

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

佳作

040101

「漩」機重重

學校名稱：國立新竹女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 林可涵	林智遠
高二 廖子萱	李佳玲

關鍵詞：渦動流 角形數 角動量

「漩」機重重

壹、研究摘要：

流體旋轉時，外圍及底部流體，因槽壁及槽底摩擦力的影響，流速較慢，相對的壓力也較大，導致外圍的水流會轉入中心，發現本實驗的渦流為強迫與自由漩渦組成。實驗中，探討 f (轉動器的頻率)、 H (總水深)、 y (沒入深度)、 R (轉盤半徑) 四者與角形數間的關係。若 y 、 R 愈大、 H 越小，隨著 f 的增大，可觀察到的形狀邊數越多；反之，若 y 、 R 愈小、 H 越大，則 f 愈高，所形成的圖形半徑愈大，易超過轉盤，不易觀察。依白努力定律，外層水流的流速較慢，而內層水流的流速較快，故外層壓力大而內層壓力小，水會由外往內流，而此渦動流於轉動液面產生的剪力，可能為產生 N 邊形漩渦的主要原因之一。流體旋轉系統中，因轉動而產生流體離心力與內外層壓力差交互作用下，於某特定相關的因素條件下，形成特定角形數漩渦，是本實驗的重要發現。

貳、研究動機：

小時候在溪流玩耍時，總會看到些許的小漩渦在溪中轉個不停。日常生活中，發現打果汁時果汁機會產生類似其的渦流，洗水槽放水時也會有同樣現象，心中就不禁開始疑惑：這些漩渦與溪水急流的漩渦是否有何相似之處呢？自此，這些圖形就常在腦海中轉啊轉個不停。有一天，科學人雜誌中新聞掃描專欄的一篇報導——「方形的漩渦」，正好提到了一直以來存在我們心中的漩渦疑問，激起了我們更進一步研究的興趣！於是在寒假開始了一連串的試驗與實驗。讓我們一起來解開小時候的疑惑吧！

參、研究目的：

1. 探討水槽轉動時水漩渦型態與轉盤擾動水漩渦型態的差異。
2. 探討轉盤轉動快慢(頻率)對水形成漩渦的基本圖形的關係。
3. 探討轉盤沒入水面下的深度與水槽總水深度對漩渦底部形成圖形有何影響。
4. 探討轉盤大小及形狀對漩渦圖形的影響。
5. 漩渦圖形自轉頻率與轉盤轉動頻率的相關性。
6. 研究漩渦形狀與轉動角動量的相關性。

肆、參考原理：

一、名詞定義：

1. 渦流：流體形成渦流的兩個條件，一為垂直向下的速度，二為切線旋轉的速度。

2. 自由渦流：鍋盆水槽由底部排水時，液體向下垂直速度與切線速度形成。
3. 強迫渦流：水槽旋轉時水於水槽內會形成渦流圈，受人為外力因素所造成。
4. 角形數：水形成渦流時，水於轉盤周圍，所形成凸角數量&角形數。
5. 渦動流：轉動液體，外層流速慢，內層流速快，因外層壓力大內層壓力小，而由外層流向內層的水流。

二、基本觀測：研究【漩渦也有形】的漩渦結構

（一）自由漩渦（free vortex）：

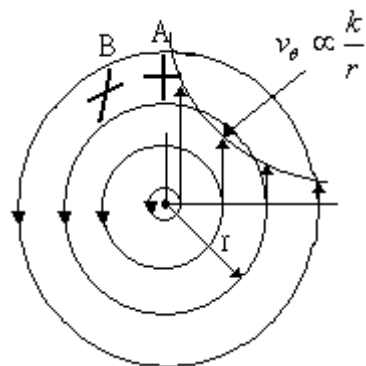
中心轉軸帶動液面旋轉，產生漩渦。

因為速度與半徑成反比關係，所以半徑越小，所需承受的水重少，轉速也越快，因而產生一速度差，此時就會出現實驗所看見的漩渦（如右圖所示）。

$$P - P_0 = \rho g(h - h_0) - \rho \frac{k^2}{2r^2}$$

水面之 $P = P_0$ ，帶入上式可得自由渦流水面線方程式：

$$h = h_0 + \frac{k^2}{2gr^2} = h_0 + \frac{v_\theta^2}{2g}$$



（二）強迫漩渦（forced vortex）：

由圓柱形容器旋轉，而強迫原本靜止的液體，由外部帶動內部旋轉。

因為此實驗的半徑與轉速成正比，所以半徑越大，轉速越快。

在定量流、非可壓縮流場下，假設 r 、 z 方向之速度為 0，且軸對稱（ $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ）， V 僅有 θ 的分量且只是徑向 r 的函數，繞著 z 軸旋轉，如 Navier-Stokes 方程式。

積分可得

$$P = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g h + C_3$$

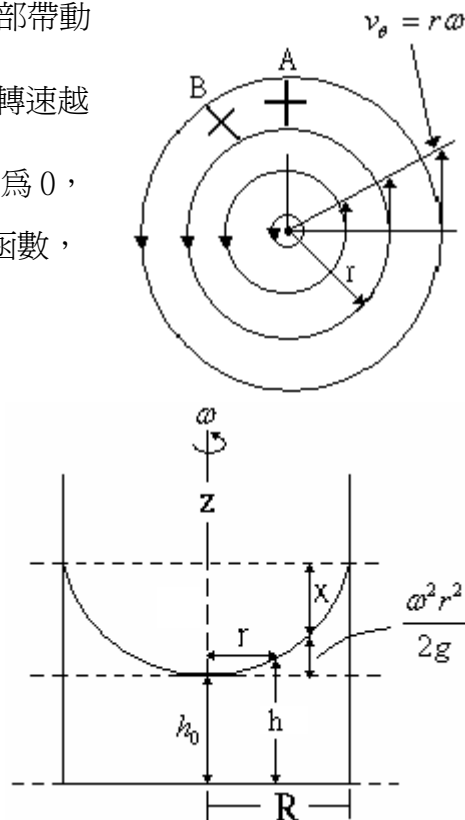
帶入邊界條件

$$r = 0, \quad h = h_0, \quad P = P_0$$

$$\text{可得 } P - P_0 = -\rho g(h - h_0) + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$$

水面之 $P = P_0$ ，帶入上式可得強制渦流水面線方程式：

$$h = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = h_0 + \frac{v_\theta^2}{2g}$$



(三) 組合漩渦 (combined vortex) :

$$\begin{cases} \phi = k\theta \\ \Psi = -k\ln r \end{cases}$$

$$\Psi = \text{constant}$$

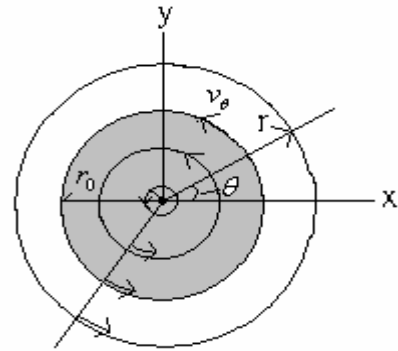
$$\phi = \text{constant}$$

$$= k\theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{k}{r}$$

$$r > r_0 \quad V_\theta = r\omega$$

$$r < r_0 \quad V_\theta = \frac{K}{r}$$



伍、研究設備及器材：

一、簡易實驗裝置：

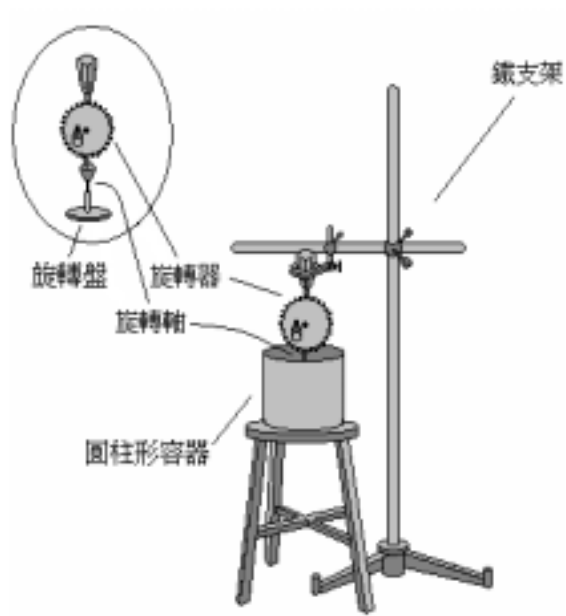
(一) 如圖一、二所示。

(二) 裝置說明：

1. 旋轉器：原為手搖鑽孔器，手動方式旋轉，以齒輪比控制轉速。
2. 旋轉軸：原為漏水口的篩網支架，此用來帶動旋轉盤轉動。
3. 旋轉盤：為墊板、滑鼠墊、光碟片，作用是擾動流體。



(圖一)



(圖二)

二、研究器材：

1. 鐵支架
2. 圓柱形容器（半徑 10cm，高 17cm）
3. 手搖鑽孔器
4. 漏水口的網篩支架
5. 保麗龍
6. 吸管
7. 透明及橘色膠帶
8. 黏土
9. 半徑 9cm 的圓形墊板
10. 數位相機
11. 半徑 8cm 的圓形滑鼠墊
12. 阻波器
13. 邊長 15cm 的正三角形墊板
14. 半徑 6cm CDdisk
15. 量角器
16. 邊長 12cm 的正方形墊板
17. 墨汁
18. 小畫家
19. 鐵棒

三、改進實驗裝置

(一) 如圖三、四所示。

(二) 裝置說明：

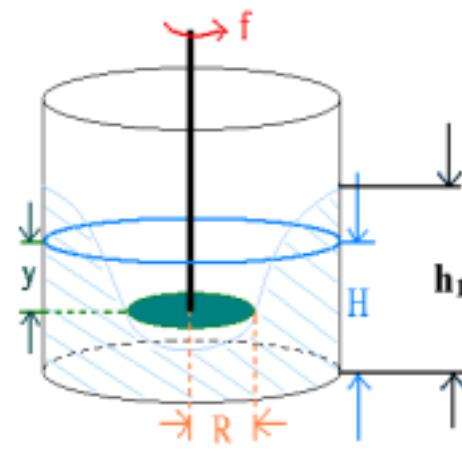
1. 數位馬達(smart moter)
2. 轉動軸：可伸縮調整沒入水深
3. 旋轉盤：半徑大小不同，有圓形、方形、三角形及旋臂。



(圖三)



(圖四)



測量物理量說明圖

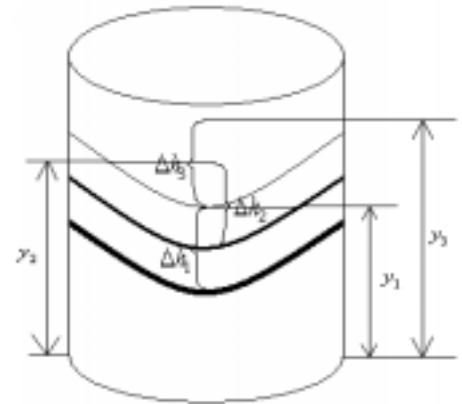
陸、研究過程及實驗方法：

一、實驗步驟

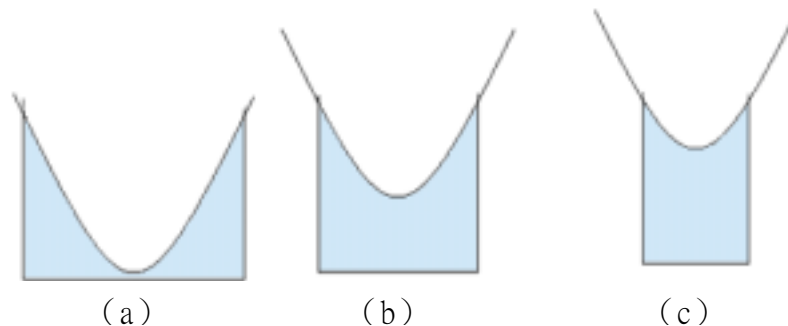
【實驗一】水槽轉動頻率 f 與水渦形狀的關係

1. 水槽裝水 $\frac{1}{3}$ 深，控制轉台角速度並觀測水渦拋物面。
2. 控制固定轉速，觀察不同大小水槽的水渦拋物面特性，並且改變不同水深水渦拋面。
3. 結果分析：

- (1) 如右下圖，當裝入水量 y_1 、 y_2 、 y_3 不同時，結果如所形成的渦面深度 $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3$ 為同一拋物面的最低點。



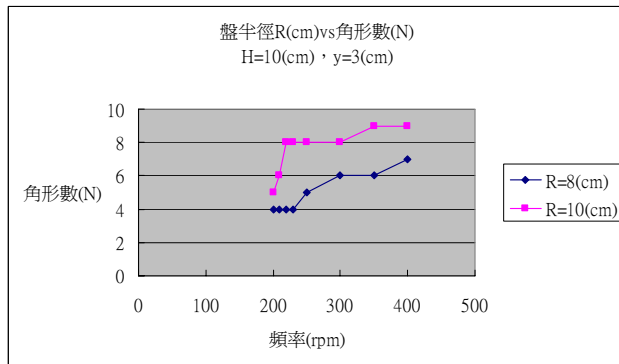
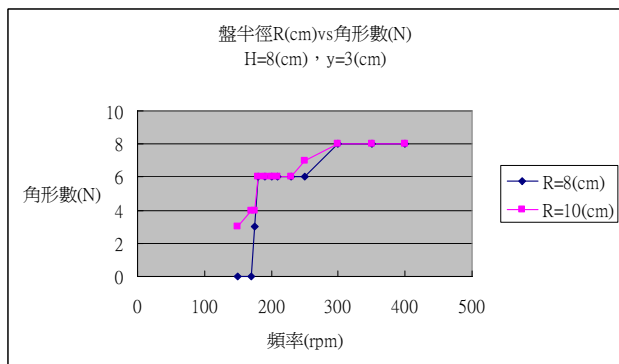
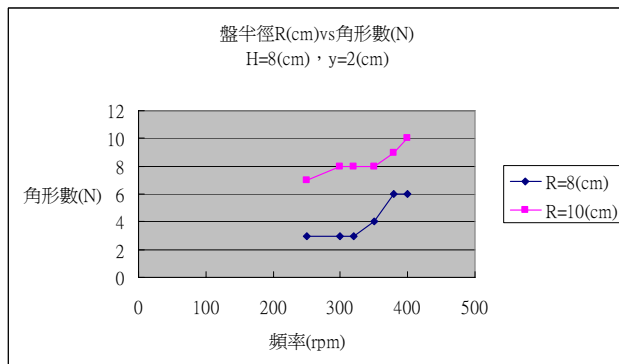
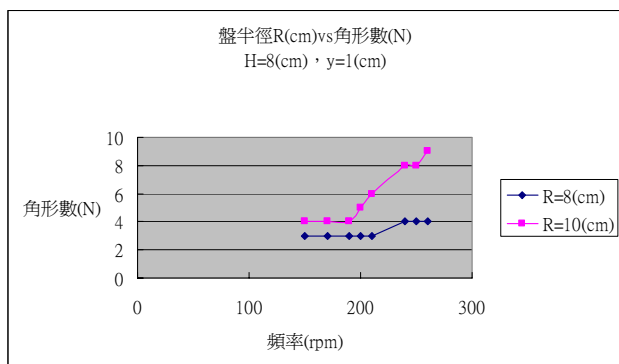
- (2) 旋轉台為固定角速度時，渦形為同一拋物面，不因容器大小及水深影響，如 (a)、(b)、(c) 圖。



- (3) 實驗結果與參考原理 (二) 強制渦流 (Forced Vortex) 相符。

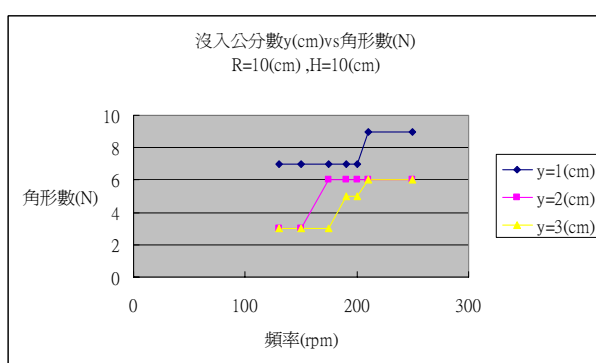
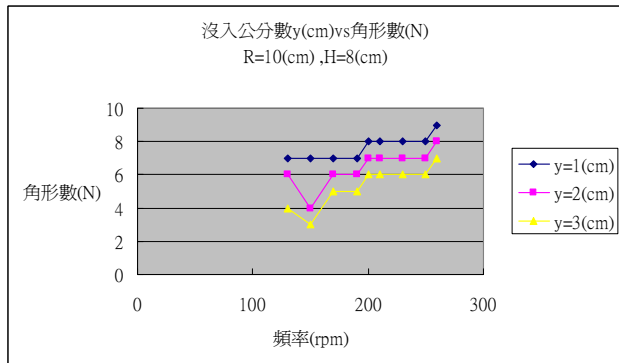
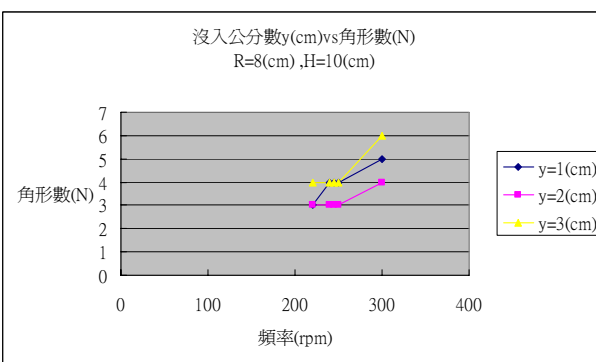
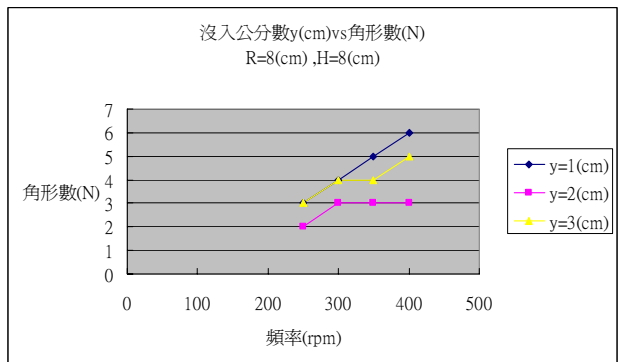
【實驗二】探討轉盤大小與漩渦圖形的關係

1. 將旋轉器固定於鐵支架上，鉛直向下置於水槽中。
2. 將旋轉軸及半徑 9cm 的圓形轉盤固定於旋轉器上。
3. 將已標注刻度並且被捏皺成粗糙面的鋁箔紙製成阻波器，緊貼圓柱形容器內壁。
4. 將水注入不銹鋼鍋中至高度為 5cm。
5. 依水深 5cm 等比例加入 2g 的太白粉及數滴墨汁。
6. 將轉盤深入鍋中至水面下 2cm (即高度 3cm)。
7. 分別觀察當轉盤轉速為 129rpm、258rpm、516rpm 時出現的圖形，並拍攝其結果。
8. 依序將轉盤換為半徑 8cm 及 6cm 之圓形轉盤，並重複步驟 6 與步驟 7。



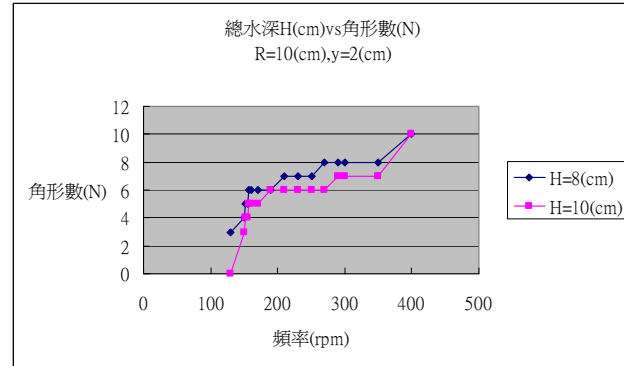
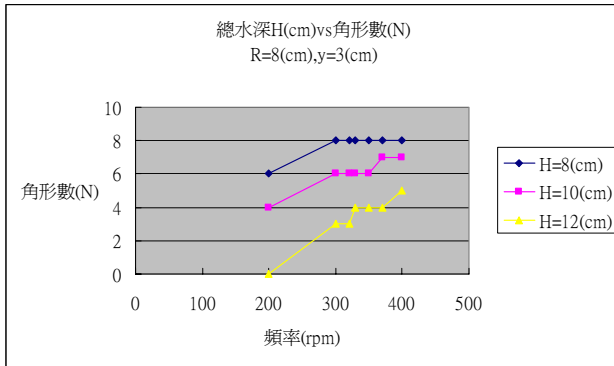
【實驗三】探討轉盤沒入水中之深度與漩渦圖形的關係

1. 重複【實驗一】之步驟 1~5。
2. 將轉盤深入鍋中至水面下 1cm。
3. 分別觀察當轉速為 129rpm、258rpm、516rpm 時出現的圖形，並拍攝其結果。
4. 依序將轉盤深入鍋中至水面下 2cm 及 3cm，並重複步驟 3。



【實驗四】探討水槽總深與漩渦圖形的關係

1. 重複【實驗一】之步驟 1~3。
2. 將水注入不銹鋼鍋中至高度為 7cm。
3. 依水深 7cm 等比例加入 2.8g 的太白粉及數滴墨汁。
4. 將轉盤深入鍋中至水面下 2cm。
5. 分別觀察當轉速為 129rpm、258rpm、516rpm 時出現的圖形，並拍攝其結果。
6. 依序將鍋中的水面高度減少為 5cm 及 3cm，且重複步驟 4 與步驟 5。

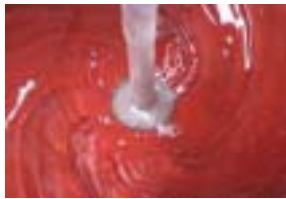


【實驗五】探討轉盤形狀與漩渦圖形的關係

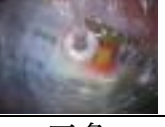
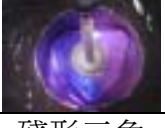
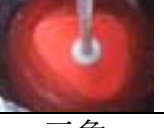
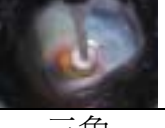
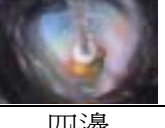
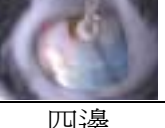
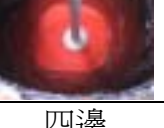
1. 重複【實驗一】的步驟 1~6。
2. 分別觀察當轉速為 129rpm、258rpm、516rpm 時出現的圖形，並拍攝其結果。
3. 依序將轉盤換為邊長為 12cm 的正方形轉盤及邊長為 15cm 的正三角形轉盤，並重複步驟 2。

柒、實驗數據：

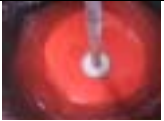
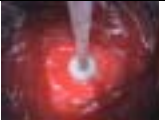
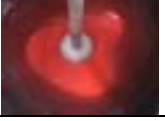
一、基本圖形

三角形	弧形三角形	四邊形	
			
五邊形	六邊形	八邊形	
			
花瓣水紋 (1)	花瓣水紋 (2)	花瓣水紋 (3)	花瓣水紋 (4)
			

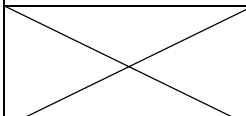
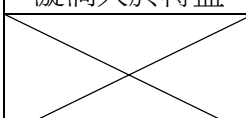
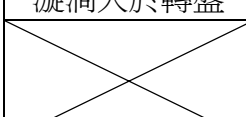
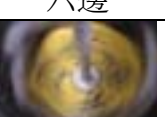
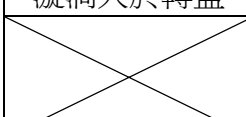
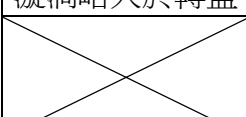
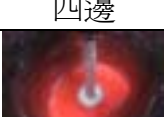
〔圖表 A〕不同轉盤大小，於不同轉速下之漩渦圖形

轉速 \ 半徑 R	6cm		8cm		9cm	
	1	2	1	2	1	2
129 rpm	淺波紋		花瓣形水波紋		花瓣形水波紋	
	1		1		1	
	淺波紋		花瓣形水波紋		花瓣形水波紋	
	2		2		2	
	淺波紋		花瓣形水波紋		花瓣形水波紋	
	3		3		3	
258 rpm	殘形三角		三角		三角	
	1		1		1	
	殘形三角		三角		三角	
	2		2		2	
	殘形三角		三角		三角	
	3		3		3	
516 rpm	殘形四邊形		四邊		四邊	
	1		1		1	
	殘形四邊形		四邊		四邊	
	2		2		2	
	殘形四邊形		四邊		四邊	
	3		3		3	

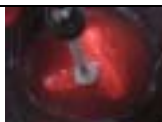
〔圖表 B〕轉盤深入水深度不同，於不同轉速下之漩渦圖形

盤入水 Y 轉速		1cm	2cm	3cm
129 rpm	1	四邊（邊界不明顯）	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
				
	2	四邊（邊界不明顯）	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
				
	3	四邊（邊界不明顯）	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
				
258 rpm	1	五邊	三角	未見底三角形
				
	2	六邊	三角	未見底三角形
				
	3	六邊	三角	未見底三角形
				
516 rpm	1	八邊	四邊	三角
				
	2	六邊	四邊	三角
				
	3	八邊	四邊	三角
				

〔圖表 C〕 不同的轉盤形狀，於不同轉速下之漩渦圖形

轉速 \ 形狀	圓形 (半徑 9cm)	正三角形(邊長 10cm)	正方形(邊長 12cm)
129 rpm	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
	1 	1 	1 
	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
	2 	2 	2 
	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
	3 	3 	3 
258 rpm	三角	漩渦大於轉盤	四邊
	1 	1 	1 
	三角	漩渦大於轉盤	六邊
	2 	2 	2 
	三角	漩渦大於轉盤	六邊
	3 	3 	3 
516 rpm	四邊	漩渦大於轉盤	漩渦略大於轉盤
	1 	1 	1 
	四邊	漩渦大於轉盤	漩渦略大於轉盤
	2 	2 	2 
	四邊	漩渦大於轉盤	漩渦略大於轉盤
	3 	3 	3 

〔圖表 D〕 總水深不同時，於不同轉速下之漩渦圖形

水深 H 轉速	3cm	5cm	7cm
129 rpm	不明顯花瓣形水波紋	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
	1 	1 	1 
	不明顯花瓣形水波紋	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
	2 	2 	2 
	不明顯花瓣形水波紋	花瓣形水波紋	花瓣形水波紋
	3 	3 	3 
258 rpm	六邊	三角	三角
	1 	1 	1 
	六邊	三角	三角
	2 	2 	2 
	五邊	三角	三角
	3 	3 	3 
516 rpm	六邊	四邊	弧形三角
	1 	1 	1 
	八邊	四邊	弧形三角
	2 	2 	2 
	八邊	四邊	弧形三角
	3 	3 	3 

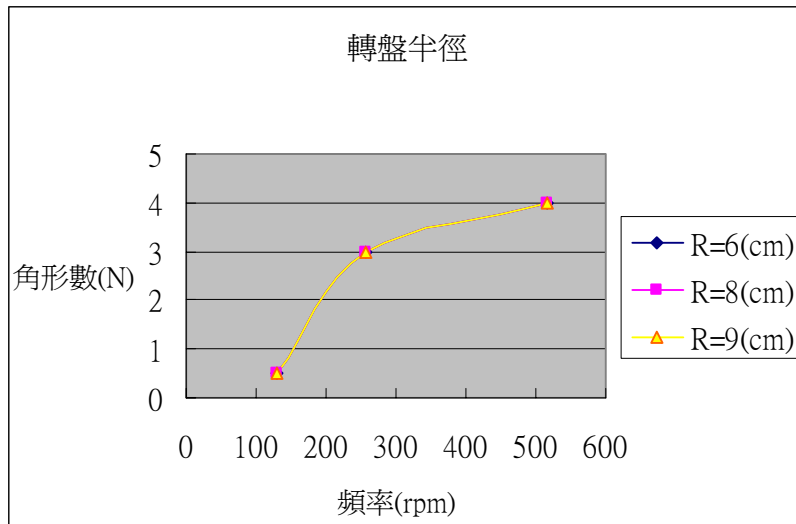
二、探討轉盤大小與漩渦圖形的關係

控制變因：①轉速②轉盤沒入水面的深度③轉盤形狀

操縱變因：①轉速②轉盤半徑（R）③總水深度

應變變因：漩渦圖形

〔圖表一〕



【分析】：

當轉盤半徑分別為6cm、8cm及9cm時，其轉速愈快，角形數皆愈多。由〔圖表一〕可進一步了解當轉盤半徑愈大時，漩渦圖形愈穩定且較明顯。

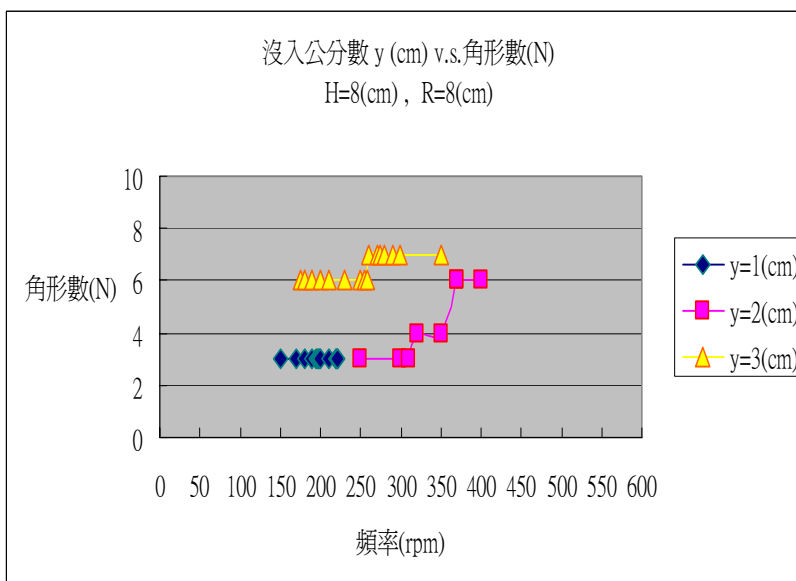
三、探討轉盤沒入水面之深度與漩渦圖形的關係

操縱變因：①轉速②轉盤沒入水面的深度（Y）

控制變因：①水深②轉盤大小③轉盤形狀④容器

應變變因：漩渦圖形

〔圖表二〕



【分析】：

1. 設淡波紋之角形數為 0.5，角形數 2 為橢圓形，但在我們所設定的三種平均轉速下，並沒有被明顯觀察到。
2. 轉盤入水深度較淺者，有較多的漩渦圖形出現。

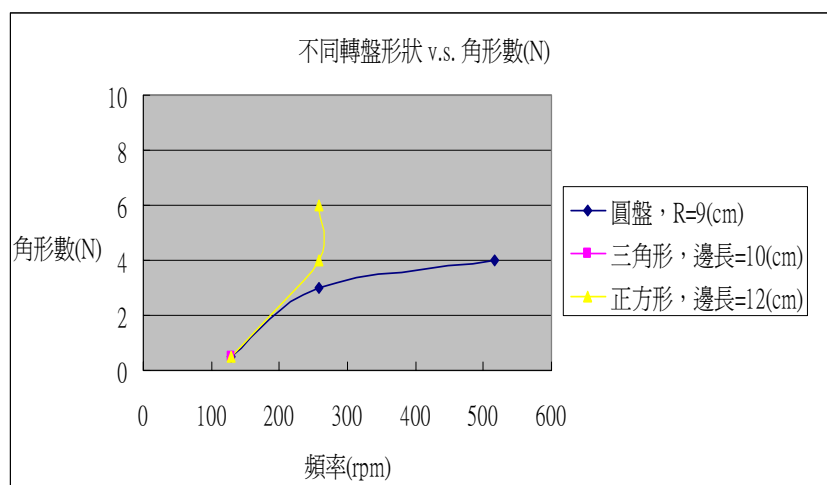
四、探討轉盤形狀與漩渦圖形的關係

操縱變因：①轉速②轉盤形狀

控制變因：①水深②轉盤大小③轉盤沒入水面的深度④容器

應變變因：漩渦圖形

〔圖表三〕



【分析】：

1. 中間的圖表中，因其漩渦圖形大多為大於轉盤，因此圖表上並無標記。而最下方的圖表中，數據較少之因也是如此。

2. 由圓形轉盤觀察到的圖形較為明顯。

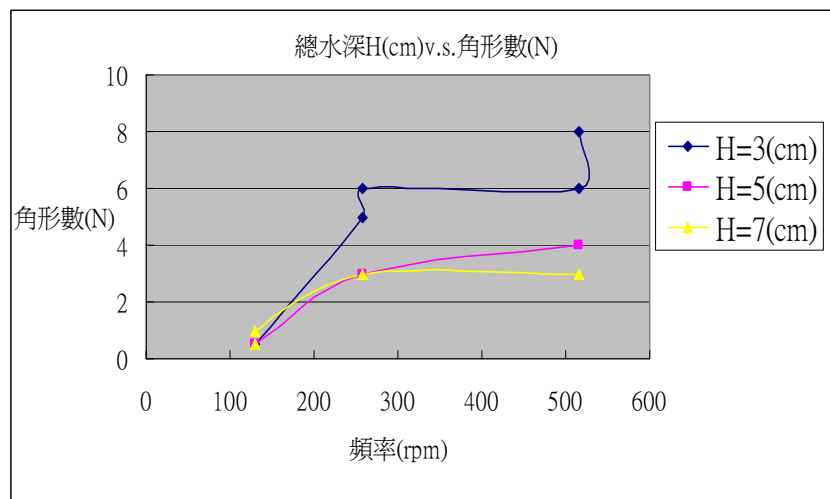
五、探討水深與漩渦圖形的關係

操縱變因：①轉速②總水深 (H)

控制變因：①轉盤沒入水面的深度②轉盤大小③轉盤形狀④容器

應變變因：漩渦圖形

〔圖表四〕



【分析】：

總水深愈深時，出現的角形數較少。由〔圖表四〕可進一步觀察到總水深愈深時，出現的漩渦圖形也較明顯。

六、數據總表

轉盤半徑 $R=8(\text{cm})$ 總水深 $H=8(\text{cm})$ 漩渦最高水面 h_1

轉盤沒入深度 $y=1(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=2(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=3(\text{cm})$		
頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)
150	8.5	3	250	9.2	3	150	8.7	水波紋
170	8.6	3	300	9.2	3	170	8.7	水波紋
180	8.6	3	310	9.3	3	175	8.8	3
190	8.7	3	320	9.3	3	180	8.8	3
195	8.7	3	350	9.5	4	190	8.8	3
197	8.7	3	370	9.6	6	200	9.0	3
198	8.7	3	400	9.8	6	210	9.0	3
199	8.7	3	420	9.8	6	230	9.0	3
200	8.7	3	450	10.0	6	250	9.2	3
210	8.7	3				255	9.3	6
219	8.8	3				258	9.3	6
220	8.8	3				260	9.4	7
221	8.8	3				270	9.4	7
222	8.8	3				275	9.4	8
230	8.9	3				280	9.5	8
240	8.9	3				290	9.5	8
250	8.9	3				300	9.5	8
260	8.9	3				350	9.8	8
270	9.0	3				400	10.0	8
275	9.0	4				450	10.5	8
280	9.0	4						
290	9.0	4						
300	9.0	4						
320	9.0	4						
350	9.2	4						
370	9.2	4						
400	9.5	5						

轉盤半徑 $R=8(\text{cm})$ 總水深 $H=10(\text{cm})$ 漩渦最高水面 h_1

轉盤沒入深度 $y=1(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=2(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=3(\text{cm})$		
頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)
200	10.4	3	220	10.9	3	200	10.8	4
220	10.4	3	228	10.9	3	210	10.9	4
240	10.4	3	230	11.0	3	220	10.9	4
245	10.7	4	235	11.0	3	230	11.0	4
250	10.6	4	240	11.0	3	250	11.1	5
260	10.6	4	245	11.0	3	270	11.2	5
300	10.6	5	250	11.0	3	290	11.3	6
			255	11.1	3	300	11.3	6
			300	11.5	4	310	11.5	6
						320	11.5	6
						330	11.7	6
						340	11.8	6
						350	11.8	6
						370	11.9	7
						400	12.0	7
						410	12.0	7
						420	12.2	8
						430	12.1	8
						440	12.3	8
						450	12.4	8
						470	12.5	8

轉盤半徑 $R=8(\text{cm})$ 總水深 $H=12(\text{cm})$ 漩渦最高水面 h_1

轉盤沒入深度 $y=1(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=2(\text{cm})$		
頻率(rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率(rpm)	h_1 (cm)	角形數(N)
92	12.0	3	150	12.5	2
94	12.0	3	170	12.6	2
96	12.0	3	190	12.6	3
100	12.1	3	205	12.9	3
110	12.1	3	208	13.0	3
120	12.1	3	210	13.0	3
			250	13.1	3
			270	13.2	3
			300	13.5	3
			320	13.5	3
			350	13.5	3
			370	13.6	3
轉盤沒入深度 $y=3(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=4(\text{cm})$		
頻率(rpm)	h_1 (cm)	角形數(N)	頻率(rpm)	h_1 (cm)	角形數(N)
320	13.5	3	218	13.0	2
330	13.5	3	252	13.2	3
350	13.6	3	318	13.7	4
370	13.6	4	378	13.9	5
372	13.7	5	454	16.5	9
375	13.8	5	550	15.0	8
378	13.8	5	666	15.4	10
380	14.0	6			
385	14.0	6			
390	14.0	6			

轉盤半徑 $R=10(\text{cm})$ 總水深 $H=8(\text{cm})$ 漩渦最高水面 h_1

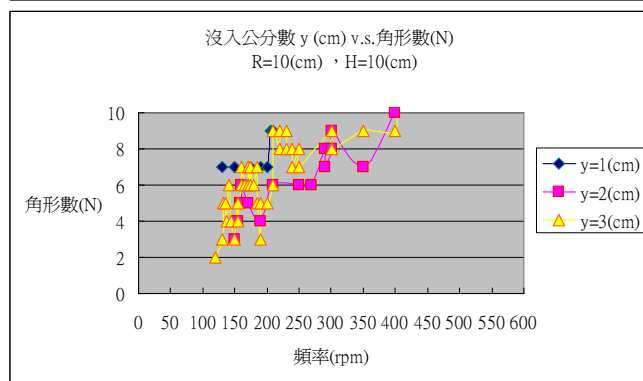
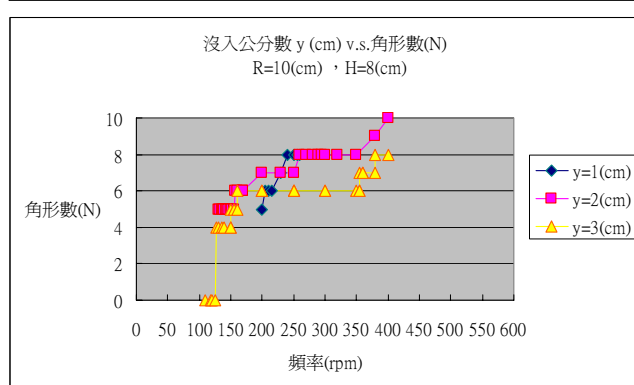
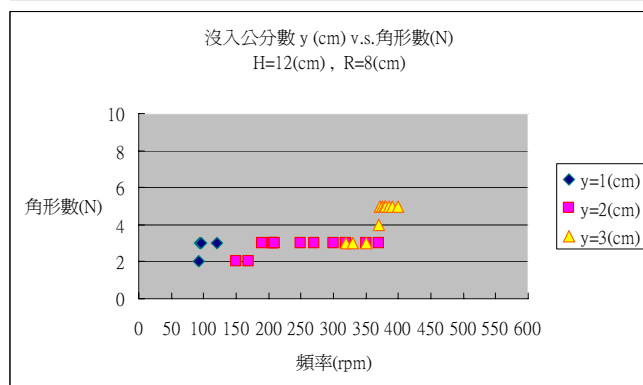
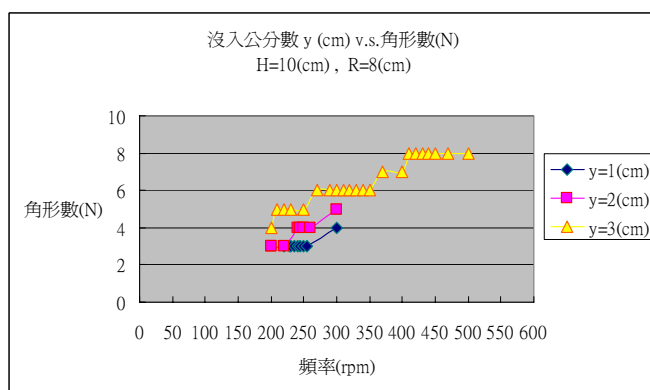
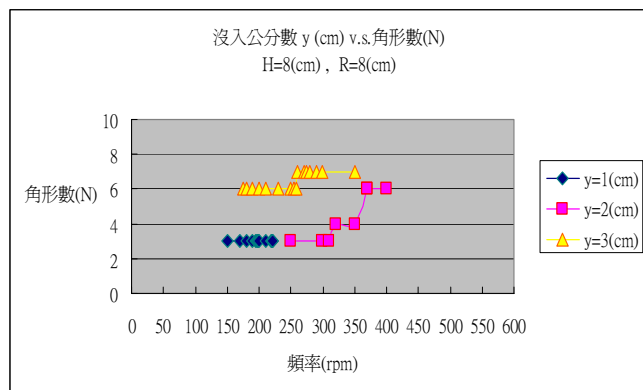
轉盤沒入深度 $y=1(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=2(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=3(\text{cm})$		
頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)
200	9.1	5	130	9.0	3	135	9.0	3
205	9.1	6	132	9.0	3	137	9.1	3
210	9.2	6	135	9.0	3	140	9.1	3
215	9.3	6	137	9.1	3	143	9.2	3
230	9.4	7	140	9.1	3	145	9.2	3
240	9.4	8	143	9.1	3	147	9.3	3
250	9.5	8	145	9.1	3	160	9.4	5
255	9.5	8	147	9.1	4	170	9.5	5
260	9.5	9	150	9.1	4	175	9.6	5
			152	9.2	5	180	9.6	5
			155	9.2	5	190	9.7	5
			157	9.3	5	200	9.8	5
			160	9.4	5	210	10.0	5
			170	9.5	6	220	10.1	6
			200	9.5	7	230	10.2	6
			230	9.8	7	240	10.3	6
			250	10.0	7	250	10.5	6
			260	10.1	8	300	11.1	6
			270	10.2	8			
			280	10.3	8			
			290	10.4	8			
			295	10.45	8			
			300	10.5	8			
			320	10.7	8			
			350	11.0	8			
			380	11.3	9			
			400	11.5	10			

轉盤半徑 $R=10(\text{cm})$ 總水深 $H=10(\text{cm})$ 漩渦最高水面 h_1

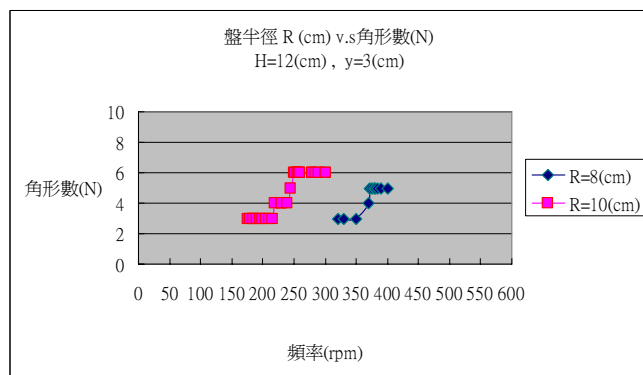
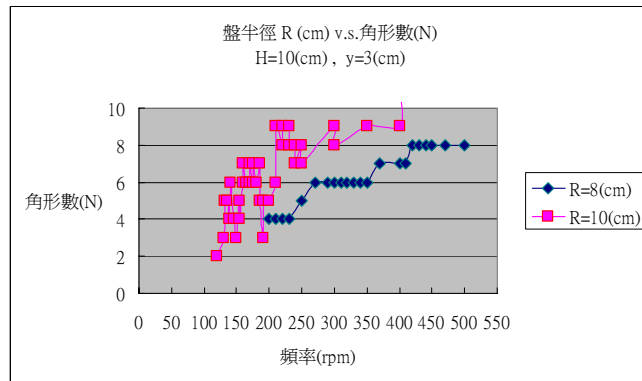
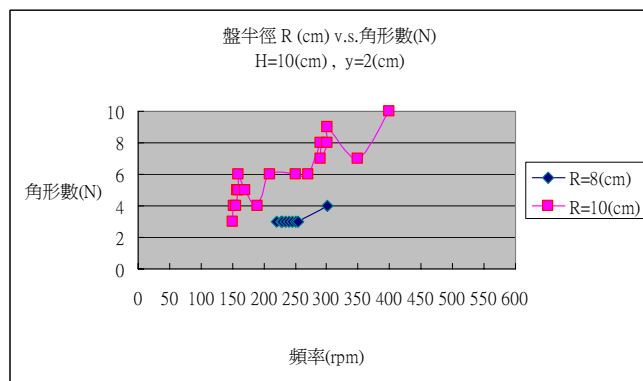
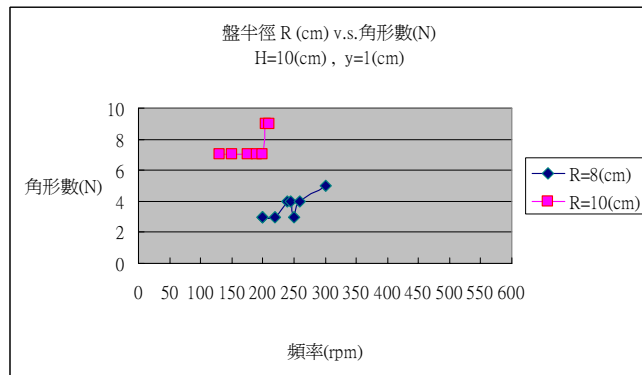
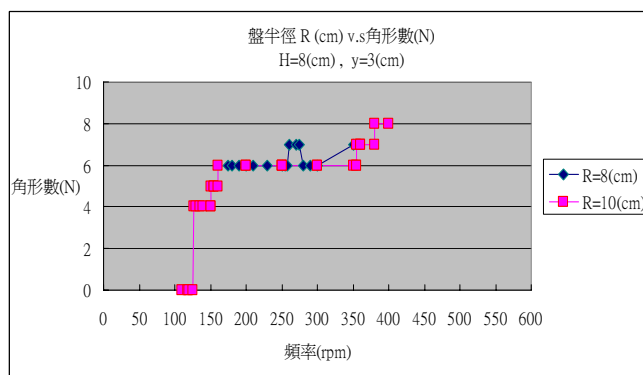
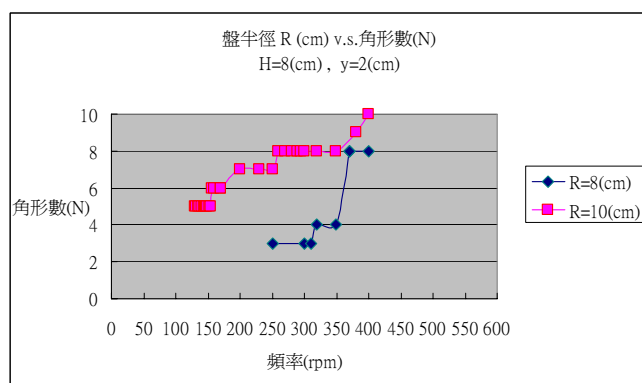
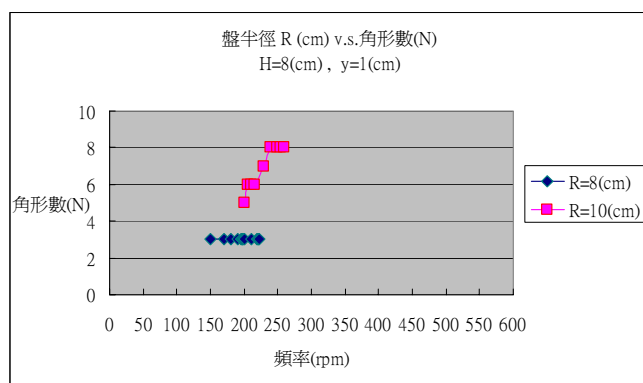
轉盤沒入深度 $y=1(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=2(\text{cm})$			轉盤沒入深度 $y=3(\text{cm})$		
頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)	頻率 (rpm)	h_1 (cm)	角形數 (N)
130	10.8	7	150	11.0	3	120	10.9	0
150	10.8	7	153	11.0	4	130	11.0	3
175	11.0	7	155	11.0	4	132	11.0	3
190	11.0	7	158	11.0	5	135	11.0	3
200	11.0	7	160	11.0	5	138	11.0	3
205	11.0	9	170	11.1	5	140	11.1	3
210	11.0	9	190	11.2	6	145	11.1	3
			210	11.3	6	150	11.1	3
			250	11.3	6	155	11.2	5
			270	12.0	6	160	11.2	6
			290	12.1	7	165	11.3	6
			300	12.3	7	170	11.4	6
			350	12.8	7	175	11.4	6
			400	13.0	10	180	11.5	6
						185	11.5	7
						190	11.6	7
						200	11.6	7
						210	11.8	8
						220	11.9	8
						230	12.0	8
						240	12.1	8
						250	12.2	8
						300	12.4	8
						350	12.5	9
						400	12.7	9

七、數據分析系列表

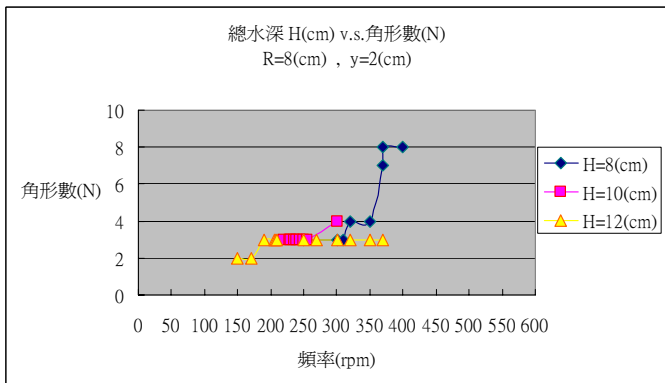
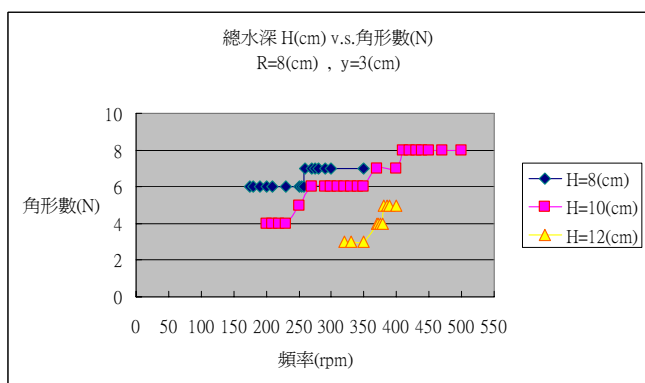
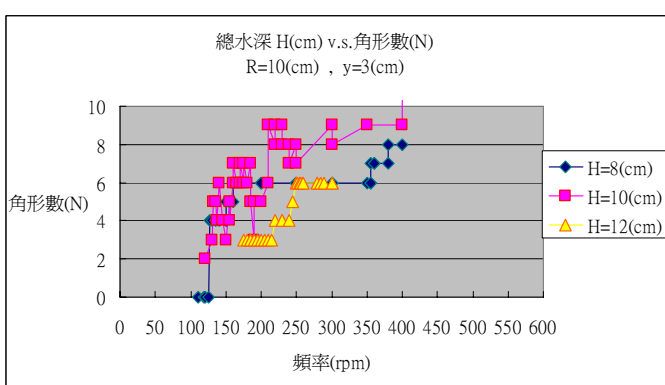
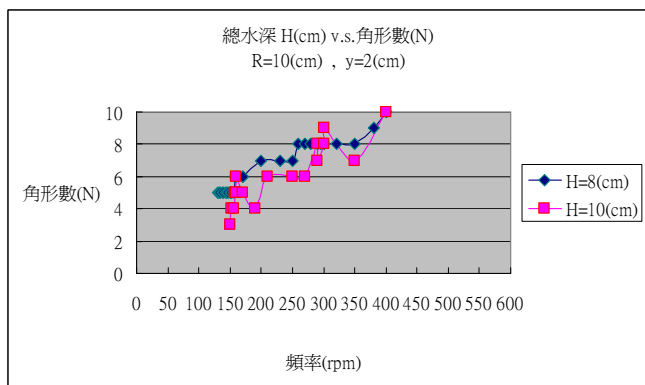
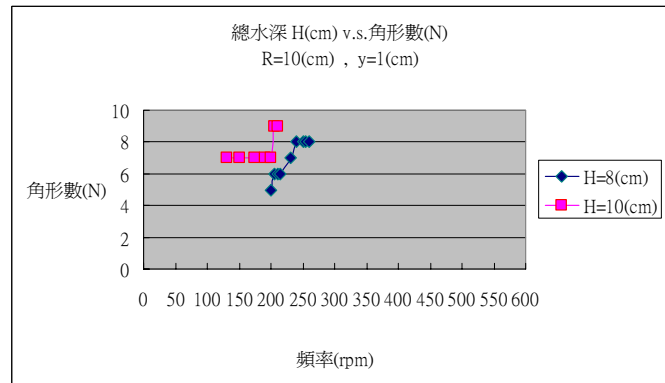
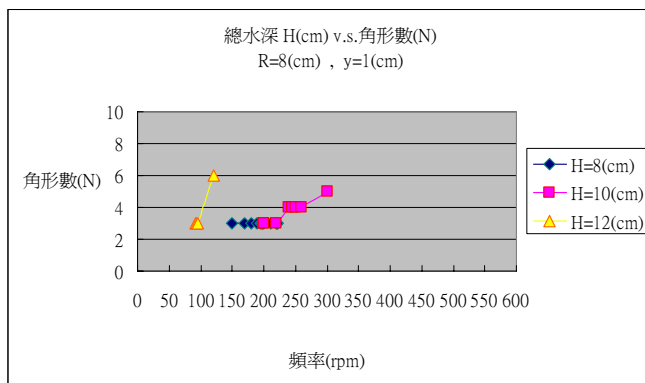
【A 系列】：沒入不同深度—分析角形數隨轉盤頻率的變化



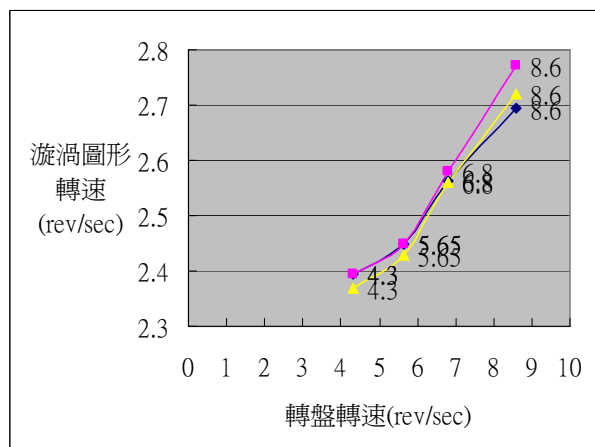
【B 系列】：轉盤半徑不同—分析角形數隨轉盤頻率的變化



【C 系列】：總水深不同—分析角形數隨轉盤頻率的變化



【D 系列】：分析—漩渦圖形自轉頻率對轉盤頻率



〔圖表五〕為漩渦圖形之轉速與轉盤轉速的關係。

如實驗結論第 5 點之補充：當轉盤轉速越高時，多邊形之自轉速度亦隨之增高，且多邊形之自轉速度會低於轉盤轉速。

〔圖表五〕

捌、實驗討論：

一、轉盤大小與漩渦圖形的關係

經由實驗結果得知，當我們使用 8cm 與 9cm 的轉盤所形成的漩渦圖形，差異並不大。但當我們的轉盤改為 6cm 時，三角及四邊形出現的次數雖如同使用較大轉盤時只有些許差異，但其圖形卻是較破碎且不如大盤時完整的。因而我們認為此結果是因為轉盤太小，所以當其帶動內部流體旋轉時，與轉盤未覆蓋到的外部流體所形成的速度差，不足以大到形成完整的漩渦圖形。

因此，我們推論，實驗時所使用的轉盤不可以過小，需大到其使內、外部之流體的速度差夠大。

二、轉盤沒入水中之深度與漩渦圖形的關係

分析實驗數據，轉速 258rpm 時，沒入水中 1cm 出現的漩渦圖形為六邊形，2cm 的是三角形、而 3cm 的是沒有見底且不明顯的三角形。由此可以推斷在同一轉速下，當轉盤沒入水中的深度越深時，出現的漩渦圖形角數越少，也就是轉盤上的液體層越厚時，轉出的漩渦圖形角數越少。

因此我們推測，轉盤上的水量多寡會影響漩渦圖形。水量少的時候，液體擾動產生的摩擦力較小，速度差相對的也較小，而無法形成明顯且少角的漩渦圖形。

三、水深度與漩渦圖形的關係

由實驗我們發現，當水深度越淺時，越容易觀察到較多邊的角形，因此漩渦圖形不僅與轉盤之上的水量有關，轉盤下的水量對其出現的圖形也有一定的影響。我們認為此結果是因為當轉盤在水中旋轉，會造成流體的擾動，而總水深淺時，轉盤較易帶動盤下的水轉動，流體造成的阻力也較小，因此速度差比較不明顯；反之，當水較深，轉盤要帶動盤下流體以相同轉速旋轉也較為困難，較深的水造成的阻力越大，因而速度差也較大。

所以，我們認為，若總水深太少，必須在低轉速時才觀察的到圖形；否則，隨著轉速的增加，轉盤能造成的流體間的阻力也較小。

四、轉盤形狀與漩渦圖形的關係

實驗數據顯示，轉速 516rpm 下，圓形且半徑 9cm 的轉盤轉出四邊形的漩渦；正方形且邊長 12cm 的轉盤轉出八邊形漩渦，而且轉盤面積已有點無法截到完整的漩渦面；三角形且邊長 10cm 的轉盤已經無法截到面。

數據證明轉盤形狀會影響漩渦圖形，我們認為是因為有角的轉盤會破壞有緊密黏滯度的水，導致其無法形成穩定的波形產生速度差大的流體，所以圓盤是最好的轉盤形狀。

五、研究漩渦形狀與轉動角動量的關係

依波耳氫原子模型，電子軌道角動量量子化 $L_z = n\hbar$
 今水渦可視為多重同心環狀流 m ，繞中心軸旋轉的角動量 $L_z = rmv = mr^2\omega$ 。若轉動中無其他外力矩作用，則角動量應守恆，則

$$\text{環狀流之動能爲 } E_k = \frac{L^2}{2I} = n^2 \frac{\hbar^2}{2I}$$

所以環狀流 m 繞中心軸之力學能為 $E = U + K \propto \frac{1}{n^2}$ 。

故一定轉速下，離軸心 r 處，環狀流 m 遵守角動量量子化，

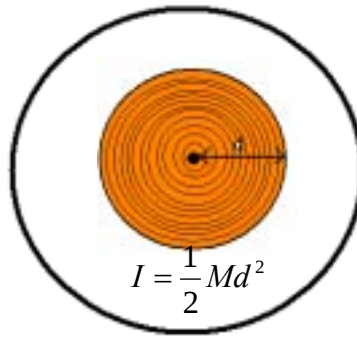
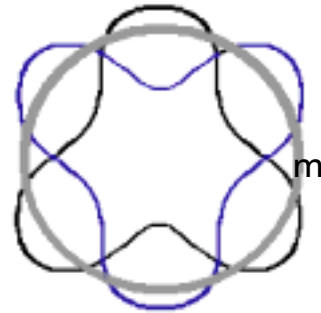
$$\text{則環狀流周長必為波長整數倍 } 2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{p} \quad (p = mv_\theta)$$

$$\Rightarrow 2\pi r \cdot mv_\theta = nh$$

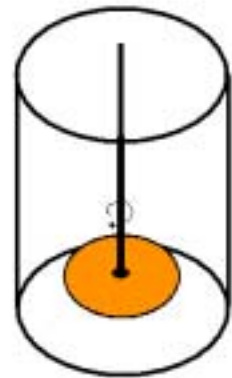
$$r \cdot mv_\theta = \frac{nh}{2\pi}$$

$$L_z = n\hbar$$

上式環狀流 m 依角動量守恆，須角動量量子化才能穩定環流場轉動。



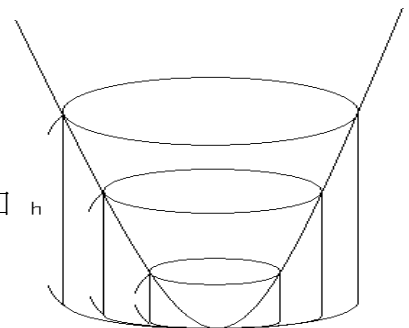
俯視圖



立體圖

玖、實驗結論：

1. 不同半徑的容器以中心為軸旋轉，相同角速度旋轉時，液面會形成一穩定完整拋物面。面對半徑不同的容器開口 h ，拋物面之開口與容器開口相切時，其能出現完整拋物面的最小水深 h 與容器半徑關係如右圖。

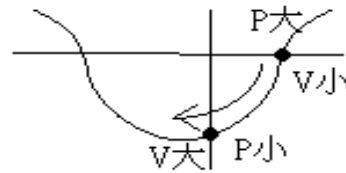
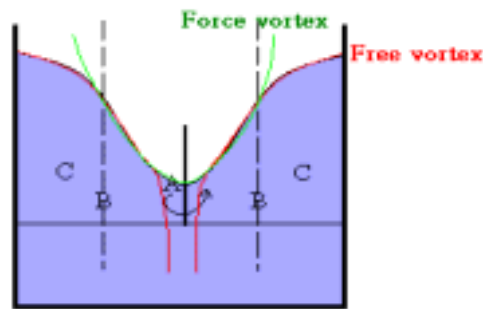


2. 流體在空間運動時，其壓力、速率和所在的高度之間，若不計接觸壁及空氣阻力之影

響，即得 $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$ 或 $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{定值}$ （白努利方程式），多邊形漩渦的形成是由於外層水流流動速度較慢，而內層水流流動速度較快，故外層壓力大而內層壓力小，水流便會對整桶水漩渦產生剪力，由外往內形成渦動流，為 N 邊形漩渦形成的主要原因。

3. 在流體旋轉時，外圍及底部流體，因槽壁及槽底摩擦力的影響，流速較慢，相對的壓力也較大，導致外圍的水流會轉入中心，是為強迫渦流。而本實驗的渦流為組合為強迫與自由渦流組成。

驗證結果—漩渦結構為自由漩渦及強制漩渦之組合漩渦



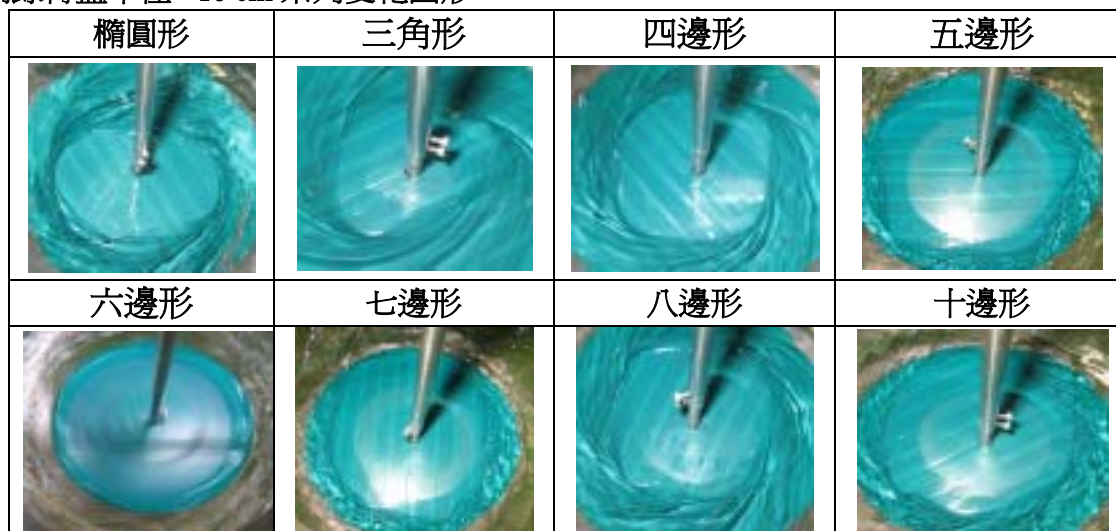
實驗觀察及拍攝得漩渦結構（Combined vortex）

4. 於實驗中觀察及拍攝得：

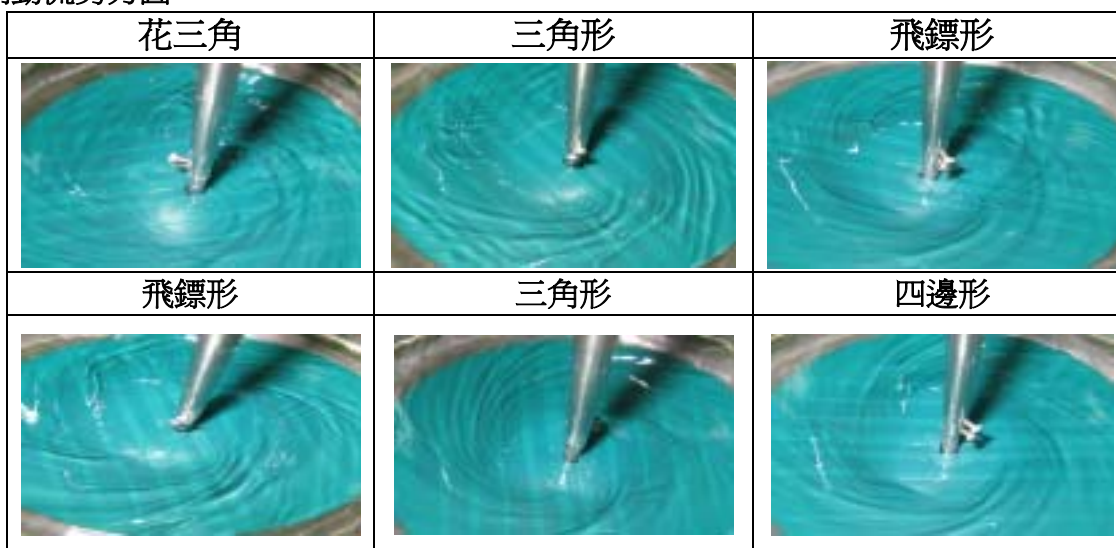
漩渦基本圖形

花瓣形	弧形三角	三角形	四邊形
			
五邊形	六邊形	八邊形	
			

摘錄轉盤半徑 =10 cm 系列變化圖形



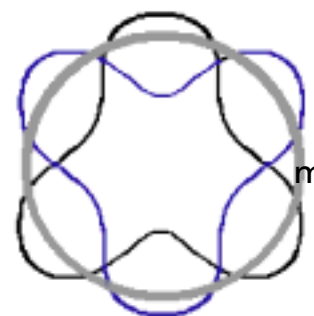
渦動流剪力圖



5.轉盤圓面積越大出現的圖形越明顯，且盤上水層越薄，可觀察到的漩渦圖形的角形數越多，因此也就越接近圓形；相對地，水層越厚時，角形數雖然較少但也較明顯。

6.在相同水深下，轉盤轉速越快時，可觀察到之漩渦圖形的角形數越多，且轉盤形狀會影響漩渦圖形的改變。且如〔圖表五〕所示，當轉盤轉速越高時，多邊形之自轉速度亦隨之增高，且多邊形之自轉速度會低於轉盤轉速。

7.在相同水深下，轉速越快時，可觀察到之漩渦圖形的角形數越多，且轉盤形狀會影響漩渦圖形的改變。於物理因素特定的相關條件下，形成某特定角形數漩渦。



8.轉動角動量與漩渦穩定多角形圖形的特性是良好的圓周運動角動量量子化的生活實例。

研究結果漩渦形狀與轉動角動量有一定的關係。環狀流 m ，繞中心軸旋轉的角動量

$L_z = rmv_\theta$ 。因系統中無其他外力矩作用，則角動量應守恆，則一定轉速下，離軸心 r 處，環狀流 m 受外圍環狀流之壓力作用，為產生波動平衡現象角動量必量子化。故環狀流周長必為波長整數倍

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{p} \quad (p = mv_\theta) \quad rp = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

拾、感想與展望

從最初的木屑、沙子與綠豆到後來的向心力轉速控制裝置、磁攪拌器與手動旋轉器，校園裡的一草一木見證了我們的坎坷辛苦；相較於其他組別的精密儀器，我們將從學校木工室借到的手搖鑽孔器改裝為轉動器、將不起眼的鋁箔紙化身成了方便觀察圖形的阻波器、並將廚房流理台的漏水口網篩支架拆解組合成最關鍵的轉動軸，甚至還犧牲了媽媽悶燒鍋的底鍋——一切只為了我們的實驗。接著無止盡的重複「轉動旋轉器、攝影、找圖形」這些看似容易、卻不斷地考驗我們耐心的步驟，只因為想要找出最適合的解釋來解答我們心中的好奇與疑惑。最後，終於製作成這份長達十幾頁的科展說明書。在這一段研究路程裡，使用這簡易自製設備完成實驗是我們最自豪的體驗。我們不知在漩渦中沈沒了多少次、啟動了多少次重新開始的轉動，後來它終於現形了！Y a！

於改善實驗中取得較準確的實驗數據，也分析出良好的結果。進一步的實驗改良，進而掌握到渦動流形成漩渦的真相。在參考的文獻中，提到軸的擺動也會影響到圖形的出現。我們認為，如果此簡易實驗能使用精密的儀器，並使其旋轉軸連些微的擺動都不存在，會出現更明顯且更完整的漩渦圖形。期許未來能有更精確的科學儀器，研究各漩渦圖形出現的轉速範圍。

這雖然是一個小小的創意實驗構想，實驗結果卻非常有價值；

例如我們認為：1.可用於探討颱風、龍捲風之結構研究

2.利用於流體動力相關機械的改良。

拾壹、參考資料：

- (一) Written by Tomas Bohr Polygons on a Rotating Fluid Surface, Physical Review Letters《物理評論通訊》,published 3 May 2006
- (二) 明克爾(JR Minkel)撰文 方形的漩渦 新聞掃瞄 9月號/2006年 第55期科學人雜誌遠流出版社發行

【評 語】 040101 「漩」機重重

1. 自製旋轉盤在水中旋轉，形成多邊形圖樣，比網站上公佈的圖樣更顯著。
2. 結論部份用角動量量子化的微觀觀點解釋巨觀的多邊形邊數，有待商確。