

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040415

西爾平斯基猜想(Sierpinski Conjecture)－未完成的埃及
分數問題

學校名稱：臺中縣立大里高級中學

作者：	指導老師：
高一 宋彥橙	陳鑫達
高一 何哲瑋	楊景成
高一 趙泓霖	

關鍵詞：埃及分數 相異自然數解

摘要

此篇報告重點主要在研究「西爾平斯基猜想」：

西爾平斯基猜想(Sierpinski Conjecture)

對於任意自然數 $n \geq 5$ 而言，不定方程式 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 均有相異自然數解。

得到相關的結果如下：

一、若 n 為自然數，則 $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 至少有一組解。

二、若 n 為自然數，則 $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 2$) 至少有一組解。

三、若 n 不是「 $6k+1$ 」型的自然數，則 $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 3$) 至少有一組解。

四、設 k 為自然數或 0，若 n 不是「 $60k+1$ 」型的自然數，則 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 5$) 至少有一組相異自然數解。

壹、研究動機

「怎樣把一個真分數分解成若干個相異的「單位分數」(即分子為 1 的分數)之和？」是一個古埃及的數學問題。其中「固定項數的分解問題」；譬如 2 項或 3 項的展開，一直是許多數學家很有興趣討論的，在文獻[1, 2]中已經有展開成 2 項的一些結果，所以目前研究的焦點都在分成 3 項之和的問題，其中兩個最有名的猜想分別是(參考[1, p58])：

猜想一 厄多斯與史特勞斯猜想(Erdős–Strauss Conjecture)[1948 年提出]

對於任意自然數 $n \geq 4$ 而言，不定方程式 $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 均有相異自然數解。

猜想二 西爾平斯基猜想(Sierpinski Conjecture) [1956 年提出]

對於任意自然數 $n \geq 5$ 而言，不定方程式 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 均有相異自然數解。

這兩個猜想目前為止，仍然尚未完全證明，猜想一目前可以查到的最好結果是：[4] 只差 $n = 24t + 1$ 時未找出解。此篇報告重點將放在研究「猜想二」，但仍會不斷嘗試完成[4]的證明。

研究此問題會經常使用到高中數學第一冊「整數」及「有理數與實數」單元的知識，藉由討論讓我們對這些知識有了更深一層的認識。

貳、研究目的

- 一、找出 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($m > t$) 有相異自然解的情形。
- 二、找出 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 有相異自然解的情形。
- 三、目前 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 5$) 有相異自然解的情形。
- 四、其他類似問題有解的情形。

參、研究設備及器材

computer、紙和筆。

肆、研究過程

我們將原問題 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 5$)，分成兩個步驟討論：

(步驟一)先考慮 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 有自然數解的情形。

(步驟二)再考慮 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($m > t$) 有自然數解的情形。

「假設上面兩個步驟都有解」，則只要將 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的解代入 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ 的解，就可得出原

問題 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的解，這就是我們的想法！

規定

爲了方便，以下內容有時候會把「有相異自然數解」簡寫成「有解」；「沒有相異自然數解」簡寫成「無解」。

一、找出 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($m > t$) 有自然數解的情形

爲了找出使上式有解的 n 值，我們使用李孟修等[4, p3]定理 1 的方法計算，可是在過程中發現「在某些 $\frac{n}{m}$ 值，此方法是找不到解的！」因此，爲了說明方便；將原來的定理敘述列出，再舉出反例。

定理 1 (李孟修等[4, p3])

若 $\frac{n}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a < b$)，且 $m, n, a, b \in \mathbb{N}$ ，則必存在一個正整數 d_1 ，使 $d_1 < m, n \mid m + d_1, d_1 \mid \frac{m(m+d_1)}{n}$ ；且 $a = \frac{m(m+d_1)}{n}, b = \frac{m(m+d_1)}{nd_1}$ 。

註： d_1 取的值是 $na-m$ 。

上面用長方形框起來的「必存在」三個字必須去掉！因爲下面的例 1 就會使此定理不成立。

例 1：在定理 1 中，若取 $m = 7, n = 5$ ，則可證明「 $\frac{5}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a < b$) 無解」。

證明：根據李孟修等[4, p3]，可知 $\frac{5}{14} < \frac{1}{a} < \frac{5}{7}$ ；即 $\frac{7}{5} < a < \frac{14}{5}$ ，又 a 是自然數，可得 $a = 2$ 。

但會導出 $\frac{1}{b} = \frac{5}{7} - \frac{1}{a} = \frac{5}{7} - \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$ ，則 $b = \frac{14}{3}$ ；此和 b 是自然數矛盾，故無解。□

雖然定理 1 需要修正，但李孟修等[4, p3-4]使用的計算方法，把變數 n 改成 t ，還是可以提供「 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 是否有解？」及「有幾個解？」的結果。因此，將此方法敘述如下；並依據特性稱其爲「上下界限法」。

方法一 (上下界限法)

若要找出 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a < b$) 的相異自然數解，可按下列步驟計算：

第 1 步：選定 m, n 的值，用「 $\frac{t}{2m} < \frac{1}{a} < \frac{t}{m}$ 」及「 a 是自然數」的性質，找出 a 有解的範圍。

第 2 步：利用「 $\frac{1}{b} = \frac{t}{m} - \frac{1}{a}$ 」及「b 是自然數」的性質，找出符合條件的 b。

若 b 均不是自然數，則表示 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 無解。

先舉一個例子，了解計算的方法。

例 2：取 $m = 8$ 、 $t = 5$ ，可得

第 1 步：因為 $\frac{5}{16} < \frac{1}{a} < \frac{5}{8}$ ；可得 $\frac{8}{5} < a < \frac{16}{5}$ ，則 $a = 2$ 或 3 。

第 2 步：因 $\frac{1}{b} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{8} - \frac{1}{3}$ ，則 $b = \frac{8 \times 2}{5 \times 2 - 8}$ 或 $\frac{8 \times 3}{5 \times 3 - 8} = 8$ 或 $\frac{24}{7}$ (不合)。

所以， $\frac{5}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 只有「1 組」解；即「 $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ 」。

若取 $t = 5$ 根據相同計算方式，可以得出下面的表一：

表一 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($m > 5$) 相異自然解的個數統計表

m 的值	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
解的個數	1	0	1	1	1	0	2	0	1	1
m 的值	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
解的個數	1	0	2	1	2	1	0	0		
m 的值	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
解的個數	1	1	2			0	1	0		
m 的值	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
解的個數	3	0	1			0	3	0		
m 的值	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
解的個數	1	0	3			1	2	0		
m 的值	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
解的個數	3	1	1			0	0	2		
m 的值	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
解的個數	3	0	2			0	3	0		
m 的值	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
解的個數	2	0	3			1				
m 的值	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
解的個數	1					1				
m 的值	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
解的個數	4					0				
m 的值	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
解的個數	1					1				

m 的值	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125
解的個數	2					0				

觀察表一，我們給出下面關於 $t = 5$ 的猜測：設 k 為自然數，

猜測一：若 m 是「 $5k+4$ 」或「 $5k+5$ 」型的自然數，則 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 至少有一組相異自然數解？

猜測二：若 m 是「 $5k+1$ 」、「 $5k+2$ 」或「 $5k+3$ 」型的「質數」，則 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 無解？

猜測三：若 m 是「 $5k+1$ 」、「 $5k+2$ 」或「 $5k+3$ 」型的「合數」，則 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 至少有一組相異自然數解？

不過，根據表一發現「猜測三是錯的！」因為當 $m = 33$ 時， $\frac{5}{33} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 是無解的。至於，「猜測一」和「猜測二」都是正確，可參考定理一至定理四。

定理一

設 k 為自然數，若 m 是「 $5k+4$ 」或「 $5k+5$ 」型的自然數，則 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 至少有一組相異自然數解。

證明：

1. 當 m 是「 $5k+5$ 」型的自然數

利用 $\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 且 $k+2 \neq (k+1)(k+2)$ 恆成立，可找到一組解為

$$\frac{5}{5k+5} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}。$$

2. 當 m 是「 $5k+4$ 」型的自然數

根據李孟修等[4, p8]的引理，若取引理中的 $p = 5k+4$ 且 $q = 1$ ，可得一組解為

$$\frac{5}{5k+4} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(5k+4)}。 \quad \square$$

可是再次使用[4, p8]的引理去證明「猜測二」時，經過嘗試發現似乎不太可能！只好另外想辦法，我們發現周軒等[3, p4]中的引理 1 及引理 2，可以修改成用來證明的工具，如定理二：

定理二

設 m 是自然數，若 $e|m^2$ 且 $e < m$ ，則「若且唯若」 $a = m+e$ 且 $b = \frac{m^2+me}{e}$ 是 $\frac{1}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的一組解。

證明：

($\rightarrow$)若 $e|m^2$ 且 $e < m$

可得 $b = \frac{m^2 + me}{e}$ 是自然數且 $a = m + e \neq \frac{m^2 + me}{e} = b$ ；

而 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m+e} + \frac{1}{\frac{m^2 + me}{e}} = \frac{1}{m+e} + \frac{e}{m(m+e)} = \frac{1}{m}$ 。

($\leftarrow$)若 $a = m + e$ 且 $b = \frac{m^2 + me}{e}$ 是 $\frac{1}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的一組解

則必須要求 $\frac{m^2 + me}{e}$ 是自然數且 $m + e \neq \frac{m^2 + me}{e}$ ；設 $m + e < \frac{m^2 + me}{e} (= m + \frac{m^2}{e})$ ，

故可得 $e|m^2$ 且 $e < m$ 。 $\square$

定理三（參考[1,p57 之該文章未列證明]）

設 m 是大於 t 的自然數，若 $e|m^2$ 、 $e < m$ 、 $t|m+e$ 且 $te|m^2 + me$ ，則「若且唯若」 $a = \frac{m+e}{t}$

且 $b = \frac{m^2 + me}{te}$ 是 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($m > 5$) 的一組解。

證明：

若 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ，則 $\frac{1}{m} = \frac{1}{ta} + \frac{1}{tb}$ 。

因 $e|m^2$ 且 $e < m$ ，由定理二可知

$ta = m + e$ 且 $tb = \frac{m^2 + me}{e}$ 是 $\frac{1}{m} = \frac{1}{ta} + \frac{1}{tb}$ 的一組解，故 $a = \frac{m+e}{t}$ 且 $b = \frac{m^2 + me}{te}$ 。

因 $t|m+e$ ，則 $a = \frac{m+e}{t}$ 是自然數。

因 $te|m^2 + me$ ，則 $b = \frac{m^2 + me}{te}$ 亦是自然數。

所以，可由 $\frac{1}{m} = \frac{1}{t(\frac{m+e}{t})} + \frac{1}{t(\frac{m^2 + me}{te})}$ 推出 $a = m + e$ 且 $b = \frac{m^2 + me}{e}$ 是 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的一組解。

$\square$

定理四

設 m 是大於 5 的自然數，若 m 是「 $5k+1$ 」、「 $5k+2$ 」或「 $5k+3$ 」型的「質數」，則 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 無解。

證明：

由定理三可知：取 $t = 5$ 可得

若 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有解，設 $5a = m+e$ 、 $5b = \frac{m^2 + me}{e}$ ，

則「若且唯若」 $e|m^2$ 、 $e < m$ 、 $5|m+e$ 且 $5e|m^2 + me$ 。

$\therefore m$ 是質數；設為 p

$\therefore m^2 = p^2$ 的因數 = 1 、 p 、 p^2 ，但由 $e|m^2$ 、 $e < m$ ，可得 $e = 1$ 。

$\therefore a = \frac{m+e}{5} = \frac{p+1}{5}$ ，但已知 m 是「 $5k+1$ 」、「 $5k+2$ 」或「 $5k+3$ 」型的「質數」，

$\therefore a = \frac{p+1}{5}$ 不是自然數。

故 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 無解。□

定理三可以發展出另一種計算方法，判斷「 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 是否有解？」及「找出有幾個解？」。因為此方法跟「 m^2 的因數」有關，故稱其為「平方因數法」。

方法二 (平方因數法)

若要找出 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a < b$) 的相異自然數解，可按下列步驟計算：

第 1 步：選定 m 的值，找出滿足「 $e|m^2$ 、 $e < m$ 」的平方因數 e 。

第 2 步：再從第 1 步的 e ，找出滿足「 $t|m+e$ 、 $te|m^2 + me$ 」的。

則 $a = \frac{m+e}{t}$ 、 $b = \frac{m^2 + me}{te}$ 就是 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的一組解。

若第 2 步找不到滿足條件的 e ，則表示 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 無解。

舉一個例子，說明平方因數法。

例 3：取 $m = 8$ 、 $t = 5$ ，可得

第 1 步：因為 $8^2 = 1 \times 64 = 2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8$ ，

所以，滿足「 $e|8^2$ 、 $e < 8$ 」的 e 有 1 、 2 、 4

第 2 步：又 $m^2 + me = 8^2 + 8e = 8(8+e)$ ，

$\therefore$ 滿足「 $5|8+e$ 、 $5e|8(8+e)$ 」的 e 只有 2 。

則 $a = \frac{m+e}{5} = \frac{8+2}{5} = 2$ 、 $b = \frac{m^2 + me}{5e} = \frac{m(m+e)}{5e} = \frac{8 \cdot 10}{5 \cdot 2} = 8$

就是 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的一組解；即 $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ ，

這和方法一的結果(參考例 1)是一樣的。

二、找出 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 有自然數解的情形

利用定理二也可以導出 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 有解的充要條件，如定理五：

定理五

設 n 是大於 5 的自然數且 t 是自然數，若 $d | t^2 n^2$ 、 $d < tn$ 、 $5t | n+d$ 且 $5d | n^2 + nd$ ，則「若且唯若」 $m = \frac{n^2 + nd}{5d}$ 且 $c = \frac{n+d}{5}$ 是 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 的一組解。

證明：

若 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ，則 $\frac{1}{tn} = \frac{1}{5m} + \frac{1}{5tc}$ 。

因 $d | t^2 n^2$ 、 $d < tn$ ，由定理二可知

$c = \frac{n+d}{5t}$ 且 $m = \frac{n^2 + nd}{5d}$ 是 $\frac{1}{tn} = \frac{1}{5m} + \frac{1}{5tc}$ 的一組解。

因 $5t | n+d$ ，則 $c = \frac{n+d}{5}$ 是自然數。

因 $5d | n^2 + nd$ ，則 $m = \frac{n^2 + nd}{5d}$ 亦是自然數。

所以，可由 $\frac{1}{n} = \frac{1}{5(\frac{n^2 + nd}{5d})} + \frac{1}{5t(\frac{n+d}{5t})}$ 推出 $m = \frac{n^2 + nd}{5d}$ 且 $c = \frac{n+d}{5}$ 是 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ 的一組解。

□

定理五一樣可以發展出「平方因數法」去判斷「 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ 是否有解？」及找出

「有幾個解？」。敘述如下：

方法三 (平方因數法)

若要找出 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ 的相異自然數解，可按下列步驟計算：

第 1 步：選定 n 的值，找出滿足「 $d | t^2 n^2$ 、 $d < tn$ 」的平方因數 d 。

第 2 步：再從第 1 步的 d ，找出滿足「 $5t | n+d$ 且 $5d | n^2 + nd$ 」的。

則 $m = \frac{n^2 + nd}{5d}$ 、 $c = \frac{n+d}{5}$ 就是 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ 的一組解。

若第 2 步找不到滿足條件的 d ，則表示 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ 無解。

舉一個例子，說明方法三。

例 4：取 $n = 6$ 、 $t = 1$ ，可得

第 1 步：因為 $t^2 n^2 = 36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$ ，

所以，滿足「 $d|3$ 、 $d < 6$ 」的 d 有 1、2、3、4

第 2 步：又 $n^2 + nd = 6^2 + 6d = 6(6 + d)$ ，

$\therefore$ 第 1 步取出的 d ，滿足「 $5d|6(6 + d)$ 」的只有 $d = 4$ 。

則 $m = \frac{n^2 + nd}{5d} = \frac{6 \cdot 10}{4 \cdot 5} = 3$ 、 $c = \frac{n + d}{5t} = \frac{6 + 4}{5} = 2$ 就是 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ 的一組解；即 $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ 。

若取定理五中的 $t = 5$ ，會有一個較簡單的計算過程，寫成下面的定理：

定理六

設 n 是大於 5 的自然數，若 $d|n^2$ 、 $d < n$ 且 $5|n+d$ ，則「若且唯若」 $m = \frac{n^2 + nd}{d}$ 且 $c = \frac{n + d}{5}$ 是 $\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 的一組解。

證明：

若 $\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$ ，則 $\frac{1}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{5c}$ 。

因 $d|n^2$ 、 $d < n$ ，由定理二可知

$\frac{1}{n+d} + \frac{1}{\frac{n^2 + nd}{d}}$ 是 $\frac{1}{n} = \frac{1}{5c} + \frac{1}{m}$ 的一組解。設 $5c = n+d$ 、 $m = \frac{n^2 + nd}{d}$

因 $5|n+d$ ，則 $c = \frac{n+d}{5}$ 是自然數。

因 $d|n^2$ ，則 $m = \frac{n^2 + nd}{d} = \frac{n^2}{d} + n$ 亦是自然數。

所以，可由 $\frac{1}{n} = \frac{1}{5(\frac{n+d}{5})} + \frac{1}{\frac{n^2 + nd}{d}}$ 推出 $\frac{1}{n+d} + \frac{5}{\frac{n^2 + nd}{d}}$ 是 $\frac{5}{n} = \frac{1}{c} + \frac{5}{m}$ 的一組解。□

三、目前 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 5$) 有相異自然解的情形

(步驟一)先考慮 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 有自然數解的情形。

(步驟二)再考慮 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($m > t$) 有自然數解的情形。

利用上面的步驟，將 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的問題，分成下面「表二」的情形分別證明：

表二

N 值 類型	第一次 細分	第二次 細分	第三次 細分	步驟一 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$	d 值	步驟二 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	e 值
5k+1	10k+1	30k+1	60k+1	尚未做出			
			60k+31	$\frac{5}{n} = \frac{9}{m} + \frac{1}{c}$	1		16
		30k+11	不用細分	$\frac{5}{n} = \frac{4}{m} + \frac{1}{c}$	1		3
		30k+21	不用細分	$\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$	9	一定有解	
	10k+6	不用細分	不用細分	$\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$	4	一定有解	
5k+2	不用細分	不用細分	不用細分	$\frac{5}{n} = \frac{2}{m} + \frac{1}{c}$	1		1
5k+3				$\frac{5}{n} = \frac{3}{m} + \frac{1}{c}$	1		1
5k+4				$\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$	1	一定有解	
5k+5				$\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$	5	一定有解	

定理七

設 k 為自然數或 0，若 n 不是「 $60k+1$ 」的自然數，則 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 5$) 至少有一組相異自然數解。

證明：

因為證明方式類似，下面只寫出代表性的種形，剩下部分請自行推導。

依「 t 的取值是否為 5 的倍數」分成兩類說明：

1. 若 $t = 5$ ，以 $n = 5k + 4$ 為例：

根據定理五，只要從滿足「 $d \mid 25n^2$ 、 $d < 5n$ 」的 d ，再找出符合「 $25 \mid n+d$ 」的 d ，就會有解。

$$\because n^2 = (5k+4)^2 \quad \therefore \text{可取 } d = 1$$

$$\text{則 } c = \frac{n+d}{5} = k+1, \quad m = \frac{n(n+d)}{d} = (5k+4)(5k+5)。$$

2. 若 $t = 2$ ，以 $n = 5k + 2$ 為例：

根據定理五

(step1)

$$n = 5k+2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\therefore n^2 = (5k+2)^2$$

$$\therefore 1 \mid n^2, \quad 1 < n \quad (n \geq 7)$$

取 $d = 1$

$$m = \frac{2(5k+2)+1}{5} = \frac{10k+5}{5} = 2k+1$$

$$c = \frac{(5k+1)(10+5)}{5} = (2k+1)(5k+2)$$

(step2)

$$m = 2k+1$$

$$\therefore m^2 = (2k+1)^2$$

$$\therefore 1 \mid m^2, \quad 1 < m$$

取 $e = 1$

$$a = \frac{2k+2}{2} = k+1$$

$$b = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (k+1)(2k+1)$$

由定理六可知

若不是「 $60k+1$ 」型的自然數，則 $\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 至少有一組相異自然數解。

而且定理六找到的解，其中 m 都是「 $5k+5$ 」型的自然數。

因此，可使用定理一，得到 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 至少有一組相異自然數解。

再將 $\frac{5}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的解代入 $\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$ 的解，就可得出 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的解。 $\square$

四、其他類似問題有解的情形。

除了 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的方程式外，我們也探討了「 $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 」、「 $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 2$)」

和「 $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 3$)」是否有解的問題。很幸運地，前兩個問題對於給定範圍的所有

n 值都至少找到一組解。而第三個問題除了 $n = 6k+1$ 外，也都至少找到一組解。

定理八

若 n 為自然數，則 $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 至少有一組解。

證明：

因爲可明顯找到 $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$,

而且再次使用上式，可得 $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 。代入上式

即可得出 $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 。 $\square$

定理九

若 n 爲自然數，則 $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 2$) 至少有一組解。

證明：

1. 當 n 是奇數；設爲 $2k+1$ (k 爲自然數)

利用平方因數法；可取 $d=1$ ，得出 $\frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{2}{2(k+1)(2k+1)}$ 。

再對 $m=2(k+1)(2k+1)$ ，利用平方因數法；可取 $e=2$ ，得出

$$\frac{2}{2(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{(2k+1)(k+1)+1} + \frac{1}{(2k+1)(k+1)[(2k+1)(k+1)+1]}。$$

因此，有解 $\frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(2k+1)(k+1)+1} + \frac{1}{(2k+1)(k+1)[(2k+1)(k+1)+1]}$ 。

2. 當 n 是偶數；設爲 $2k$ (k 爲自然數)

(1) 若 $n > 2$ 時，利用平方因數法；可取 $d=2$ ，得出 $\frac{2}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{2}{2k(k+1)}$ 。

再對 $m=2k(k+1)$ ，利用平方因數法；可取 $e=2$ ，得出

$$\frac{2}{2k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)+1} + \frac{1}{k(k+1)[k(k+1)+1]}。$$

因此，有解 $\frac{2}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)+1} + \frac{1}{k(k+1)[k(k+1)+1]}$ 。

(2) 若 $n=2$ ，則有明顯解爲 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ 。 $\square$

定理十

若 n 不是「 $6k+1$ 」型的自然數，則 $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 3$) 至少有一組解。

證明：

設 k 爲自然數，分成三部分討論

1. 若 $n=3k$

有明顯解 $\frac{3}{3k} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 。

2. 若 $n=3k+2$

根據李孟修等[4, p8]的引理，若取引理中的 $p = 3k + 2$ 、 $q = 1$ 且 $m = k + 1$ ，可得

$$\frac{3}{3k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(3k+2)} \quad \circ \quad \text{又} \quad \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

$$\text{故有解} \quad \frac{3}{3k+2} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(3k+2)} \quad \circ$$

3. 若 $n = 6k - 2$

$$\text{因} \quad \frac{3}{6k-2} = \frac{1}{6k-2} + \frac{2}{6k-2} \quad \circ \quad \text{又} \quad \frac{2}{6k-2} = \frac{1}{3k-1} = \frac{1}{3k} + \frac{1}{(3k-1)3k},$$

$$\text{故有解} \quad \frac{3}{6k-2} = \frac{1}{6k-2} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{(3k-1)3k} \quad \circ \quad \square$$

伍、研究結果

一、若 n 為自然數，則 $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 至少有一組解。

二、若 n 為自然數，則 $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 2$) 至少有一組解。

三、若 n 不是「 $6k + 1$ 」型的自然數，則 $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 3$) 至少有一組解。

四、設 k 為自然數或 0，若 n 不是「 $60k + 1$ 」，則 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 5$) 至少有一組相異自然數解。

陸、討論

一、可以看出「 $\frac{m}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq m$) 是否都有解？」的問題，從 $m = 3$ 開始；找到解的 n 值。

二、由定理八已知「若 n 是 $60k + 1$ 」型的自然數，則 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ($n \geq 5$) 還未確定有沒有解。」但是由從定理七可知「若 n 是「 $5k + 1$ 」、「 $5k + 2$ 」或「 $5k + 3$ 」型的「質數」，則 $\frac{5}{n} = \frac{5}{m} + \frac{1}{c}$

無解。」這表示想要利用下面兩個步驟，對於不小於的 n 都找出 $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的一組解，是無法「全部」如願的！必須發展「直接討論分成 3 項之和」的定理才行，這是之後研究的重點。

目前：

(步驟一)先考慮 $\frac{t}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($m > 5$) 有自然數解的情形。

(步驟二)再考慮 $\frac{5}{n} = \frac{t}{m} + \frac{1}{c}$ ($n > 5$) 有自然數解的情形。

柒、參考資料及其他

- 1.文耀光(民 91)，古埃及的單位分數問題(第 52-58 頁)，數學傳播第 26 卷 4 期。
- 2.柯召、孫琦(民 92)，單位分數(第 33-39 頁)，香港智能教育出版社。
- 3.周軒、丁慈芳、林鈺佩(民 95)，「 $1=1+1$ ？一個埃及分數化成兩個埃及分數的探討」，台中市 94 學年度第 46 屆國民中小學科學展覽會—國中組數學科作品說明書。
- 4.李孟修、劉琦歲(民 95)，「埃及分數之固定項數分解問題」，台灣 2006 年國際科學展覽會—數學科作品說明書。
- 5.余文卿(民 95)，「整數」、「有理數與實數」(第 6-43 頁)，翰林版高中數學教科書。

西爾平斯基猜想(Sierpinski Conjecture)—未
【評 語】 040415
完成的埃及分數問題

- (1) 本作品勇於挑戰 50 年來西爾平斯基猜想，精神可嘉。
- (2) 所用方法甚具創意。
- (3) 此問題雖未完全解決，但對一個高中學生能有此表現是應給予鼓勵。