中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080418

方塊地板嵌合形式及任意三角形數量計數相關公式之追求與創新

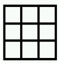
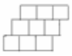
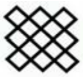
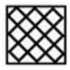
學校名稱：臺北市萬華區龍山國民小學

作者：	指導老師：
小五 翁瑋	翁進勳
小五 黃品豪	周季霖
小五 陳品儒	
小五 黃楷元	
小三 焦鈺詠	
小五 江謝政廷	

關鍵詞：鼎方格　砌方格　任意三角形

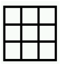
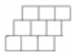
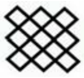
方塊地板嵌合型式及任意三角形數量計數換算公式之追求與創新

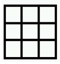
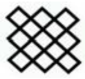
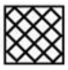
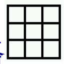
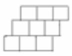
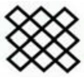
摘　　要

從校外教學及學校、家庭生活環境所常見的地磚、建築物內外牆的馬賽克，正看為排列整齊的「正方格」，及「砌方格」等兩種形式，正方格裡頭斜眼一看則有「鼎方格」第三種形式，而正方格與鼎方格又可層層外切一個正方形、，如何應用公式計算，很值得我們研究與探討。

四年級上過的**數學第八冊－毫米與三角形，以及五年級下冊縮圖方格紙的應用**，同學們在平面紙上「亂點鴛鴦譜」，隨意將兩點聯成一條直線，三條直線連成一個三角形的遊戲中，看誰畫的三角形最多，了解點、線、面彼此之間的關係。進一步探索鼎方格「連體嬰分割」公式和「亂點鴛鴦譜」的公式有何相關之處？體會「發現與創新」公式的奧秘和興趣！啓迪潛能、培養敏銳觀察與判斷、推理的能力。

壹、研究動機

一、校外教學劍湖山以及校門口廣場的地磚，以及家中浴室牆壁的馬賽克，都是正方形的，隱約的可以看出三種基本的組合：、 。

我們發現「正方格」和「鼎方格」外圍層層外切，又是一個正方形，分別如下圖：、。而正方格及砌方格可以用公式（邊 × 邊）即 N^2 的公式或平行四邊形公式：底×高，算出方格總數（３×３＝９），而鼎方格圖形雖然每邊同樣３個，但卻無法用 N^2 的公式算出格數，必須一排２個一排３個分開計算，好麻煩喔！我們試著放大組合（由３個、４個、5…個），發現它具有規則性，可以推理預知下一個答案是多少？我們覺得它一定有公式，可以幫助我們解出答案來。

二、元宵節跟家人到龍山寺拜拜，看到廣場地板佈滿如天文台所展示各種奇形怪狀的星座，其中最簡單莫過於春季、夏季大三角等，只要兩點便可聯成一條直線，三點則就可連成一個三角形，同學們依樣畫葫蘆，在白紙上面亂點鴛鴦譜，隨意的用筆點上幾點，再以長尺每兩點連成一直線，三點則連成一個三角形，看誰連的直線及三角形數量最多；誰就贏！（但必

須遵守遊戲規則，直線和三角形不得交叉或重覆計算。)，由於點數不多，一下子就畫完了，同學們又分別在內圈和外圍點了好幾點，以便繼續玩下去……，如此一來，原來的點和後來加上去的點混雜在一起，很難計算直線和三角形的數量增加了多少？有否正確的方法和公式可以算出來？而上述求鼎方格的公式（面）與連（線）三角形的（點）有關嗎？

貳、研究設備與器材

			
雙彩西卡紙	透明膠尺	方塊嵌合實地拍攝	方格紙
			
細線	美工刀	圖釘	廁所踏板

参、研究目的與問題：

一、常見正方形的地磚有幾種不同的嵌合方式？如何辨別其形式和命名？

二、不同嵌合方式的正方格數量如何計數？有快速的計算公式嗎？

三、鼎方格外切一個正方形，花邊增加多少格數？外切後的大正方形公式如何追求？

四、正方格與鼎方格層層外切有否不同？如何運算公式加以計數？

五、平面紙上的任意點數量相同，所連出來的任意三角形和直線數量是否相同？

六、甕中抓鱉：增加內圈的點數，直線和三角形的數量增加多少？

七、天羅地網：增加外圈的點數，直線和三角形的數量增加多少？

八、鼎方格公式與甕中抓鱉內圈點數的相關與應用？

九、結論：

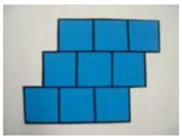
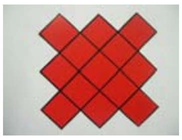
肆、研究過程和方式：

一、常見方塊地磚有幾種不同的嵌合方式？如何辨別其形式和命名？

（一）方法：

我們在校園裡頭尋找方塊地磚或牆壁方形的馬賽克，並實際拍攝各種不同嵌合方式的照片，以雙色西卡紙、美工刀，裁減每邊 3 公分見方的正方格，並依據所拍照片，排列每邊三個小方格的正方格、砌方格和鼎方格，比較其特徵並命名如下表：

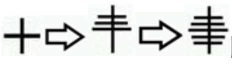
圖表設計一：

嵌合圖形命名	嵌合圖形排列狀	相同特徵	不同特徵	基本算法
正方格		每邊三個正方格	互相對齊、外圍形成一個大正方形。對角線 3 格。	正方形公式：邊 × 邊即 N^2=3×3=9
砌方格		每邊三個正方格	如砌磚狀、略似平行四邊形。對角線 3 格。	平行四邊形公式：底×高=3×3=9
鼎方格		每邊三個正方格	四個邊緣如矩齒狀。對角線 5 格。	沒有公式可以計算。

（二）發現：

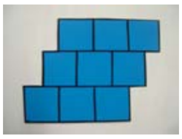
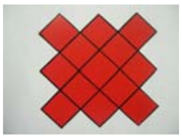
我們由上述表格，發現除了周邊個數相同之外，其餘都不相同，但對角線的圖樣，給我們一個靈感，因爲不管正方格、砌方格、鼎方格，其本身兩條對角線的格數相等；而且相互垂直成爲一個“＋”字。這好像房子的主幹，可以作爲我們設計鼎方格的基礎，有了基礎，蓋房子就比較容易了。

（三）設計：

１、我們到文具店購買方格紙，以節省畫格子的時間，依照鼎方格的構造基礎（十字），我們循序由的過程，很快而且正確的可以畫出“鼎方格”。我們影印數拾張，作爲未來尋找鼎方格對角線和方格總數公式之用。

２、我們由上述表格，發現正方格、砌方格每邊方格的總數和其對角線方格的數量相同，但鼎方格的對角線格數要比其邊數多２格，有人提議：如果把正方格、鼎方格每邊的格數逐序增加，其對角線的格數是否有規則的增多？於是我們設計了一張簡表，把鼎方格每邊的格數由 1 到 5 所構成的對角線格數，紀錄如下表：

圖表設計二：

名稱 每邊 格數（N）	**正方格** 對角線格數	**砌方格** 對角線格數	**鼎方格** 對角線格數	三者 差距 （N−1）	三者 對角線格數的 差距
					
1 格	1 格	1 格	1 格	0	0
2 格	2 格	2 格	3 格	1	1
3 格	3 格	3 格	5 格	2	2
4 格	4 格	4 格	7 格	3	3
5 格	5 格	5 格	9 格	4	4
：	：	：	：	：	：

（三）結果與發現：

１、我們由上表發現：正方格、砌方格其對角線格數和其每邊格數完全相同（１、２、３、４、５、……），差距皆０，但鼎方格對角線格數，則隨著邊數增加（１、３、５、７、９……），差距爲（１、２、３、４、５、……），公式算法是每邊格數減１，即（Ｎ－１），如果要求鼎方格**對角線格數的公式，只要**Ｎ＋（Ｎ－１）＝２Ｎ－１，即可算出（藍加紅等於紫）。

２、另外一個發現，只要把**每邊格數（Ｎ）乘以２再減１**就等於其對角線的格數，（藍乘於 2 減 1 等於紫）。以公式表示則是２Ｎ－１，遠比第一個發現的公式更快。

（四）證驗與討論：

１、我們由對角線的公式２Ｎ－１，拿來檢驗校門口鼎方格地磚，如每邊 5 格，代進公式：２Ｎ－１即 5×２－１＝9，再實際數數鼎方格地磚對角線的格數也是 9 格，完全符合。

２、坊間文具店所賣的“方格紙”屬於正方格，要變爲鼎方格首先要應用其對角線的公式２Ｎ－１。以及上述結構的方法，把正方格紙轉化爲鼎方格稿紙，進而實際推演以利後續公式的追求。

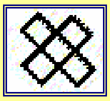
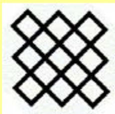
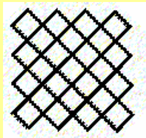
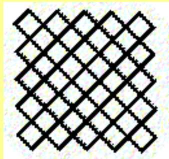
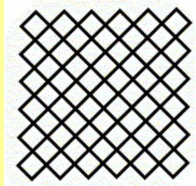
３、正方格、砌方格其對角線格數和其每邊格數完全相同，其形狀外觀不同，但總格數的追求，都是利用正方形公式：邊 × 邊即 N^2=3×3=9，或平行四邊形的公式：底×高=3×3=9。即可算出。而鼎方格數量如何計數？我們利用設計好的鼎方格紙找尋其規則和公式。

二、鼎方格數量如何計數？有快速的計算公式嗎？

（一）方法：

我們將設計好的鼎方格紙，影印多張備用，一則：可節省畫圖時間，二則：可留下推演的痕跡。並在鼎方格紙上，實際觀測每邊１~6 的鼎方格，並找出原則。繪表如下：

圖表設計三：

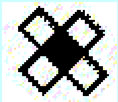
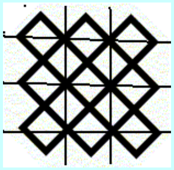
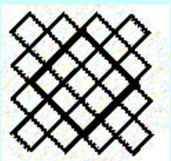
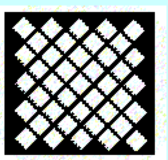
圖樣						
鼎方格每邊格數（N）	1	2	3	4	5	6
鼎方格對角線格數（２N－１）	1	3	5	7	9	11
鼎方格總數	1	5	１３	２５	４１	６１
規則一 4x(N-1)=4		差４ 4x(2-1)=4	差８ 4x(3-1)=8	差１２ 4x(4-1)=12	差１６ 4x(5-1)=16	差２０ 4x(6-1)=20
規則二		差４	差４	差４		差４

（二）結果與發現：

１、我們由圖表可以看出，鼎方格總格數與其對角線板數都是有規則的，由規則一和二：我們發現鼎方格（每邊 N=5 格）一定是差 16 即（Ｎ－１）×４，只要把前面的 25 加上 16 等於 41，就是其總數。依此類推：每邊 6 格一定是 41＋（6－１）×４＝61

２、由上述規則的發現和推理，我們找到差距公式：４×（Ｎ－１），但要算鼎方格的總數，必須建築在前一個鼎方格總數的基礎上。如此，我們又回到了問題的原點，由數字運算既然無法進一步突破，我們只有從實際的圖樣去觀測，看看是否能找出解決答案的線索，於是我們又進行了下列圖表四的設計和觀測。

圖表設計四：

圖樣	鼎方格每邊格數	鼎方格對角線格數2(N-1)	鼎方格總數的觀測及實際運算的過程	答案
	1	1	１.即知型：一看表即知答案１個。	1
	2	3	２.十字型：一排３個，二排３×２＝６，中間重覆１個減掉，６－１＝５。 ３.黑白型：黑的加白的：１＋４＝５。	5
	3	5	４.橫豎型：橫的一排３個，只有３排，即３×３＝９。直的一排有２個，共有２排，即２×２＝４。橫＋直＝３×３＋２×２＝１３。	13
	4	7	５.內切型：鼎方格肚子中間有一個正方形（３×３＝９），四周有四個品字，一個品字有４個方格（４×４＝１６）。４×４＋３×３＝２５。	25
	5	9	６.外切型：鼎方格外切一個正方格，再減去黑色的花邊，即可算出答案，問題是外切的正方格有多少方格？以及黑色花邊的格數？必須動腦筋再去追求。	?

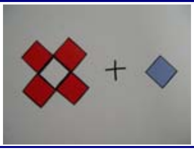
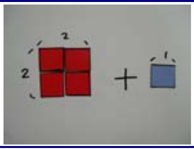
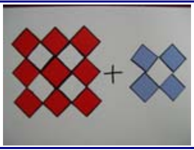
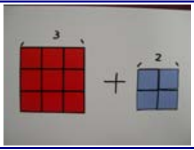
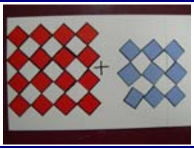
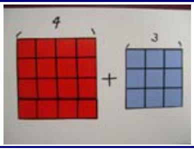
（三）推理與證驗：

１、由圖表設計四的觀測，我們意外發現了一個原則，每邊三格（橫豎型）的算法３×３＋２×２＝１３，和每邊四格（內切型）的算法４×４＋３×３＝２５，有異曲同工之妙，換句話說：有他的遊戲規則，如果往上回溯，每邊二格的一定是２×２＋１×１＝５，每邊一格的一定是１×１＋０×０＝１。從以上已知的答案中，我們可以印證，這樣的推理是正確的。

２、由以上的遊戲規則，如何把他變成公式來計算呢？我們發現３×３＋２×２＝１３，前後可以分成兩部，即（３×３）和（２×２），進而簡化爲3^2+2^2，假設每邊３格（Ｎ＝３）的話，變成公式即$N^2+(N-1)^2$，因爲由觀察及推理得知；後半部（2^2）的２，比前半部（3^2）的３少１（即Ｎ－１）。而3^2和2^2不正是兩個正方形嗎？（亦即每邊３格和２格的正方形各１個）。我們好高興，把發現和推理的結果報告老師，老師要我們互相研討，爲什麼會變成兩個正方形？爲何兩個正方形一大一小？爲何小的正方形每邊的格數永遠少１？

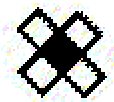
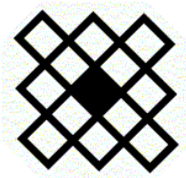
３、由以上推理得知，既然一個鼎方格可變成兩個正方形，那麼我們就進行以下鼎方格的分割實驗：即圖表設計五：連體嬰的分割和重建。

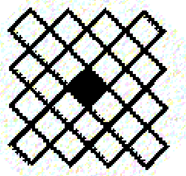
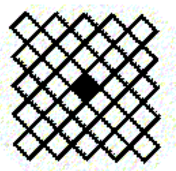
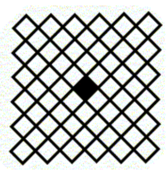
圖表設計五：

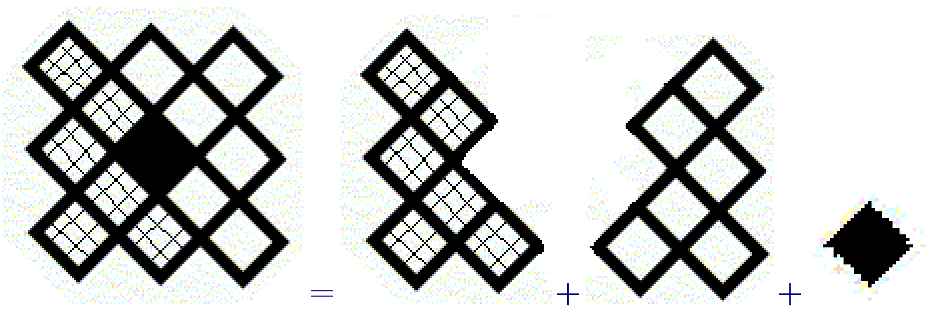
圖樣	鼎方格每邊格數	切割註記（以紅紫表示）	切割分類（紅與紫分成兩部分）	重整重建（矯正）
	2			
	3			
	4			
： ： ：	5 ： ：	： ： ：	： ： ：	： ： ：

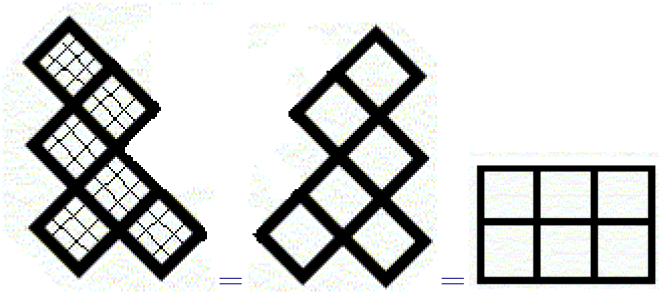
4、由圖表設計五的分割與重健過程中，我們很輕易的可以看出小的正方形永遠比大的正方形每邊格數少１，即（N－１），這好像老師跟我們說過的，忠仁和忠義兩位連體嬰的故事，經過台大醫生的分割手術和復健，才得以讓兩位兄弟存活下來。為了牢記這條有意義的公式：$N^2+(N-1)^2$，我們就把他命名為「連體嬰分割」公式。接著我們把「連體嬰分割」公式 $N^2+(N-1)^2$ 代入圖表設計六：以「一分為二」再「合而為一」的策略，衍生下列一條更快速的公式。

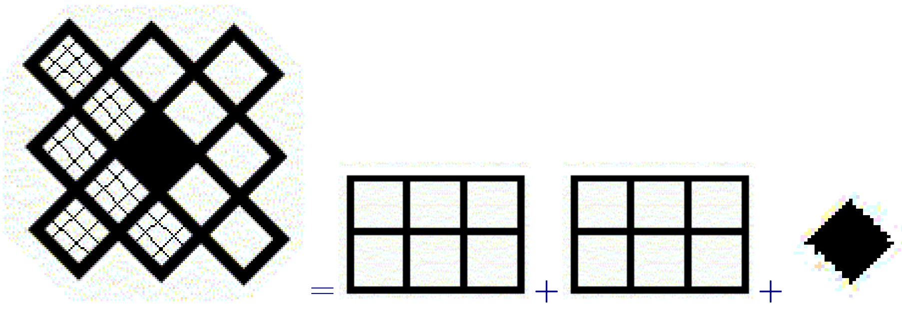
圖表設計六：

鼎方格每邊格數（N）	鼎方格圖樣	代入連體嬰公式 $N^2+(N-1)^2$	一分為二策略	合而為一策略 2×N×（N－１）＋1
1		1x1＋0x0＝1	1÷2＝0 餘 1	2x1x0＋1＝1
2		2x2＋1x1＝5	5÷2＝2 餘 1	2x2x1＋1＝5
3		3x3＋2x2＝13	13÷2＝6 餘 1	2x3x2＋1＝13

4		4x4＋3x3＝25	25÷2＝12 餘 1	2x4x3＋1＝25
5		5x5＋4x4＝41	41÷2＝20 餘 1	2x5x4＋1＝41
6		6x6＋5x5＝61	61÷2＝30 餘 1	2x6x5＋1＝61







＝（3x2）＋（3x2）＋1

＝2 x（3x2）＋1

＝2 xN x（N－1）＋1

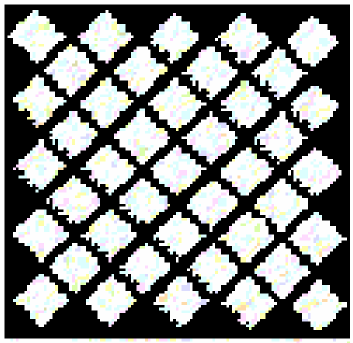
5、經由不斷追求和研究，雖然有了初步成果，但我們並不自滿，老師告訴我們還要再接再厲：把**圖表設計四：外切型**：鼎方格外切一個大正方形沒有解決的問題，進一步再加以研究。

三、鼎方格外切一個大正方形，花邊增加多少格數？公式如何追求？

（一）方法：

１、我們利用自己設計好的鼎方格紙，以每邊五格的鼎方格，外切一個大正方形，實地觀測增加的格數有多少，外切後的大正方形公式如何追求、計算？

圖表設計七：

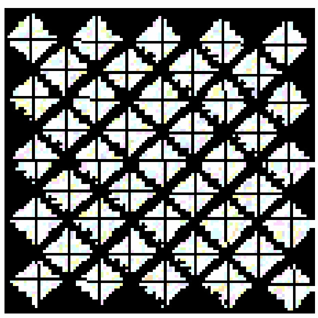


２、我們發現每邊五格的鼎方格，所外切出來的大正方形，如果能夠利用正方形的公式：邊乘於邊（即N^2），便能很快計算出方格的總數，但首先必須確定外切正方格每邊格數（Ｎ）有多少個方格？但從圖表設計七：我們很難算出外切正方形的邊長有幾格？這時候，有人提議：如果把鼎方格再內切成爲比原來的方格，更小一點的方格，不是可以重新算出邊長的小方格嗎？再以邊長×邊長（Ｎ×Ｎ＝N^2），不就可以算出來了嗎？

（二）結果與發現：

１、於是，我們試著把圖表七的鼎方格再內切成爲小方格，而每一個鼎方格，每邊可以切成二個小的方格，換句話說：外切的正方形，每邊是１０個小方格，代進正方格的公式N^2，所得到的小方格總數是１０×１０＝１００，如圖表設計八。

圖表設計八：



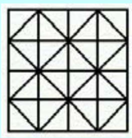
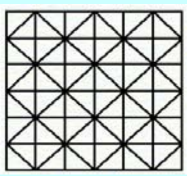
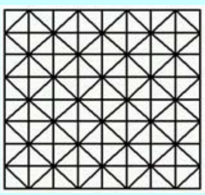
２、我們把鼎方格外切大正方形，所形成的黑色花邊塗成黑色，發現鼎方格每一個單位：

＝　＋　＝　＋　＋　＋　＝　＋　。黑色花邊含蓋了１６個　和４個　，總共可拼成９個　（正方格每邊有４個　，四邊共有４×４＝１６個　，以及四個角落各有

一個◹），如果把上述正方格所求出來的１００個小方格⧅換成為鼎方格，１００÷２＝５０個⊠，減去花邊９個⊠，５０－９＝４１⊠，代進上述連體嬰的公式$N^2+(N-1)^2=$ $5\times5+(5-1)^2=5^2+4^2=$４１，完全符合。

３、我們又意外發現黑色花邊９個⊠，和對角線的數目完全一樣（對角線公式２Ｎ－１，即５×２－１＝９），我們覺得不可思議，有人說：也許純屬巧合，老師在旁指導我們：不妨分別再試作每邊２、３、４、格的鼎方格，外切形成花邊的格數，是否都等於其對角線的方格數目，設計圖表九於後：

圖表設計九：

圖　　樣	每邊方格數	對角線方格數	花邊格數計算過程	鼎方格總數	外切正方格總數
	N=1	2N-1 1	1◹　×4 ＝1⊠	$N^2+(N-1)^2$ ＝（1×1）＋（0×0） ＝1	2×1＝2（N） 2×2＝4（N^2）⧅ 4÷2＝2 ⊠
	N=2	2N-1 3	1◁×4＋1◹4 ＝2⊠＋1 ⊠ ＝3⊠	$N^2+(N-1)^2$ ＝（2×2）＋（1×1） ＝5	2×2＝4（N） 4×4＝16（N^2）⧅ 16÷2＝8 ⊠
	N=3	2N-1 5	2◁×4＋1◹×4 ＝4⊠＋1⊠ ＝5⊠	$N^2+(N-1)^2$ ＝（3×3）＋（2×2） ＝13	2×3＝6（N） 6×6＝36(N^2) ⧅ 36÷2＝18 ⊠
	N=4	2N-1 7	3◁×4＋1◹×4＝7 ⊠	$N^2+(N-1)^2$ ＝（4×4）＋（3×3） ＝25	2×4＝8(N) 8×8＝64(N^2) ⧅ 64÷2＝32 ⊠

４、由上述圖表設計九：我們證實了花邊格數等於對角線的格數，換句話說；求花邊格數的公式，可以應用對角線的公式２Ｎ－１。不必再辛苦的拼拼湊湊，浪費時間。

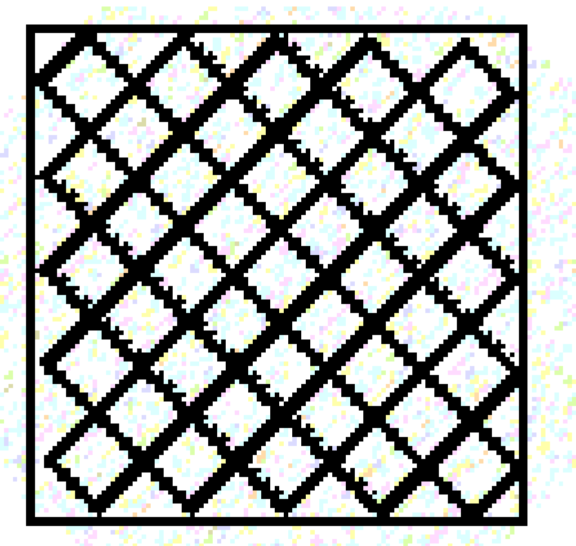
（三）推理與證驗：

１、我們分別由圖表設計五至九，得到求鼎方格最快的公式是２×Ｎ×（Ｎ－１）＋１，以及求花邊格的公式２Ｎ－１；只要把這兩個公式加起來便是求外切大正方形的公式。(由上述圖表八：花邊格數加上鼎方格數剛好等於外切大正方形的格數。例如每邊四格的鼎方格數是２５，花邊格數是７，７＋２５＝３２便是外切正方格的運算公式：即（２Ｎ－１）＋２×Ｎ×（Ｎ－１）＋１＝（２Ｎ－１）＋（２N^2－２Ｎ）＋１＝２Ｎ－１＋２N^2－２Ｎ＋１＝２N^2。

２、由以上一大串公式的運算，我們終於得到鼎方格外切正方格的公式是　２N^2，我們試著驗證上訛每邊２、３、４的鼎方格，外切正方格所得格數是否為２$\times(2)^2$＝８，２$\times(3)^2$＝１８，２$\times(4)^2$＝３２。結果答案真的和圖表九完全一樣，我們實在太高興了，幾乎跳了起來！

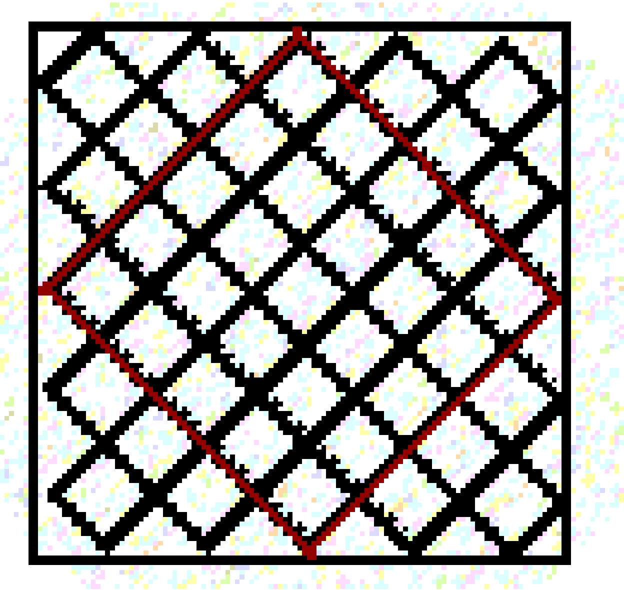
３、雖然我們用盡九牛二虎的力量，求得２N^2的公式，但老師要我們思考２N^2代表什麼意義？有人搶著回答說：「**就是２個N^2嘛！**」，也有人說：「**N^2有兩個，而N^2是正方形的公式**，換句話說，就是有兩個相同的正方形。」，老師沒有回答，要我們進一步去驗證：鼎方格外切大正方形所含的格數是否真的等於兩個相同正方形格數的總和。

圖表設計十：



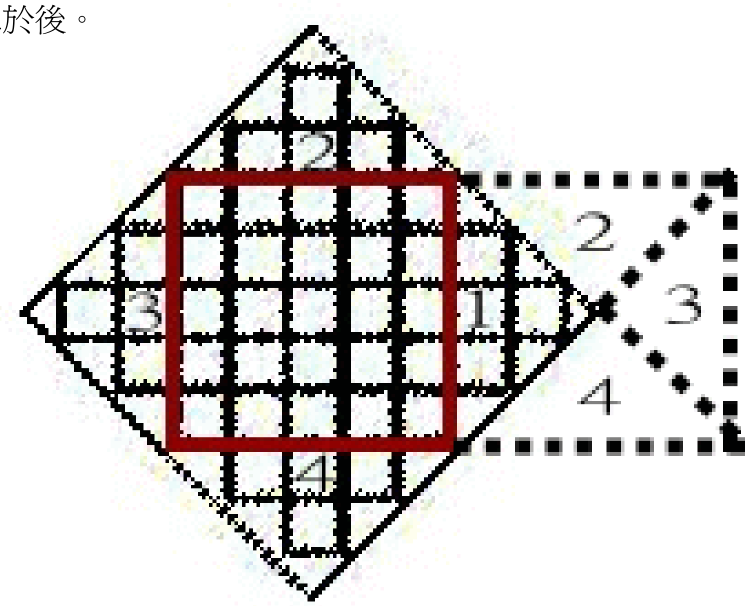
5、畫好之後，有人首先從圖表十看到外切鼎方格裡面「孕藏」著一個每邊五格的正方格，並且以紅色簽字筆把它框起來（如圖表十一），但是另外一個相同正方格又在那裡呢？

圖表設計十一：



6、我們由圖表設計十一：發現外切大正方形除了內含一個正方格（紅線正方格）之外，還有四個相同面積的三角形，有一點略似圖表設計九：第一個圖樣（即每邊方格只有一個）。我們是否可以把其剩餘下來的四個三角形組合成另外一個相同的正方格？於是我們再設計圖表十二於後。

圖表設計十二：



7、由圖表設計十二：我們把利餘四個三角形，分別編號1、2、3、4，而1號三角形不動，把2、3、4號三角形剪下起來，分別貼在虛線部位，同樣是編2、3、4的位置，發現真的一模一樣，剛好組合成一個正方形，而且與其裡面所蘊藏的正方形完全相同，而且每邊都是5個方格（即N＝5，$2N^2=2\times5^2=50$）。

8、我們把上述$2N^2=2\times5^2=50$，回頭再印證前面圖表設計八和九所得的公式（2×5＝

１０，１０×１０÷２＝５０。５×２－１＝９，$5^2+(5-1)^2$＝４１，９＋４１＝５０），答案完全相同，但$2N^2$的公式比較具體，而且簡單易記，我們稱他為「**雙胞胎公式**」即一分為二的意思。

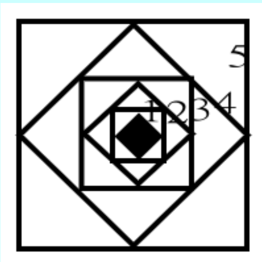
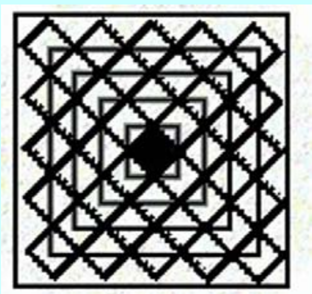
9、由以上的驗證與心得，我們在想，外切的正方形一個變成兩個，如果層層外切，結果又是如何？是否像宋七力分身一分為二，一個變兩個，兩個變四個，四個又再變成八個呢？另外廁所踏板（如實物）鼎方格層層等距外圍，與正方格層層外切，構圖明顯不同，答案是否有異？指導我們的老師說，坐而言不如起而行，實地的觀測和操作是最重要的。

四、正方格與鼎方格層層外切有否不同？如何運算公式加以計數？

（一） 方法：

我們把正方格層層外切與鼎方格層層等距外圍，分別在鼎方格紙設計成兩個具體的圖樣。

圖表設計十三：

名稱	圖　　樣	外切層數	公式運用	格數	規　　則
正方格層層外切正方形 (五層)		1	$2N^2$= 2x1^2=2=2^1	2	核心黑色部分為一正方格，外切第一層利用公式 $2N^2$則為2x1^2=2格，是黑色方格的兩倍。同理，外切第二層則為第一層的兩倍，外切第三層則為第二層的兩倍，外切第四層則為第三層的兩倍，外切第五層則為第四層的兩倍，依此類推。
		2	2x1^2x2=4=2^2	4	
		3	2x1^2x2x2=8=2^3	8	
		4	2x1^2x2x2x2=16=2^4	16	
		5	2x1^2x2x2x2x2=32=2^5	32	
鼎方格層層等距外切正方形 (五層)		1	$2N^2$= 2x1^2=2	2	核心黑色部分為一鼎方格（正方格），外切第一層 $2N^2$則為 2 格，外切第二層則為 8 格，外切第三層則為其 18 格，外切第四層則為 32 格，外切第五層則為 50 格。
		2	2x2^2=8	8	
		3	2x3^2=18	18	
		4	2x4^2=32	32	
		5	2x5^2=50	50	

（二）結果與發現：

1、我們從圖表設計十三：發現層層外切及層層等距外切，如果以鼎方格（一平方公分）為一個單位（圖表黑色部位），就可以利用前面我們得到的公式：$2N^2$來計算。但層層外切與等

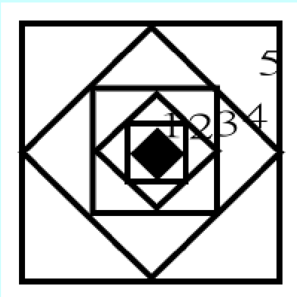
距外圍計算過程明顯不同。前者外切第一層使用公式 $2N^2$ 之後，第二層開始，就必須利用上述一分為二，二分為四才能算出答案來。我們覺得很麻煩而且費時，我們希望能找出公式來。

2、為了尋找公式，我們發現在每一層格數的差距，有他的規則性，依前面的經驗，有了規則等於就有了線索，我們繼續層層外切公式和層層外圍等距差公式的追求。

（三）推理與證驗：

1、我們從圖表設計十三：層層外切運算的過程，再列圖表十四進一步分析於後：

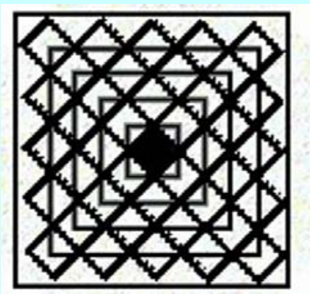
圖表設計十四：

名稱	圖　　樣	層數	格數	運算公式及過程
層層外切正方形		1	2	$2\times1^2=2=2^1$
		2	4	$2\times2=4=2^2$
		3	8	$2\times2\times2=8=2^3$
		4	16	$2\times2\times2\times2=16=2^4$
		5	32	$2\times2\times2\times2\times2=32=2^5$

2、由圖表十四：層層外切運算的過程：也是使用前面所提過的“雙胞胎”的公式 $2N^2$，一個變為二個，二個變成乘四……依此類推。我們發現當層數為 1 時，所得到的答案是 2^1 ＝2，如果層數為 2 時，則是 2^2 ＝4，換句話說 2 的 N 次方就是等於層數，因此層層外切的公式等於 2^N 。這也說明上述規則比較時，為什麼差距總是 2 的 N 次方的道理。

3、找到了層層外切的公式後，我們覺得很有信心，證明了有規則就可以找到公式，接著我們再追求層層外切等距的公式，以圖表十五設計於後。

圖表設計十五：

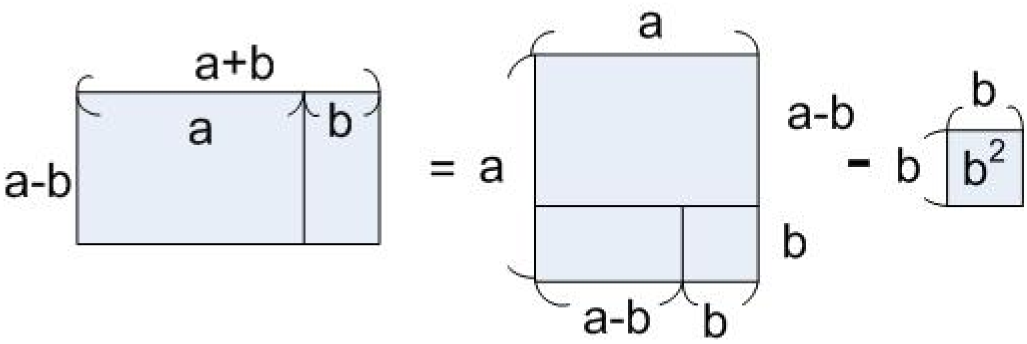
名稱	圖　　樣	層數	格數	運算公式及過程
等距外切正方形		1	2	$2N^2=2\times1^2=2$
		2	8	$2\times2^2=8$
		3	18	$2\times3^2=18$
		4	32	$2\times4^2=32$
		5	50	$2\times5^2=50$

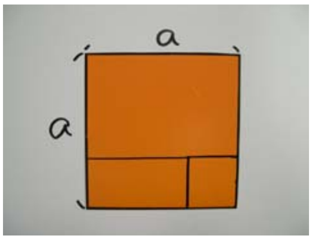
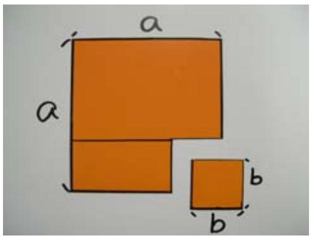
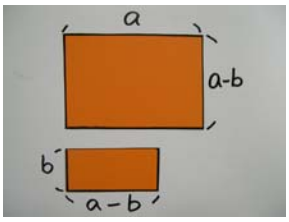
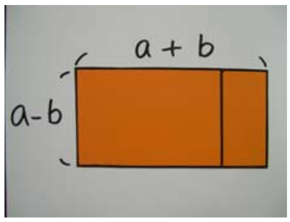
4、我們由圖表設計十五：在規則尋找過程中，很快的發現在比較“連接層”（即隔壁層：如1和2，2和3，3和4⋯）的差距時，直接把兩層數目加起來乘以2便是他們的差距。例如第四層第五層作比較時只要把4和5的和×2既可得知差距18，(4+5)×2＝18，可是如果作“爲連接層”比較時，就無法用此原則計算了，真叫人洩氣!老師要我們不要灰心，繼續尋找，最後，終於找到了問題的關鍵：除了2乘以層數的和以外，還要乘以層數的差。正確公式是 **2×層數和×層數差，即2（a－b）(a＋b)。**

5、我們覺得層層等距外切正方形差的公式爲何要用 2 乘以層數的和及差，一定有他的原因，我們一起請教老師，老師告訴我們這是平方差的問題，亦既兩數的和與差之積：(A＋B）×（A－B）＝ $A^2 - B^2$ 。這可以用面積的圖解法加以證明：

假設有一個邊長爲a的正方形，剪掉邊長爲b的正方形，剩下的部分，則可拼成一個長爲（a＋b)，寬爲（a－b）的長方形（如下面解法）:

圖解法：



			
一個邊長爲a的正方形	剪掉邊長爲b的正方形	剩下的部分剪成兩個長方形	再拼爲一個長(a+b)，寬(a-b)的長方形

如果應用分配率相乘：(a＋b)×(a－b) ＝ $a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ 以上平方差的公式，還沒教，但老師希望我們可以先行了解，將來很多地方一定用得到。

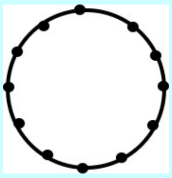
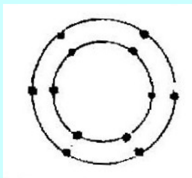
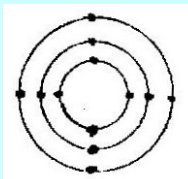
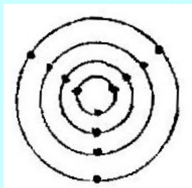
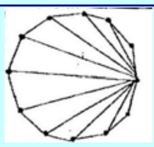
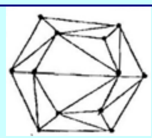
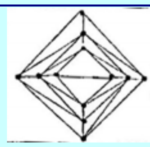
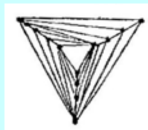
6、但鼎方格如果沒有層層外切正方形，單就某兩者（N＝a，b且 a＞b）之間的差距，只要代進**求鼎方格的連體嬰分割公式**N^2＋（N－1）^{2}**或快速分割公式２×N×（N－１）＋１**，兩者相減之後，化簡成一條公式：【２×a×（a－１）＋１】－【２×b×（b－１）＋１】=2（a－b)（a＋b－1)，與鼎方格層層外切正方形差距公式比較差別爲：2（a－b)。

五、平面紙上任意點數相同，連出來的三角形和直線數量是否相同？

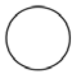
（一）方法：

把 12 點分別佈置在單層、雙層、參層、肆層、陸層及拾貳層的同心圓周上，單層一個圓圈佈置 12 點，雙層每層各佈置 6 點計 12 點，參層每層佈置 4 點計 12 點、肆層每層佈置 3 點計 12 點，在總點數 12 點都相同的情況下，觀測畫出來的直線及三角形的數量是否都相同？

設計圖十六：

<table>
<tr><td rowspan="3">觀測項目</td><td colspan="2">單層</td><td colspan="2">雙層</td><td colspan="2">參層</td><td colspan="2">肆層</td></tr>
<tr><td colspan="2">12×1＝12
12＋0＝12</td><td colspan="2">6×2＝12
6＋6＝12</td><td colspan="2">4×3＝12
4＋4＋4＝12</td><td colspan="2">3×4＝12
3＋3＋3＋3＝12</td></tr>
<tr><td>外圈點</td><td>內圈點</td><td>外圈點</td><td>內圈點</td><td>外圈點</td><td>內圈點</td><td>外圈點</td><td>內圈點</td></tr>
<tr><td rowspan="2">點數分布位置圖</td><td>12</td><td>0</td><td>6</td><td>6</td><td>4</td><td>8</td><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>點數連線圖</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>直線數量</td><td colspan="2">21</td><td colspan="2">27</td><td colspan="2">29</td><td colspan="2">30</td></tr>
<tr><td>三角形數量</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2">19</td></tr>
</table>

（三）結果：

1、我們由設計圖觀測，發現了重大的秘密，當我們把同樣 12 點的單、雙、參、肆層（、、、）「**一分為二**」：歸納為只有內外之分的兩圈，即「圈內」和「圈外」兩個領域，我們很興奮的找到了他們彼此之間的關係和原則：

歸納圖十七（分圈內和圈外兩種）：外圈的點數不得少於三點

層別暨總點數	單層					雙層					參層					肆層				
	12＋0＝12					6＋6＝12					4＋4＋4＝12					3＋3＋3＋3＝12				
觀測項目	外圈點數	內圈點數	點數合計	直線數量	三角形數量	外圈點數	內圈點數	點數合計	直線數量	三角形數量	外圈點數	內圈點數	點數合計	直線數量	三角形數量	外圈點數	內圈點數	點數合計	直線數量	三角形數量
內層與外圈點數對應之直線及三角形數量	12	0	12	21	10	6	6	12	27	16	4	8	12	29	18	3	9	12	30	19
	11	1	12	22	11	7	5	12	26	15	5	7	12	28	17	4	8	12	29	18
	10	2	12	23	12	8	4	12	25	14	6	6	12	27	16	5	7	12	28	17
	9	3	12	24	13	9	3	12	24	13	7	5	12	26	15	6	6	12	27	16
	8	4	12	25	14	10	2	12	23	12	8	4	12	25	14	7	5	12	26	15
	7	5	12	26	15	11	1	12	22	11	9	3	12	24	13	8	4	12	25	14
	6	6	12	27	16	12	0	12	21	10	10	2	12	23	12	9	3	12	24	13
	5	7	12	28	17						11	1	12	22	11	10	2	12	23	12
	4	8	12	29	18						12	0	12	21	10	11	1	12	22	11
	3	9	12	30	19											12	0	12	21	10

（四）發現：

1、由單層中，我們發現外圈點數原本 12 點，其中一點跑到內圈中（即外 11~內 1），所得到的直線及三角形的數量，則相對的各層加一個，內圈如增加爲二點（10~2）則各增加二條直線二個三角形……依此類推，在點數相同的情況下，內圈增加一點（即外圈少一點），直線及三角形的數量則成正比各增加一個。

2、貳、參、肆層的操作觀測，我們發現跟單層的道理一樣，內圈如增加一點，直線三角形的數量則各增加爲一個，反之則相反。

3、經過旋轉軸的操作，我們發現，外圈不管 1~4 層，永遠不會少於 3 點，因爲最外圈如少於 3 點，會和其他次外圈再連成新的外圈，而且在三點之上（包含三點）。6 層及 12 層之點除可連成一直線外，亦可旋轉出外圈至少三點以上。

（五）推論與討論：

1、我們根據 12 點的歸納圖，明顯看出內外圈點數相同，位置不同，所連出來的直線三角形的數量不變。總點數不變，增加內圈的點數，可以使直線三角形的數量跟著增加，亦即每增加內圈一點，相對的可以增加一條直線和一個三角形。但外圈的點數不得少於三點。

2、由研究問題的討論中，我們知道內圈增加點數都會使直線及三角形的數量增加，那麼在外圈的點數相同的情況下，逐漸增加內圈的點數，是否可以改變直線及三角形的數量呢？

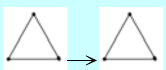
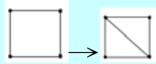
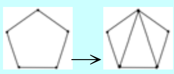
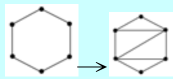
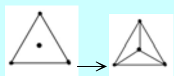
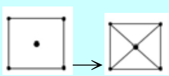
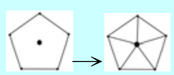
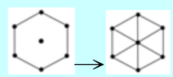
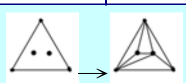
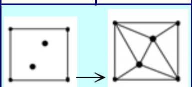
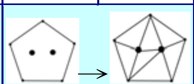
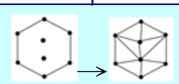
六、甕中抓鱉：增加內圈的點數，直線和三角形的數量增加多少？

（一）甕中抓鱉：在多邊形圈內（即甕內）的點數相同，但空間的位置不同，所連出來的直線及三角形的數量是否相同？

1、 方法：

分別在多邊形（如三邊形、四邊形、五邊形……）的周線內（甕內），點上相同的點數再觀測，所連出來的直線及三角形的數量增加多少？

（1） 甕內（及圈內）　　說明：3－代表三條直線，2△代表 2 個三角形。

類別	三角形		四邊形		五邊形		六邊形		公式	
連成圖									求直線數量	求三角形數量
原有數量	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形	邊形×2－3	邊形－2
	3	1	5	2	7	3	9	4		
甕內增加一點									邊形×2－3＋（3×1 點）	邊形－2＋（2×1 點）
	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形		
	6	3	8	4	10	5	12	6		
增加量	3－	2△	3－	2△	3－	2△	3－	2△		
甕內增加兩點									邊形×2－3＋（3×2 點）	邊形－2＋（2×2 點）
	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形		
	9	5	11	6	13	7	15	8		
增加量	6－	4△	6－	4△	6－	4△	6－	4△		

2、結果：

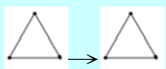
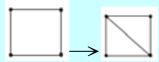
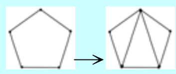
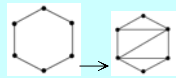
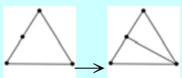
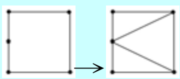
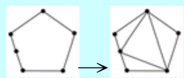
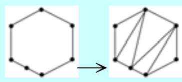
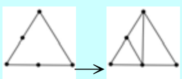
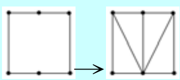
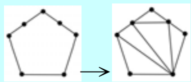
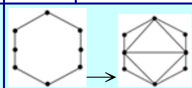
（1）在甕內不管多邊形的邊數爲何；增加一點則增加三條直線（一）及兩個三角形（△），同時我們發現有趣的公式，只要多邊形的邊數乘於 2－3＋3×1（點）就是尋找直線數量的公式，邊形－2＋2×1（點）就是尋找三角形數量的公式。

（2）同理，增加兩點增加 6 條直線（一）及 4 個三角形（△），即 3－×2＝6－，2△×2 點＝4△。直線公式爲邊形×2－3＋3×（2 點），三角形公式爲邊形－2＋2×2（點），其餘，增加的點數不管多少？套進公式即可輕易算出。

（二）甕壁抓鱉：在多邊形周線上（即甕壁）的點數相同，但空間的位置不同，所連出來的直線和三角形的數量是否一樣？與甕內抓鱉有何不同。

1、 方法：分別在多邊形（如三邊形、四邊形、五邊形……）的線上，點上相同的點數再觀測，所連出來的直線及三角形的數量增加多少？

（2）甕壁（即線上） 說明：2－代表二條直線，1△代表一個三角形。

<table>
<tr><td>類別</td><td colspan="2">三角形</td><td colspan="2">四邊形</td><td colspan="2">五邊形</td><td colspan="2">六邊形</td><td colspan="2">公式</td></tr>
<tr><td>連成圖</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td>求直線數量</td><td>求三角形數量</td></tr>
<tr><td rowspan="2">原有數量</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td rowspan="2">邊形×2－3</td><td rowspan="2">邊形－2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>7</td><td>3</td><td>9</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">甕壁增加一點</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td rowspan="4">邊形×2－3＋（2×1 點）或（邊形＋1 點）×2－3</td><td rowspan="4">邊形－2＋（1×1 點）或（邊形＋1 點）－2</td></tr>
<tr><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>7</td><td>3</td><td>9</td><td>4</td><td>11</td><td>5</td></tr>
<tr><td>增加量</td><td>2－</td><td>1△</td><td>2－</td><td>1△</td><td>2－</td><td>1△</td><td>2－</td><td>1△</td></tr>
<tr><td rowspan="3">甕壁增加兩點</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td rowspan="4">邊形×2－3＋（2×2 點）或（邊形＋2 點）×2－3</td><td rowspan="4">邊形－2＋（1×2 點）或（邊形＋2 點）－2</td></tr>
<tr><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td></tr>
<tr><td>7</td><td>3</td><td>9</td><td>4</td><td>11</td><td>5</td><td>13</td><td>6</td></tr>
<tr><td>增加量</td><td>4－</td><td>2△</td><td>4－</td><td>2△</td><td>4－</td><td>2△</td><td>4－</td><td>2△</td></tr>
</table>

2、結果：

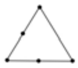
（1）在甕壁（即線上），不管多邊形的邊數形狀如何，每增加一點則加二條直線（－）及一個三角形（△），證明分別在甕內或甕壁增加點數，所連成的直線及三角形數量是不同的（每增加一點甕內比甕壁各多一條直線及一個三角形，這是不同的地方）。

（2）我們由設計圖上意外發現直線及三角形各有兩條不同的公式：

求直線公式：

公式一：邊數×2－3＋2×點數

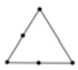
公式二：（邊數＋點數）×2－3

（＝甕壁總點數相同 3＋2＝5，外圍＝5，算法亦相同）

求三角形公式：

公式一：邊數－2＋1×點數

公式二：（邊數＋點數）－2

（＝甕壁總點數相同，算法亦相同）

（三）甕外（即線外或圈外）：

甕內和甕壁抓鱉容易，如果點到甕外就難了，因爲外面的世界太廣大了，真如老師說的：天外有天。在甕內任何位置的點數，我們可以套進公式一點也不費力。但是甕外點的位置不同，就有很大的差別，我們擴大空間去檢視，發現例外中的例外，因爲甕外每增加一點不只增加（2 直線，1△）而已，隨著圈外點的距離、位置及本身甕形的邊數變化多端而有所改變，尤其甕形（多邊形）的邊數愈增加，所增加的直線及三角形數量也愈多。於是，我們在老師的指導之下，進行**天羅地網**的計劃，希望能像如來佛把變化多端的孫悟空手到擒來。

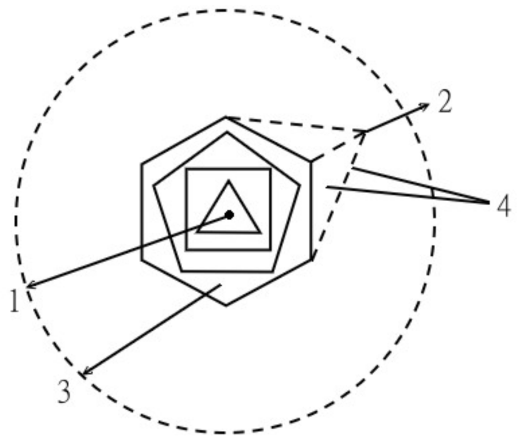
七、天羅地網：增加外圈的點數，直線和三角形的數量增加多少？

（一）方法：

分別在多邊形（如三邊形、四邊形、五邊形……）的周線外的空間，點上不同位置的點，觀測比較所連出的直線和三角形的數量有否不同？與多邊形的邊數有關嗎？

（二）設計：

1、有規則多邊形外加點之觀測圖：



說明：

1、旋轉同心軸

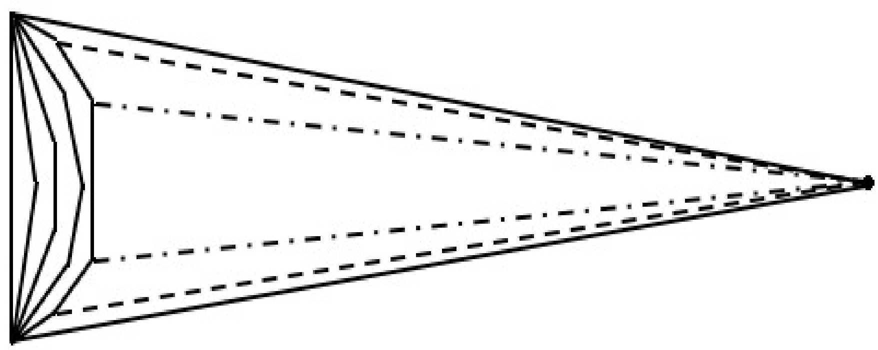
2、多邊形外所加之點

3、各式多邊形

4、欲觀測之直線及三角形數量

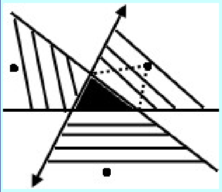
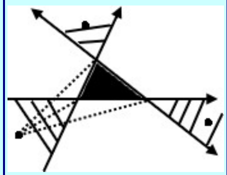
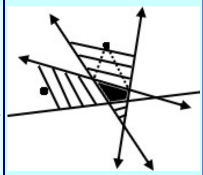
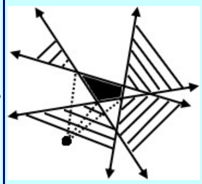
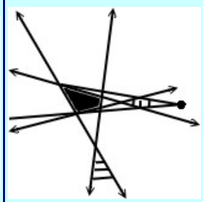
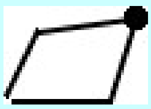
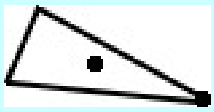
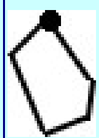
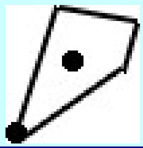
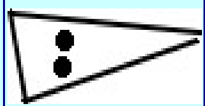
2、不規則多邊形外加點之觀測圖：

各式多邊形（從三邊形到六邊形）



欲觀測之直線及三角形數量（如上圖）　　　　　　　　（外加一點）

歸納圖：我們由設計圖的操作，把心得歸納如下圖：

<table>
<tr><td>類別</td><td colspan="4">三角形△→△</td><td colspan="6">四邊形□→⊠</td></tr>
<tr><td rowspan="2">原有數量</td><td colspan="2">直線</td><td colspan="2">三角形</td><td colspan="3">直線</td><td colspan="3">三角形</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td colspan="2">1</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">饔外斜線增加一點</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td><td>直線</td><td>三角形</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>7</td><td>3</td><td>8</td><td>4</td><td>9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>增加量</td><td>2－</td><td>1△</td><td>3－</td><td>2△</td><td>2－</td><td>1△</td><td>3－</td><td>2△</td><td>4－</td><td>3△</td></tr>
<tr><td>空間再造</td><td colspan="2">
（4－0）</td><td colspan="2">
（3－1）</td><td colspan="2">
（5－0）</td><td colspan="2">（4－1）
</td><td colspan="2">
（3－2）</td></tr>
<tr><td>推理</td><td colspan="4">（3－0）外加一點出現兩種組合：（4－0）和（3－1）</td><td colspan="6">（4－0）外加一點出現三種組合：（5－0）和（4－1）及（3－2）</td></tr>
</table>

符號說明：例一（4－1）：前面之 4 代表外圈有四點，後面之 1 代表內圈有 1 點。

例二（3－，2△）：3－代表三條直線，2△代表二個三角形。

（三）、結果：我們由上述的歸納圖，推理得知：「**空間再造**」新連成圖的外圈至少 3 點以上。

1、空間再造後，三角形出現兩種組合（4－0）、（3－1），四邊形出現三種組合（5－0）、（4－1）、（3－2），依此類推，可以得到公式：（**多邊形的邊數+點數－2**）就是該多邊形的組合數目。由於是翁氏作者發現的，我們稱之為『**翁氏定理**』。

2、三角形兩種組合，依外點方位不同，新增直線及三角形的數量，依序分別是（2－，1△）和（3－，2△），四邊形三種組合，所得到的則是（2－，1△）、（3－，2△）、（4－，3△），依此類推，五邊形應該有四種組合（5+1－2=4），組合分別有（6－0）、（5－1）、（4－2）、（3－3）。新增的直線和三角形數量分別是（2－，1△）、（3－，2△）、（4－，3△）、（5－，4△）。

3、我們在三~六邊形的**觀測儀**上，外點不同的方位，實際連線，證明上述的推理是正確的。

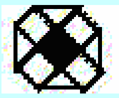
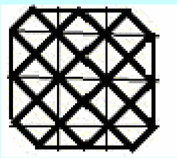
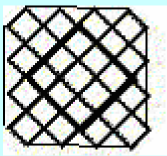
八、鼎方格公式與甕中抓鱉內圈點數的相關與應用？

（一）緣起：

經由上述「一分為二」的策略，我們終於成功完成了「鼎方格」與亂點鴛鴦譜－「甕中抓鱉」與「天羅地網」公式的追求。「鼎方格」公式的創作是利用點、線、面三角關係中的「面」求方格的總數。而「甕中抓鱉」與「天羅地網」則利用「點」尋找三角形與直線的數量，兩者訴求重點不同，如何「合而為一」找出它們之間的關係加以應用，是我們積極要突破的地方。鼎方格能否以本身所蘊含的點數計算其總格數？若以亂點鴛鴦譜－甕中抓鱉的方式：分成圈內與圈外，以「點」數求「面」的數量，是否可行？

（二）方法：

以每邊 1~4 格的鼎方格為例：將圈外的點以直線連結起來，形成圈內與圈外，並分別計算圈內的點數與外圈的點數。分析及運算圖表如下：

圖樣	每邊格數（N）	外圈總點數	內圈總點數	鼎方格總格數	內圈點數的觀測 及實際運算的過程
	N=1	4	0	1	1.即知型：一看表即知答案 0 個。
	N=2	8	4	5	橫豎計算：橫的一排 2 個，只有 1 排，即 2x1＝2。直的一排有 2 個，只有 1 排，即 2×1＝2。橫＋直＝2x1＋2×1＝2x（2x1）=4 即 2xNx（N-1）=4。N=2
	N=3	12	12	13	橫豎計算：橫的一排 2 個，共有 3 排，即 2x3＝6。直的一排有 3 個，共有 2 排，即 3x2＝4。橫＋直＝3×2＋2×3＝2x（3x2）=12。即 2xNx（N-1）=12。N=3
	N=4	16	24	25	橫豎計算：橫的一排 3 個，共有 4 排，即 3x4＝12。直的一排有 4 個，共有 3 排，即 4x3＝12。橫＋直＝3×4＋4x3＝2x（4x3）=24。 即 2xNx（N-1）=24 。N=4

（三）發現：

1、我們發現鼎方格外圈總點數爲其每邊的點數乘於四個邊即 N×4＝4N。但與鼎方格總格數無關。

2、我們更發現鼎方格總格數與內圈總點數相比永遠大 1（鼎方格總格數- 內圈總點數＝1）：如（1- 0＝1）、（5 - 4＝1）、（13 - 12＝1）、（25 - 24＝1）…永遠差 1…我們相信可以找出計算的公式與原則來。

3、我們運用橫豎計算法（有點像串燒一串串的）計算內圈總點數，發現直排的比橫排的數量永遠少 1，但直排每排的點數比橫排的數量則多 1。但不管橫排或直排的總點數則相同。如以鼎方格每邊 N=4，直排的總點數 3×4＝12，即（N-1）×N。而橫排的總點數 4×3＝12，即 N×（N-1）。換句話說：內圈總點數=直排的總點數加上橫排的總點數（N-1）×N+ N×（N-1）＝2×N×（N-1）＝2×4×（4-1）＝2×4×3＝24。

與研究問題二的研究：得到鼎方格總格數的速算公式 2×N×（N-1）+1 互相比較：真的少了一個 1。證實我們的假設：由「點」點找「面」確實可行！

（三）心得與討論：

方塊地磚嵌合排列的三種圖形：「正方格」的排列最簡單，其次爲「砌方格」，最困難的爲「鼎方格」，因此公式也較爲複雜有變化，我們用盡九牛二虎之力，陸續找到「鼎方格」快速公式與其內圈總點數可以互通及應用的公式。如此一來，鼎方格求內、外圈點數公式都齊備的情況下，要求方格地磚換算爲三角形地磚數量就不難了！就像老師告訴我們的：條條大陸通羅馬，不同的途徑也可以到達目的地。

九、結論

（一）、由研究問題一：我們發現地磚鼎方格的排列與正、砌方格的構造有所不同。正、砌方格每邊的格數和對角線的格數一樣，而鼎方格對角線的格數則爲其每邊格數的兩倍減一（２N－１），而其兩條對角線彼此交叉互相垂直，成爲一個十字型，因此，可作爲我們製作鼎方格紙之基礎，節省畫鼎方格紙的時間。

（二）、由研究問題二：我們觀測鼎方格每邊格數逐漸加，對角線格數永遠保持２N－１的比例之外，其總格數增加，也有一定的規則，我們發現有規則，就能找出公式，在鼎方格總數的觀測及實際運算過程中，我們分析並歸納爲五種類型，並且從“橫豎型”的實地觀測中，發現他是找到運算公式的重要線索，終於讓我們發現鼎方格；原來可以「一分爲二」，分析爲

兩個大小不同的正方格，而且較小的正方格每邊一定比大的正方格少一，即（N－１）。因此，大伙兒，一同把N^2＋（N-1）^{2}命名爲「連體嬰分割」公式。而且爲了便於心算，我們發現了２×N×（N－１）＋１的快速分割公式。

（三）、由研究問題三：鼎方格外切一個大正方形，會增加略似郵票的花邊方格（＝對角線格數２N－１），經過多方的推理與求證，剛好可以「一分爲二」分成兩個相同的正方形，公式爲 $2N^2$，經過大家的同意，我們把他命名爲“雙胞胎”公式，取他一分爲二的意思。

（四）、由研究問題四－1：發現正方格可以外切，也可以內切，從正方格裡面核心開始往外看，則形成一連串的層層外切，好似一朵漂亮的玫瑰花，我們發現他外切一層可以一個變兩個，外切兩層兩個變四個（$2^N＝2^2＝4$）…隨著層數一直無限擴大，我們決定把他命名爲「玫瑰花開」公式，這樣比較好記。

（五）、由研究問題四－2：我們詳細的觀測鼎方格層層等距外圍，從整體來看，密密麻麻，像一張網，但很有規則，我們大家稱之爲「蜘蛛結網」公式，公式是 $2N^2$的應用。

（六）、由研究問題四－3：我們發現解鼎方格層層外切正方形大小面積差距的公式：即大的$2N^2$－小的 $2n^2$＝2×（N^2－ n^2）。利用指導老師教我們平方差公式a^2－b^2＝（a＋b）×（a－b），一同驗證鼎方格等距層層外切正方形面積的差距，不管有否連續或斷層都可以套進２×<u>層數和</u>（a＋b）<u>×層數差</u>（a－b）的公式，很快算出層與層之間格數的差距。然兩者若無外切正方形，單就其總格數差距公式爲：２（A－B）×（A＋B－1）。

（七）、由研究問題五：亂點鴛鴦譜任意三角形的研究：我們證明了排列的方式只要最外圍的點數不小於３點時，不管是有規則的層層排列，或則亂數排列，都可以「一分爲二」歸納爲內外圈兩個部份，從觀測得知：在內外兩圈加起來的總點數相同時，凡內圈增加一點（即外圈減少一點），則各增加一條直線及一個三角形，反之則相反。

（八）、由研究問題六：甕中和甕壁抓鱉（即圈內和線上的點），所連成的直線和三角形數量有所不同。我們發現：

甕中抓鱉
- 甕內（圈內）：每增加一點多二個三角形，三條直線。
- 甕壁（線上）：每增加一點多一個三角形，二條直線。

並且意外得到兩條公式：

甲、　求直線數量公式：邊數×２－３＋３×圈內點數

乙、　求三角形數量公式：邊數－２＋２×圈內點數

（九）、由研究問題七：天羅地網的研究；我們設計了很實用的觀測儀，幫忙我們尋找在外在

空間的點（圈外之點），意即要得到多少個直線和三角形，就必須把點放在外在空間的相對位置（空間再造）。同時我們也由此推理得知：多邊形有多少個組合，可以產生那些數量的直線和三角形？例如在六邊形之外圈：（6－0）加一點，可產生下列五項組合：『翁氏定理』:多邊形的邊數+點數－2，即（6＋1－2＝5）

原有圖形	（外－內）點	直線數量	三角形數量	增加數量	
原有圖形（六邊形）	（6－0）	6x2－3＋3x0 ＝9－	6－2＋2x0 ＝4△	直線	三角形
空間再造最多產生五種圖形	（7－0）	11－	5△	2－	1△
	（6－1）	12－	6△	3－	2△
	（5－2）	13－	7△	4－	3△
	（4－3）	14－	8△	5－	4△
	（3－4）	15－	9△	6－	5△

換句話說：在六邊形之圈外點上某一點，最大可增加（５△，６－）最少可增加（１△，２－），至於空間位置的那一點，可由觀測儀得知。簡而言之：不管在空間內外增加了那幾點？以「空間再造」的觀點及「一分爲二」的策略，重新計數「圈內」和「圈外」的點數，代入上述求直線數量公式：邊數×２－３＋３×圈內點數，求三角形數量公式：邊數－２＋２×圈內點數即可輕易得到答案。

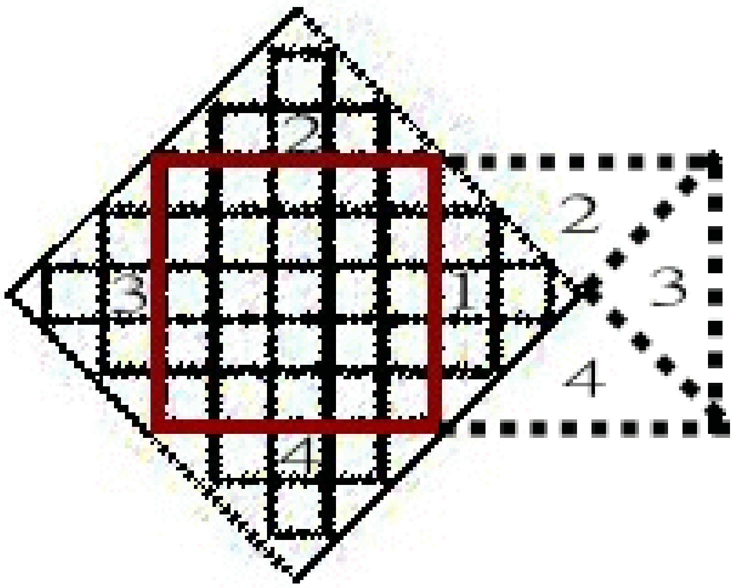
（十）、由研究問題七：證實我們的假設：由「點」找「面」確實可行！我們運用橫豎計算法計算內圈總點數=直排的總點數加上橫排的總點數（N-1）xN+ Nx（N-1）＝2xNx（N-1）。與研究問題二得到鼎方格總格數的速算公式 2xNx（N-1）+1 互相比較：真的少了一個 1。意即鼎方格的公式減 1 即等於鼎方格內圈的總點數＝2xNx（N-1），而鼎方格內圈的總點數加 1 即等於該鼎方格的總格數 2xNx（N-1）+1，彼此可以交流、互換與應用。而該鼎方格外圈總點數＝4xN，將內外圈的點數分別套進求直線及三角形的公式如下：

（一）、求鼎方格直線數量公式：邊數（外圈總點數）×２－３＋３×（內圈的總點數）＝ 4Nx2－３＋３x2xNx（N-1）＝8N－３＋6Nx（N-1）＝8N－３＋$6N^2$－6N＝$6N^2$＋2N－３

＝$6N^2$＋（2N－３）

（二）、求鼎方格三角形數量公式：邊數（外圈總點數）－２＋2x（內圈的總點數）＝4N－2＋2x2xNx（N-1）＝4N－2＋4N＝4N－2＋$4N^2$－4N＝$4N^2$－2，與研究問題三：鼎方格外切一個正方形，其正方格總數爲（雙胞胎＝$2N^2$），若將方格切半換成三角形，其數量則爲 $2N^2$x2＝$4N^2$（一正方格可連線成 2 個三角形），再減掉外切正方形四個頂

角（1/4 正方格×4＝1 正方格＝2 個三角形），一樣可以得到$4N^2-2$的公式，彼此相互驗證，換算成功！



（三）、從求鼎方格的連體嬰分割公式$N^2+(N-1)^2$→快速分割公式$2\times N\times(N-1)+1$→雙胞胎公式$2N^2$→玫瑰花開公式2^N→蜘蛛結網：層層等距外切正方形面積彼此差距的公式$2(A-B)\times(A+B)$→鼎方格差距公式$2(A-B)\times(A+B-1)$→亂點鴛鴦譜任意三角形一分為二策略的研究→甕中捉鱉公式→天羅地網（翁氏定理）多邊形的邊數+點數－2→求鼎方格外圈點數公式$4N$→內圈點數公式$2\times N\times(N-1)$→求鼎方格三角形數量公式$4N^2-2$→鼎方格直線數量公式$6N^2+(2N-3)$的完成，我們一直小心翼翼，連洗澡、晚上做夢都在用心尋找，皇天不負苦心人，創新的公式一一驗證無誤！作者群的含淚耕耘，終於有了收穫！老師勉勵我們再接再厲、保持專注與興趣、開創更快速的公式與定理。

伍、參考資料：

一、本校早自習晨光科學研習營自編資料。

二、本校自然科學教師與科展學生互相腦力激盪之作品。

三、南一書局國中新超群數學第三冊１３～１４頁：

【評　語】　080418　方塊地板嵌合形式及任意三角形數量計數相關公式之追求與創新

由學校週邊環境引發問題是一個很好的動機。將一個計算鼎方格個數之問題，他成 n 個簡單的小問題，頗具創意。接著，作者又能整理歸納出簡單的公式，值得嘉許。最後作者又作了一些推廣。此一作品頗具創新性。