

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

第二名

040118

有風不起浪

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者： 高二 汪哲敏 高二 姜慧如 高二 張祺	指導老師： 杜國禎
----------------------------------	--------------

關鍵詞：水波 Kelvin Helmholtz 不穩定性

作品名稱：有風不起浪

壹、摘要：

此次研究主要是在探討水面上覆有油層和風吹起波的影響。以前航海的船員們就已發現若在水面上倒一層油，可以抑制風將水面吹起波浪，甚至以此方法預防船難的發生。這種現象已有許多研究人員嘗試解釋，但文獻上查到的資料仍眾說紛紜，缺乏定論。我們這次研究的主要目標是以實驗的方法探討風速、油層厚度、和黏滯性的影響，並研究雙層流體如何抑制 Kelvin Helmholtz 不穩定性以解釋此現象。

貳、研究動機：

我們在暑假看到一篇文章關於班傑明·富蘭克林在乘船時的發現【四】。由於他常往來於歐洲與美洲之間，每當進餐後他觀察到在船的後面，水波總是比較平滑，尾波上沒有被風吹起的皺紋。好奇之下去問船上的水手，原來廚師在飯後都會將廚餘倒入海中，油擴散到海面，使得尾波變得平滑。進一步打聽，才發現這是當時每位船員都知道的事，甚至風浪大時會故意倒油在水上來預防船難。潛水的漁夫也會利用這種現象使水面透光較均勻，以使潛入水中能看得更清楚，卻沒有一個人真正知道為什麼。富蘭克林認為這現象應能找到科學的解釋，於是寫了一封信和他的朋友討論，並且自己也在池塘上倒些油，觀察這種現象，他發現約約在 2000 平方公尺的大池塘，只需要倒入一小管竹筒的油，就可以使整個池塘水面變得光滑【三】。富蘭克林當時甚至以為油的厚度只有一層分子而已（以現代方法估計的厚度也只有幾微米），為什麼這麼少量的油，會造成這麼大的影響？正好高二的物理課本中，有關於流體力學，和波動的單元，與此現象有些相關。我們想要藉機了解這個神奇的現象，因此興起了進一步研究的念頭。

參、研究目的：

- 一、藉由觀察風速、油層厚度、黏滯力等變因的影響，從實驗來找出抑制波浪的機制。
- 二、藉由分析水面上的油層與空氣具有相對速度時，油與水的波動，從理論上來解釋實驗的結果。

肆、研究設備及器材：

水槽：長方形水槽（圖 3）、圓形水槽（圖 11）

起波設備：風扇、濾網、起波器（圖 8）

油類：食用油類、汽油（圖 7）、噴漆（圖 10）

定量器具：量杯、量筒、滴管

數據測量：表面張力計（圖 5）、數據分析器、移動感測器（圖 12）、相機、風速計

伍、研究過程或方法：

爲了驗證富蘭克林觀察的結果，我們在台大“醉月湖”做了第一次測試。在湖面上倒了 30c.c.的沙拉油，湖面上本來充滿了小小的波紋，但水面上有油的地方(約 10 平方公尺)則一下子變得平滑。

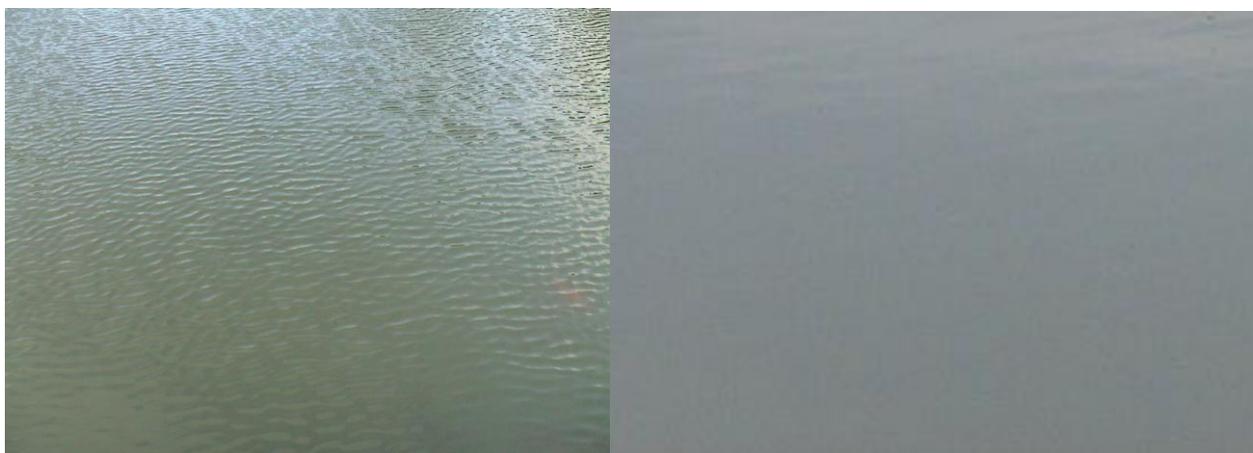


圖 1：倒油前水面

圖 2：倒油後水面，(近拍)

這塊平滑的區域會隨著風吹而漂動，但速度遠比風速慢。風速每秒鐘 3—5 公尺，而有油的區域漂移的速度每秒只有數公分而已。只有表面有油的部分能使波紋變小，即使近拍也看不出波紋。在驗證了這個觀察結果的真實性後，我們在室內建立一個可供實驗的模型：利用大型收納盒當作水波槽，使用電風扇當做起風源。



圖 3：在電風扇前加濾網使風的流動穩定，在水槽前製造波浪

我們發現，油層擴散的效果遠比在池塘裡作實驗時差，抑制風產生波浪的效果更是時有時無。在池塘裡做實驗，油層可以有很大的移動空間，但是在實驗室的水槽中，風會把水面的浮油吹到全部聚積在後端，以致於無法均勻分布於水面。在水波槽中，用容易擴散的油，如汽油、樟腦油等等非食用油，抑制波浪的效果較好。因此我們最後的定量實驗都是以汽油完成，因為汽油較易平均擴散，在有限的面積下，容易找出油層厚度對此現象的影響。

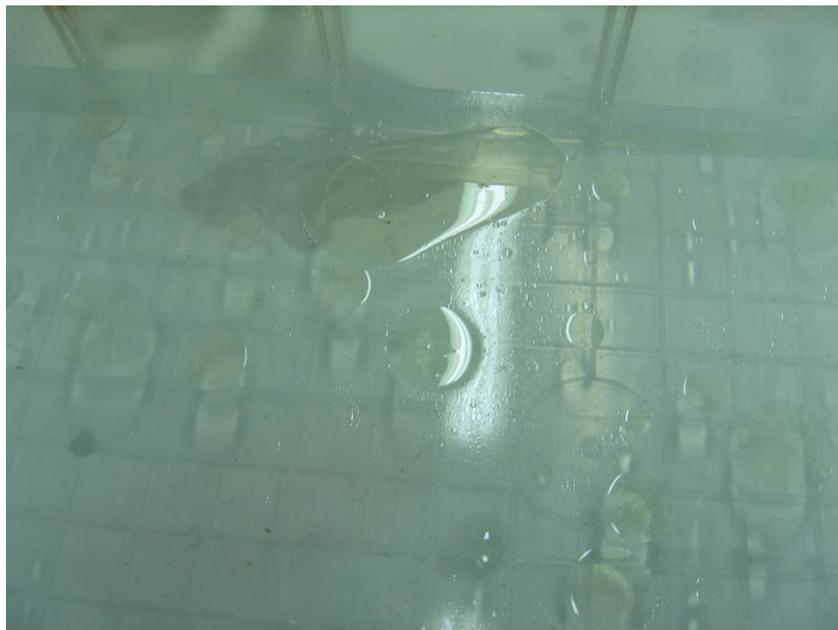


圖 4：不易擴散的油

我們提出一些假設，以實驗檢驗，期望找出主因，並建立模型。以下是我們的假設：

一、 表面張力

想法：

風吹水面，剛開始起波浪時，是由細小的波浪開始。而細小波浪上下振動時，主要是由表面張力來提供回復的力量。因此當表面張力較小時，回復的力量不足，波浪就較不容易振動。

實驗過程：

我們測量沙拉油的表面張力，大約是 $35\sim 35.5\times 10^{-3}$ N/m，純水量起來則是 $54.5\sim 55.5\times 10^{-3}$ N/m。但我們不知道，如果水面上的浮油厚度很薄時，就如同油在海面上擴散成一大片時，是否依然如此。於是，我們將油倒入少一點。我們倒的是沙拉油，只倒一小滴（用針尖沾）。如果把油滴體積，除以用來測量的杯子的杯口面積，算出油層厚度的話，約為 1.8×10^{-3} 公分厚。



圖 5：表面張力計

這時量到的表面張力大約是 $52.5\sim 53.5\times 10^{-3}$ N/m。也許因為我們對使用表面張力計的方法並不熟悉，或是這種測量方法本身的問題，導致這個結果並不太準確。因為我們在教科書上看到的資料【一】顯示，水的表面張力室溫下應該是 72.8×10^{-3} N/m。況且，後來我們看過的論文上【二】說，像“油浮在水上”這種兩種介面混合的東西的表面張力，是不能直接用平常方法量測的，而必須使用特殊的方法。不過，不論測量出來的數值是否準確，我們測量的結果都顯示，其實油和水的表面張

力相差並不很大，這應該並不是影響水波大小的主要原因。

二、黏滯性

想法：

對於風而言，風欲使黏滯性較大的液體表面「變形」，要比使水的表面「變形」困難許多，才造成水波不易產生。

實驗過程：

第一步，在寶特瓶的底部挖洞，然後把水或油裝入寶特瓶中。再把吸滿空氣的滴管尖端插入瓶子底部的洞中，擠壓滴管，讓氣泡進入瓶中，使氣泡從瓶底上升至水面。

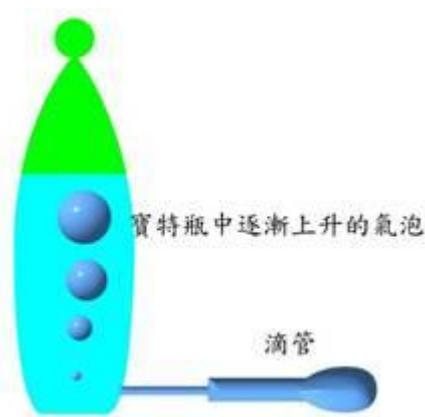


圖 6：氣泡實驗

我們發現，如果瓶中裝的是水，氣泡上升 10 公分約需要 0.35~0.45 秒。如果裝的是沙拉油，則需要 1.3~1.7 秒。所以沙拉油的黏滯性遠比水的黏滯性大。

第二步，我們取一些黏滯性不那麼大，但和油一樣不會與水混合，且會浮在水面上的非極性分子液體，如甲苯、汽油，做上一則提到的「氣泡實驗」，發現在這些液體裡，氣泡上升的速度與水差不多。於是我們在台大醉月湖裡，以及實驗室的水槽裡用它們做實驗。發現抑制風產生波浪的效果還是一樣好，因此黏滯性大小對抑制波浪的效果影響並不大。

三、分子極性

想法：

在刪去表面張力與黏滯性的假設後，我們懷疑是不是液體分子極性有無的影響。因為水是極性分子，而油是非極性分子。極性分子由於有方向性，因此水的表

面與油的表面可能因性質不同，對風的推力反應也不同，和共有幾層流體並無關聯。

實驗過程：

我們改用和水黏滯度差不多、且為無極性分子的汽油，倒滿整個水槽（下方沒有水）測量在同樣風速下的波浪大小。測量結果顯示，波浪大小和整個水槽裝滿水時的結果幾無差異。這代表波浪的大小與液體是極性分子或非極性分子應該也沒有關聯。

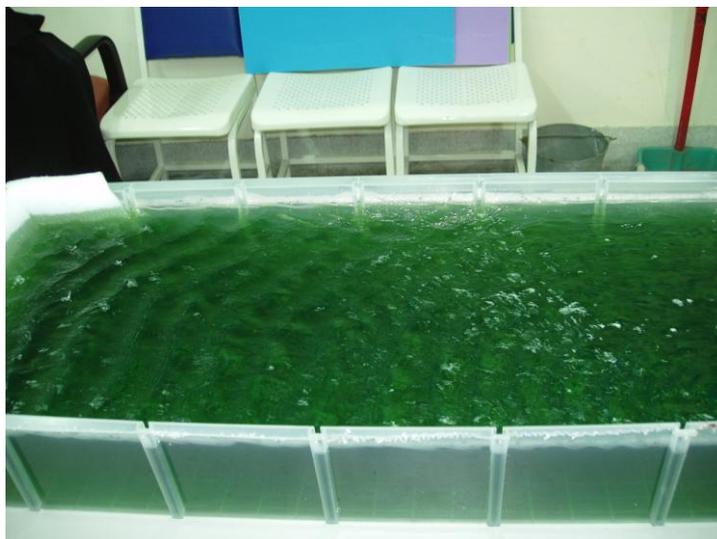


圖 7：一整槽汽油

四、表面覆蓋液體阻絕風對水的推動

想法：

上面的推測都是建立在「波浪是因風而漸漸變大，上層液體阻斷的是因風起浪的機制」的假設上。因吹風而產生的波浪，和因為其他外力，例如敲打，而產生的波浪，液體分子的運動型態應相當，接受能量的方式卻很不相同——風吹產生的波浪是由微小的波紋繼續接收風的能量繼續增大；但由敲打或起波器產生的波浪卻是直接強迫兩層液體同時振動。在消去那麼多假設後，我們考慮到一個問題：水面上多了一層油，抑制的究竟是波浪本身的振動，或是液體表面對風的能量的接收？

實驗過程：

我們利用高中實驗中使用的起波器，當起波器上下振動，在倒了一層薄薄汽油的水面，以及純水上分別製造波浪，看看是否一樣有差別。結果發現有油與無油幾乎沒有任何差別，這代表油層只能阻止液體表面對風的能量的接收，對波浪本身的振動並無影響。

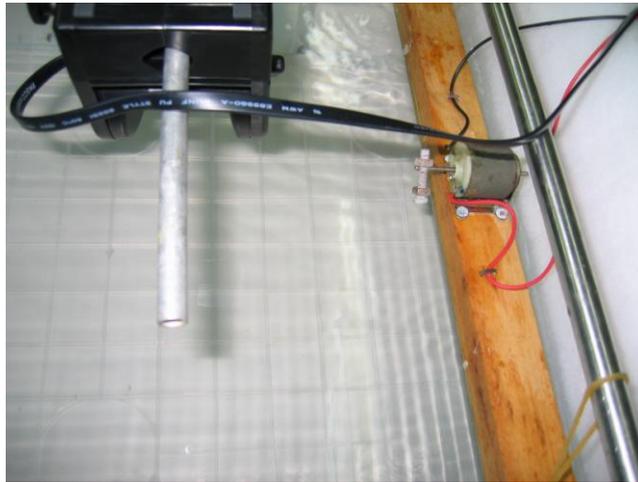


圖 8：起波器

五、水分子環形運動

想法：

當水面覆蓋一層非固體、而是流體的物質時，究竟是怎麼影響波的形成呢？水面波浪振動時，水面的分子是做上下的環形振動【六】，而當水分子運動到水的表面時，就可以接受風的推力，而繼續做這種運動。我們猜想，因為油的分子浮在水面上，無法與水的分子混合，因此如果水面上有一層油，水分子就無法接觸到空氣，也不會受力了。而表面受力的油分子又因為油層實在太薄，且油與水互不相容，油分子無法進入水中，而難以做環形的運動。

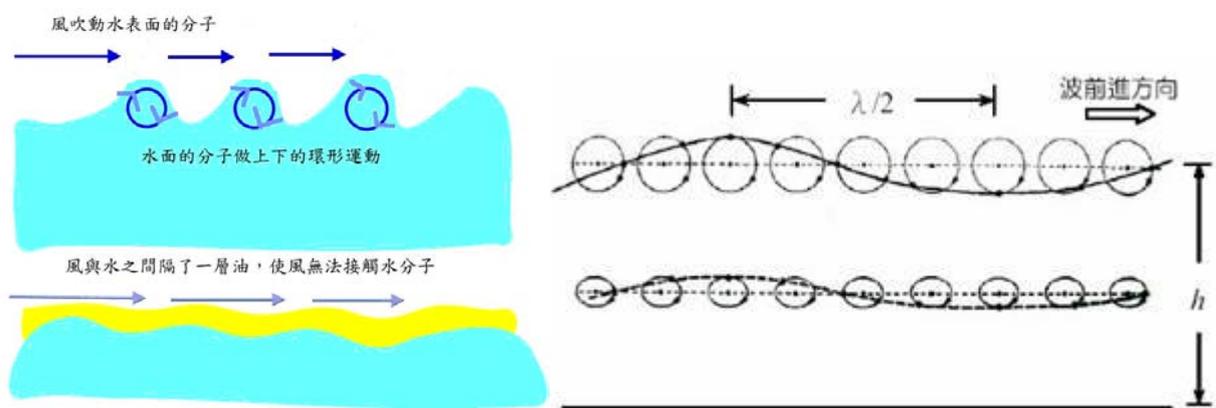


圖 9：水分子環形運動

實驗過程：

我們用油漆把樟腦油染色（樟腦油在水槽中比較容易擴散，且也有抑制波浪的

效果)，倒在水面上，想要確定當水面波動時，油會一直保持在水面上與水分離，而不與水混雜。結果發現，油在擴散之後，在肉眼能夠辨別的範圍內，確實一直保持在水面上。



圖 10：把水面的油染色

六、 覆蓋液體厚度的影響

想法：

如果在水面上的油層變得很厚，因風吹起波浪的現象，應該會與整水槽都是汽油接近，因為當油層厚到一定程度，風應該就感覺不到油層下方的水了。那麼油層的厚度需要多厚呢？在經過上一個實驗後，我們猜想上一個想法可能是正確的，如果上一個想法是正確的，油層在一個厚度之下時油分子應該都無法做環形運動，也無法起浪。因此我們設計實驗測量油層厚薄和抑制波浪效果的關係，希望能找到我們假設中的極限厚度。

實驗過程：

在長方形水槽做實驗時，每次油抑制波浪的結果都只能維持幾秒鐘。因為水面上的油膜，很快就會被風吹到聚集在水槽後端，而靠近電風扇地方的水面又開始起波浪。我們改用一个環形的水槽，讓水面上的油膜繞著環形水槽漂動，這樣油膜就不會有聚積到一處的問題，可以做長期觀測。



圖 11：環形水槽

我們在環形水槽中，用不同的汽油量實驗抑制波浪的效果。從一開始的純水開始測量，每次測量時都加入 0.04 公分厚（100c.c.）的汽油，同時利用虹吸管從汽油下方抽出 100c.c.的水，以維持水面高度的恆定，讓每次水面所受的風量相同。從實驗數據中可以看出對波浪抑制效果最好的油量是大約 0.4 公分厚。而水面油量從完全沒有到 0.1 公分厚時，波浪的大小與油量的關係，大致上呈現一個下凹的二次拋物線的形狀，如(圖 24)所示。

陸、研究結果：

我們所使用的測量水波振幅的儀器，是利用聲波反射來測出水面距離感測器有多遠的「移動感測器」，藉由水面與感測器之間距離變化的幅度來測出水面振幅。

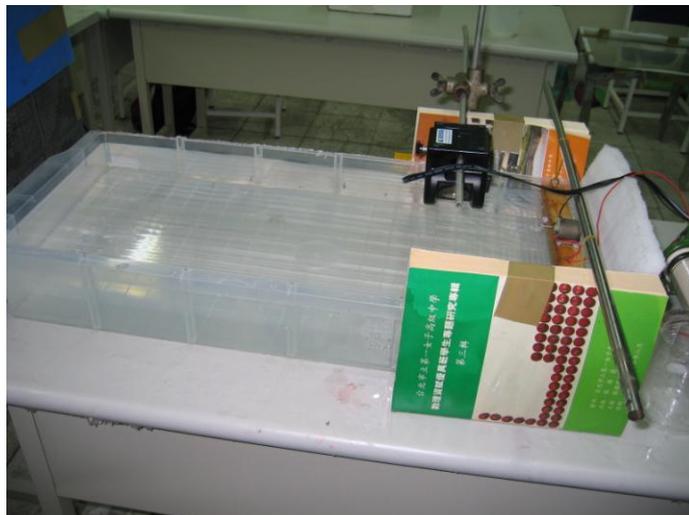


圖 12：移動感測器

一、第一個實驗：測試在室內建立的模型

先測量在長方形水槽中純水在電風扇的風吹之下的波浪，然後滴入沙拉油，觀察波浪的變化，結果如下：

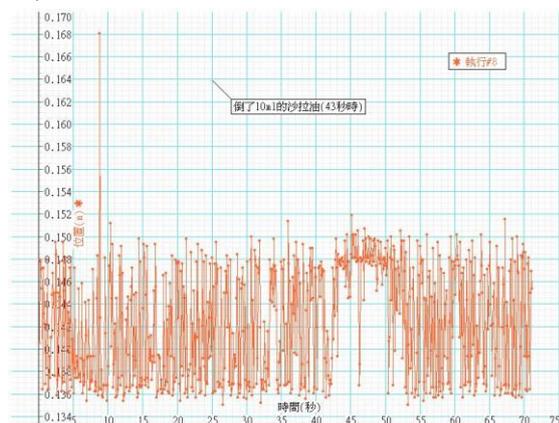


圖 13：橫軸為時間，縱軸為水面高度

我們在 43 秒時，倒入了 10c.c.的沙拉油，從上圖中可以看出，倒入前振幅為 0.6 公分,倒入後振幅變為約 0.1 公分。但幾秒後，當沙拉油被吹到水槽後端時，波浪又變大了。

二、 第二個實驗：測量油層對強迫振動的抑制效果

我們用上下振動的起波器，在水面上有一層薄薄的汽油的水槽中製造波浪。先實驗水面上汽油厚度極小（從 0 公分到 0.04 公分，每次增加 0.004 公分）時，汽油對波浪振幅的影響。

再於每次測量時加入 0.04 公分厚（約 100c.c.）的汽油，同時利用虹吸管從汽油下方抽出 100c.c.的水，測量較厚的汽油層對波浪振幅的影響。

汽油厚度(cm)	0	0.004	0.008	0.012	0.016	0.020	0.024	0.028	0.032	0.036	0.040
振幅(cm)	0.035	0.034	0.035	0.034	0.036	0.036	0.036	0.036	0.035	0.034	0.035

表 1：汽油厚度較薄時，厚度與波浪振幅的關係

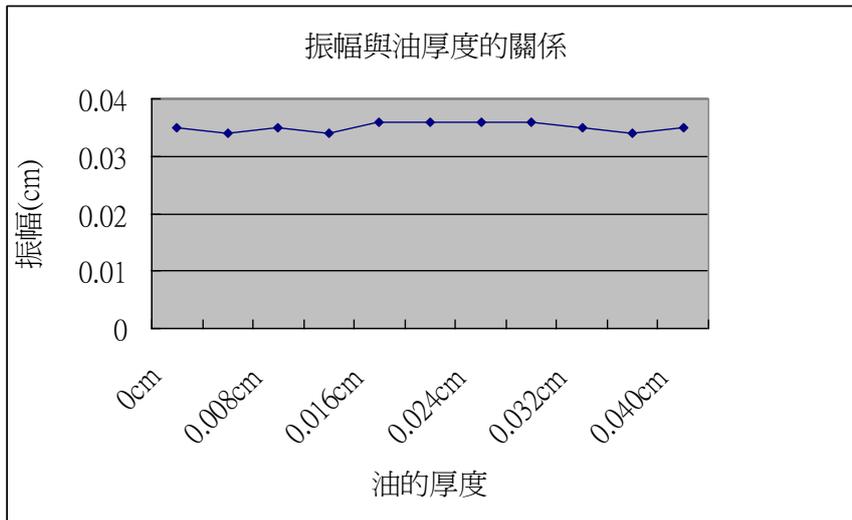


圖 14：汽油厚度較薄時，厚度與波浪振幅的關係

汽油厚度(cm)	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28
振幅(cm)	0.035	0.035	0.034	0.034	0.034	0.035	0.034

表 2：汽油厚度較厚時，厚度與波浪振幅的關係

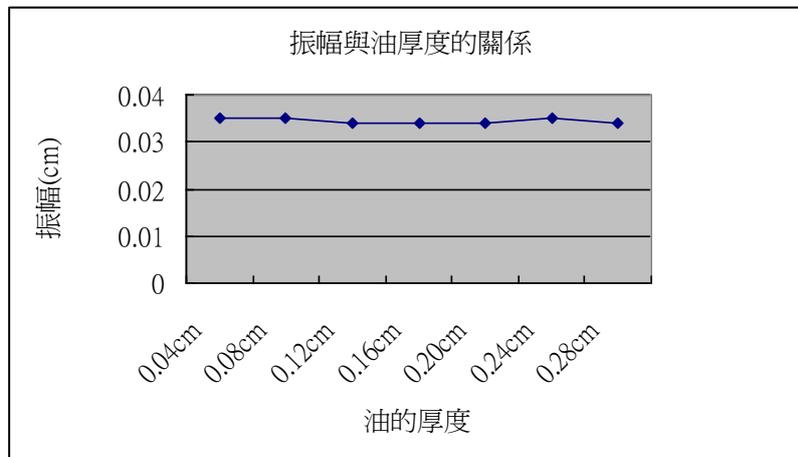


圖 15：汽油厚度較厚時，厚度與波浪振幅的關係

可以看出，汽油的厚度無論厚薄，對起波器造成的波浪都沒有抑制的效果。

三、 第三個實驗：油層厚度與振幅的關係

從一開始的純水開始測量，每次測量時都加入 0.04 公分厚(約 100c.c.)的汽油，同時利用虹吸管從汽油下方抽出 100c.c.的水，以維持水面高度的恆定，讓每次水面所受的風量相同。

風	油厚(cm)	振幅 (cm)	風	油厚(cm)	振幅(cm)	風	油厚(cm)	振幅(cm)
0m/s	0	0.013	3.5m/s	0.40	0.100	3.5m/s	0.84	0.116
3.5m/s	0	0.113	3.5m/s	0.44	0.101	3.5m/s	0.88	0.115
3.5m/s	0.04	0.107	3.5m/s	0.48	0.100	3.5m/s	0.92	0.114
3.5m/s	0.08	0.111	3.5m/s	0.52	0.099	3.5m/s	0.96	0.124
3.5m/s	0.12	0.107	3.5m/s	0.56	0.103	3.5m/s	1.00	0.122
3.5m/s	0.16	0.103	3.5m/s	0.60	0.109	3.5m/s	1.04	0.118
3.5m/s	0.20	0.106	3.5m/s	0.64	0.110	3.5m/s	1.08	0.122
3.5m/s	0.24	0.110	3.5m/s	0.68	0.113	3.5m/s	1.12	0.121
3.5m/s	0.28	0.108	3.5m/s	0.72	0.113	3.5m/s	1.16	0.121
3.5m/s	0.32	0.104	3.5m/s	0.76	0.114	3.5m/s	1.20	0.112
3.5m/s	0.36	0.100	3.5m/s	0.80	0.116			

表 3：液面振幅與油層厚度的關係

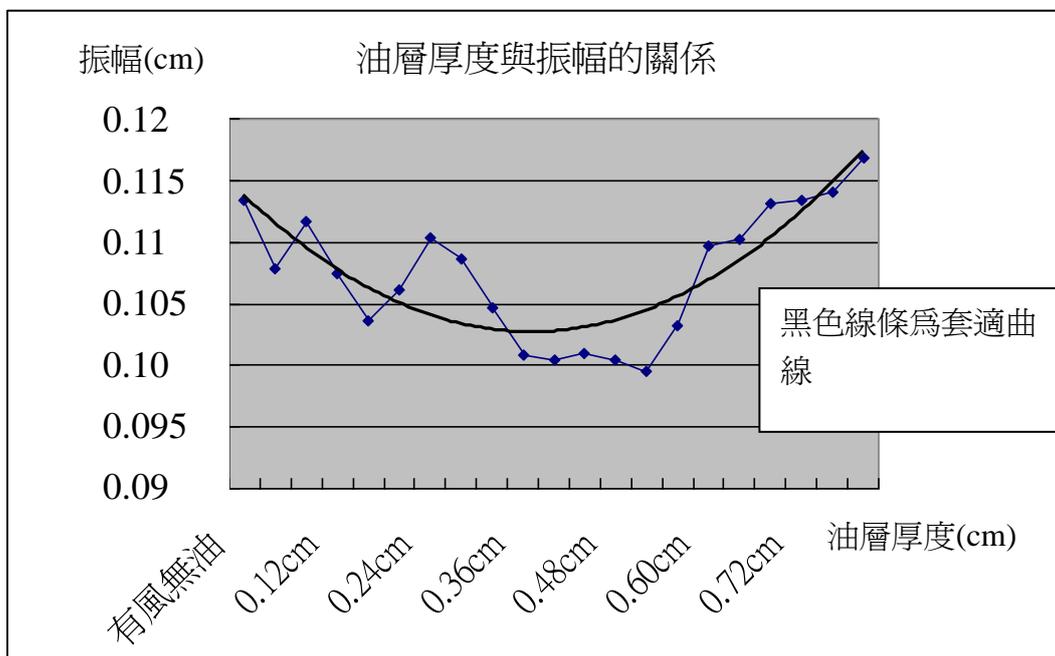


圖 16：液面振幅與油層厚度的關係

由圖表上我們可以看出，對波浪抑制效果最好的油厚度大約是 0.4 公分厚。也就是說，兩層介面的距離必須大於 0.4 公分，才不易互相干擾。至於油厚度少於約 0.4 公分時，抑制波浪的效果較差，這部分仍需要進一步研究。

四、第四個實驗：驗證理論

爲了驗證理論中風速與振幅及風速與波長的關係，我們使用了不同的風扇，

分別測量它們的風速。再用它們在水面上製造波浪，測量水的振幅與波長。

風速(m/s)	0.0	2.8	3.3	3.6	3.9	4.1	5.1	5.6
振幅(cm)	0.036	0.053	0.069	0.31	0.33	0.36	0.39	0.46

表 4：風速與振幅的關係

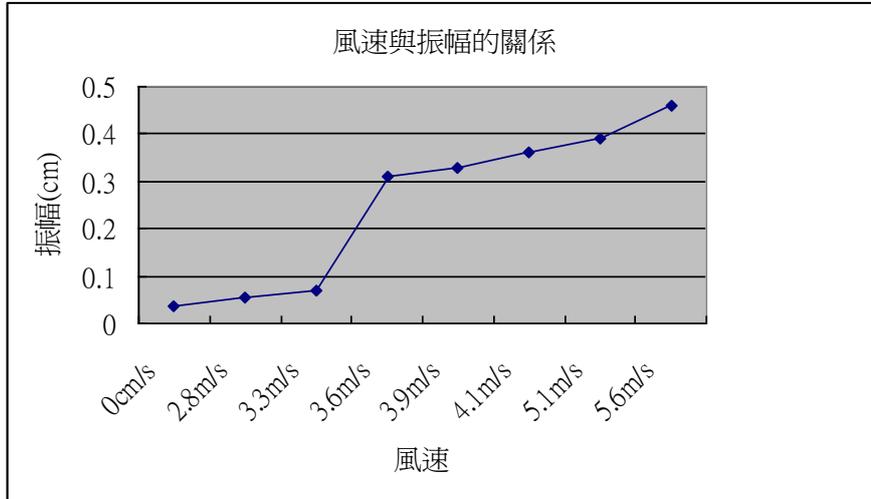


圖 17：風速與振幅的關係

風速(m/s)	2.8	3.3	3.6	3.9	4.1	5.1	5.6
波長(cm)	2.5	2.2	2.3	2.7	2.2	2.3	2.1

表 5：風速與波長的關係

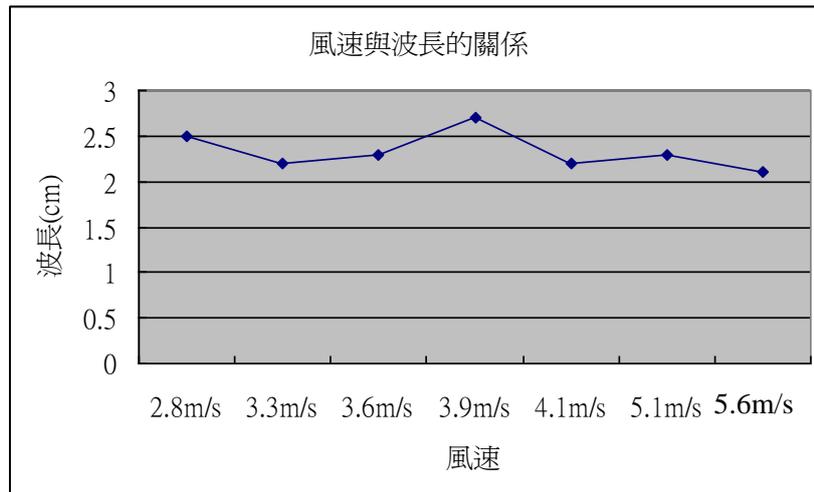


圖 18：風速與波長的關係

我們發現，當風速達到某個特定的值時，波浪振幅會突然增加許多。在我們後面的理論推導中，也發現由於表面張力的作用，風速必須超過某個臨界值，才能克服表面張力。至於風速與波長，則沒有太大的關連性。

柒、討論：

此理論探討是在老師的幫助下完成。其中一、二兩節出自參考資料【五】，而三、四兩節為自行推廣的部份。

一、兩層流體

假設有兩種不同的流體（例如一層空氣，一層水），它們之間的交界面在 $y = 0$ 的地方。將流體的密度以 ρ ，壓力以 p 表示，流體沿著 x 方向流動，速度為 v 。而 ρ, p, v 都只與流體的深度 y 有關，由於流體流動時的細小擾動，密度變成 $\rho + \delta\rho$ ，壓力變成 $p + \delta p$ ，而速度變成了 $\mathbf{v} = (v + \delta v_x, \delta v_y)$ ，其中 $\delta\rho/\rho \ll 1, \delta p/p \ll 1, \delta v_x/v \ll 1$ 且 $\delta v_y/v \ll 1$ 。由於 $\mathbf{F} = -\nabla p$ ，在 x 方向流體運動必須遵守以下方程式

$$(\rho + \delta\rho) \frac{d}{dt}(v + \delta v_x) = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \delta p), \quad (1)$$

而 y 方向多了重力所以必須遵守以下方程式

$$(\rho + \delta\rho) \frac{d}{dt}(\delta v_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(p + \delta p) - g(\rho + \delta\rho), \quad (2)$$

其中 $g(\rho + \delta\rho)$ 是單位體積的重力且 $-\partial p/\partial y = g\rho$ 。假設流體不可壓縮，則

$$\frac{d}{dt}(\rho + \delta\rho) = 0. \quad (3)$$

而同時流體運動也要符合連續方程式，加上(3)式，連續方程式可寫成

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

由於 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ ，且 ρ, p, v 都只與流體的深度 y 有關，方程式(1)~(4)可改寫成

$$\rho \left[\frac{\partial(\delta v_x)}{\partial t} + v \frac{\partial(\delta v_x)}{\partial x} + (\delta v_y) \frac{dv}{dy} \right] = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\rho \left[\frac{\partial(\delta v_y)}{\partial t} + v \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial y} - g(\delta\rho), \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + v \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x} + (\delta v_y) \frac{d\rho}{dy} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\delta v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

其中相較之下微不足道的二次項，例如 $(\delta\rho)[\partial(\delta v_x)/\partial t]$ ，均忽略不計。將擾動線性化之後，可假設 $\delta\rho, \delta p, \delta v_x$ 和 δv_y 的解都是 $f(y) \exp[i(kx - \omega t)]$ 的形式。將這些解代入方程式(5)-(8)，我們得到

$$\rho \left[-i(\omega - kv)(\delta v_x) + (\delta v_y) \frac{dv}{dy} \right] = -ik(\delta p), \quad (9)$$

$$-i\rho(\omega - kv)(\delta v_y) = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial y} - g(\delta\rho), \quad (10)$$

$$-i(\omega - kv)(\delta\rho) + (\delta v_y)\frac{d\rho}{dy} = 0, \quad (11)$$

$$ik(\delta v_x) + \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

由方程式(12)可知 $\delta v_x = i[\partial(\delta v_y)/(k\partial y)]$ ，因此方程式(9)可改寫為

$$\frac{\rho}{k}(\omega - kv)\frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} + \rho(\delta v_y)\frac{dv}{dy} = -ik(\delta p), \quad (13)$$

而由方程式(11)可知 $\delta\rho = -i[(\delta v_y)/(\omega - kv)](d\rho/dy)$ ，因此方程式(10)可改寫為

$$-i\rho(\omega - kv)(\delta v_y) - ig\frac{(\delta v_y)}{\omega - kv}\frac{d\rho}{dy} = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial y}. \quad (14)$$

藉由把方程式(13)對 y 微分，以及把方程式(14)乘上 k ，我們可以消掉他們右式的 $\partial(\delta p)/\partial y$ 而得到

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho}{k}(\omega - kv)\frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} + \rho(\delta v_y)\frac{dv}{dy} \right] = k\rho(\omega - kv)(\delta v_y) + kg\frac{(\delta v_y)}{\omega - kv}\frac{d\rho}{dy}. \quad (15)$$

假設 ρ, p, v 在 $y = 0$ 時為常數 ρ_0, p_0, v_0 （空氣的密度、壓力和速度），在 $y = h$ 時為常數 ρ_1, p_1, v_1 （水的密度、壓力和速度）。即在 $y = 0$ 和 $y = h$ 時 $dv/dy = d\rho/dy = 0$ 。方程式(15)便可簡化為

$$\frac{\rho}{k}(\omega - kv) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) (\delta v_y) = 0, \quad (16)$$

也就是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) (\delta v_y) = 0. \quad (17)$$

如同前面提到的，(17)的解是 $\delta v_y = f(y) \exp[i(kx - \omega t)]$ ，方程式(17)指出了 $f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$ ，也就是

$$\delta v_y = (Ae^{ky} + Be^{-ky}) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (18)$$

假設第一層流體是從 $y = 0$ 到 $y = h$ 而第二層流體是從 $y = 0$ 到 $y = -\infty$ 。因為 δv_y 在 $y = \pm\infty$ 時必須是0，所以在(18)式中第一層流體的 $A = 0$ 而第二層流體的 $B = 0$ 。在第二節中我們會說明 $(\delta v_y)/(\omega - kv)$ 的值代表的是交界面的擾動高度，所以它在交界面上是連續的。利用這些條件可知，第一層流體的 δv_y 的解必須是

$$\delta v_y^{(1)} = C(\omega - kv_1)e^{-ky} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (19)$$

而第二層流體則必須是

$$\delta v_y^{(2)} = C(\omega - kv_2) e^{ky} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (20)$$

將方程式(15)由 $y = 0^-$ 積分到 $y = 0^+$ ，我們得到

$$\left[\frac{\rho}{k} (\omega - kv) \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} + \rho(\delta v_y) \frac{dv}{dy} \right] \Big|_{y=0^-}^{y=0^+} = kg \left[\frac{(\delta v_y)}{\omega - kv} \right]_{y=0} (\rho_1 - \rho_2). \quad (21)$$

從方程式(19)和(20)可知

$$\frac{\partial(\delta v_y^{(1)})}{\partial y} \Big|_{y=0^+} = -Ck(\omega - kv_1) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\delta v_y^{(2)})}{\partial y} \Big|_{y=0^-} = Ck(\omega - kv_2) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (23)$$

$$\frac{\delta v_y^{(1)}}{\omega - kv_1} \Big|_{y=0^+} = \frac{\delta v_y^{(2)}}{\omega - kv_2} \Big|_{y=0^-} = C \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (24)$$

將方程式(22)-(24)代入方程式(21)，因為在 $y = 0^+$ 和 $y = 0^-$ 時 $dv/dy = 0$ ，我們得到

$$-[\rho_1(\omega - kv_1)^2 + \rho_2(\omega - kv_2)^2] = kg(\rho_1 - \rho_2). \quad (25)$$

定義

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (26)$$

則方程式(25)可寫成

$$\alpha_1(\omega - kv_1)^2 + \alpha_2(\omega - kv_2)^2 = kg(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (27)$$

將(27)式對 ω 展開，我們得到

$$\omega^2 - 2k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)\omega + k^2(\alpha_1 v_1^2 + \alpha_2 v_2^2) - kg(\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad (28)$$

因此 ω 的解是

$$\omega = k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \pm \sqrt{-k^2 \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 + kg(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (29)$$

如果 ω 具有虛數部分的話， $\delta v_y = f(y) \exp[i(kx - \omega t)]$ 就會越變越大，也就是當判別式

$$-k^2 \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 + kg(\alpha_2 - \alpha_1) < 0 \quad (30)$$

的時候，即 k 必須符合以下條件

$$k > \frac{g(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2}, \quad (31)$$

δv_y 就會越變越大，也就是會起波浪的意思。

二、兩層流體（考慮表面張力）

在這一節中我們加入表面張力的影響，所以必須在方程式(2)及方程式(6)的等號右邊加入表面張力如下

$$T \frac{\partial^2(\delta y)}{\partial x^2} \delta(y - y_0), \quad (32)$$

其中 $y = y_0$ 為兩流體原來的交界面，後因波浪的擾動交界面變成 $y = y_0 + \delta y$ ，而 $\delta(y - y_0)$ 是 Dirac delta 函數。也就是說，如果考慮表面張力我們必須將方程式(6)改寫為

$$\rho \left[\frac{\partial(\delta v_y)}{\partial t} + v \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial y} - g(\delta \rho) + T \frac{\partial^2(\delta y)}{\partial x^2} \delta(y - y_0), \quad (33)$$

其中 δy 滿足以下方程式

$$\left[\frac{d(\delta y)}{dt} - \delta v_y \right] \Big|_{y=0} = 0. \quad (34)$$

由於 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ ，方程式(34)等於

$$\left[\frac{\partial(\delta y)}{\partial t} + v \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} - \delta v_y \right] \Big|_{y=0} = 0. \quad (35)$$

和第一節相似，我們把 δp 和 δv_y 的解設為 $f(y) \exp[i(kx - \omega t)]$ 代入方程式(33)和(35)，得到

$$-i\rho(\omega - kv)(\delta v_y) = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial y} - g(\delta \rho) - k^2 T(\delta y)\delta(y - y_0), \quad (36)$$

$$\left[-i(\omega - kv)(\delta y) - \delta v_y \right] \Big|_{y=0} = 0. \quad (37)$$

從方程式(37)我們知道

$$\delta y = \left[\frac{i(\delta v_y)}{\omega - kv} \right]_{y=0}. \quad (38)$$

也就是說， $(\delta v_y)/(\omega - kv)$ 代表交界面的擾動高度，因此在交界面上必須是連續的，在第一節的方程式(19)和(20)中我們已使用了這個條件。把方程式(38)中的 δy 和方程式(11)中的 $\delta \rho$ 代入方程式(36)，可得

$$-i\rho(\omega - kv)(\delta v_y) + \left[-ig \frac{d\rho}{dy} + ik^2 T \delta(y - y_0) \right] \frac{(\delta v_y)}{\omega - kv} = -\frac{\partial(\delta p)}{\partial y}. \quad (39)$$

用方程式(13)和方程式(39)將他們右式的 δp 消掉，我們得到

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho}{k} (\omega - kv) \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} + \rho(\delta v_y) \frac{dv}{dy} \right] = k\rho(\omega - kv)(\delta v_y) + \left[kg \frac{d\rho}{dy} - k^3 T \delta(y - y_0) \right] \frac{(\delta v_y)}{\omega - kv}. \quad (40)$$

在 $y = 0^+$ 和 $y = 0^-$ 時，方程式(40)會等於方程式(15)，所以 δv_y 的解完全和第一節相同，即方程式(18)-(20)及(22)-(24)在此節也均成立。把方程式(40)從 $y = 0^-$ 積分到 $y = 0^+$ ，我們得到

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho}{k} (\omega - kv) \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} + \rho(\delta v_y) \frac{dv}{dy} \right] \Big|_{y=0^-}^{y=0^+} \\ & = [kg(\rho_1 - \rho_2) - k^3 T] \left[\frac{(\delta v_y)}{\omega - kv} \right]_{y=0}. \end{aligned} \quad (41)$$

將方程式(22)-(24)代入方程式(41)，且注意在 $y = 0$ 和 $y = h$ 時 $du/dy = 0$ ，我們會得到

$$-[\rho_1(\omega - kv_1)^2 + \rho_2(\omega - kv_2)^2] = kg(\rho_1 - \rho_2) - k^3T. \quad (42)$$

定義 α_1 和 α_2 如(26)式，則方程式(42)變成

$$\alpha_1(\omega - kv_1)^2 + \alpha_2(\omega - kv_2)^2 = kg(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{k^3T}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (43)$$

將(43)式對 ω 展開，我們得到

$$\omega^2 - 2k(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2)\omega + k^2(\alpha_1v_1^2 + \alpha_2v_2^2) - kg(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{k^3T}{\rho_1 + \rho_2} = 0. \quad (44)$$

當判別式 < 0 時 ω 的值會有虛部，即

$$k^2(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2)^2 - \left\{ k^2(\alpha_1v_1^2 + \alpha_2v_2^2) - kg(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{k^3T}{\rho_1 + \rho_2} \right\} < 0. \quad (45)$$

這也就等於

$$-k\alpha_1\alpha_2(v_1 - v_2)^2 + g(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{k^2T}{\rho_1 + \rho_2} < 0. \quad (46)$$

這也就是

$$\frac{\alpha_1\alpha_2(v_1 - v_2)^2 - \sqrt{D}}{2T(\rho_1 + \rho_2)} < k < \frac{\alpha_1\alpha_2(v_1 - v_2)^2 + \sqrt{D}}{2T(\rho_1 + \rho_2)} \quad (47)$$

這樣的式子只有在以下情形成立時才能夠滿足

$$D \equiv [\alpha_1\alpha_2(v_1 - v_2)^2]^2 - \frac{4Tg(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho_1 + \rho_2} > 0. \quad (48)$$

方程式(48)指出，起波浪的條件如下

$$(v_1 - v_2)^2 > \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} \sqrt{\frac{4Tg(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (49)$$

也就是說，一旦有表面張力，起波浪的條件會更加嚴格，風速 $(v_1 - v_2)$ 必須夠大，要滿足(49)式的限制，而且波長必須滿足(47)式的限制，不像第一節中的(31)式，沒有表面張力時，風速再小，仍可以起波長小的浪。

三、三層流體（中間一層很厚）

在這一節中，我們假設中間一層流體很厚，第一層流體（空氣）是從 $y = 0$ 到 $y = h_1$ ，第二層流體（油）從 $y = h_1$ 到 $y = h_1 + h_2$ ，第三層流體（水）從 $y = h_1 + h_2$ 到 $y = h_1 + h_2 + h_3$ 。方程式(49)告訴我們，當風速 $(v_1 - v_2)$ 大於 $40.75 \text{ (m}^2/\text{s}^2)$ 時，剛好可以起波浪，此時(47)式中的 α 等於0，所以 k 大約等於 $304.21/\text{m}$ 。此時只要 $y = 1.97$ 公分，

就小於 10^{-1} 。也就是說第二層流體的擾動波在 $y = 1$ 公分之後只剩下和空氣交界處的百分之一（見(20)式）。換句話說，只要中間那層流體的厚度超過 10^{-1} 公分，下面第三層流體幾乎靜止不動感受不到風在吹，所以我們可以只考慮上面兩層就好。計算的時候只要把第二節中的第二層流體的厚度改為有限厚度即可，其他的部份均與第二節相同。首先 δv_y 的解仍和方程式(18)中的一樣

$$\delta v_y = (Ae^{ky} + Be^{-ky}) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (50)$$

只是現在 δv_y 必須在 $y = 0$ 和 $y = d$ 時是 0，所以由(50)式可知第一層流體的 $A = 0$ 而第二層流體的 $Ae^{-kd} + Be^{kd} = 0$ ，也就是說

$$B = -Ae^{-2kd}. \quad (51)$$

並且如前所述 $(\delta v_y)/(\omega - kv)$ 的值在兩種流體的交接面上必須連續，所以第一層流體中 δv_y 的解是

$$\delta v_y^{(1)} = C(\omega - kv_1)e^{-ky} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (52)$$

而第二層流體中 δv_y 的解是

$$\delta v_y^{(2)} = C(\omega - kv_2) \left(\frac{e^{ky}}{1 - e^{-2kd}} - \frac{e^{-2kd}e^{-ky}}{1 - e^{-2kd}} \right) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (53)$$

由方程式(52)和(53)可導出

$$\left. \frac{\partial(\delta v_y^{(1)})}{\partial y} \right|_{y=0+} = -Ck(\omega - kv_1) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (54)$$

$$\left. \frac{\partial(\delta v_y^{(2)})}{\partial y} \right|_{y=0-} = Ck(\omega - kv_2) \coth(kd) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (55)$$

$$\left. \frac{\delta v_y^{(1)}}{\omega - kv_1} \right|_{y=0+} = \left. \frac{\delta v_y^{(2)}}{\omega - kv_2} \right|_{y=0-} = C \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (56)$$

將 (54)-(56) 式代入方程式(41)，且注意在 $y = 0$ 和 $y = d$ 時 $du/dy = 0$ ，我們得到

$$-[\rho_1(\omega - kv_1)^2 + \rho_2 \coth(kd)(\omega - kv_2)^2] = kg(\rho_1 - \rho_2) - k^3T. \quad (57)$$

將 α_1 和 α_2 用方程式(26)的方法定義，則方程式(57)變成

$$\alpha_1(\omega - kv_1)^2 + \alpha_2 \coth(kd)(\omega - kv_2)^2 = kg(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{k^3T}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (58)$$

將(58)式對 α_1 展開，我們得到

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 + \alpha_2 \coth(kd)] \omega^2 - 2k[\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \coth(kd)] \omega \\ & + k^2[\alpha_1 v_1^2 + \alpha_2 v_2^2 \coth(kd)] - kg(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{k^3T}{\rho_1 + \rho_2} = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

當判別式 < 0 時 ω 的值會有虛部，即

$$k^2[\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \coth(kd)]^2 - [\alpha_1 + \alpha_2 \coth(kd)] \times \left\{ k^2[\alpha_1 v_1^2 + \alpha_2 v_2^2 \coth(kd)] - kg(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{k^3 T}{\rho_1 + \rho_2} \right\} < 0. \quad (60)$$

這也就等於

$$-k^2 \alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 \coth(kd) + [\alpha_1 + \alpha_2 \coth(kd)] \left[kg(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{k^3 T}{\rho_1 + \rho_2} \right] < 0. \quad (61)$$

除以 $k[\alpha_1 + \alpha_2 \coth(kd)]$ ，(61)式就變成

$$-k \frac{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2}{\alpha_1 \tanh(kd) + \alpha_2} + g(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{k^2 T}{\rho_1 + \rho_2} < 0, \quad (62)$$

這也就是

$$\frac{\frac{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2}{\alpha_1 \tanh(kd) + \alpha_2} - \sqrt{D}}{2T/(\rho_1 + \rho_2)} < k < \frac{\frac{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2}{\alpha_1 \tanh(kd) + \alpha_2} + \sqrt{D}}{2T/(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (63)$$

這樣的式子只有在以下情形成立時才能夠滿足

$$D \equiv \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2}{\alpha_1 \tanh(kd) + \alpha_2} \right]^2 - \frac{4Tg(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho_1 + \rho_2} > 0. \quad (64)$$

方程式(64)指出，起波浪的條件如下

$$(v_1 - v_2)^2 > \frac{\alpha_1 \tanh(kd) + \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_1} \sqrt{\frac{4Tg(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (65)$$

在這一節起波浪的條件為必須滿足(63)式且 $(v_1 - v_2)^2$ 必須滿足(65)式，我們注意到這和上一節中的(47)和(49)式只差一個 $\alpha_1 \tanh(kd) + \alpha_2$ 項而已。因為 $\alpha_1 \tanh(kd) + \alpha_2$ ，且 $0 \leq \tanh(kd) \leq 1$ ，此項幾乎等於 1。也就是說第三節的結論和第二節的結論幾乎一樣。

四、三層流體（中間一層很薄）

在這一節中，我們假設中間一層流體很薄，但也不能薄到毫無限制。在這一節的最後，我們會對中間一層的薄度的限制作說明。第一層流體（空氣）是從 $y = 0$ 到 $y = h_1$ ，第二層流體（油）從 $y = h_1$ 到 $y = h_1 + h_2$ ，第三層流體（水）從 $y = h_1 + h_2$ 到 $y = h_1 + h_2 + h_3$ 。在這一節中我們希望了解三層流體是否可以起共同的波浪？在第二節中我們已經導出

$$\delta v_y = (Ae^{ky} + Be^{-ky}) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (66)$$

也知道 δv_y 在 $y = h_1$ ， $T = T_1$ 的交界面上必須滿足

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho}{k} (\omega - kv) \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} + \rho(\delta v_y) \frac{dv}{dy} \right] \Big|_{y=d-}^{y=d+} \\ & = [kg(\rho_1 - \rho_2) - k^3 T_d] \left[\frac{(\delta v_y)}{\omega - kv} \right]_{y=d}. \end{aligned} \quad (67)$$

在 $y = d$ ， $T = T_1$ 的交界面上必須滿足

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho}{k} (\omega - kv) \frac{\partial(\delta v_y)}{\partial y} + \rho(\delta v_y) \frac{dv}{dy} \right] \Big|_{y=0-}^{y=0+} \\ & = [kg(\rho_2 - \rho_3) - k^3 T_0] \left[\frac{(\delta v_y)}{\omega - kv} \right]_{y=0}. \end{aligned} \quad (68)$$

(66)式中可看出第一層的 $A = C$ ，第三層的 $D = C$ 。再加上 $(\delta v_y)/(\omega - kv)$ 的值在不同流體的交界面上的值必須是連續的，因此我們有

$$\delta v_y^{(1)} = C(\omega - kv_1) e^{-ky} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (69)$$

$$\delta v_y^{(3)} = D(\omega - kv_3) e^{ky} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (70)$$

以及

$$\delta v_y^{(2)} = (\omega - kv_2) (Ae^{ky} + Be^{-ky}) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (71)$$

其中

$$A = \frac{C - D}{e^{2kd} - 1}, \quad B = \frac{-C + De^{2kd}}{e^{2kd} - 1}. \quad (72)$$

由方程式(69)和(71)可得

$$\frac{\partial(\delta v_y^{(1)})}{\partial y} \Big|_{y=d+} = -k(\omega - kv_1) C e^{-kd} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (73)$$

$$\frac{\partial(\delta v_y^{(2)})}{\partial y} \Big|_{y=d-} = k(\omega - kv_2) C e^{-kd} \coth(kd) \left[1 - \frac{D}{C} e^{kd} \operatorname{sech}(kd) \right] \exp[i(kx - \omega t)], \quad (74)$$

$$\frac{\delta v_y^{(1)}}{\omega - kv_1} \Big|_{y=d+} = \frac{\delta v_y^{(2)}}{\omega - kv_2} \Big|_{y=d-} = C e^{-kd} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (75)$$

又由方程式(70)和(71)可得

$$\frac{\partial(\delta v_y^{(2)})}{\partial y} \Big|_{y=0+} = k(\omega - kv_2) D \coth(kd) \left[\frac{C}{D} e^{-kd} \operatorname{sech}(kd) - 1 \right] \exp[i(kx - \omega t)], \quad (76)$$

$$\frac{\partial(\delta v_y^{(3)})}{\partial y} \Big|_{y=0-} = k(\omega - kv_3) D \exp[i(kx - \omega t)], \quad (77)$$

$$\frac{\delta v_y^{(2)}}{\omega - kv_2} \Big|_{y=0+} = \frac{\delta v_y^{(3)}}{\omega - kv_3} \Big|_{y=0-} = D \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (78)$$

將方程式(73)-(75)代入方程式(67)，我們得到

$$\rho_1(\omega - kv_1)^2 + \rho_2(\omega - kv_2)^2 \coth(kd) \left[1 - \frac{D}{C} e^{kd} \operatorname{sech}(kd) \right] = kg(\rho_2 - \rho_1) + k^3 T_d. \quad (79)$$

將方程式(76)-(78)代入方程式(68)，我們得到

$$\rho_2(\omega - kv_2)^2 \coth(kd) \left[1 - \frac{C}{D} e^{-kd} \operatorname{sech}(kd) \right] + \rho_3(\omega - kv_3)^2 = kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3 T_0. \quad (80)$$

假設 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ 以及 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ ，以致於方程式(79)中的 $\rho_1(\omega - kv_1)^2$ 項可以被忽略，那麼方程式(79)和(80)就變成

$$\rho_2 \omega^2 \coth(kd) \left[1 - \frac{D}{C} e^{kd} \operatorname{sech}(kd) \right] = kg\rho_2 + k^3 T_d, \quad (81)$$

$$\rho_2 \omega^2 \coth(kd) \left[1 - \frac{C}{D} e^{-kd} \operatorname{sech}(kd) \right] + \rho_3 \omega^2 = kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3 T_0. \quad (82)$$

從方程式(81)我們得到

$$\frac{D}{C} e^{kd} = \frac{\rho_2 \omega^2 \coth(kd) - kg\rho_2 - k^3 T_d}{\rho_2 \omega^2 \operatorname{csch}(kd)}, \quad (83)$$

從方程式(82)我們得到

$$\frac{C}{D} e^{-kd} = \frac{\rho_2 \omega^2 \coth(kd) + \rho_3 \omega^2 - kg(\rho_3 - \rho_2) - k^3 T_0}{\rho_2 \omega^2 \operatorname{csch}(kd)}. \quad (84)$$

比較方程式(83)和(84)我們得到

$$\begin{aligned} \rho_2^2 \omega^4 \operatorname{csch}^2(kd) &= [\rho_2 \omega^2 \coth(kd) - kg\rho_2 - k^3 T_d] \\ &\times [\rho_2 \omega^2 \coth(kd) + \rho_3 \omega^2 - kg(\rho_3 - \rho_2) - k^3 T_0]. \end{aligned} \quad (85)$$

把方程式(85)乘上 $\tanh(kd)$ 並且對 ω 展開，我們得到

$$\alpha \omega^4 - \beta \omega^2 + \gamma = 0, \quad (86)$$

其中

$$\alpha = \rho_2 [\rho_2 \tanh(kd) + \rho_3],$$

$$\beta = [\rho_2 + \rho_3 \tanh(kd)] (kg\rho_2 + k^3 T_d) + \rho_2 [kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3 T_0], \quad (87)$$

$$\gamma = \tanh(kd) (kg\rho_2 + k^3 T_d) [kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3 T_0].$$

在這個情況下， ω 是實數，因為我們可以從下面(88)-(90)式看出來判別式

$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ 。首先由(87)式知

$$\begin{aligned} \beta^2 - 4\alpha\gamma &= \left\{ [\rho_2 + \rho_3 \tanh(kd)] (kg\rho_2 + k^3 T_d) + \rho_2 [kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3 T_0] \right\}^2 \\ &\quad - 4\rho_2 [\rho_2 \tanh(kd) + \rho_3] \tanh(kd) \times \\ &\quad \quad \quad (kg\rho_2 + k^3 T_d) [kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3 T_0]. \end{aligned} \quad (88)$$

由於 $\tanh^2(kd) = 1 - \operatorname{sech}^2(kd)$ ，我們得到

$$[\rho_2 \tanh(kd) + \rho_3] \tanh(kd) = [\rho_2 + \rho_3 \tanh(kd)] - \rho_2 \operatorname{sech}^2(kd), \quad (89)$$

以此代入方程式(88)即可看出

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \left\{ [\rho_2 + \rho_3 \tanh(kd)] (kg\rho_2 + k^3T_d) - \rho_2 [kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3T_0] \right. \\ \left. + 4\rho_2^2 \operatorname{sech}^2(kd) (kg\rho_2 + k^3T_d) [kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3T_0] \right\}^2 \\ > 0. \quad (90)$$

由(86)式以及(90)式可知

$$\omega^2 = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} > 0. \quad (91)$$

所以 ω 是實數，這意味著，水的波動會一直維持剛產生時微小的振幅，不會變大，即三層流體無法起共同的波浪。但在這一節我們假設 $\rho_1(\omega - kv_1)^2$ 項可以被忽略。如果中間一層的厚度 d 太小，此假設就不正確了。例如 $\rho_1 = \rho_2$ 時，由(79)式可知 $\rho_1(\omega - kv_1)^2$ 能被忽略只有當下面的式子滿足時，

$$\rho_1 \ll \rho_2 \coth(kd) \left[1 - \frac{D}{C} e^{kd} \operatorname{sech}(kd) \right]. \quad (92)$$

在 $d \rightarrow \infty$ 時會趨近第二節只有兩層的狀況，那時 $C = D$ 且 $e^{kd} = 1$ ，那麼(92)式就變成

$$\tanh(kd) \ll \frac{\rho_2}{\rho_1} [1 - \operatorname{sech}(kd)], \quad (93)$$

即大約

$$kd \ll \frac{\rho_2 (kd)^2}{\rho_1 - 2}, \quad (94)$$

或

$$d \gg \frac{2\rho_1}{k\rho_2}. \quad (95)$$

將第三節一開始提到的起浪所需的最小風速算出的 $k = 364.21/\text{m}$ ，及空氣密度 $\rho_1 = 1.29\text{kg}/\text{m}^3$ ，汽油密度 $\rho_2 = 750\text{kg}/\text{m}^3$ 代入(95)式，算出汽油的厚度 $d \gg 10^{-1}$ 公分時，即至少 $d \geq 10^{-1}$ 公分之後會有抑制波浪的效果。此時除非風速 U 很大，大到 $\rho_1(\omega - kv_1)^2$ 項無法被忽略，才有可能起浪。

如果 $\rho_1(\omega - kv_1)^2$ 項無法被忽略，經過整理以後， ω 要滿足的方程式從(86)式變成以下方程式 $a_4\omega^4 + a_3\omega^3 + a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0 = 0$,

其中

$$\begin{aligned} a_4 &= \rho_2[\rho_2 \tanh(kd) + \rho_3] + \rho_1[\rho_3 \tanh(kd) + \rho_2], \\ a_3 &= -2\rho_1kv_1[\rho_3 \tanh(kd) + \rho_2], \\ a_2 &= -(kg\rho_2 + k^3T_d - \rho_1k^2v_1^2)[\rho_3 \tanh(kd) + \rho_2] - [\rho_2 + \rho_1 \tanh(kd)][kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3T_0], \\ a_1 &= 2\rho_1kv_1 \tanh(kd)[kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3T_0], \\ a_0 &= (kg\rho_2 + k^3T_d - \rho_1k^2v_1^2) \tanh(kd)[kg(\rho_3 - \rho_2) + k^3T_0]. \end{aligned}$$

這時我們以 Matlab 計算，代入 $k = 364.21/\text{m}$ 及 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, g, T_d, T_0$ 的值，變化風速及油層厚度，我們發現在厚度從 0.01 公分到 2 公分之間，風速從 1m/s 到 100m/s 之間的範圍內， ρ 的值恆為實數，同樣無法起波浪。

以下是我們使用 Matlab 的程式碼，以及計算出的結果：

```

ro1=1.29;
ro2=750;
ro3=1000;
k=364;
g=9.8;
Td=0.034;
T0=0.072;

d1=0.0001; dp=0.0001; d2=0.02;
v1=1; vp=1; v2=100;
nd=(d2-d1)/dp+1;
F=zeros(1,nd);
G=zeros(1,nd);
for d=d1:dp:d2
    F((d-d1)/dp+1)=d;
    for v=v1:vp:v2
        a4=ro2*(ro2*tanh(k*d)+ro3)+ro1*(ro3*tanh(k*d)+ro2);
        a3=-2*k*v*ro1*(ro3*tanh(k*d)+ro2);
        a2=(ro3*tanh(k*d)+ro2)*(-k*g*ro2-k^3*Td+ro1*k^2*v^2)-(ro2+ro1*tanh(k*d))*(k*g*(ro3-ro2)+k^3*T0);
        a1=2*k*v*ro1*tanh(k*d)*(k*g*(ro3-ro2)+k^3*T0);
        a0=(k*g*ro2+k^3*Td-ro1*k^2*v^2)*tanh(k*d)*(k*g*(ro3-ro2)+k^3*T0);
        G((d-d1)/dp+1)=v2+vp;
    end
end

```

```

p=[a4 a3 a2 a1 a0];
H=roots(p);
if imag(H)~=zeros(4,1);
    H
    G((d-d1)/dp+1)=v;
    break;
end
end
end
end
plot(F,G)

```

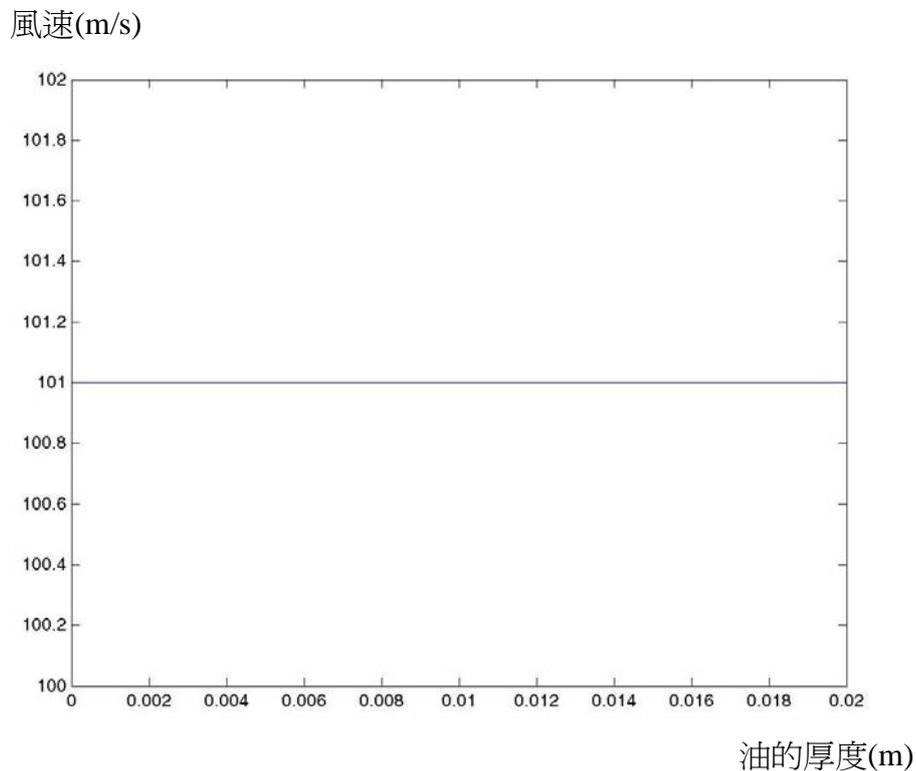


圖 19：用 Matlab 畫出的計算結果

在圖 19 中，縱軸上風速 101m/s 代表的是，在橫軸上顯示的油的厚度下，風速即使超過了 100m/s， μ 的值仍為實數，因此不再計算下去。

但由於這個方程式在計算的時候，所用的振幅是每個液體單獨受風時，所產生的振幅，並沒有考慮到，當兩層介面的距離越來越大時，振幅也就越來越不容易互相干擾，而是假設互相干擾的程度，都和將兩個液面放在同一個水平時的干擾程度一

樣。因此上面的計算在油的厚度超過 1 公分時，就開始不太適用。之所以計算到 2 公分的厚度，只是爲了保險起見。

捌、結論：

一、兩層流體（不考慮表面張力）

從現有的理論，我們知道如果只考慮空氣和水的介面，中間沒有油膜，也不考慮黏滯力和表面張力，則無論風速多小都可以起浪，這是已知的Kelvin-Helmholtz不穩定性[五]。所起的浪的波數 k 滿足(31)式

$$k > \frac{g(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2}, \quad (41)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (2)$$

當我們代入實驗時真正的數據(SI 制)： $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ， $\rho_1 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ (空氣密度)， $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ (水密度)， $v_2 = 0$ (水的速度)，及 $v_1 = 10 \text{ m/s}$ (醉月湖上量的風速)，則得到 $k > 70/\text{m}$ 。而當風速愈小，方程式(1)指出波數 k 的臨界值就愈大，也就是臨界波長愈小。

二、兩層流體（考慮表面張力）

同樣是空氣和水的介面，但考慮表面張力，則兩層的流速差必須大到滿足(49)式

$$(v_1 - v_2)^2 > \frac{1}{\alpha_2 \alpha_1} \sqrt{\frac{4Tg(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (3)$$

時才能起浪[五]。而所起的浪的波數 k 受限於(47)式

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 - \sqrt{D}}{2T/(\rho_1 + \rho_2)} < k < \frac{\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2 + \sqrt{D}}{2T/(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (4)$$

其中

$$D \equiv [\alpha_1 \alpha_2 (v_1 - v_2)^2]^2 - \frac{4Tg(\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho_1 + \rho_2} > 0. \quad (5)$$

當風速剛好足以產生波浪時，(4)式中的 k 等於 0，所以 k 大約等於 364/m。也就是說，此時水的波長 $\lambda = 2\pi/k$ 約爲 1.73 cm 與實驗部份的表 2 中的波長大約吻合。

三、三層流體（中間一層很厚）

經由理論分析，我們發現，只要中間那層油的厚度超過 1.25 cm，油與水的介面的擾動，就大約剩下油和空氣交界處的百分之一。也就是說，如果油層太厚，最下面的那一層水，幾乎感受不到風的存在。這種情形如圖 20 所示，我們只須考慮上面兩層就足以了解波浪的形成機制，它所遵守的方程式大約還是(3)-(5)式，沒有抑制波浪的效果。

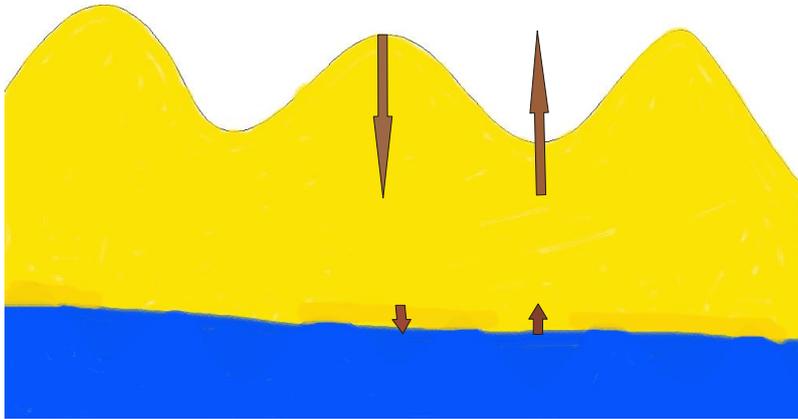


圖 20：箭頭為油分子上下振盪的速度大小

四、三層流體（中間一層很薄）

經由理論分析，我們發現在空氣、汽油、水的三層結構中，中間汽油的厚度大約介在 $0.01 \text{ cm} \leq d \leq 1.25 \text{ cm}$ 時，會有抑制波浪的效果。這時三層流體（空氣、油和水）互相干擾，如圖 21 所示，要起波浪很困難。因為油與空氣密度相差很大，水與油的密度相差則很小，兩種界面性質不同，導致振盪時波長不同，就干擾了波的形成。這解釋了為何即使在風大的海面上，倒了油之後，也可以很有效的使水面平靜下來的原因。這樣的結論在我們的實驗中得到驗證。

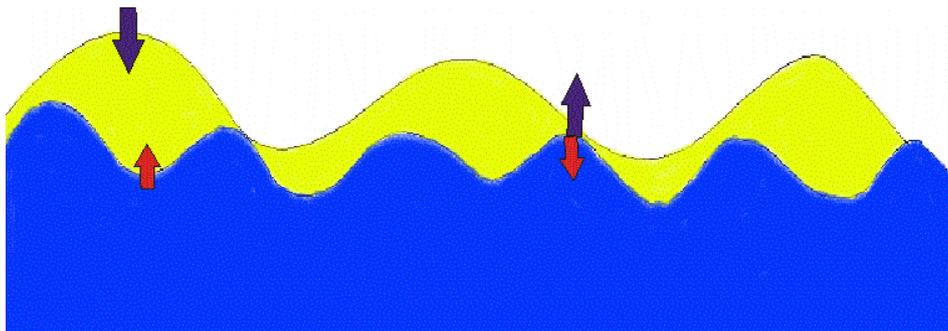


圖 21：油與水的受力方向不同，以致於互相干擾。

使用起波器時，由於起波器作用在水中的力量遠比風大，因此產生的波浪振幅，一開始就比水面的油層厚度大很多，油層已不足以影響波浪行進。

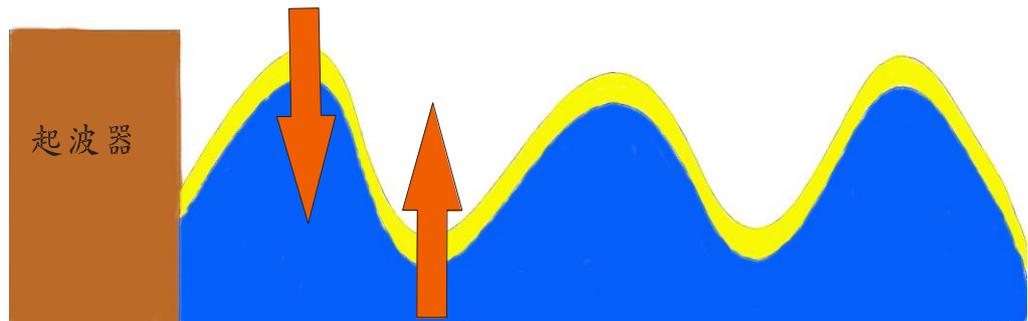


圖 22：使用起波器時，箭頭為受力方向

玖、應用及未來展望

- 一、在理論推導中，當不考慮兩層介面，因距離越來越大，而使振幅越來越不容易互相干擾的效應時，會發現在可抑制波浪的油層厚度範圍中，是不會起波的，如此畫出的油層厚度和振幅的關係圖，應是一條水平線。但在真實實驗中，我們得到一條下凹的曲線，此時即使將油層厚度加以考慮，也只能解釋油層很厚時的上升趨勢，仍無法解釋油層從無到有的下凹趨勢。因此一定還有我們尚未考慮到的因素。
- 二、我們的研究主要用來抑制 Kelvin Helmholtz 不穩定性，增加液體介面的穩定程度，避免擾動。這在追求精密的化工實驗中，可以進一步的發展。

拾、參考資料：

- 一、林佑輔，流體力學，3 版，台北市，歐亞，民 75。
- 二、B.A. Noskov and T.U. Zubkova, *Journal of Colloid and Interface Science* 170, 1-7, 1995
- 三、B. Franklin, *Philos. Trans.* 64, 445, 1774.
- 四、J. Mertens, January 2006, *Physics Today*, 36-41.
- 五、S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic And Hydromagnetic Stability*, Chap. 11, Oxford at the Clarendon Press, 1961.
- 六、Young Munson Okiishi。流體力學 A Brief Introduction to Fluid Mechanics，2 版。台北縣，高立，民 92。

【評 語】 040118 有風不起浪

本作品考量水在其表面有一層其他液體受風時，起波的情形會大為減少，此研究先考量各種因素，並加以測試後，得到主要之因素即上層液體機水波受風時，其波長層不同而互相干擾。能就其可能原因，加以推論再予以証明，是此作品最大的優點。