

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

佳作

040113

速速前！—鐵粉顆粒在磁場分佈中的受力行為

學校名稱：國立臺中女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 柯婉婷	倪天昭
高二 賴維屏	

關鍵詞：磁場分佈 折射現象 磁力

摘要

在看不見的磁場分佈中灑下鐵粉，可以透過鐵粉的重新排列清楚地看出磁力線的軌跡，而鐵粉由亂而序的過程背後，有個看不見的力量，主導著每個鐵粉顆粒速速向前。本研究利用觀察鐵粉（分別為細粉末與粗顆粒兩種）在磁場中的排列與運動行為，探討兩個重要的物理現象：

- I. 磁場在通過不同介質時所遵循的折射(refraction)現象；
- II. 磁場分佈對鐵粉顆粒產生的磁力(magnetic force)現象。

本研究以電磁鐵通電產生靜磁場。由於電磁鐵的磁導係數遠大於自由空間（空氣）之磁導係數，磁力線由電磁鐵進入空氣時，其出射角幾與邊界面垂直，形成一單純之邊界條件，因此磁通密度在自由空間中的解析值可直接利用馬克斯威爾方程式求得。我們亦導出空氣中的磁通分佈對微小的鐵粉顆粒所產生的磁力公式，發現鐵粉顆粒受靜磁力的大小與該顆粒的體積、磁通密度與磁通密度之梯度成正比，而方向與磁通密度之梯度一致。

壹、 研究動機

國中時，我們從課本上學到，兩塊一般磁鐵異極相近所構成的磁場，會在磁極周圍散佈疏密不均的磁力線，遠離磁極處磁力線稀疏，近處則緊密相聚。如果灑上鐵粉，即可看到這些磁力線的分佈情形，這些現象看似理所當然，但是，我們從未懷疑，磁力線在磁場中究竟是如何分佈？為何是以這樣的連續曲線分佈？這樣的排列方式是否有一定的規則可循？這些都還有研究的空間。

另一項引起我們好奇的，是鐵粉在磁場中受到磁場作用，移動、聚集至磁極處。然而，鐵粉在充滿能量和力的磁場中，如何決定行進的方向以及最終滯留的位置？鐵粉是受磁力作用而產生運動，那麼磁場的大小和磁力呈什麼關係？磁力對鐵粉作用使鐵粉如何運動？鐵粉運動之方向和磁力線分佈是否有關？運動的情形和鐵粉本身的條件有什麼關係？這些問題促使我們著手設計進行我們的實驗。

貳、 研究目的

- 一、推導並驗證磁力線由高導磁材料進入自由空間中之折射現象。
- 二、觀察鐵粉顆粒在磁場中之受力運動情形，推導並驗證其行為受磁場變化之影響。

參、 研究設備及器材

圖 3-1 為本研究建立磁場環境之實驗平台。



圖 3-1.實驗平台

- 一、 電源供應器一台
- 二、 鐵板一塊
- 三、 高斯計一台
- 四、 黑光燈一盞
- 五、 冰棒棍
- 六、 電磁鐵二對——1000 匝細漆包線及 1150 匝粗漆包線
- 七、 吸管一枝
- 八、 直尺一把
- 九、 螢光劑
- 十、 塑膠製鑷子一把
- 十一、 防水膠一條
- 十二、 煤油
- 十三、 培養皿數個
- 十四、 滴管一枝
- 十五、 鐵粉一罐
- 十六、 膠水
- 十七、 電子秤一台
- 十八、 高速攝影機一台
- 十九、 腳架一組
- 二十、 透明盒
- 二十一、 矽鋼片數片
- 二十二、 鐵塊數塊

肆、研究過程及方法

一、研究理論

本研究利用觀察鐵粉（分別為細粉末與粗顆粒兩種）在磁場中的排列與運動行為，探討兩個重要的物理現象：

- I. 磁場在通過不同介質時所遵循的折射(refraction)現象；
- II. 磁場分佈對鐵粉顆粒產生的磁力(magnetic force)現象。

（一）磁場折射原理

圖 4-1 為磁力線(magnetic flux)由磁導係數(permeability) μ_2 之材料進入 μ_1 材料而產生折射的情形。

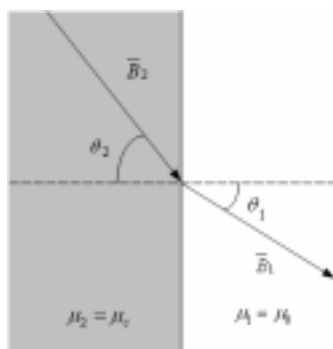


圖 4-1. 磁力線的折射路徑描述

利用電磁場傳導的邊界條件(boundary conditions)原理，其出射角 θ_1 與入射角 θ_2 的關係為

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4-1)$$

設若 $\mu_2 = \mu_c$ 為高導磁性(ferromagnetic)介質而 $\mu_1 = \mu_0$ 為空氣，因磁導係數差異懸殊，亦即 $\mu_c = \mu_2 \gg \mu_1 = \mu_0$ ，故在入射角不在 90 度附近的情形下，其出射角滿足

$$\tan \theta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_c} \tan \theta_2 \approx 0, \text{ 亦即}$$

$$\theta_1 \approx 0^\circ \quad (4-2)$$

故磁力線由高導磁材料進入空氣時，其出射角度幾乎垂直邊界面，我們將以此原理出發，考慮不同幾何結構之自由空間(free space, $\mu = \mu_0$)，推導其磁力線形狀，並以實驗證實。

1. 邊緣磁通路徑與漏磁現象

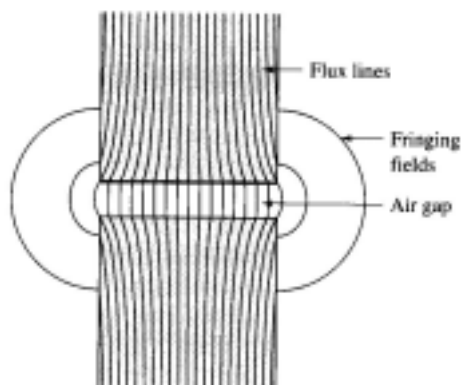


圖 4-2. 電磁鐵間隙的邊緣磁場(漏磁)軌跡示意圖

圖 4-2 為兩具同向激磁的高導磁材料，其相對磁導係數(relative permeability)為 $\mu_r = 4000$ ，以通電流之線圈纏繞使產生磁力線(電磁鐵)並通過氣隙間隔(air gap)，如圖所示，磁力線因折射而產生邊緣磁場(fringing fields)，且其軌跡為近似半圓(semi-circle)，這正是因為磁力由電磁鐵中折射進入空氣的出射角幾乎垂直其表面的緣故。

邊緣磁場的大小與其行經路徑有密切關係，我們依所設計的實驗場景設定座標如圖 4-3 所示，在 x - y 平面上，令邊緣磁場 $\vec{B}(x, y) = B_x(x, y)\vec{a}_x + B_y(x, y)\vec{a}_y$ ， $\vec{a}_x$ 為 x 軸方向之單位向量， $\vec{a}_y$ 為 y 軸方向之單位向量，則 $\vec{B}$ 滿足馬克斯威爾方程式(Maxwell's equations)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{B} = 0 \quad (4-3)$$

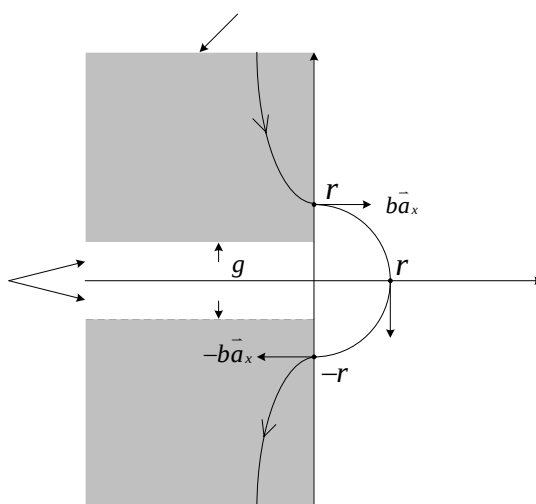


圖 4-3. 直角座標中的邊緣磁場路徑

設若某一邊緣磁力線由上段電磁鐵於 $x = 0, y = r$ 處射出，則其將由 $x = 0, y = -r$ 處射回下段電磁鐵，令其磁通密度大小為 b ，則該邊緣磁場之邊界條件為

$$\vec{B}(0, r) = b\vec{a}_x, \quad \vec{B}(0, -r) = -b\vec{a}_x \quad (4-4)$$

將(4-3)與(4-4)式化解為直角座標系的偏微分方程式及其邊界條件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} &= 0 \\ B_x(0, r) &= b, B_x(0, -r) = -b, B_y(0, r) = 0, B_y(0, -r) = 0 \end{aligned} \quad (4-5)$$

經求解(4-5)式得該邊緣磁場為

$$B_x(x, y) = br \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad B_y(x, y) = -br \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4-6)$$

可得在 4-3 圖所示以 r 為半徑之半圓上（亦即 $x^2 + y^2 = r^2, x > 0$ ），其磁通密度之大小 $|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = b$ 為一常數，故該半圓即為該邊緣磁力線之路徑。

2. 氣隙磁通與邊緣磁通密度

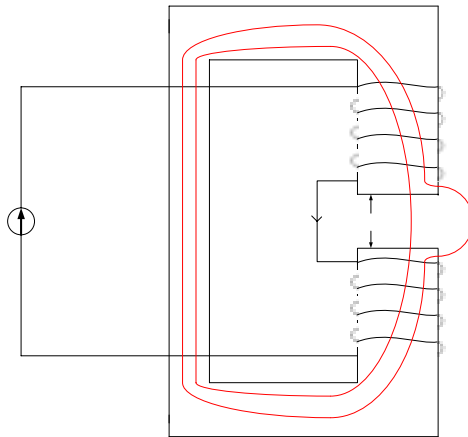


圖 4-4. 氣隙磁通路徑與邊緣磁通路徑

考慮圖 4-4 中的 C_1 與 C_2 兩條封閉路徑，其中 C_1 為氣隙磁通路徑， C_2 為邊緣磁通路徑，我們利用安培定律(Ampere's Law)來計算該兩者之磁通密度大小。對 C_1 而言，其磁通密度 B_{ag} 滿足

$$NI = \oint_{C_1} \frac{1}{\mu} \vec{B}_{ag} \cdot d\vec{l} = \int_{C_{11}} \frac{1}{\mu_c} \vec{B}_{ag} \cdot d\vec{l} + \int_{C_{12}} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{ag} \cdot d\vec{l} \quad (4-7)$$

其中 C_{11} 為電磁鐵內路徑，長度為 l_1 ； C_{12} 為氣隙，寬度為 g ，又因路徑方向與磁通方向一致，可得(4-7)式之積分值為

$$NI = \left(\frac{l_1}{\mu_c} + \frac{g}{\mu_0} \right) B_{ag} \quad (4-8)$$

故氣隙磁通密度為

$$B_{ag} = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_c} + \frac{g}{\mu_0}} \quad (4-9)$$

另一方面，對路徑 C_2 而言，其磁通密度 B_f 滿足

$$NI = \oint_{C_2} \frac{1}{\mu} \vec{B}_f \cdot d\vec{l} = \int_{C_{21}} \frac{1}{\mu_c} \vec{B}_f \cdot d\vec{l} + \int_{C_{22}} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_f \cdot d\vec{l} \quad (4-10)$$

其中 C_{21} 為電磁鐵內路徑，長度與 C_{11} 相當，可視為 l_1 ； C_{22} 為以 r 為半徑之半圓形邊緣磁場路徑，長度為 πr ，計算其積分值得

$$NI = \left(\frac{l_1}{\mu_c} + \frac{\pi r}{\mu_0} \right) B_f \quad (4-11)$$

故圖 4-4 之邊緣磁通密度大小為

$$B_f = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_c} + \frac{\pi r}{\mu_0}}, \quad r > \frac{g}{2} \quad (4-12)$$

考慮圖 4-3 中之直角座標系，由於兩電磁鐵位置緊貼於 y 軸邊上，我們可將 $x < \frac{g}{2}$ 處

歸為氣隙磁通， $x > \frac{g}{2}$ 處歸為邊緣磁通，則結合(4-9)與(4-12)可得 x 軸上之磁場變化：

$$B(x) = \begin{cases} \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_c} + \frac{g}{\mu_0}}, & x < \frac{g}{2} \\ \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_c} + \frac{\pi x}{\mu_0}}, & x \geq \frac{g}{2} \end{cases} \quad (4-13)$$

其中 x 為軸上受測點與原點之距離，我們將以實驗量測數據驗證(4-13)式。

3. 扇形自由空間之磁場分佈

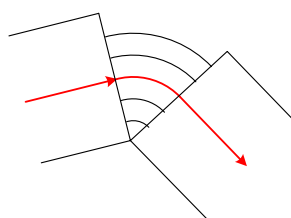


圖 4-5. 扇形自由空間

將兩具電磁鐵折角排列使形成一扇形(sector)自由空間(如圖 4-5 所示)，令該扇形之幅角(argument)為 θ 。利用 4.1-1 所推導之磁力線路徑公式(4-6)可知，此扇形自由空間內之

磁力線形狀為以頂點為圓心之同心圓(concentric circles)。在忽略高導磁電磁鐵的磁力線路徑之前提下，可推出其內之磁通密度大小為

$$B_{\text{sector}} = \Psi \frac{I}{r\theta} \quad (4-14)$$

其中 r 為同心圓半徑， Ψ 為常數，故扇形內之磁通密度與幅角、半徑成反比，與所導入之電流成正比。

(二) 鐵粉顆粒受力原理與運動方程式

1. 鐵粉受力公式

考慮空間中一個線性(linear)、等向(isotropic)的磁場分佈，其磁導係數為 μ_0 ，強度(magnetic intensity)為 H_0 。如圖 4-6 所示，磁場中有一微小之高磁導材料顆粒（在本研究中為鐵粉），則該系統之總磁能為

$$W_m = \frac{1}{2} \int_U \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \int_{U-\Delta V} \mu_0 H_0^2 dV + \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \mu_c H_c^2 dV \quad (4-15)$$

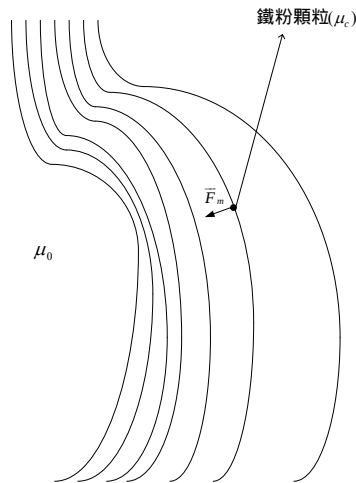


圖 4-6. 磁場分佈中鐵粉顆粒之受力情形

其中 U 代表系統所在空間， ΔV 為該鐵粉顆粒所佔之微小空間， μ_c 與 H_c 分別為鐵粉之磁導係數(permeability)與通過其內之磁場強度(magnetic field intensity)。將(4-15)式改寫為

$$W_m = \frac{1}{2} \int_U \mu_0 H_0^2 dV - \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \mu_0 H_0^2 dV + \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \mu_c H_c^2 dV \quad (4-16)$$

等號右邊第一項為鐵粉置入系統前之空間總磁能，第二項與第三項則為鐵粉置入系統之後所產生的磁能效應。假設該鐵粉體積非常微小，可將 ΔV 位置視為一點，則鐵粉顆粒內、外之磁通密度(magnetic flux density)可視為相等，亦即

$$\lim_{|\Delta V| \rightarrow 0} B_c = B_0 \quad (4-17)$$

其中 B_c 為鐵粉顆粒內之磁通密度，而 B_0 則為其外圍（亦即 ΔV 之邊界）之磁通密度。可得

$$\mu_c H_c = \mu_0 H_0 \quad (4-18)$$

因鐵粉的磁導係數遠大於周圍空間的磁導係數；亦即 $\mu_c \gg \mu_0$ ，換言之 $H_c \ll H_0$ ，故(4-16)式之第三項可忽略不計。此外，在鐵粉顆粒體積極微小的假設下，其內部之磁通密度幾為常數，可將(4-16)式之積分算出為

$$W_m \cong \frac{1}{2} \int_U \mu_0 H_0^2 dV - \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \frac{B_0^2}{\mu_0} dV = W_0 - \frac{B_0^2}{2\mu_0} \nu \quad (4-19)$$

其中 W_0 為置入鐵粉前之空間總磁能， B_0 為鐵粉所在位置之磁通密度， ν 為鐵粉體積。算出系統總磁能之後，可依據能量不滅定律(the Principle of Conservation of Energy)，利用磁能與動能的轉換原理[3]導出鐵粉受力公式如下：

$$\vec{F}_m = -\nabla W_m = -\frac{\nu}{\mu_0} B_0 \nabla B_0 \quad (4-20)$$

由(4-20)式可知鐵粉在磁場中的受力情形，其方向與環境之磁通密度之梯度(gradient)一致，亦即與磁力線垂直並往更高磁通密度的方向，與圖 4-6 之示意圖描述一致；而其大小正比於鐵粉體積、所在位置之磁通密度及其梯度大小之乘積。故此結論可以解釋磁粉探傷過程中所呈現之「鐵粉顆粒往鐵材工件之傷痕處聚集」現象，而在本研究中，我們設計單一自由度(one degree-of-freedom)的鐵粉受力運動實驗，僅需計算 x 方向磁場對鐵粉的影響，因此對 W_m 做 x 軸方向的偏微分得

$$\vec{F}_m = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{\nu}{\mu_0} B_0 \frac{\partial B_0}{\partial x} \vec{a}_x \quad (4-21)$$

2. 鐵粉於氣隙內之運動方程式

本研究將利用觀察鐵粉顆粒的運動情形來量測磁力 $\vec{F}_m$ 以印證(4-21)式，在電磁鐵氣隙中置入一垂直磁力線之直線(x 軸向)運動軌道，內含磁懸液(煤油)，再將鐵粉顆粒投入後開始紀錄其運動軌跡。令鐵粉之質量為 m ，位置為 x ，則其運動方程式為

$$F_m - F_r - F_c = m\ddot{x} \quad (4-22)$$

其中 F_m 為磁力， $F_r = c\dot{x} = cv$ 為磁懸液的黏滯摩擦力(viscous friction)， $F_c = M \cdot \text{sgn}(v)$ 為庫侖摩擦力(Coulomb friction)， v 為鐵粉速度， c 為黏滯摩擦係數。整個運動路徑可分為氣隙外($x \geq \frac{g}{2}$)與氣隙內($x < \frac{g}{2}$)與兩階段。在鐵粉投入氣隙外之瞬間，其初速度為 0 故 $F_r = 0$ ，在磁力足以克服庫侖摩擦力的前提下，鐵粉即受加速進入氣隙；進入氣隙之後，因其內的磁通密度為常數以致 $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$ ，造成 $F_m = 0$ ，此時鐵粉因黏滯摩擦與庫侖摩擦而開始減速，其運動方程式為

$$m\dot{v} = -cv, \quad x \leq \frac{g}{2} \quad (4-23)$$

利用所記錄的鐵粉速度曲線將可求出參數 c 值，再帶入氣隙外的運動方程式得

$$F_m(x) = m\dot{v} + cv, \quad x > \frac{g}{2} \quad (4-24)$$

即可算出氣隙外邊緣磁場中每一量測點 x 的磁力大小以印證(4-21)式。

3. 鐵粉於扇形自由空間內之受力情形

將扇形內之磁通密度(4-14)帶入(4-20)之鐵粉顆粒受力公式可得其磁力大小為

$$\vec{F}_{sector} = -\Psi_1 \frac{I^2}{r^3 \theta^2} \vec{a}_r \quad (4-25)$$

其中 Ψ_1 為常數， $\vec{a}_r$ 為扇形頂點至鐵粉位置之單位向量，亦即，鐵粉顆粒將一律往扇形頂點(同心圓之圓心)方向受力。此時，若將鐵粉顆粒置於扇形內距頂點為 r 處，則該鐵粉的運動狀況將視 F_{sector} 與庫倫摩擦 F_c 相持之結果而定。 r 越小則磁力越大，即可能克服庫倫摩擦。

(4-25)意味著我們可以藉著調整電流 I 、幅角 θ 以及鐵粉位置 r 來控制鐵粉的運動。在相同的鐵粉顆粒與環境條件下，庫倫摩擦力為一常數，我們將以實驗測試 $F_{sector} = F_c$ 時之各變數之間的關係，即

$$\frac{I^2}{r^3 \theta^2} = \eta \quad (4-26)$$

其中 η 為常數。

(三) 應用——磁粉探傷

磁粉探傷為工業上用來檢測鋼鐵零件是否有微小缺陷之檢測法。其原理乃是利用磁力線於不連續之介質(即缺陷處)產生偏折，形成邊緣磁場(如圖 4-7)。根據(4-27)式，鐵粉在磁力線邊緣磁場中會沿磁場梯度變化之方向移動、聚集至磁力線密集的位置(漏磁場最強處)，堆積成磁痕，此磁痕即為缺陷的放大圖像，便於觀察。

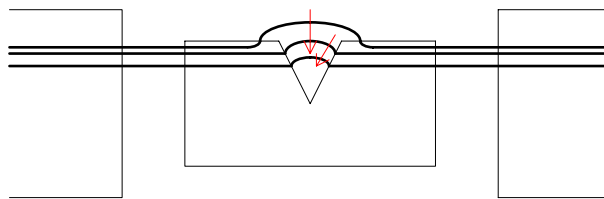


圖 4-7. 磁力線於鋼鐵零件缺陷處產生偏折

本實驗利用兩片矽鋼片模擬鋼鐵零件及缺陷，將之置於磁場中，在矽鋼片表面放置鐵粉，觀察鐵粉聚集之情形。

二、實驗步驟

(六) 實驗裝置 - - 建立磁場

1. 將兩電磁鐵固定於鐵板上。
2. 電磁鐵間夾兩根冰棒棍並使其與電磁鐵緊緊密合。
3. 電磁鐵與電源供應器相連接，磁場即架設完畢。

(七) 鐵粉顆粒製作

由磁力公式可知，鐵粉在磁場中的受力和鐵粉體積大小有關，因此，在進行觀察紀錄鐵粉在磁場中運動情形時，體積的控制為首要考慮因素。

1. 利用削成固定形狀之竹筷和熱熔膠製作體積固定之之模具。
2. 在模具中滴入速乾膠，並迅速填充入鐵粉。
3. 待乾後，將模具割開，便可得到鐵粉顆粒。

(八) 磁場折射實驗

1. 電磁鐵氣隙邊緣磁場分佈
 - (1) 將高斯計置於磁場中，其中，須注意高斯計須垂直於冰棒棍，且須控制兩電磁鐵至高斯計之距須相等。
 - (2) 建立線座標：以 0.2cm 為單位，電磁鐵的中點為原點，垂直磁場方向為 X 軸，向電磁鐵外為正。
 - (3) 將高斯計置於 X 軸橫向移動，測量磁場的變化。
2. 扇形環境之磁力線分佈
 - (1) 將兩電磁鐵以電磁鐵面夾角 90° 放置，通以 1 A 之電流。
 - (2) 在電磁鐵夾角處灑上鐵粉，輕敲桌面，觀察鐵粉之散佈。
 - (3) 利用相機拍攝鐵粉散佈之情形。

(九) 鐵粉顆粒在磁場中的運動

1. 鐵粉顆粒在電磁鐵氣隙邊緣磁場之受力運動
 - (1) 將實驗(二)製成之鐵粉顆粒至於磁場中之軌道上，開啟電源供應器。
 - (2) 開啟電源供應器的瞬間，開始利用高速攝影機拍攝。
 - (3) 使用程式計算出位移與速度、加速度等關係。
2. 鐵粉顆粒在扇型環境磁場之受力運動
 - (1) 不同夾角影響運動時間差實驗
 - ⊕ 將兩電磁鐵以電磁鐵面夾角 90° 放置，電磁鐵通以 2A 之電流。
 - ⊙ 在電磁鐵面夾角處，置一底部畫有刻度之透明盒（角度配合電磁鐵夾角度數），其中加入煤油，即為鐵粉顆粒運動之油域。
 - ⊙ 將鐵粉顆粒釋放於分角線上，據夾角頂點 3cm、5cm 處，利用攝影機紀錄鐵粉顆粒運動至夾角頂點之時間。
 - ⊕ 將夾角改為 60° ，重複步驟 ⊕ ~ ⊙。
 - (2) 庫倫摩擦力實驗

- ① 按實驗（四）- 2.之 ①、② 步驟建立磁場。
- ② 將鐵粉顆粒於角平分線上各處釋放，找出鐵粉顆粒售電磁鐵產生影響之最遠範圍。
- ③ 將夾角改為 60° ，重複步驟 ②。
- ④ 將電流大小改為 1A、1.5A，重複步驟 ①~③。

（五）磁粉探傷實驗

1. 簡易磁粉探傷
 - (1) 將兩片矽鋼片並排置於磁場中，模擬鋼鐵零件及缺陷。
 - (2) 在矽鋼片表面灑上鐵粉，觀察鐵粉的散佈情形，並利用相機拍照紀錄。
2. 同寬度不同角度缺陷之探傷
 - (1) 訂做兩塊缺陷鐵塊，其缺陷寬度相同，其缺陷底部角度分別為 60° 和 90° 。
 - (2) 將兩鐵塊依實驗（五）之 1 之步驟做磁粉探傷，並拍照紀錄、比較鐵粉聚集情形。
3. 同角度不同寬度缺陷之探傷
 - (1) 訂做四塊同為 60° ，缺陷寬度不同（0.1、0.2、0.3、0.4cm）之鐵塊。
 - (2) 依實驗（五）之 1 之步驟做探傷，拍照紀錄，比較鐵粉聚集情形。

伍、 研究結果

本研究中，我們設計了「靜磁場環境分佈建立」與「鐵粉受力運動」兩大單元實驗來印證所推導的邊緣磁場(漏磁)、扇形自由空間磁場、以及磁力公式(4-14)、(4-21)，前者屬靜態的磁場環境佈局，而後者則是動態的鐵粉受力過程行為紀錄，兩實驗互為因果。

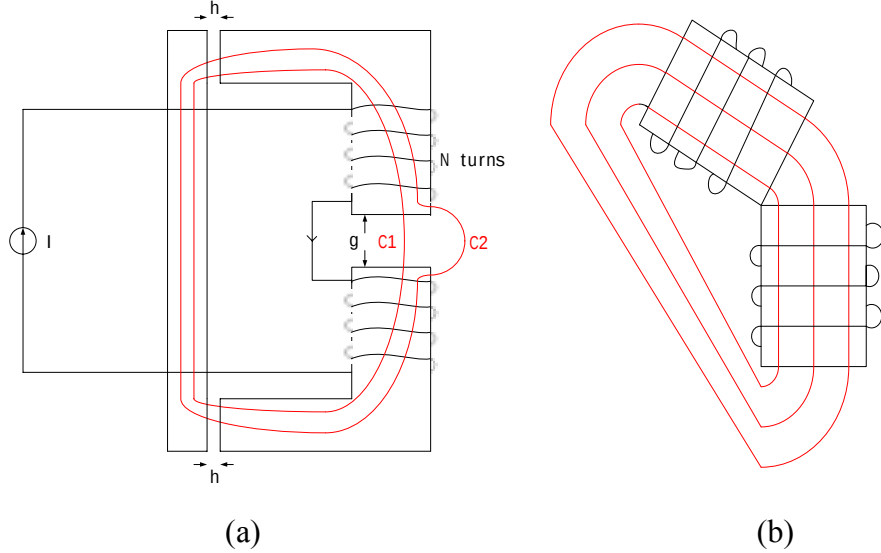


圖 5-1. (a)考慮絕緣漆厚度 h 之氣隙磁通路徑與邊緣磁通路徑
(b)扇形自由空間磁場之磁通路徑

一、系統參數說明

根據(4-14)式，邊緣磁通密度大小為位置的函數，形式如下：

$$B_f(x) = \frac{k_1}{k_2 + k_3 x}, \quad x \geq \frac{g}{2} \quad (5-1)$$

其中 $k_1 = NI$ ， $k_2 = \frac{l_1}{\mu_c}$ ， $k_3 = \frac{\pi}{\mu_0}$ 。如圖 5-1 所示，在實驗器材架設過程中，我們製作兩具長方體電磁鐵跨置於一塗佈絕緣厚漆(厚度為 h)的鐵板上，其磁路略微增加了 $2h$ 的路徑，而漆的磁導常數與空氣一致，故需將常數 k_2 修正為 $k_2 = \frac{l_1}{\mu_c} + \frac{2h}{\mu_0}$ 。而氣隙磁通密度大小則為一常數：

$$B_{ag}(x) = \frac{k_1}{k_2 + \frac{g}{\mu_0}}, \quad x < \frac{g}{2} \quad (5-2)$$

而在鐵粉的受力運動實驗中，我們以鐵粉拌入螢光粉與膠水來製作鐵粉顆粒，以數位攝影機錄下運動過程，再使用影片擷取軟體定格判讀其位置、速度、與加速度。

二、電磁鐵氣隙邊緣磁場環境分佈實驗

我們採用電磁鐵的空氣間隙來產生邊緣磁場，於該邊緣磁場環境分佈中進行鐵粉顆粒的受力與運動實驗。本實驗之相關參數值詳如下表：

表 5-1 電磁鐵氣隙邊緣磁場實驗參數表

符號	數值	說明
N	1000 turns	兩電磁鐵之總匝數
I	0.8 A	激磁電流
g	4 mm	氣隙寬度
l_1	562 mm	電磁鐵長度 = 130mm , 電磁鐵高度 = 38mm 故 $l_1 = 130 + 130 + g + 38 + 130 + 130$ mm
h	0.65 mm	漆絕緣厚度
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m	空氣與絕緣漆之磁導常數(cgs 制之 μ_0 值為 1)
μ_c	4,000 μ_0	電磁鐵與鐵板之磁導常數
k_1	800	$B(x)$ 函數內常數(MKS 制)
k_2	1146.3	$B(x)$ 函數內常數(MKS 制)
k_3	2500000	$B(x)$ 函數內常數(MKS 制)

將表 5-1 之實驗參數帶入(5-1)與(5-2)式可算出每一量測點之磁通密度大小得

$$B(x) = \begin{cases} 1848 \text{ gauss}, & x < 2 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \frac{800 \times 10^4}{1146.3 + 2500000 x} \text{ gauss}, & x \geq 2 \times 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \quad (5-3)$$

其中 x 以公分(cm)為運算單位；另一方面，我們使用高斯計(gauss meter)量測氣隙與邊緣磁場之數據如下表 5-2。

表 5-2 氣隙磁通密度與邊緣磁通密度之量測值

第一組量測數據		第二組量測數據	
量測點(x)	磁通密度($gauss$)	量測點(x)	磁通密度($gauss$)
-1.65	1825	-1.7	1856
-1.45	1825	-1.5	1851
-1.25	1820	-1.3	1848
-1.05	1821	-1.1	1833
-0.85	1811	-0.9	1823
-0.65	1805	-0.7	1838
-0.45	1799	-0.5	1846
-0.25	1802	-0.3	1842
-0.05	1827	-0.1	1831
0.15	1769	0.1	1847
0.35	866	0.3	985
0.55	517	0.5	467
0.75	353	0.7	331
0.95	251	0.9	236
1.15	196	1.1	168
1.35	155	1.3	136
1.55	125	1.5	105
1.75	100	1.7	84
1.95	81	1.9	68

圖 5-2 為(5-3)式之 $B(x)$ 曲線與表 5-2 之量測值之比較。

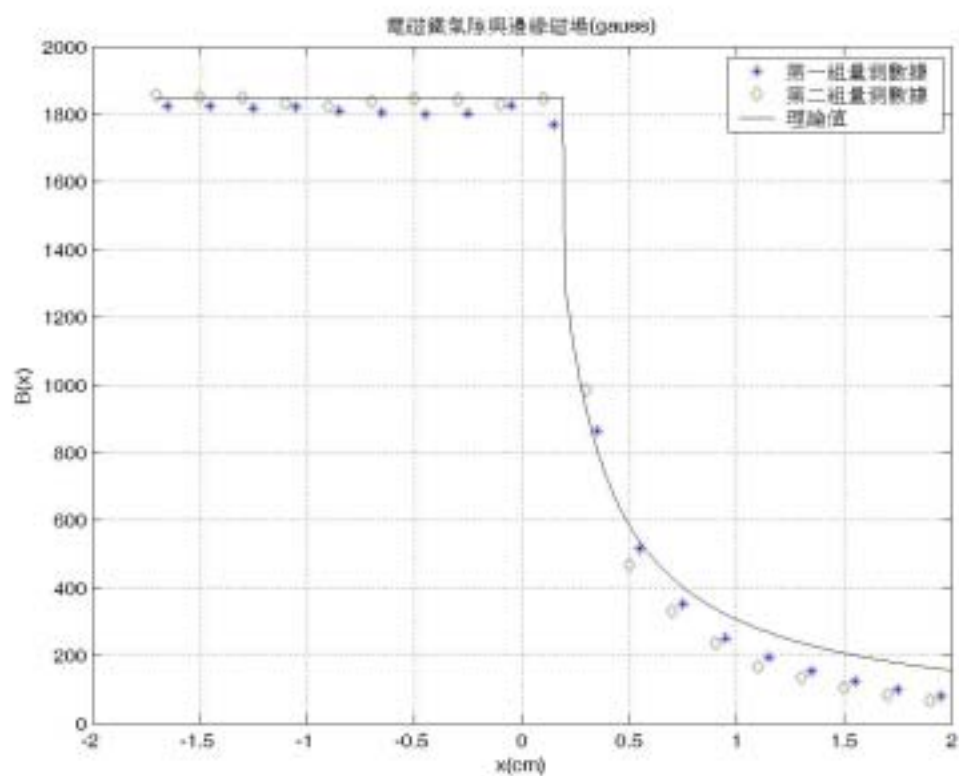


圖 5-2 電磁鐵氣隙磁場與邊緣磁場之理論值與量測值之比較

由(5-2)式可知氣隙磁通密度 B_{ag} 大小隨氣隙寬度增加而減少, 改變氣隙寬度之量測結果如下表：

表 5-3 磁通密度隨氣隙寬度改變之情形

	$g=4mm$	$g=8mm$	$g=12mm$	$g=16mm$
量測值(gauss)	1853	973	704	522
理論值(gauss)	1848	1065	748	576

圖示如下：

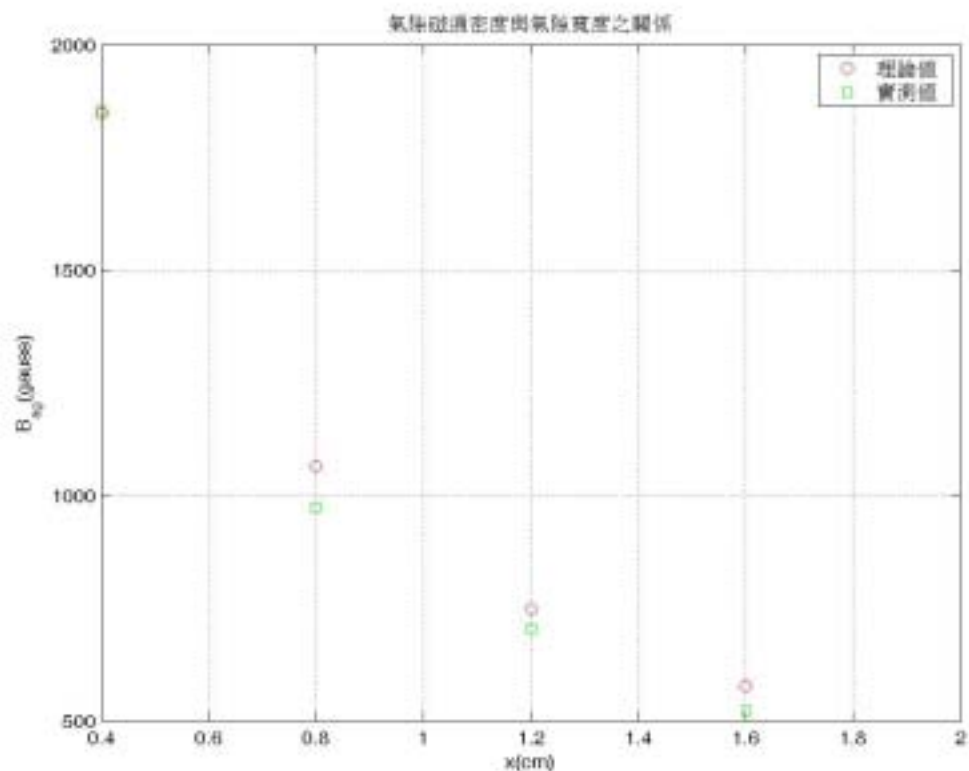


圖 5-3 氣隙磁通密度與氣隙寬度關係

三、氣隙邊緣磁場之鐵粉顆粒受力運動實驗

我們使用第二個平台進行鐵粉顆粒受力運動實驗，目的是增強邊緣磁場使其運動軌跡更容易擷取。參數表為：

表 5-4 鐵粉顆粒受力運動實驗參數

符號	數值	說明
N	1150 turns	兩電磁鐵之總匝數
I	2 A	激磁電流
g	6 mm	氣隙寬度
l_1	706 mm	電磁鐵長度 = 150mm，電磁鐵高度 = 50mm 故 $l_1 = 150 + 150 + g + 50 + 50 + 150 + 150$ mm
h	0.65 mm	漆絕緣厚度
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m	空氣與絕緣漆之磁導常數(cgs 制之 μ_0 值為 1)
μ_c	$4,000 \mu_0$	電磁鐵與鐵板之磁導常數
k_1	2300	$B(x)$ 函數內常數(MKS 制)
k_2	1153.9	$B(x)$ 函數內常數(MKS 制)
k_3	2500000	$B(x)$ 函數內常數(MKS 制)
m	0.003 g	鐵粉顆粒成分：鐵粉+膠
v	0.012ml	鐵粉顆粒體積
c	59350 dyne/cm/s	桌面之黏滯摩擦係數

我們以數位錄影機記錄五筆鐵粉顆粒的於氣隙中之受力運動軌跡實驗如表 5-5 所示：

表 5-5 鐵粉顆粒運動軌跡數據

時序 k	第一組數據 $x_k (cm)$	第二組數據 $x_k (cm)$	第三組數據 $x_k (cm)$	第四組數據 $x_k (cm)$	第五組數據 $x_k (cm)$
1	1.99137	1.88589	1.760548	1.987397	1.806986
2	1.97274	1.867808	1.745616	1.966027	1.795205
3	1.951918	1.847534	1.731096	1.943151	1.782877
4	1.93137	1.82589	1.714521	1.919589	1.768767
5	1.907808	1.80274	1.696986	1.893562	1.753836
6	1.882877	1.776712	1.67726	1.863699	1.739726
7	1.857671	1.750274	1.656301	1.83	1.739315
8	1.826986	1.7121644	1.632603	1.794658	1.723151
9	1.795205	1.690137	1.606849	1.757808	1.703425
10	1.760685	1.657808	1.577123	1.722329	1.683562
11	0.104521	1.619178	1.54411	1.684384	1.661507
12	1.679726	1.578219	1.509315	1.643562	1.639041
13	1.633425	1.535616	1.470548	1.597808	1.616575
14	1.580959	1.49411	1.427808	1.54589	1.59411
15	1.524932	1.449452	1.379863	1.489315	1.569589
16	1.459452	1.397808	1.325068	1.424247	1.541781
17	1.386301	1.339178	1.262603	1.349041	1.512329
18	1.301507	1.273699	1.193973	1.266712	1.475479
19	1.198219	1.196849	1.120274	1.16863	1.43137
20	1.071644	1.101096	1.034932	1.016986	1.38726

每組實驗的磁粉顆粒自氣隙外投入，而五次量測的磁粉最終（靜止）位置與時間都互有差異，可見本實驗的精密度極難控制，然而我們仍能從其軌跡中看出磁粉的運動模式與我們的預測相近。

首先利用鐵粉進入氣隙之後的運動軌跡推算其在每一點 x_k 處之瞬時速度 ($v_k = \dot{x}_k$) 與加速度 ($a_k = \ddot{x}_k$)，進而算出黏滯摩擦係數 c 與庫侖摩擦力常數 M （如表 5-1 所示），如此便能算出邊緣磁場 B_f 對鐵粉的施力，如(4-23)式所列

$$F_i(x) = m\dot{v}_i(x) + cv_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5-4)$$

其中 i 代表第 i 次的量測結果， $v_i(x)$ 為鐵粉於該量測結果中於位置 x 之瞬時速度， $\dot{v}_i(x)$ 為瞬時加速度，而 F_i 為推算之總施力，即對鐵粉之靜磁力。最後將(5-1)式的磁場分佈函數帶入(4-20)式可導出為

$$F_m(x) = -\frac{\nu k_1^2 k_3}{\mu_0 (k_2 + k_3 x)^3} \quad (5-4)$$

圖 5-4 即為五次量得之邊緣磁場力 F_i 與理論值 F_m 之比較，顯明磁場分佈對鐵粉顆粒的運

動行為影響狀況。

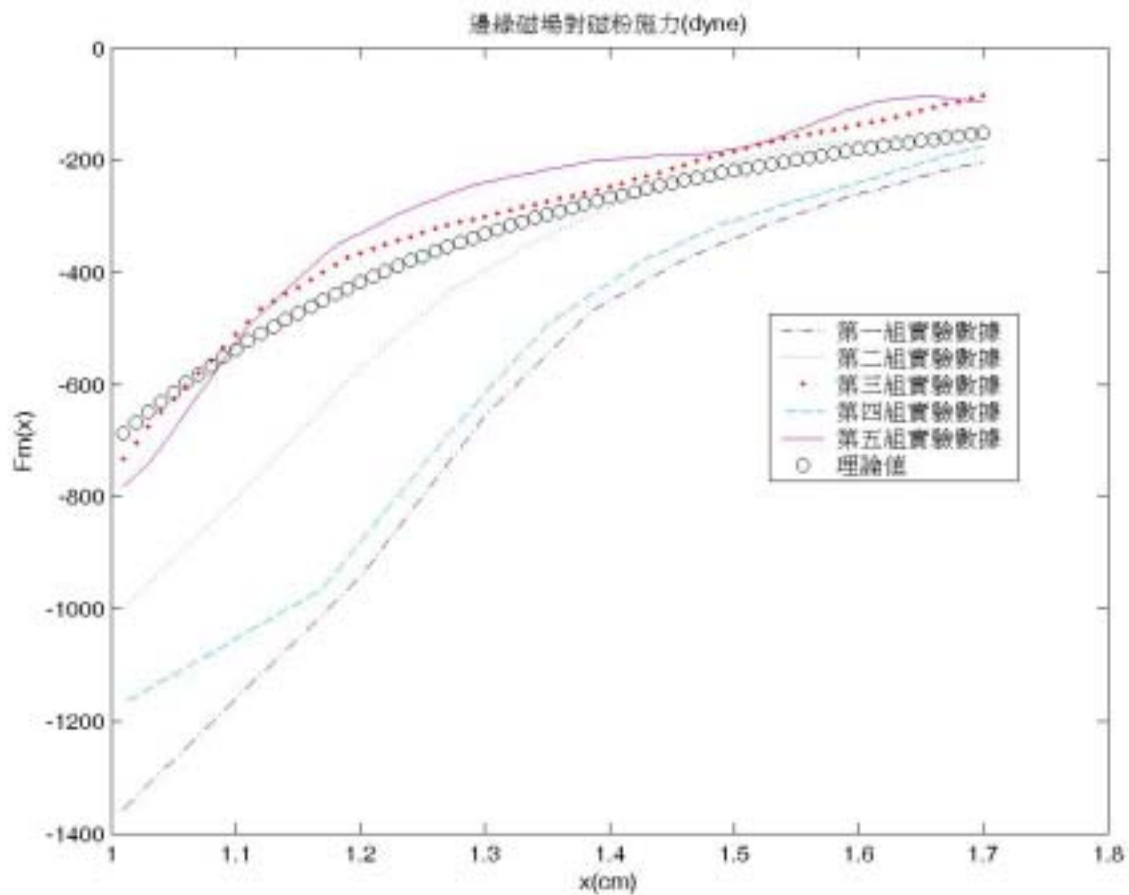
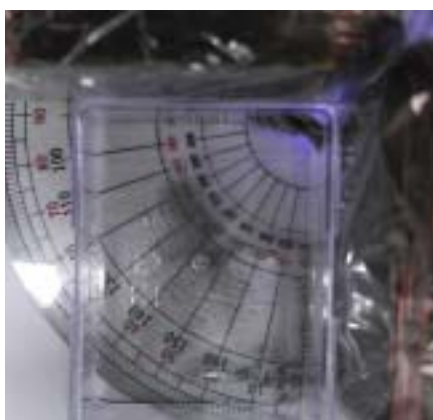


圖 5-4 邊緣磁場對鐵粉施力的理論值與量測結果之比較

四、扇形自由空間之磁力線分佈

為證實所推導之同心圓磁力線分佈，我們選擇了 $\theta = 90^\circ$ 與 $\theta = 60^\circ$ 兩種扇形自由空間，觀察含微細鐵粉末的磁懸液中之鐵粉排列情形，證實此同心圓分佈理論，如圖 5-4 所示。



(a) 電磁鐵夾角 90° 之鐵粉分佈



(b) 電磁鐵夾角 60° 之鐵粉分佈

圖 5-4 扇形自由空間之同心圓磁力線排列

五、扇形自由空間中之鐵粉顆粒受力實驗

根據(4-34)式 $\vec{F}_{sector} = -\Psi_1 \frac{I^2}{r^3 \theta^2} \vec{a}_r$ ，鐵粉顆粒在克服庫輪摩擦之後，其行進方向將直達扇形頂點，且行進速度隨幅角改變(因磁力不同之故)。表 5-5 與圖 5-5 分別紀錄其運動情形。

表 5-5 不同幅角與鐵粉顆粒起始位置之抵達頂點時間

	鐵粉顆粒起始位置	
	3 cm	5 cm
$\theta = 60^\circ$	0.13 sec	0.35 sec
$\theta = 90^\circ$	0.17 sec	1.16 sec

由上表之鐵粉行進時間可看出，幅角越小速度越快，亦即受力越大；而同一幅角時，起始位置越遠，抵達時間越長。圖 5-5 顯示鐵粉運動方向與理論一致。

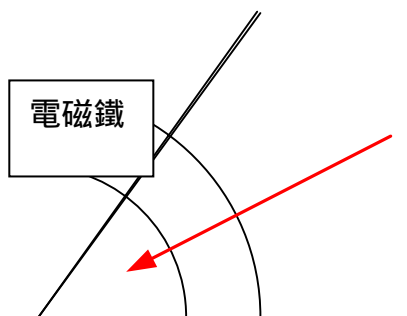


圖 5-5 鐵粉顆粒於扇形自由空間中之行進軌跡

為驗證(4-35)式中電流 I 、幅角 θ 以及鐵粉位置 r 三者之關係 $\frac{I^2}{r^3 \theta^2} = \eta$ ，我們利用庫輪摩擦力為常數之特性，以試誤法(trial and error)尋找鐵粉顆粒感受磁力等於庫輪摩擦力之「臨界位置」(critical position)。

(一) θ 為定值時， $\frac{I^2}{r^3} = \eta_1$

表 5-6 電流與鐵粉顆粒位置之關係

$\theta = 90^\circ$		臨界位置	η_1
電 流	2 A	7 cm	0.01166
	1.5 A	5.7 cm	0.01249
	1 A	4.5 cm	0.01097

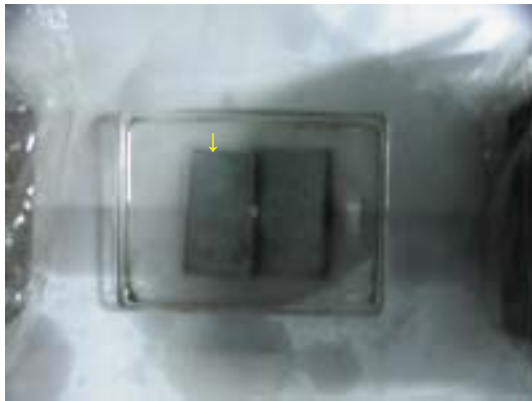
(二) I 為定值時， $r^3 \theta^2 = \eta_2$

表 5-7 扇形幅角與鐵粉顆粒位置之關係

$I = 2 \text{ A}$	臨界位置	η_2
$\theta = 60^\circ$	8.5 cm	673.5
$\theta = 90^\circ$	7 cm	846.3

六、磁粉探傷實驗

觀察鐵粉於缺陷零件產生之漏磁場中之散佈情形，發現鐵粉集中於垂直磁力線方向之缺陷周圍，而平行於磁力線之缺陷則無聚集情形，如圖 5-6。



(a)缺陷垂直磁力線之鐵粉聚集情形



(b) 缺陷平行磁力線之鐵粉聚集情形

5-6 磁粉探傷實驗

根據圖 5-6，當缺陷平行於磁力線時，產生之磁力線偏折不夠顯著，因此無法用鐵粉表現出缺陷位置。垂直方向之聚集情形則非常明顯。

陸、 討論

由「靜磁場環境分佈建立實驗」與「鐵粉受力運動實驗」兩大單元的實驗數據來看，其定性分析(qualitative analysis)結果符合本研究之論述，亦即，

- I. 鐵磁性材料之缺陷所造成的漏磁場強度(邊緣磁通密度)隨著鐵粉顆粒與電磁鐵氣隙之距離減小而增強。
- II. 兩電磁鐵夾一扇形空間造成之磁場其磁力線分佈大致符合同心圓之形狀。
- III. 邊緣磁場分佈所形成的磁通梯度將對其中之鐵粉顆粒產生靜磁力，而將之拖曳進入電磁鐵氣隙中，此即磁粉探傷之基本原理。
- IV. 在磁通密度為固定之缺陷(氣隙)內，靜磁力消失，以致進入其內之鐵粉受磁懸液之黏滯摩擦與庫侖摩擦作用而減速，最終停置於缺陷之內。
- V. 兩電磁鐵面幅角越小，受力越大，而能吸附鐵粉之臨界位置也較遠。

定量分析(quantitative analysis)討論分述如下：

一、「靜磁場環境分佈建立實驗」

(一) 電磁鐵氣隙邊緣磁場分佈

本研究依磁場折射原理推導出漏磁場磁力線路徑近似半圓形，進而獲得漏磁場於空氣中之一維分佈公式(4-13)，實驗量測結果與公式相符(圖 5-2)，唯誤差隨著量測點遠離氣隙而漸增。誤差之主要原因可能來自電磁鐵線圈之纏繞過於靠近氣隙邊緣。當量測點遠離氣隙時，其相對之半圓形磁力線路徑將越過線圈邊緣而造成磁動勢線圈數(N)減少，如下圖所示

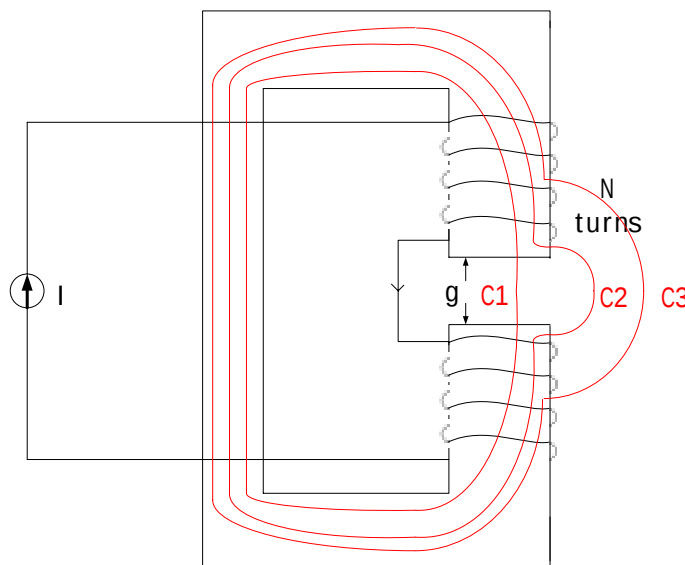


圖 6-1 量測點與磁動勢線圈數(N)之關係

圖 9-1 中之磁力線路徑 C2 之磁動勢線圈數等於電磁鐵線圈總數(N)，而路徑 C3 因跨越部分電磁鐵線圈，造成其磁動勢線圈數小於 N ，故所得之邊緣磁通低於(4-13)式之理論值。

未來應將電磁鐵之繞線限制在相關路徑以外，即可避免此問題。此外，電源供應器之電流穩定性、減少高斯計之人為測量誤差、降低周圍電器用品產生之磁場干擾、提高電磁鐵材之磁導率等方案，皆可使未來實驗更加精準。

（二）扇形環境之磁力線分佈

此實驗之結果幾乎吻合理論之期待，即扇形環境之磁力線分佈為同心圓，唯較外圍之部分受到自由空間之影響較大，磁力線產生些微外漏現象。

二、「鐵粉受力運動實驗」

（一）氣隙邊緣磁場之鐵粉顆粒受力運動實驗

本實驗單元難度頗高，鐵粉顆粒運動行程短截而迅速，拍攝誠屬不易，畫面之解讀亦非容易，所量測之靜磁力大小與(4-20)及(5-4)之理論值屬同等量級(order of magnitude)，如圖 5-4 所示，鐵粉顆粒的加速、減速最終停置行為與預期相同。欲改善本實驗之誤差情形，未來應加大電磁鐵之激磁電流(I)，以增加鐵粉顆粒之運動行程，並且增加鐵粉顆粒質量，減慢運動速度以利拍攝。

此外，鐵粉顆粒之體積及質量量測需力求精準，製作時應防止鐵粉散佈不均，其形狀以對稱之球狀結構為宜。以上改良方案，應能有效提高實驗數據之準確性，使本研究成果更臻理想。

（二）扇形自由空間中之鐵粉顆粒受力實驗

本實驗是將鐵粉顆粒於電磁鐵面夾角之分角線上釋放，期待鐵粉顆粒朝同心圓之圓心前進。其運動方向大致符合期待，但鐵粉顆粒還是受兩旁電磁鐵影響，若釋放鐵粉顆粒之位置稍有偏差，或行進過程受煤油之影響，便無法完全按照分角線的方向前進，此為人為操作及儀器上之限制。

柒、 結論

- 一、靜磁場分佈：符合折射原理及馬克斯威爾方程式之推論。漏磁場分佈接近半圓、扇形環境磁場分佈接近同心圓，其磁通密度大小隨離氣隙（或圓心）越遠逐漸減小。
- 二、鐵粉顆粒受力：鐵粉顆粒在電磁鐵氣隙邊緣磁場中，將受力沿磁通密度梯度減小之方向運動，進入氣隙後則因磁通密度相等，靜磁力消失，受庫倫摩擦力而減速，停止運動。在扇型自由空間磁場分佈中之鐵粉則沿電磁鐵面夾角之分角線運動，往夾角之頂點運動。夾角越小，磁場能影響鐵粉顆粒之範圍越大。
- 三、本實驗之精確度尚有突破之空間，使實驗結果精進之道為改善鐵粉顆粒形狀、體積之控制，以及增強電磁鐵之磁場。
- 四、延伸應用：未來期待將本研究之結果應於磁粉探傷之改良，探討不同深度、形狀之缺陷對磁場分布、大小之影響，以及對於鐵粉之吸附能力的比較。

捌、 參考資料

- 一、磁粉探傷，兵器工業出版社。
- 二、趙凱華、陳熙謀，新概念物理課程——電磁學，高等教育出版社。
- 三、Clayton R. Paul, Keith W. Whites, and Syed A. Nasar(1998). *Introduction to Electromagnetic Field* (3rd. Ed.), McGraw-Hill.
- 四、David K. Cheng, *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Addison-Wesley, 1994.
- 五、A. E. Fitzgerald, Charles Kingsley, Jr., and Stephen D. Umans(2003). *E;ectric Machinery* (6th. Ed.), McGraw-Hill.

【評語】 040113 速速前！—鐵粉顆粒在磁場分佈中的受力行爲

1. 自行設計磁路，討論空隙處之磁場分佈，實測值與理論值相互比較討論，成效佳。
2. 未討論實測值之差誤量，曲線圖如圖 5-2，圖 5-4 Y 軸均未標明單位，有待改進。
3. 理論討論磁路，宜注意「磁通量」在磁路中係守恒，如圖 4-4 與所導理論不符(因左側面積小， B 變大)，爲另一待改進之處。