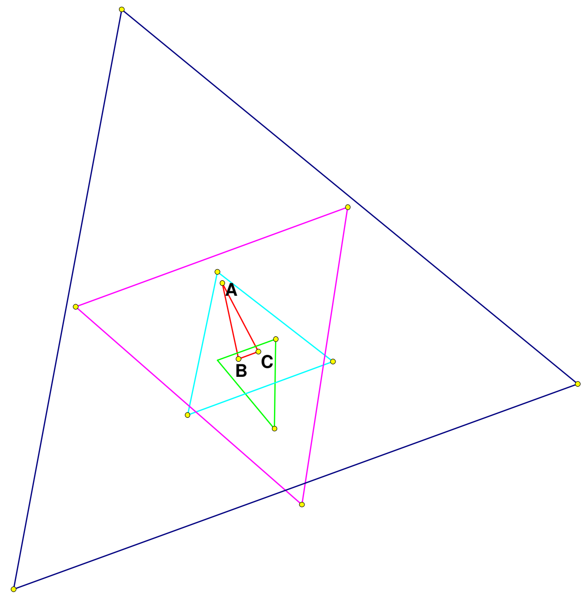
(一)等腰三角形經過鏡射變換後的新三角形也必爲等腰三角形**-----**(証明詳見 **p.6**)



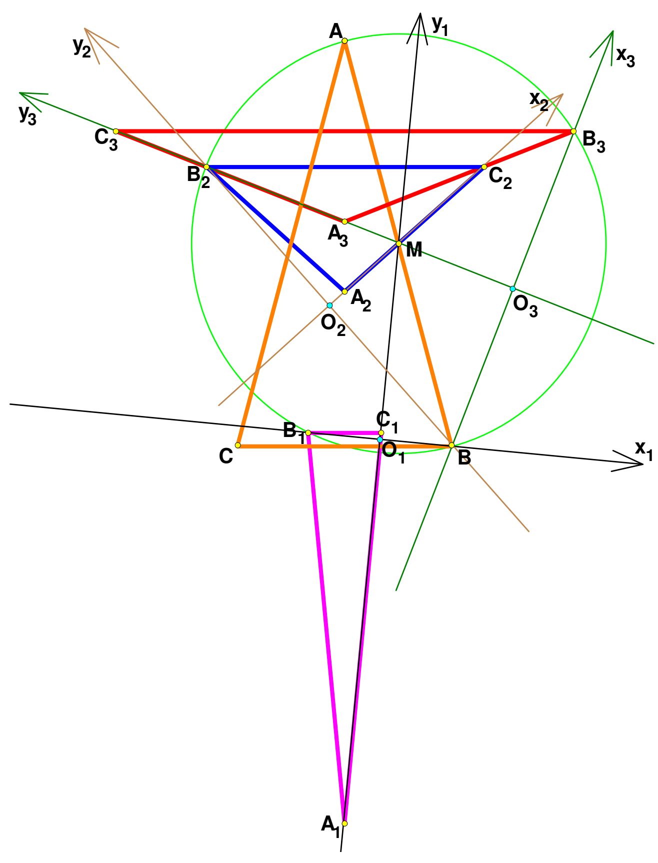
(二)原等腰三角形頂角與新等腰三角形頂角的變換流程圖

原等腰三角形頂角	新等腰三角形頂角
0°	無角度
增加	增加
30°	**60°**
60°	**60°**
增加	減少
120°	**0°**
增加	增加
150°	**60°**
增加	增加
180°	**180°**

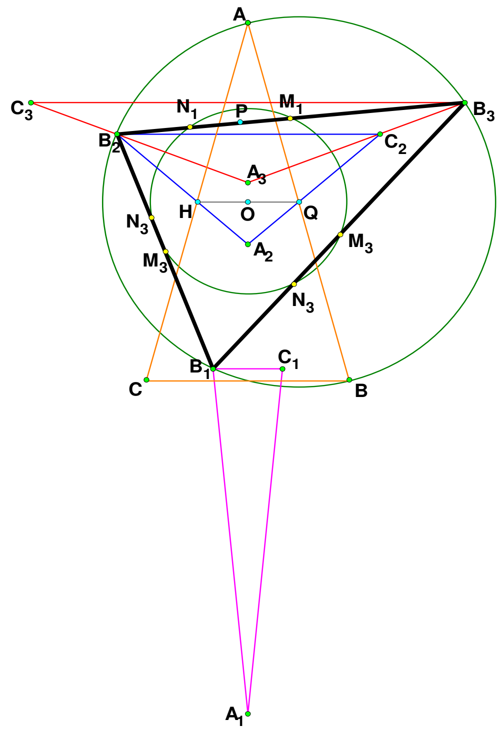
(三)等腰三角形過多次鏡射變換後必收斂到正三角形或一直線-----(證明詳見 **p.7**)



(四)一等腰三角形的三個等腰前身的兩底角頂點必在以新三角形的兩腰中點爲圓心的圓上-----(證明詳見 **p.10**)



(五)等腰三角形兩腰中點連線的中心恰爲此三角形九點圓的圓心-----(證明詳見 **p.10**)

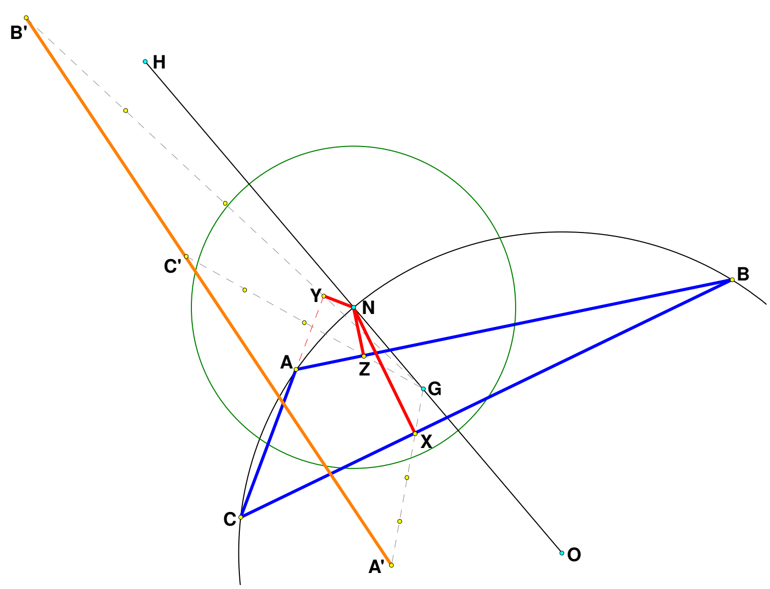


三、三角形經過鏡射變換後的退化情形

(一) **30°-30°-120°**三角形經過一次鏡射變換會鏡射形成一條直線-----(證明詳見 **p.11**)

(二)若三角形九點圓圓心在外接圓圓上則此三角形經鏡射變換後必退化爲一直線

-----(證明詳見 **p.13**)



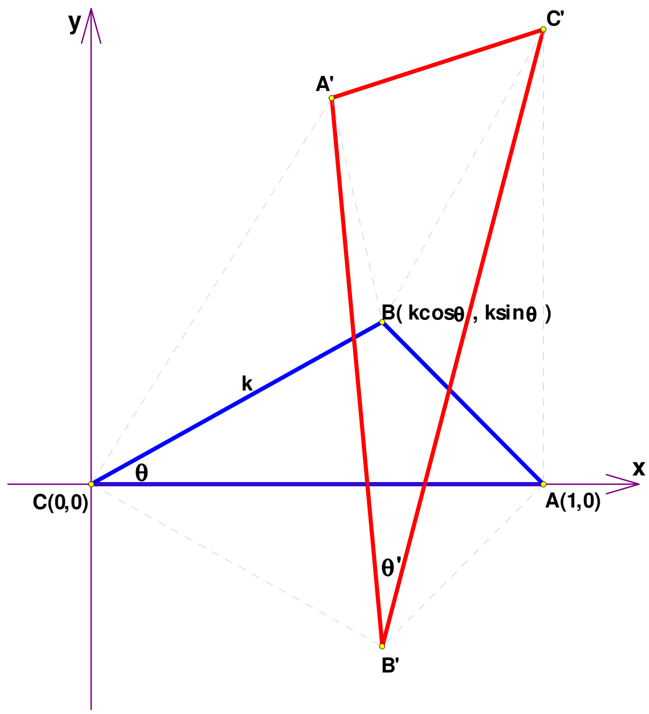
四、任意三角形的鏡射變換

(一)**GSP** 幾何軟體作圖我們發現任意三角形經數次鏡射變換後會接近正三角形或退化成為一直線

(二)試証必存在三內角不相等的三角形經過一次鏡射變換後會形成等腰三角形 **-----**(證明詳見 **p.15**)

(三)利用統計軟體 **SPSS10.0** 可預測任意銳角三角形經一次變換後的情形

(四)試証必存在任意三角形經 **N** 次變換後必收斂到正三角形或退化為一直線 **-----**(證明詳見 **p.18**)



柒、結論與討論(未來研究方向)

本研究可繼續探討三角形的重心、外心、內心、垂心等經鏡射變換後的軌跡圖形或探討任意四邊形經鏡射變換後的圖形。

捌、參考資料

一、高中數學一～四冊。南一書局

二、張景中(民 **86**)。平面幾何－新路-解題研究。臺北市：九章

三、洪維恩(民 **86**)。**Mathematica 3.0** 版入門指引。臺北市：松崗

四、C.Kimberling,***Encyclopedia of Triangle Centers***,April 16 2003 edition available at

http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

五、J.R.Musselman and R.Goormaghtigh, Advanced Problem 3928,Amer.Math.Monthly,46 (1939)601;solution,48(1941)281-283

六、P.Yiu,Hyacintos massage 4533,December 12,2001.

七、***http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/***

八、***http://mathworld.wolfram.com/Triangle Center Function.html***

玖、附錄

統計任意三角形經過多次鏡射變換後的情形

1.銳角三角形

第一個

銳角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	74.13°	36.87°	69.00°
第一次變換	55.53°	63.56°	60.91°
第二次變換	62.02°	58.19°	59.78°
第三次變換	58.95°	60.88°	60.16°
第四次變換	60.51°	59.55°	59.93°
第五次變換	59.74°	60.22°	60.04°
第六次變換	60.13°	59.89°	59.98°
第七次變換	59.94°	60.06°	60.01°
第八次變換	60.03°	59.97°	60.00°
第九次變換	60.01°	60.01°	60.00°

第二個

銳角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	49.50°	46.56°	83.94°
第一次變換	69.01°	68.28°	42.71°
第二次變換	57.42°	58.08°	64.50°
第三次變換	61.36°	61.10°	57.53°
第四次變換	59.35°	59.49°	61.16°
第五次變換	60.33°	60.26°	59.40°
第六次變換	59.84°	59.87°	60.29°
第七次變換	60.08°	60.07°	59.85°
第八次變換	59.96°	59.97°	60.07°
第九次變換	60.02°	60.02°	59.06°

第三個

銳角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	57.21°	45.79°	77.01°
第一次變換	65.22°	65.57°	49.21°
第二次變換	58.18°	57.91°	63.91°

第三次變換	61.01°	61.11°	57.88°
第四次變換	59.53°	59.47°	61.01°
第五次變換	60.24°	60.27°	59.48°
第六次變換	59.88°	59.87°	60.25°
第七次變換	60.06°	60.07°	59.87°
第八次變換	59.97°	59.97°	60.06°
第九次變換	60.02°	60.02°	59.97°

第四個

銳角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	12.03°	88.30°	79.68°
第一次變換	32.90°	64.80°	82.30°
第二次變換	62.07°	69.21°	48.72°
第三次變換	60.60°	55.24°	64.16°
第四次變換	60.00°	62.16°	57.84°
第五次變換	60.07°	58.89°	61.04°
第六次變換	59.98°	60.54°	59.47°
第七次變換	60.01°	59.73°	60.26°
第八次變換	59.99°	60.14°	59.87°
第九次變換	60.00°	59.93°	60.07°

第五個

銳角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	54.20°	66.43°	59.37°
第一次變換	62.67°	56.45°	60.88°
第二次變換	58.66°	61.64°	59.70°
第三次變換	60.66°	59.15°	60.18°
第四次變換	59.67°	60.42°	59.92°
第五次變換	60.17°	59.79°	60.04°
第六次變換	59.92°	60.10°	59.98°
第七次變換	60.04°	59.95°	60.01°
第八次變換	59.98°	60.03°	59.99°
第九次變換	60.01°	59.99°	60.00°

2.直角三角形

第一個

直角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	26.23°	90.00°	60.77°
第一次變換	55.92°	43.40°	80.67°
第二次變換	67.56°	66.19°	46.24°
第三次變換	57.26°	58.37°	64.38°
第四次變換	61.42°	60.98°	57.61°
第五次變換	59.31°	59.56°	61.13°
第六次變換	60.35°	60.23°	59.42°
第七次變換	59.83°	59.89°	60.29°
第八次變換	60.09°	60.06°	59.86°
第九次變換	59.96°	59.97°	60.07°

第二個

直角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	35.10°	90.00°	54.90°
第一次變換	64.62°	38.56°	76.82°
第二次變換	63.98°	64.25°	51.77°
第三次變換	58.46°	58.27°	63.27°
第四次變換	60.84°	60.92°	58.24°
第五次變換	59.60°	59.56°	60.84°
第六次變換	60.20°	60.22°	59.57°
第七次變換	59.90°	59.89°	60.21°
第八次變換	60.05°	60.06°	59.89°
第九次變換	59.97°	59.97°	60.05°

第三個

直角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	7.00°	90.00°	83.00°
第一次變換	20.22°	72.13°	87.66°
第二次變換	48.37°	78.77°	52.86°
第三次變換	66.29°	47.30°	66.41°
第四次變換	57.93°	64.24°	57.83°
第五次變換	61.14°	57.68°	61.18°
第六次變換	60.28°	59.44°	60.29°
第七次變換	59.86°	60.28°	59.86°
第八次變換	60.07°	59.86°	60.07°
第九次變換	59.97°	60.07°	59.96°

第四個

直角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	14.99°	90.00°	75.01°
第一次變換	38.78°	56.32°	84.90°
第二次變換	65.72°	71.17°	43.11°
第三次變換	60.12°	55.30°	64.58°
第四次變換	60.27°	62.16°	57.57°
第五次變換	59.94°	58.90°	61.16°
第六次變換	60.05°	60.54°	59.41°
第七次變換	59.98°	59.73°	60.29°
第八次變換	60.01°	60.14°	59.85°
第九次變換	59.99°	59.93°	60.07°

第五個

直角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	47.20°	90.00°	42.80°
第一次變換	72.85°	36.95°	70.20°
第二次變換	56.84°	63.56°	59.61°
第三次變換	61.52°	58.11°	60.36°
第四次變換	59.23°	60.91°	59.86°
第五次變換	60.38°	59.54°	60.08°
第六次變換	59.81°	60.23°	59.96°
第七次變換	60.10°	59.89°	60.02°

第八次變換	59.95°	60.06°	59.99°
第九次變換	60.02°	59.97°	60.00°

3.鈍角三角形

第一個

鈍角三角形	∠A	∠B	∠C
原三角形	12.93°	99.82°	67.25°
第一次變換	30.40°	41.62°	107.98°
第二次變換	61.32°	101.61°	17.08°
第三次變換	109.54°	33.71°	36.75°
第四次變換	14.60°	75.74°	89.66°
第五次變換	38.10°	84.33°	57.58°
第六次變換	65.25°	43.95°	70.81°
第七次變換	60.10°	65.59°	55.31°
第八次變換	60.28°	57.57°	62.16°
第九次變換	59.94°	61.16°	58.90°

第二個

鈍角三角形	∠A	∠B	∠C
原三角形	67.17°	105.11°	7.73°
第一次變換	124.00°	39.15°	16.85°
第二次變換	4.31°	167.75°	7.94°
第三次變換	20.42°	121.82°	37.76°
第四次變換	4.71°	1.63°	173.66°
第五次變換	23.20°	8.01°	148.79°
第六次變換	95.95°	27.39°	56.66°
第七次變換	34.48°	56.47°	89.05°
第八次變換	63.93°	76.16°	39.91°
第九次變換	63.62°	51.83°	64.54°

第三個

鈍角三角形	∠A	∠B	∠C
原三角形	22.23°	102.84°	54.93°
第一次變換	44.91°	27.65°	107.44°
第二次變換	108.35°	53.16°	18.49°
第三次變換	21.47°	126.56°	31.98°
第四次變換	35.60°	9.97°	134.43°
第五次變換	140.69°	16.86°	22.45°
第六次變換	37.19°	56.47°	86.35°
第七次變換	65.22°	72.75°	42.03°
第八次變換	61.13°	54.27°	64.60°
第九次變換	59.83°	62.51°	57.66°

第四個

鈍角三角形	∠A	∠B	∠C
原三角形	1.88°	169.38°	8.75°
第一次變換	8.96°	129.10°	41.94°
第二次變換	7.00°	10.68°	162.32°
第三次變換	31.50°	48.66°	99.84°

第四次變換	62.52°	89.87°	27.60°
第五次變換	79.93°	42.57°	57.49°
第六次變換	47.16°	65.80°	67.04°
第七次變換	64.26°	58.35°	57.38°
第八次變換	57.67°	60.97°	61.36°
第九次變換	61.10°	59.56°	59.34°

第五個

鈍角三角形	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
原三角形	8.36°	33.52°	138.12°
第一次變換	17.45°	132.37°	30.18°
第二次變換	39.03°	20.05°	120.93°
第三次變換	179.97°	0.02°	0.01°
第四次變換	179.87°	0.09°	0.03°
第五次變換	179.36°	0.47°	0.17°
第六次變換	176.76°	2.34°	0.87°
第七次變換	164.03°	11.63°	4.34°
第八次變換	106.58°	53.72°	19.72°
第九次變換	23.50°	120.03°	36.47°

【評　語】　　040418　L-轉換

(1) 作者使用 GSP 模擬，三角形鏡射的變換，觀察出某些三角形經多次鏡射得出三角形的性質，主意尚佳。

(2) 作者群宜在逼近理論方面多予涉獵，以避免陷入以電腦摸擬的觀察來判別收斂性質的迷思。