中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040411

酒瓶堆堆堆－堆出卡塔那數

學校名稱：高雄市立小港高級中學

作者：	指導老師：
高一　黃裕婷	陳彩媚
高一　黃秀玉	廖雅君
高一　柯盛彬	

關鍵詞：酒瓶堆疊數　卡塔那數　Catalan number

作品名稱：酒瓶堆堆堆－堆出卡塔那數

摘要

首先，由代數觀點切入，藉由$n=2$，$n=3$，$n=4$，……，到$n=10$的解題過程中，尋求S_1，S_2，S_3，……，S_{10}之間的規律，進而找出一般情形S_n：當底層為n個一字排開且緊密外切的酒瓶時所有往上堆疊酒瓶的情形。過程中，透由*Excel*的表格，尋求S_n的規則，由這些規則我們去推導，竟然發現S_n與*Catalan number*的第n項C_n有關，欲解釋彼此的關聯時，又發現S_n與n階鋸齒狀捷徑走法能形成$1-1$且*onto*的對應關係，讓人覺得在數學的世界中，代數與幾何之間神秘又充滿驚奇的關連！

壹、 研究動機

有一次陪父親去買葡萄酒時，看到店員在堆疊酒瓶，心想：如果底層是5個一字排開且緊密外切的酒瓶時所有往上堆疊酒瓶的情形有幾種？或進一步由酒瓶堆疊中的規律求出底層為n個一字排開且緊密外切的酒瓶時所有往上堆疊酒瓶的情形有幾種。此時我們想到高一上第二章提到數列找規律，希望經由數列規律或遞迴性質解決此問題。

貳、 研究目的

一、 由代數觀點求出底層為n個一字排開且緊密外切的酒瓶的所有往上堆疊酒瓶的堆疊數。

二、 藉由*Excel*尋求S_n的規律。

三、 找出S_n跟*Catalan number*的第n項C_n的對應關係。

参、 研究設備

一、 電腦、筆、紙、*Microsoft Visio*

肆、 研究過程和方法

一、 名詞解釋及符號說明：

（一）定義符號 S_n ：底層爲 n 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，所有往上堆疊酒瓶的組合數。

（二）第 n 項卡塔那數（ $Catalan\quad number$ ）： $C_n=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ ， $n\in N$

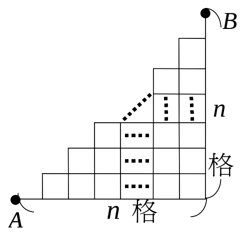
（三） C_m^n ：自 n 個相異物中任選 m 個（ $n\geq m\geq 0$ ）的組合數，其中 $C_m^n=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

（四） A_{ij} ：底層爲 i 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，產生（ i -1）個酒瓶空隙，由此（ i -1）個空隙選擇（ j -1）個空隙的所有往上堆疊酒瓶的全部情形所成集合。

（五） a_{ij} ：第 i 列第 j 行元素。底層爲 i 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，產生（ i -1）個酒瓶空隙，由此（ i -1）個空隙選擇（ j -1）個空隙時所有往上堆疊酒瓶的組合數稱爲 a_{ij} 。

換言之， $a_{ij}=A_{ij}$ 的元素個數 $=\left|A_{ij}\right|$ 。

（六） n 階鋸齒狀街道(如圖（一）)



圖（一）

二、 由代數觀點求 S_n

在操作底層爲n個一字排開且緊密外切的酒瓶的向上堆疊情形時，我們重複用到以下預備知識，特別在此說明如下：

（一）預備知識

1、 $C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}$ ， $n\in N$

證明： $C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}=\dfrac{(2n)!}{n!n!}-\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\dfrac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}=C_n$$

2、 巴斯卡定理$C_m^n = C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1}$ ，$1 \le m \le n-1$

證明：$C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1} = \dfrac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$

$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m-1)!} \times \frac{n}{m(n-m)}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_m^n$$

3、 若m 、 n 、 $k \in N$ ， $n \ge k$

則$C_k^n + C_k^{n+1} + C_k^{n+2} + \cdots\cdots + C_k^{n+m} = C_{k+1}^{n+m+1} - C_{k+1}^n \qquad n \ge k$

證明：$C_k^n + C_k^{n+1} + C_k^{n+2} + \cdots\cdots + C_k^{n+m}$

$$= [(C_k^k + C_k^{k+1} + \cdots + C_k^{n-1}) + C_k^n + C_k^{n+1} + \cdots + C_k^{n+m}] - (C_k^k + C_k^{k+1} + \cdots + C_k^{n-1})$$
$$= C_{k+1}^{n+m+1} - C_{k+1}^n$$

（二）機械性操作：藉由固定底層酒瓶個數〈本文所提到的固定底層酒瓶個數指的都是底層酒瓶一字排開且緊密外切的情形，至於底層酒瓶分開的情形也可由此模式堆導下去〉

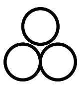
求S_1 ，S_2 ，S_3 ，$\cdots\cdots$ ，S_{10}

1、底層酒瓶為1個時

$S_1 = 1$

2、底層酒瓶為2個時

：C_0^1

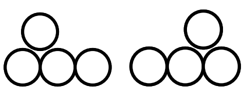


：$C_1^1 S_1$

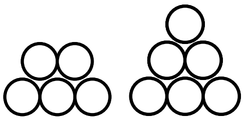
$\therefore S_2 = C_0^1 + C_1^1 S_1 = 2$

3、底層酒瓶為3個時

：C_0^2



：$C_1^2 S_1$

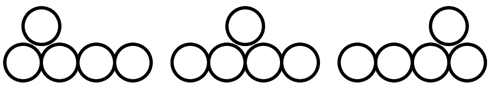


：$C_2^2 S_2$

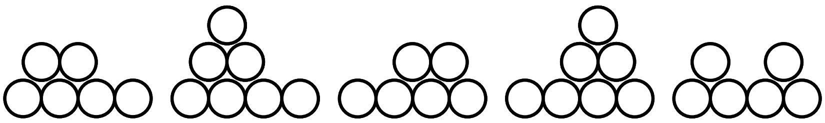
$\therefore S_3 = C_0^2 + C_1^2 S_1 + C_2^2 S_2 = 5$

4、底層酒瓶爲4個時

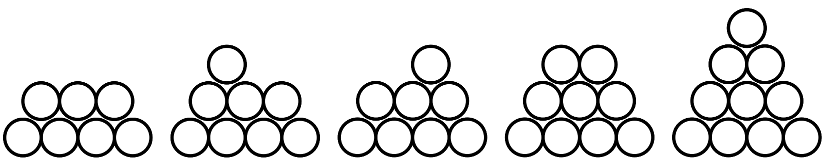
：C_0^3



：$C_1^3 S_1$



：$(2S_2 + 1S_1S_1)$



：$C_3^3 S_3$

$$S_4 = C_0^3 + C_1^3 S_1 + (2S_2 + 1S_1S_1) + C_3^3 S_3$$

$$= 1 + 3 + \left(2 \times 2 + 1\right) + 5$$

$$= 14$$

5、底層酒瓶爲5個時

考慮由 5 個酒瓶產生 4 個空隙來思考：

（1）4 個空隙都不堆　（即 C_0^4 ）

（2）4 個空隙選一個空隙放入酒瓶　（即 $C_1^4 S_1$ ）

（3）4 個空隙選 2 個空隙放入酒瓶，考慮 2 個酒瓶的相鄰與否，也就是討論正整數 2 的所有分割情形:（2）,（1,1）再分別求所對應的係數（即 $3S_2 + C_2^3 S_1 S_1$ ）

（4）4 個空隙選 3 個空隙放入酒瓶，而 3 的所有分割情形：（3），（2,1），（1,1,1），再分別求所對應係數　（即 $2S_3 + 2S_2S_1$ ）

（5）4 個空隙全選放入酒瓶，再求對應係數　（即 $C_4^4 S_4$ ）

$$\therefore S_5 = C_0^4 + C_1^4 S_1 + (3S_2 + C_2^3 S_1 S_1) + (2S_3 + 2S_2S_1) + C_4^4 S_4 = 42$$

6、底層酒瓶為6個時

由6個酒瓶產生5個空隙來思考：

（1）5個空隙都不堆　（即C_0^5）

（2）5個空隙選1個空隙放入酒瓶　（即$C_1^5 S_1$）

（3）5個空隙選2個空隙放入酒瓶，先考慮2的所有分割情形：（2），（1,1）再分別求所對應的係數　（即$4S_2 + C_2^4 S_1 S_1$）

（4）5個空隙選3個空隙放入酒瓶，先考慮3的所有分割情形：（3），（2,1），（1,1,1）再分別求所對應係數　（即$3S_3 + 6S_2 S_1 + C_3^3 S_1 S_1 S_1$）

（5）5個空隙選4個空隙放入酒瓶，先考慮4的所有分割情形：（4），（3,1），（2,2），（2,1,1），（1,1,1,1），再分別求所對應係數　（即$2S_4 + 2S_3 S_1 + 1S_2 S_2$）

（6）5個空隙全選放入酒瓶，再求對應係數（即$C_5^5 S_5$）

$$\therefore S_6 = C_0^5 + C_1^5 S_1 + (4S_2 + C_2^4 S_1 S_1) + (3S_3 + 6S_2 S_1 + C_3^3 S_1 S_1 S_1) + (2S_4 + 2S_3 S_1 + 1S_2 S_2) + C_5^5 S_5 = 132$$

7、底層酒瓶為7個時

$$S_7 = C_0^6 + C_1^6 S_1 + (5S_2 + C_2^5 S_1 S_1) + (4S_3 + 12S_2 S_1 + C_3^4 S_1 S_1 S_1) + (3S_4 + 6S_3 S_1 + 3S_2 S_2 + 3S_2 S_1 S_1) + (2S_5 + 2S_4 S_1 + 2S_3 S_2) + C_6^6 S_6 = 429$$

8、底層酒瓶為8個時

$$S_8 = C_0^7 + C_1^7 S_1 + (6S_2 + C_2^6 S_1 S_1) + (5S_3 + 20S_2 S_1 + C_3^5 S_1 S_1 S_1) + (4S_4 + 12S_3 S_1 + 6S_2 S_2 + 12S_2 S_1 S_1 + C_4^4 S_1 S_1 S_1 S_1) + (3S_5 + 6S_4 S_1 + 6S_3 S_2 + 3S_3 S_1 S_1 + 3S_2 S_2 S_1) + (2S_6 + 2S_5 S_1 + 2S_4 S_2 + 1S_3 S_3) + C_7^7 S_7 = 1430$$

9、底層酒瓶為9個時

$$S_9 = C_0^8 + C_1^8 S_1 + (7S_2 + C_2^7 S_1 S_1) + (6S_3 + 30S_2 S_1 + C_3^6 S_1 S_1 S_1) + (5S_4 + 20S_3 S_1 + 10S_2 S_2 + 30S_2 S_1 S_1 + C_4^5 S_1 S_1 S_1 S_1) + (4S_5 + 12S_4 S_1 + 12S_3 S_2 + 12S_3 S_1 S_1 + 12S_2 S_2 S_1 + 4S_2 S_1 S_1 S_1 + (3S_6 + 6S_5 S_1 + 6S_4 S_2 + 3S_3 S_3 + 3S_4 S_1 S_1 + 6S_3 S_2 S_1 + 12S_2 S_2 S_2) + (2S_7 + 2S_6 S_1 + 2S_5 S_2 + 2S_4 S_3) + C_8^8 S_8 = 4862$$

10、底層酒瓶爲10個時

$$S_{10}=C_0^9+C_1^9S_1+(8S_2+C_2^8S_1S_1)+(7S_3+42S_2S_1+C_3^7S_1S_1S_1)+(6S_4+30S_3S_1$$
$$+15S_2S_2+60S_2S_1S_1+C_4^6S_1S_1S_1S_1)+(5S_5+20S_4S_1+20S_3S_2+30S_3S_1S_1+30S_2S_2S_1$$
$$+20S_2S_1S_1S_1+C_5^5S_1S_1S_1S_1S_1)+(4S_6+12S_5S_1+12S_4S_2+12S_4S_1S_1+6S_3S_3$$
$$+24S_3S_2S_1+4S_3S_1S_1S_1+4S_2S_2S_2+6S_2S_2S_1S_1)+(3S_7+6S_6S_1+6S_5S_2$$
$$+3S_5S_1S_1+6S_4S_3+6S_4S_2S_1+3S_3S_3S_1+3S_3S_2S_2)+(2S_8+2S_7S_1+2S_6S_2$$
$$+2S_5S_3+1S_4S_4)+C_9^9S_9=16796$$

（三）

1、 我們將S_1，S_2，S_3，……，S_{10}的求解過程整理如下

S_1	1
S_2	1+1
S_3	1+2+2
S_4	1+3+5+5
S_5	1+4+9+14+14
S_6	1+5+14+28+42+42
S_7	1+6+20+48+90+132+132
S_8	1+7+27+75+165+297+429+429
S_9	1+8+35+110+275+572+1001+1430+1430
S_{10}	1+9+44+154+429+1001+2002+3432+4862+4862

表（一）

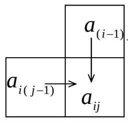
2、 由 1.，我們將+號省略予以表格化，得到

S_1:	1									
S_2:	1	1								
S_3:	1	2	2							
S_4:	1	3	5	5						
S_5:	1	4	9	14	14					
S_6:	1	5	14	28	42	42				
S_7:	1	6	20	48	90	132	132			
S_8:	1	7	27	75	165	297	429	429		
S_9:	1	8	35	110	275	572	1001	1430	1430	
S_{10}:	1	9	44	154	429	1001	2002	3432	4862	4862

表（二）

再將此表格在 Excel 下找出規律化公式如下：

S_n 之首項均爲 $1\left(\forall n\in N\right)$，末兩項均相同($n\geq 2$)，除首末項外，均滿足



$$即\ a_{ij}=\begin{cases}1 & j=1\ ，i\in N\\ a_{i(j-1)} & i=j>1\\ a_{(i-1)j}+a_{i(j-1)} & i>j>1\end{cases}\qquad\cdots\cdots(*)$$

由此規律可知

$$S_{11}=1+10+54+208+637+1638+3640+7072+11934+16796+16796$$
$$=58786$$

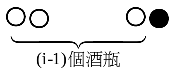
3、 欲證明$(*)$

觀察 S_{k-1} 與 S_k

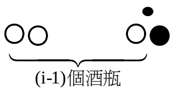
$A_{ij}\ (i\geq j\geq 1)$：底層爲 i 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，產生（i-1）個酒瓶空隙，由此（i-1）個空隙選擇（ j-1）個空隙的所有往上堆疊酒瓶的全部情形所成集合。

（1）首先討論 $i>j>1$

$A_{(i-1)j}$ 的每個元素底層右方加一個酒瓶　　如：

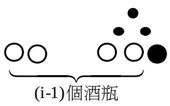


$A_{(i-1)(j-1)}$ 的每個元素底層右方加一個酒瓶，再以新底層爲基準，第二層最右端空隙開始插入一個酒瓶　　如：



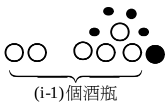
$A_{(i-1)(j-2)}$ 的每個元素底層右方加一個酒瓶，再以新底層爲基準，第二層最右端空隙開始依序插入二個酒瓶，此二酒瓶之間空隙再往上插入一酒瓶〈如圖〈二〉〉，若遇到原第二層右端已有酒瓶，則所插入的第二個酒瓶往左一格（若再遇到酒瓶則再向左一格插入），且將插入二酒瓶的上方空隙處補上酒瓶（以第二層爲基準共補 2 層）〈如圖〈三〉〉

如：



圖〈二〉

如：



圖〈三〉

⋮

$A_{(i-1)(j-l)}\ (0\leq l\leq j-1)$ 的每個元素底層右方加一個酒瓶，再以新底層爲基準，第二層最右端空隙開始依序插入 l 個酒瓶，此 l 個酒瓶之間空隙再往上

填滿酒瓶（以第二層爲基準共填滿l層），若依序插入過程中如遇到原第二層右端已有酒瓶，則所插入的酒瓶必須延後往左一格插入（若再遇到酒瓶則再向左一格插入），且將插入l個酒瓶的上方空隙處補上酒瓶（以第二層爲基準共補l層）

⋮

結論：由以上敘述可知：我們可經由以上方式將$A_{(i-1)(j-l)}$ $\left(0 \le l \le j-1\right)$的每個元素變成$A_{ij}$的元素，且$A_{(i-1)p} \cap A_{(i-1)q} = \varnothing$，其中$1 \le p,q \le j$ 。$\cdots(**)$

從另一個方向來思考

$\forall M \in A_{ij}$ ，考慮圖形M 中包含最右端酒瓶的最高層數：

若只有1層，則M 爲$A_{(i-1)j}$的元素型式增加酒瓶而得；

若有2層，則M 爲$A_{(i-1)(j-1)}$的元素型式增加酒瓶而得；

⋮

若有l層$\left(0 \le l \le j\right)$，則$M$ 爲$A_{(i-1)(j-l+1)}$的元素型式增加酒瓶而得

因此，$i > j > 1$時A_{ij}的每個元素必可對應到一個$A_{(i-1)(j-l)}$型式$(0 \le l \le j)$

所以，$i > j > 1$時，

$\left|A_{ij}\right| = \left|A_{(i-1)1} \cup A_{(i-1)2} \cup \cdots \cup A_{(i-1)j}\right| = |A_{(i-1)1}| + |A_{(i-1)2}| + \cdots + |A_{(i-1)j}|$ (由$(**)$知)

所以$a_{ij} = a_{(i-1)1} + a_{(i-1)2} + a_{(i-1)3} + \cdots + a_{(i-1)(j-1)} + a_{(i-1)j} = a_{i(j-1)} + a_{(i-1)j}$

（2）$i = j > 1$時

$a_{ij} = a_{ii} =$〝底層爲 i個一字排開且緊密外切的酒瓶時，產生（i-1）個酒瓶空隙，由此（i-1）個空隙選擇（ j-1）=（i-1）個空隙的所有往上堆疊酒瓶的組合數〞

$= S_{i-1}$

$a_{i(j-1)} = a_{i(i-1)} = a_{(i-1)1} + a_{(i-1)2} + a_{(i-1)3} + \cdots + a_{(i-1)(i-1)} = S_{i-1}$

所以，$i = j > 1$時，$a_{ij} = a_{i(j-1)}$

（3）$j = 1$時

$a_{ij} = a_{i1} =$〝底層爲 i個一字排開且緊密外切的酒瓶時，產生（i-1）個酒瓶

空隙，由此（i-1）個空隙選擇$(j-1)=0$ 個空隙的所有往上堆疊酒瓶的組合數″

$=1$

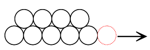
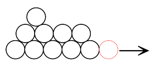
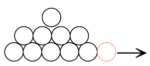
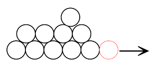
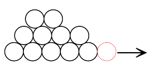
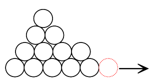
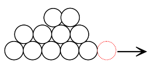
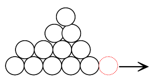
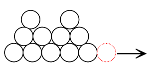
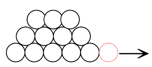
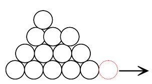
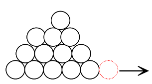
所以， $j=1$時， $a_{ij}=a_{i1}=1$

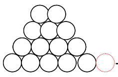
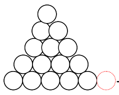
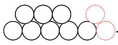
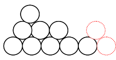
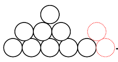
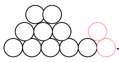
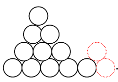
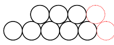
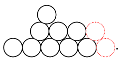
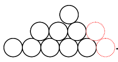
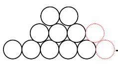
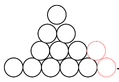
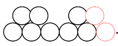
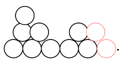
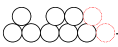
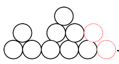
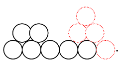
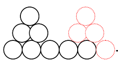
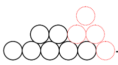
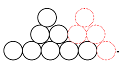
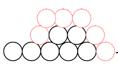
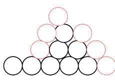
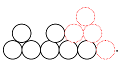
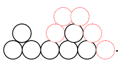
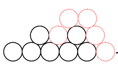
4、 由 3 的說明可知 $i>j>1$時

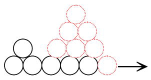
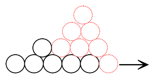
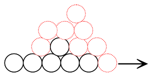
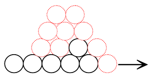
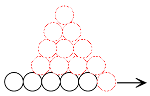
$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= a_{(i-1)j}+a_{i(j-1)} \\
&= a_{(i-2)j}+a_{(i-1)(j-1)}+a_{i(j-1)} \\
&= a_{(i-3)j}+a_{(i-2)(j-1)}+a_{(i-1)(j-1)}+\ldots+a_{i(j-1)} \\
&\vdots \\
&= a_{jj}+a_{(i-2)(j-1)}+\ldots\ldots+a_{i(j-1)} \\
&= a_{j(j-1)}+a_{(i-2)(j-1)}+\ldots\ldots+a_{i(j-1)} \\
&= \sum_{k=j}^{i} a_{k(j-1)}
\end{aligned}
$$

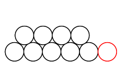
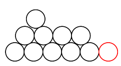
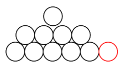
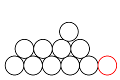
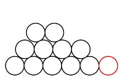
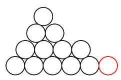
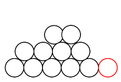
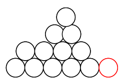
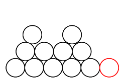
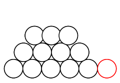
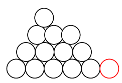
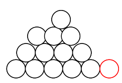
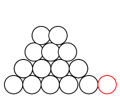
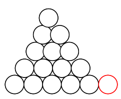
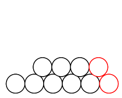
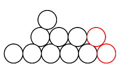
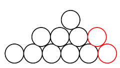
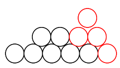
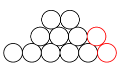
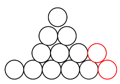
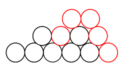
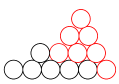
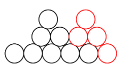
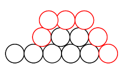
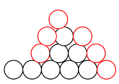
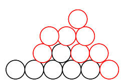
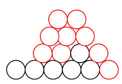
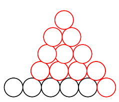
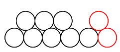
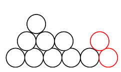
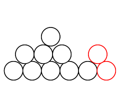
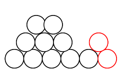
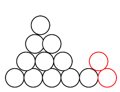
由此可知，a_{ij} 可表成前一行的第 j 項一直加到前一行的第 i 項

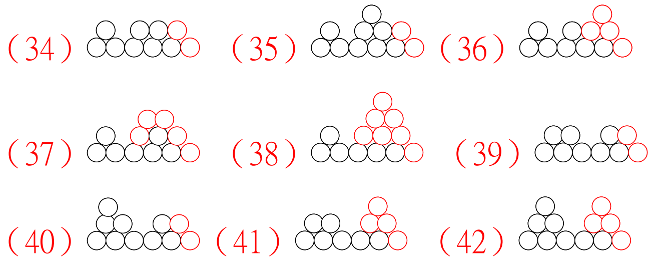
5、 我們將上列敘述的對應方式以 $a_{65}=a_{55}+a_{54}+a_{53}+a_{52}+a_{51}$ 爲例說明如下

(1) $\forall M\in A_{55}$ ，將 M 底層右方加一個酒瓶，則可成爲 a_{65} 的元素〈括號內紅色數字爲所對應到 A_{65} 元素編號〉	
a_{55} ： S_4	（55-1）（ 1） （55-2）（ 2） （55-3）（ 3）（55-4）（ 4） （55-5）（ 5） （55-6）（ 6） （55-7）（ 7） （55-8）（ 8） （55-9）（ 9）（55-10）（10） （55-11）（11） （55-12）（12）

<table>
<tr><td></td><td>(55-13)  → (13)　(55-14)  → (14)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) $\forall M \in A_{54}$，將 M 底層右方加一個酒瓶，再以新底層爲基準，第二層最右端空隙開始插入一個酒瓶則可成爲 a_{65} 的元素</td></tr>
<tr><td>a_{54} ：
$(2S_3 + 2S_2S_1)$</td><td>(54-1)  → (29)　(54-2)  → (30)
(54-3)  → (31)　(54-4)  → (32)
(54-5)  → (33)　(54-6)  → (15)
(54-7)  → (16)　(54-8)  → (17)
(54-9)  → (19)　(54-10)  → (20)
(54-11)  → (39)　(54-12)  → (40)
(54-13)  → (34)　(54-14)  → (35)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3) $\forall M \in A_{53}$，將 M 底層右方加一個酒瓶，再以新底層爲基準，第二層最右端空隙開始插入二個酒瓶，若遇到原第二層右端已有酒瓶，則所插入的第二個酒瓶往左一格（若再遇到酒瓶則再向左一格插入），且將插入二個酒瓶的上方空隙處補上酒瓶（以第二層爲基準共補 2 層）則可成爲 a_{65} 的元素</td></tr>
<tr><td>a_{53} ：
$(3S_2 + C_2^3 S_1 S_1)$</td><td>(53-1)  → (41)　(53-2)  → (42)
(53-3)  → (18)　(53-4)  → (23)
(53-5)  → (24)　(53-6)  → (25)
(53-7)  → (36)　(53-8)  → (21)
(53-9)  → (37)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(4) $\forall M \in A_{52}$，將 M 底層右方加一個酒瓶，再以新底層爲基準，第二層最右端空隙開始插入三個酒瓶，若遇到原第二層右端已有酒瓶，則所插入的第二個酒瓶往左一格（若再遇到酒瓶則再向左一格插入），且將插入三個酒瓶的上方空隙處補上酒瓶（以第二層爲基準共補 3 層）則可成爲 a_{65} 的元素</td></tr>
</table>

a_{52} ：$4S_1$	(52-1)  (38)　(52-2)  (22) (52-3)  (26) (52-4)  (27)
(5) $\forall M \in A_{51}$，將 M 底層右方加一個酒瓶，再以新底層爲基準，第二層最右端空隙開始插入四個酒瓶，且將插入四個酒瓶的上方空隙處補上酒瓶（以第二層爲基準共 4 層）則可成爲 a_{65} 的元素	
a_{51}	(51-1)  (28)

(6)底層酒瓶爲 6 個，產生 5 個空隙，選入 4 個放入（○ 代表刪去這些○，即可成爲 A_{55} 或 A_{54} 或 A_{53} 或 A_{52} 或 A_{51} 其中一類的元素）	
a_{65} ： $(2S_4+2S_3S_1$ $+1S_2S_2)$	(1)  (2)  (3)  (4)  (5)  (6)  (7)  (8)  (9)  (10)  (11)  (12)  (13)  (14)  (15)  (16)  (17)  (18)  (19)  (20)  (21)  (22)  (23)  (24)  (25)  (26)  (27)  (28)  (29)  (30)  (31)  (32)  (33) 



結論

a_{51} 的編碼：	1									
對應到 a_{65} 的編碼：	28									
a_{52} 的編碼：	1	2	3	4						
對應到 a_{65} 的編碼：	38	22	26	27						
a_{53} 的編碼：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
對應到 a_{65} 的編碼：	41	42	18	23	24	25	36	21	37	
a_{54} 的編碼：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
對應到 a_{65} 的編碼：	29	30	31	32	33	15	16	17	19	20
a_{54} 的編碼：	11	12	13	14						
對應到 a_{65} 的編碼：	39	40	34	35						
a_{55} 的編碼：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
對應到 a_{65} 的編碼：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{55} 的編碼：	11	12	13	14						
對應到 a_{65} 的編碼：	11	12	13	14						

$\therefore a_{65} = a_{55} + a_{54} + a_{53} + a_{52} + a_{51}$

同樣對應方式可說明 $a_{ij} = a_{j(j-1)} + a_{(j+1)(j-1)} + \ldots\ldots + a_{i(j-1)}$

因此，我們只要找到第一行的通式，就可求出第二行的任何一項，再求出第二行的通式，又可求出第三行的任何一項，再求出第三行的通式，……依此類推，可求出 a_{ij} 的通式。

詳細證明如下：

6、 $(\forall n \in N)$

$a_{n1} = 1$

$$a_{n2}=\sum_{k=2}^{n}a_{k1}=\sum_{l=1}^{n-1}a_{(l+1)1}=\sum_{l=1}^{n-1}1=n-1=\frac{n-1}{1}C_0^n$$

$$a_{n3}=\sum_{k=3}^{n}a_{k2}=\sum_{l=1}^{n-2}a_{(l+2)2}=\sum_{l=1}^{n-2}\frac{l+1}{1}C_0^{l+2}$$

$$=\sum_{l=1}^{n-2}l+\sum_{l=1}^{n-2}1=\frac{(n-2)(n+1)}{2}=\frac{n-2}{2}C_1^{n+1}$$

$$a_{n4}=\sum_{k=4}^{n}a_{k3}=\sum_{k=4}^{n}\frac{k-2}{2}C_1^{k+1}=\sum_{l=1}^{n-3}\frac{l+1}{2}C_1^{l+4}$$

$$=\frac{1}{2}(\sum_{l=1}^{n-3}l^2+5\sum_{l=1}^{n-3}l+\sum_{l=1}^{n-3}4)$$

$$=\frac{(n-3)(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n-3}{3}C_2^{n+2}$$

⋮

⋮

猜測 $a_{nk}=\frac{n-(k-1)}{k-1}C_{k-2}^{n+(k-2)}$ ，$2\le k\le n$

證明：(1) $k=2$時，$a_{n2}=\frac{n-1}{1}C_0^n$（前已證），故$k=2$成立

(2) 設$k=p$成立$(2\le p\le n)$ ，即$a_{np}=\frac{n-(p-1)}{p-1}C_{p-2}^{n+(p-2)}$

則$k=p+1$時，

$$a_{n(p+1)}=\sum_{k=p+1}^{n}a_{kp}=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{k-(p-1)}{p-1}C_{p-2}^{k+(p-2)}$$

$$=\sum_{w=1}^{n-p}\frac{w+1}{p-1}C_{p-2}^{w+2p-2}$$ 〈此處利用到變數變換 w=k-p 〉

$$=\sum_{w=1}^{n-p}\frac{(w+2p-1)-(2p-2)}{p-1}C_{p-2}^{w+2p-2}$$

〈此處利用 $\frac{n+1}{m+1}C_m^n=\frac{n+1}{m+1}\times\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}=C_{m+1}^{n+1}$ 〉

$$=\sum_{w=1}^{n-p}\frac{(w+2p-1)}{p-1}C_{p-2}^{w+2p-2}-2\sum_{w=1}^{n-p}C_{p-2}^{w+2p-2}$$

$$=\sum_{w=1}^{n-p}\frac{(w+2p-1)}{p-1}\times\frac{(w+2p-2)!}{(w+p)!(p-2)!}-2(C_{p-2}^{2p-1}+C_{p-2}^{2p}+\cdots+C_{p-2}^{n+p-2})$$

$$=\sum_{w=1}^{n-p}\frac{(w+2p-1)!}{(w+p)!(p-1)!}-2(C_{p-1}^{n+p-1}-C_{p-1}^{2p-1})$$

$$=\sum_{w=1}^{n-p}C_{p-1}^{w+2p-1}-2(C_{p-1}^{n+p-1}-C_{p-1}^{2p-1})$$

$$=(C_p^{n+p}-C_p^{2p})-2(C_{p-1}^{n+p-1}-C_{p-1}^{2p-1})$$

$$=C_p^{n+p}-2C_{p-1}^{n+p-1}-(C_p^{2p}-2C_{p-1}^{2p-1})$$

$$=\frac{(n+p)!}{p!n!}-2\times\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}-(\frac{(2p)!}{p!p!}-2\times\frac{(2p-1)!}{(p-1)!p!})$$

$$=\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}\left(\frac{n+p}{p}-2\right)-\frac{(2p-1)!}{(p-1)!p!}\left(\frac{2p}{p}-2\right)$$

$$=\frac{n-p}{p}C_{p-1}^{n+p-1}$$

由此可知a_{ij}的通式$=\dfrac{i-(j-1)}{j-1}C_{j-2}^{i+(j-2)}$ ，$2\le j\le i$ ，因式S_n可以求得，說明如下：

7、 S_n的第k項$a_{nk}=\dfrac{n-(k-1)}{k-1}C_{k-2}^{n+(k-2)}$ ，$2\le k\le n$

$$\therefore S_n=a_{n1}+a_{n2}+a_{n3}+\cdots\cdots+a_{nn}$$

$$=1+\frac{n-1}{1}C_0^n+\frac{n-2}{2}C_1^{n+1}+\frac{n-3}{3}C_2^{n+2}+......+\frac{n-(n-1)}{n-1}C_{n-2}^{n+(n-2)}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k}C_{k-1}^{n+(k-1)}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{n}{k}-1)C_{k-1}^{n+k-1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k}C_n^{n+k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}C_n^{n+k-1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k}\times\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}-(C_n^n+C_n^{n+1}+C_n^{n+2}+\cdots\cdots+C_n^{2n-2})$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}-C_{n+1}^{2n-1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{n+k-1}-C_{n+1}^{2n-1}$$

$$=(1+C_{n-1}^n+C_{n-1}^{n+1}C_{n-1}^{n+2}+\cdots\cdots+C_{n-1}^{2n-2})-C_{n+1}^{2n-1}$$

$$=(C_n^n+C_{n-1}^n+C_{n-1}^{n+1}C_{n-1}^{n+2}+\cdots\cdots+C_{n-1}^{2n-2})-C_{n+1}^{2n-1}$$

$$=C_n^{2n-1}-C_{n+1}^{2n-1}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}-\frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})$$

$$=\frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\left(\frac{2}{(n-1)(n+1)}\right)$$

$$=\frac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{2n(2n-1)!}{n(n-1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{n}\times\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{n+1}\times\frac{(2n)!}{n!n!}$$

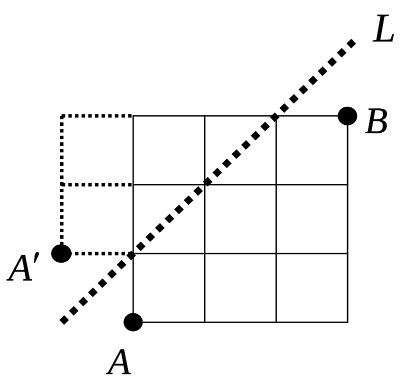
$$=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}=C_n$$

至此我們終於求出 S_n 原來就是卡塔那數的第 n 項 C_n

三、 由幾何觀點求 S_n

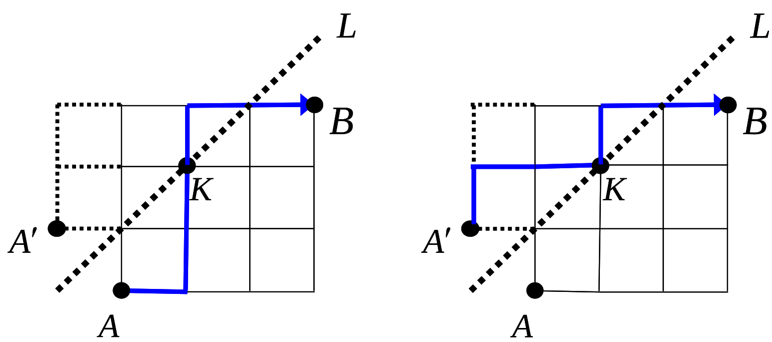
（一）預備知識：求鋸齒狀街道由 A 到 B 走捷徑的方法數

1、 如圖（四），〝由 A 到 B 走捷徑碰觸直線 L 的走法〞可與由〝A' 到 B 走棋盤型街道走法〞形成一一對應方式，方式如下：



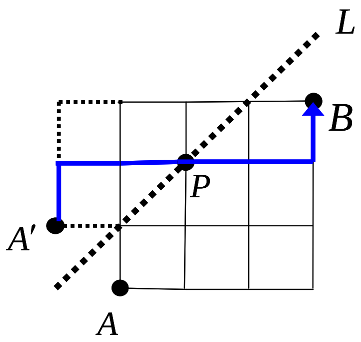
圖（四）

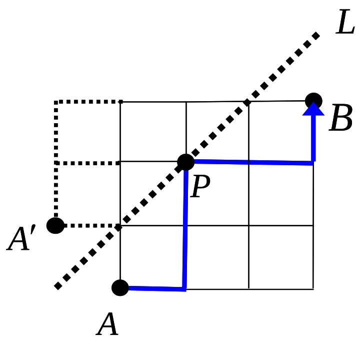
（1）每一條由 A 出發碰觸直線 L 走法的第一個與 L 交點設為 K ，K 點以前的路徑對稱直線 L ，K 點以後的路徑與原路徑相同，因為 A 對 L 的對稱點是 A' 所以可對應出一條由 A' 到 B 的捷徑走法，(如圖（五）)



圖（五）

（2）每一條由 A' 到 B 的棋盤型街道捷徑走法必與 L 相交，設第一個交點為 P ，P 點以前的路徑也是對稱直線 L ， P 點以後的路徑也是循原路徑走到 B 點，所以這條找到的新路徑必從 A 出發最後走到 B ，(如圖（六）)





圖（六）

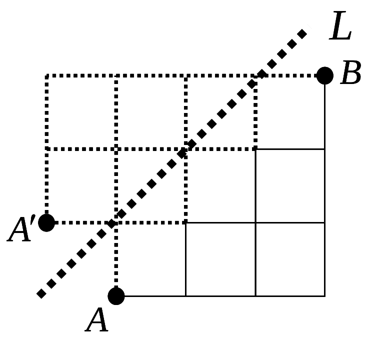
2、 如圖（七）由 A 到 B 走 3 階鋸齒狀街道捷徑走法

=由 A 到 B 走捷徑，不碰觸直線 L 的走法

=(A 到 B 走捷徑的走法)－(A 到 B 碰觸直線 L 走捷徑的走法)

=(A 到 B 走捷徑的走法)－(A' 到 B 走捷徑的走法)

$=C_3^6-C_2^6=5$



圖（七）

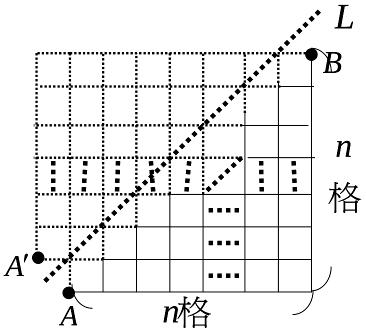
3、 如圖（八）當底層有 n 格，走鋸齒狀捷徑時，依循（1）的對應方式，再仿（2）的求法之說明可知

A 到 B 走鋸齒狀街道的捷徑走法數

$=A$ 到 B 走捷徑，不碰觸直線 L 的走法

=(A 到 B 走棋盤型捷徑的走法)－(A' 到 B 走棋盤型捷徑的走法)

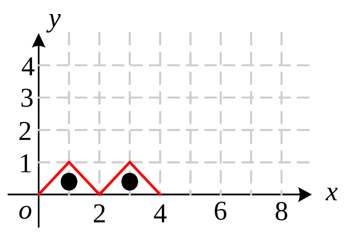
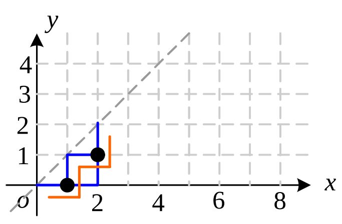
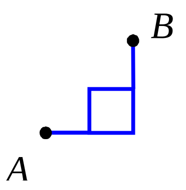
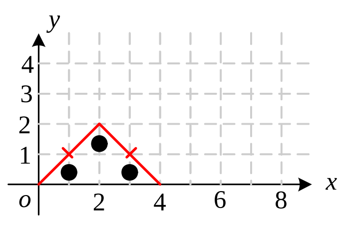
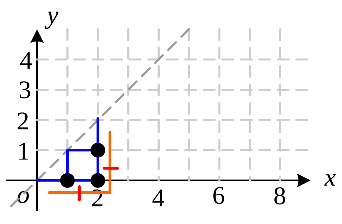
$=C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}$



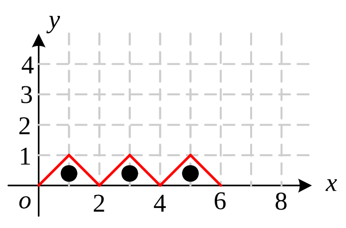
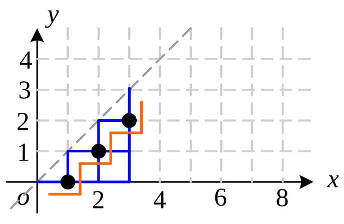
圖（八）

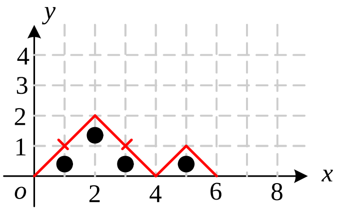
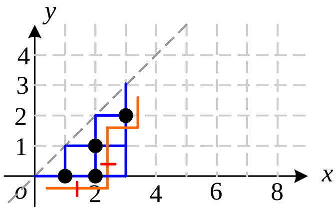
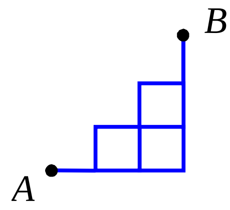
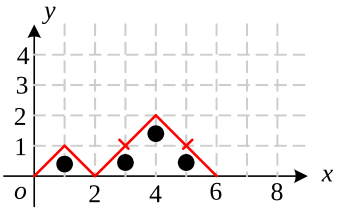
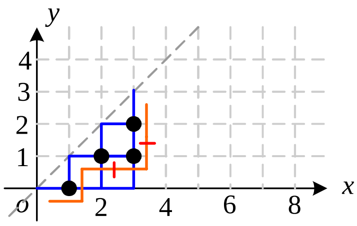
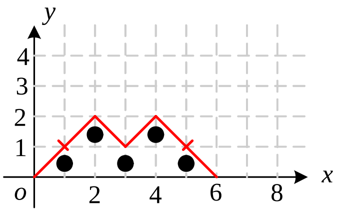
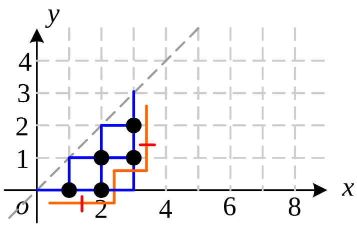
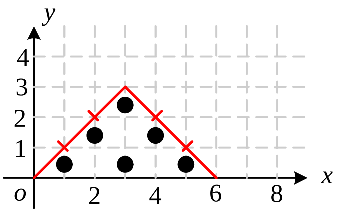
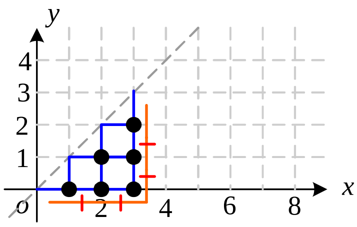
（二）將底層爲 n 個一字排開且緊密外切酒瓶時，所有往上堆疊酒瓶的堆疊法與 n 階鋸齒狀街道捷徑走法找到之間的對應關係(爲對應方便起見，將酒瓶圖形○改爲●)

1、 $n=2$ 時

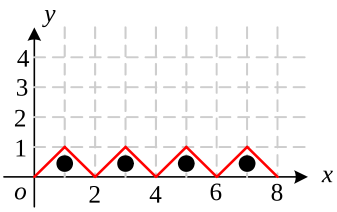
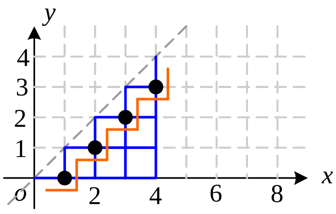
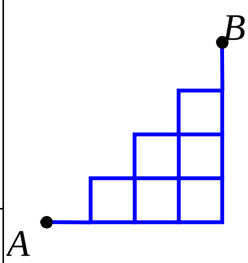
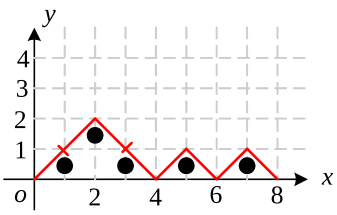
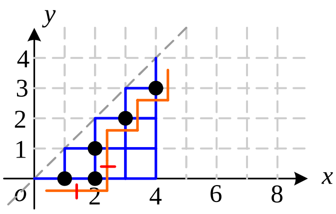
包含此 2 點由(0,0)到(4,0)走向量(1,1)或(1,-1)共 4 步	對應到 2 階鋸齒狀街道捷徑走法	說明
		 (A→B)= $C^4_2 - C^4_1$ =2
		

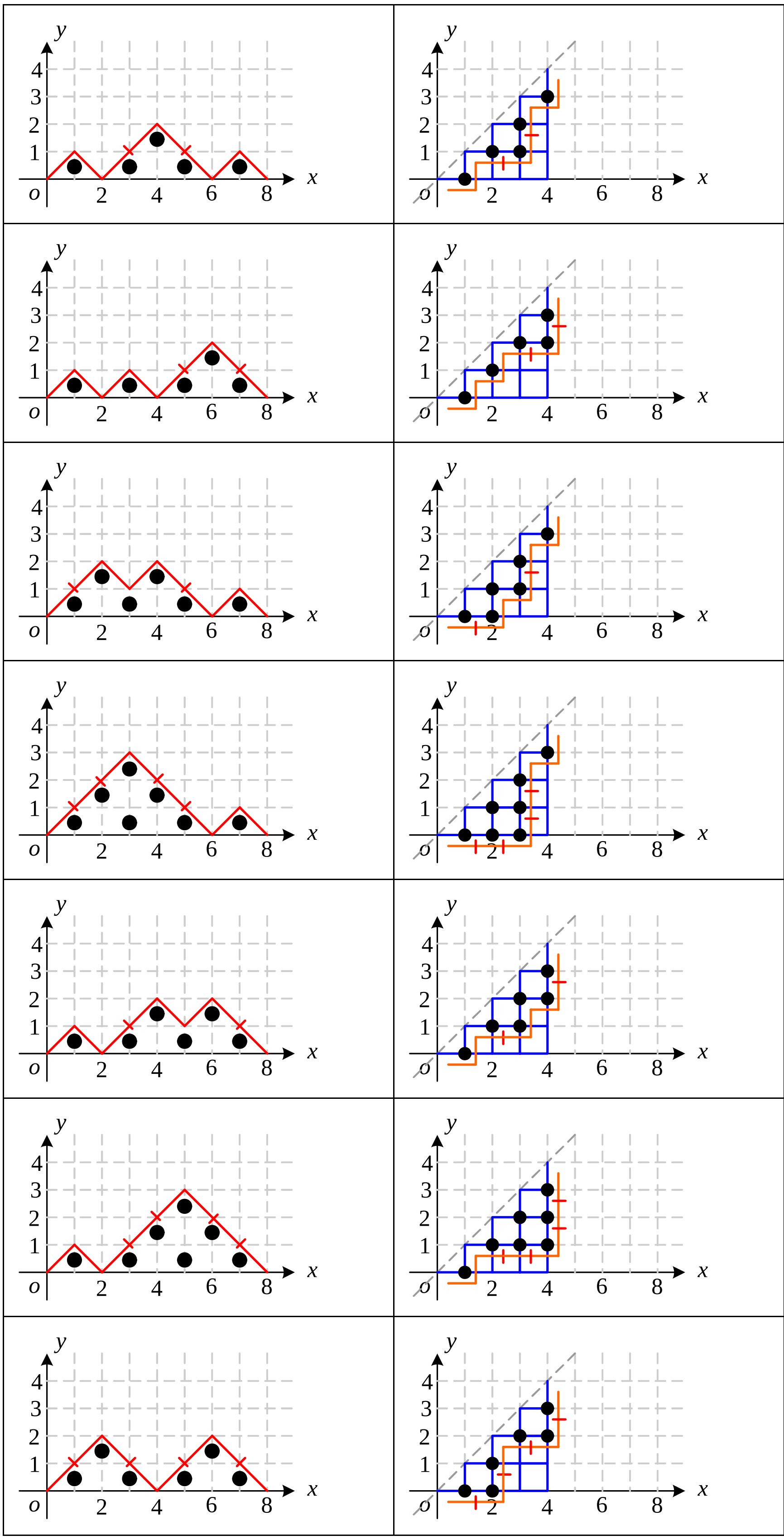
2、 $n=3$ 時

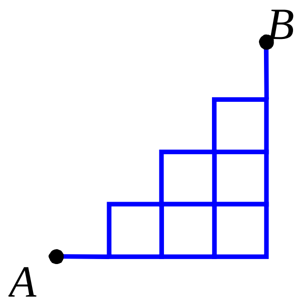
包含此 3 點由(0,0)到(6,0)走向量(1,1)或(1,-1)共 6 步	對應到 3 階鋸齒狀街道捷徑走法	說明
		

		 (A→B)=C_3^6 - C_2^6 =5
		
		
		

3、 $n=4$時

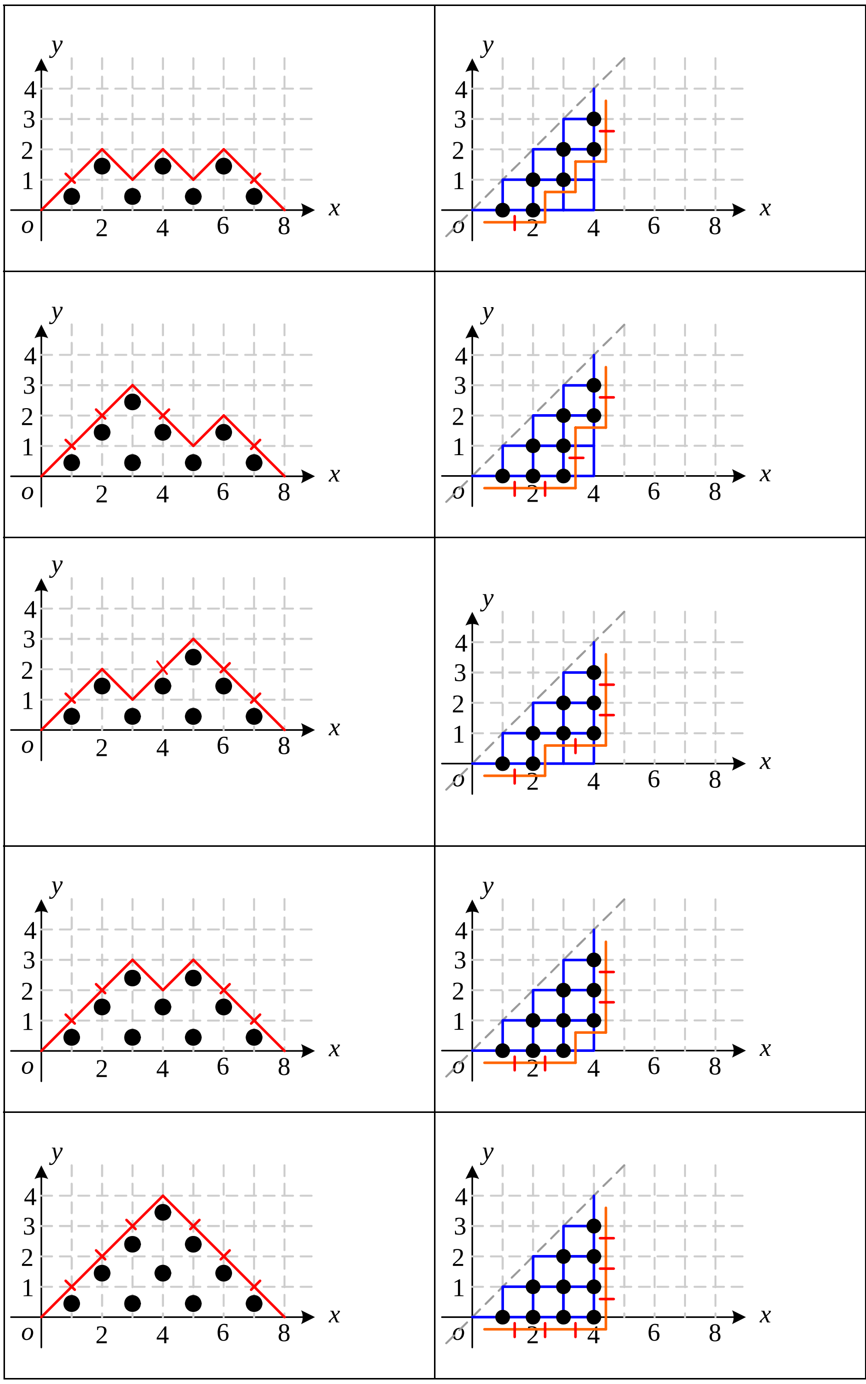
包含此 4 點由(0,0)到(8,0)走向量(1,1)或(1,-1)共 8 步	對應到 4 階鋸齒狀街道捷徑走法	說明
		 (A→B)=C_4^8-C_3^8 =14
		

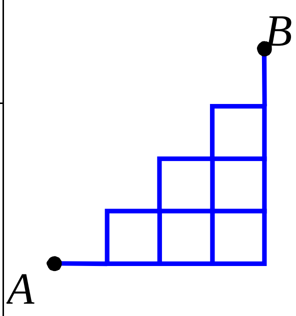




$(A \rightarrow B) = C_4^8 - C_3^8$

$= 14$

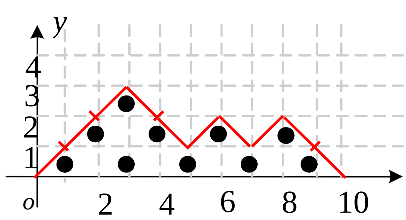




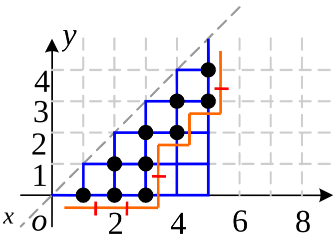
$(A \to B) = C^8_4 - C^8_3$

$= 14$

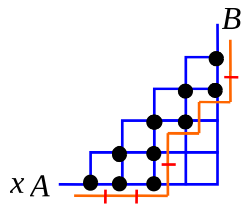
4、 $n=5$時



圖（九）



圖（十）



圖（十一）

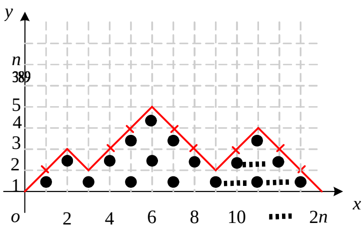
（1）底層爲 5 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，每一個往上堆疊酒瓶的堆疊法，對應到一個包含所有酒瓶的最小格子點捷徑走法（如圖（九））。

（2）將圖（九）的堆疊圖形對 x 軸做對稱，再整體長度縮小爲原來的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍，最後將整個圖形經過適當的旋轉、平移，使底層爲 5 個代表酒瓶的●依序坐落在（1,0），（2,1），（3,2），（4,3），（5,4）的位置，此時圖（九）的包含所有酒瓶的最小格子點捷徑走法也跟著鏡射、伸縮、旋轉、平移且緊緊地包住所有的酒瓶（如圖（十））。

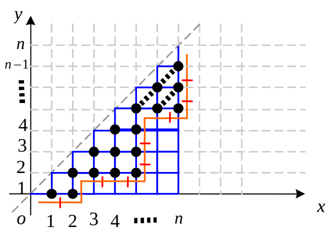
（3）將圖（十）的圖去掉坐標系，只保留主要圖形即得圖（十一）。

因爲圖（九）$\xrightleftharpoons[\text{平移◆旋轉◆伸縮◆鏡射}]{\text{鏡射◆伸縮◆旋轉◆平移}}$圖（十）$\xrightleftharpoons[\text{座標化}]{\text{去掉座標系}}$圖（十一），且伸縮、鏡射、平移、旋轉不改變其包含所有酒瓶的捷徑走法，因此，$S_5=$〝5 階鋸齒狀街道捷徑走法數〞$=C_5^{10}-C_4^{10}=C_5=42$

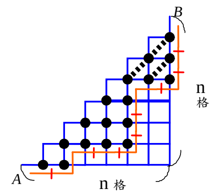
5、



圖（十二）



圖（十三）



圖（十四）

（1）底層爲 n 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，每一個往上堆疊酒瓶的堆疊法，對應到一個包含所有酒瓶的最小格子點捷徑走法（如圖（十二））。

（2）將圖（十二）的堆疊圖形對 x 軸做對稱，再整體長度縮小爲原來的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍，最後將整個圖形經過適當的旋轉、平移，使底層爲 n 個代表酒瓶的●依序坐落在（1,0），（2,1），（3,2），……，（n, $n-1$）的位置，此時圖（十二）的包含所有酒瓶的最小格子點捷徑走法也跟著鏡射、伸縮、旋轉、平移，同時緊緊地包住所有的酒瓶（如圖（十三））。

（3）將圖（十三）的圖去掉坐標系，只保留主要圖形即得圖（十四）。

因爲圖（十）$\xrightleftharpoons[\text{平移◆旋轉◆伸縮◆鏡射}]{\text{鏡射◆伸縮◆旋轉◆平移}}$圖（十一）$\xrightleftharpoons[\text{座標化}]{\text{去掉座標系}}$圖（十二），且伸縮、鏡射、平移、旋轉不改變其包含所有酒瓶的捷徑走法，因此，$S_n=$〝n 階鋸齒狀街道捷徑走法數〞$=C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}=C_n=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$ 。

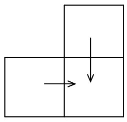
伍、　研究結果

一、　底層爲 n 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，所有往上堆疊酒瓶的組合數 S_n，$n \in N$

（一）S_n 之首項均爲 1。即 $a_{n1}=1$。

（二）末兩項均相同，且其值爲卡塔那數（*Catalan　number*）的第（$n-1$）項。即 $a_{nn}=a_{n(n-1)}=C_{n-1}$。

（三）除首末項外均滿足



即 $a_{nj}=a_{(n-1)j}+a_{n(j-1)}\quad n>j>1$

（四）S_n 的第 k 項爲 $a_{nk}=\dfrac{n-(k-1)}{k-1}C_{k-2}^{n-(k-2)}$　，$2\le k\le n$

（五）$S_n=1+\dfrac{n-1}{1}C_0^n+\dfrac{n-2}{2}C_1^{n+1}+\dfrac{n-3}{3}C_2^{n+2}+\ldots\ldots+\dfrac{n-(n-1)}{n-1}C_{n-2}^{n+(n-2)}$

二、　底層爲 n 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，所有往上堆疊酒瓶的組合數 S_n 恰爲卡塔那數（*Catalan　number*）的第 n 項 $C_n=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}$。

三、　由底層爲 n 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，所有往上堆疊酒瓶的堆疊圖形可對應出一條 n 階鋸齒狀街道捷徑走法。反之，由一條 n 階鋸齒狀街道捷徑走法可以對應到一個底層爲 n 個一字排開且緊密外切的酒瓶時，所有往上堆疊酒瓶的堆疊圖形，故二者之間有 $1-1$ 且 *onto* 的對應關係。即 $S_n=C_n^{2n}-C_{n-1}^{2n}=C_n=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}$。

陸、　討論

一、曾經有個「拈」的單堆變形遊戲，規則如下：兩人輪流取一堆石頭，每人每次最少取 1 個石頭，最多取 3 個，最後取光石頭的人贏得此遊戲。能否本研究也發展出相似捻的變形遊戲，給予一些規則，也能導出必勝法則。

二、嘗試將平面的堆疊法推廣到空間的過程中，我們思考：是否能經由一些條件限制，找到一個函數：空間中球的堆疊法與空間中走捷徑有對應的關係，而求出空間中的球的堆疊法有幾種。（空間中走捷徑：仿平面走街道捷徑定義，只准向 x 軸正向、y 軸正向、z 軸正向的格子點走法，即滿足 $x>y>z$ 的格子點走法。）

柒、　參考資料

一、　S66 2003 春季課程：計數的技巧。
http://www.myoops.org/twocw/mit/Mathematics/18-S66The-Art-of-CountingSpring2003/CourseHome/index.htm

二、　王元元、王慶瑞、黃紀麟（民 89）。組合數學－原理及解題。台北市：中央圖書。

三、　陳轟德（民 82）。談速解。台北市：建宏。

四、　高中數學課本第一冊、第四冊（各版本）。

五、　徐清朗（民 90）。徐氏數學規劃。高雄市：光朗。
六、　http://www.shes.hcc.edu.tw/~oddest/math242.htm。

【評　語】　　040411　酒瓶堆堆堆－堆出卡塔那數

研究主題卡塔那數爲組合學中的基本數列。其性質及該數列及其他組合數的關係等曝光已久。或許說明本研究應該多努力於文獻探討的工作。