中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

080415

迷途知返？-圓內彈性碰撞回歸問題

學校名稱：屏東縣恆春鎮僑勇國民小學

作者：	指導老師：
小五 陳冠斌	顏英全
小五 張肇耘	張簡碩彥
小五 陳子涵	
小五 尤冠傑	

關鍵詞：最小公倍數　彈性碰撞　入射角

迷途知返？－圓內彈性碰撞回歸問題

摘　要

本研究探討的是圓內彈性碰撞回歸問題，我們規定軌跡只能跑直線，而且限制碰撞是彈性碰撞，這裡所謂的彈性碰撞，指的是入射角等於反射角，在這兩個條件下，我們將針對不同的入射角，探討有沒有可能於出發後，再度回到原來出發點。

本研究的內容涵蓋入射角是整數、有限小數、分數、有規律的無限小數以及沒有規律的無限小數。而且經過我們的研究，得到了一些簡易法則，判斷是否能夠再度回到原來出發點，以及在能回到原出發點的情形下的最少碰撞次數。

換句話說，只要給我們一個入射角，我們就可告訴你，在圓內彈性碰撞後，能不能再度回到原來的出發點，如果可以再度回到原來的出發點的話，我們可以進一步告訴你，出發後到下一次回到原來的出發點之間，總共碰撞了幾次。

迷途知返？－圓內彈性碰撞回歸問題

壹、研究動機

某次上數學課的時後，老師在一個圓內以入射角等於反射角的方式，畫出了漂亮的五芒星，這時候有同學發問了，”老師，是不是每個角度畫到最後都能夠返回原來的出發點？”

這個問題馬上開啓了班上的好奇心，大家紛紛以各種角度進行圓內彈性碰撞，看看是否能夠將出發點出現的直線不斷反射碰撞後，又回歸於原點。而在某些角度作圖後，發現有些角度的確可以回歸到原點後，我們都認爲這是個值得深入思考的題目，遂提出將這個題目當作科展主題擴大研究，探討整數角度、小數角度，甚至思考最終是否能導出一條公式，只要代入角度，就能知道最終是否回到原點！

貳、研究目的

一、試著找出幾個入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點的情形。

二、試著從以上的例子，找到能夠再度回到原來出發點的原因。

三、探討這些原因，並進一步判斷哪些「整數」角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點。

四、將以上的結果加以推廣，看看除了整數以外，還有哪些角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點。

五、試著從以上的結果，探究哪些角度的入射角，在圓內彈性碰撞，是「無法」在有限次數碰撞後，再度回到原來出發點。

參、實驗研究設備及器材

紙、筆、圓規、直尺、量角器、電腦、幾何繪圖軟體(GSP)

肆、研究歷程與方法

活動一：試著找出幾個入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點的情形。

方　法：

1.試著從幾個我們常見的角度，30 度、45 度、60 度著手，實際作圖畫畫看，並且判斷能不能再度回到原來出發點。

2.嘗試其他入射角，18 度、36 度等，實際作圖畫畫看，並且判斷能不能再度回到原來出發點。

3.盡可能選擇很多整數角度入射角，實際作圖畫畫看，並且判斷能不能再度回到原來出發點，以便我們做研究。

活動二：試著從以上的例子，找到能夠再度回到原來出發點的原因。

方　法：

1.盡可能大膽猜測能夠再度回到原來出發點的原因，並且一一求證這些原因是否是主因。

活動三：探討這些原因，並進一步判斷哪些「整數」角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點。

方　法：

1.探討在能夠再度回到原來出發點的情形下，在圓內所行走過的軌跡是否有交叉與能不能再度回到原來出發點，是否有關係？

2.探討在能夠再度回到原來出發點的情形下，在圓內所行走過的軌跡長短與能不能再度回到原來出發點，是否有關係？

3.探討在能夠再度回到原來出發點的情形下，最少碰撞次數與圓心角有何關係？

4.探討在能夠再度回到原來出發點的情形下，不同的入射角與最少碰撞次數有何關係？

5.探討在能夠再度回到原來出發點的情形下，必定有最少碰撞次數嗎？反過來說，有最少碰撞次數，能代表會再度回到原來出發點嗎？

6.藉由以上觀察心得，探究能不能找到一種方式，只要從運算就能夠知道一定可以再度回到原來出發點，而不需要實際作圖。

7.探究以上運算方法，判斷有哪些「整數」角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，是能夠再度回到原來出發點。

活動四：將以上的結果加以推廣，看看除了整數以外，還有有限小數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點。

方　法：

1.將公式推廣到有限小數，是否有可能？

2.如果有可能將公式推廣到有限小數，公式將會有如何的變化？

活動五：將以上的結果加以推廣，看看除了整數或有限小數以外，還有分數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點。

方　法：

1.將公式推廣到分數，是否有可能？

2.如果有可能將公式推廣到分數，公式將會有如何的變化？

活動六：將以上的結果加以推廣，看看除了整數或有限小數以外，還有分數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，能夠再度回到原來出發點。

方　法：

1.將公式推廣到無限小數，是否有可能？

2.如果有可能將公式推廣到無限小數，公式將會有如何的變化？如果不能將公式推廣到無限小數，探討為什麼不能？

活動七：試著從以上的結果，探究哪些角度的入射角，在圓內彈性碰撞，是「可以」在有限次數碰撞後，再度回到原來出發點，探究哪些角度的入射角，在圓內彈性碰撞，是「無法」在有限次數碰撞後，再度回到原來出發點，並下一個結論。

方　法：

1.試著整理之前所有的結論，並下一個總結。

活動八：將以上的結論加以進一步整理，將公式進一步加以簡化。

方　法：

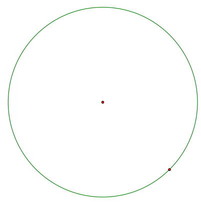
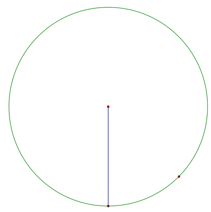
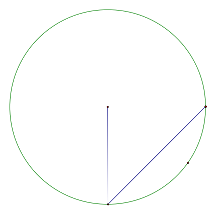
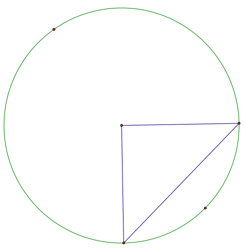
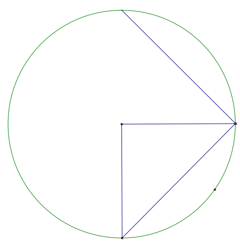
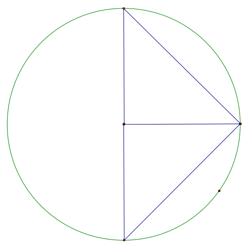
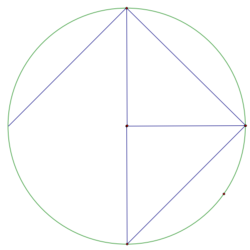
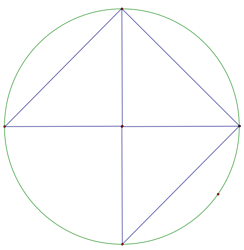
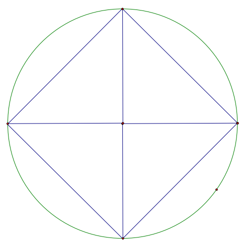
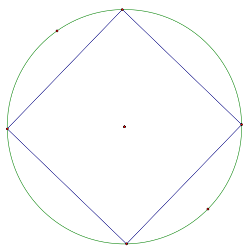
1.試著從公式的使用過程以及公式的內容，簡化公式，使得公式在使用上能更為簡便。

伍、研究結果

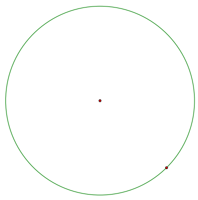
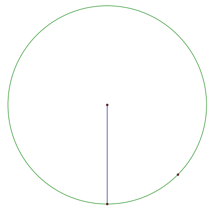
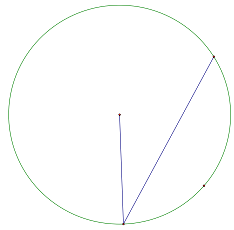
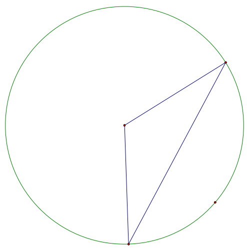
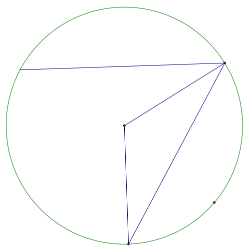
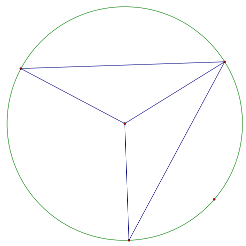
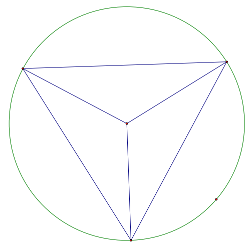
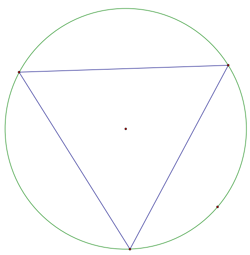
【活動一實驗結果】

（一）我們規定軌跡只能跑直線，而且限制碰撞是彈性碰撞，所謂的彈性碰撞，指的是入射角等於反射角。在這兩個條件下，我們將針對不同的入射角，探討有沒有可能於出發後，再度回到原來出發點。

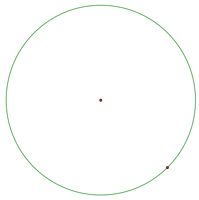
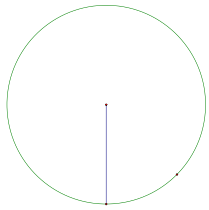
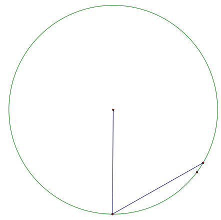
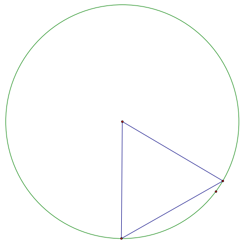
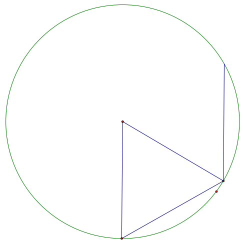
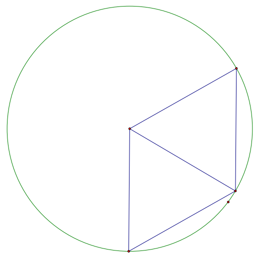
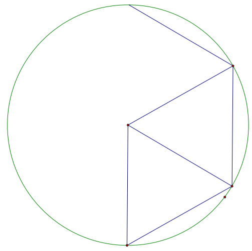
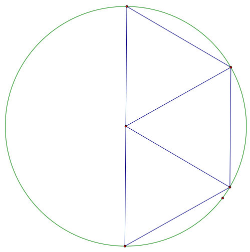
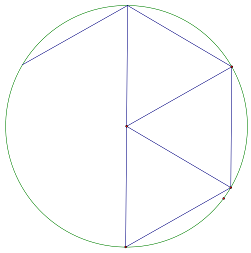
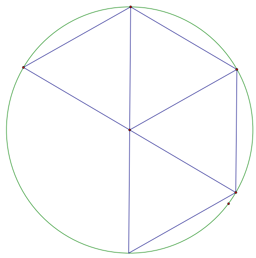
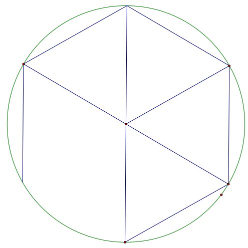
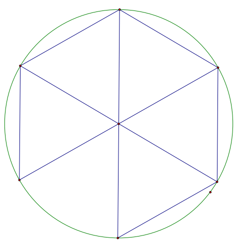
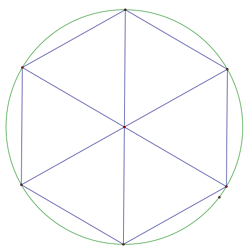
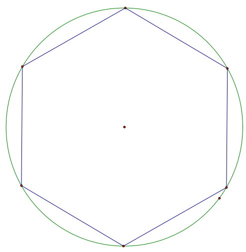
1. 我們利用圓規畫一個圓，並且從圓周上的一點出發，選擇我們常見的 45 度當成入射角，進行圓內的彈性碰撞。實際作圖畫畫看，並且判斷能不能再度回到原來出發點。記錄並作圖如下：

步驟說明	1.用圓規畫圓	2.選擇出發點	3.連接圓心和出發點	4.選擇入射角 45 度
圖示				
步驟說明	5.連接圓心和碰撞點	6.選擇反射角 45 度	7.連接圓心和碰撞點	8.選擇反射角 45 度
圖示				
步驟說明	9.連接圓心和碰撞點	10.選擇反射角 45 度	11.將輔助線擦掉	經過以上步驟，我們發現出發後的第四次碰撞，再度回到原來出發點。而且軌跡是一個正方形。
圖示				

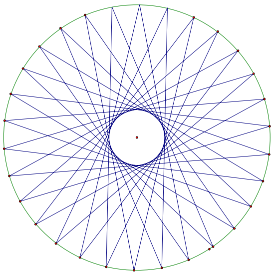
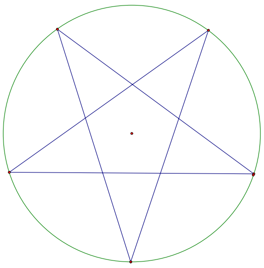
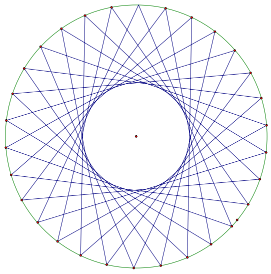
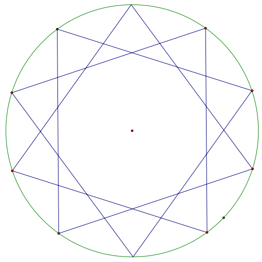
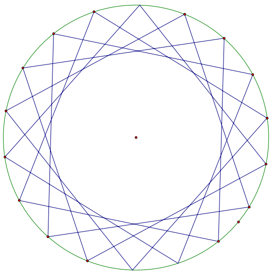
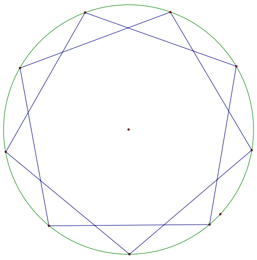
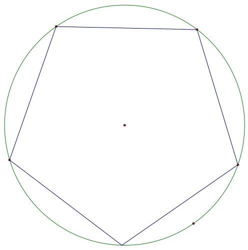
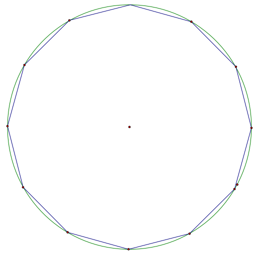
2. 接下來，我們選擇另外一個常見的 30 度當成入射角，進行圓內的彈性碰撞。實際作圖畫畫看，並且判斷能不能再度回到原來出發點。記錄並作圖如下：

步驟說明	1.用圓規畫圓	2.選擇出發點	3.連接圓心和出發點	4.選擇入射角 30 度
圖示				
步驟說明	5.連接圓心和碰撞點	6.選擇反射角 30 度	7.連接圓心和碰撞點	8.選擇反射角 30 度
圖示				
步驟說明	9. 將輔助線擦掉	經過以上步驟，我們發現出發後的第三次碰撞，再度回到原來出發點。而且軌跡是一個正三角形。		
圖示				

3. 接下來，我們選擇另外一個常見的 60 度當成入射角，進行圓內的彈性碰撞。實際作圖畫畫看，並且判斷能不能再度回到原來出發點。記錄並作圖如下：

步驟說明	1.用圓規畫圓	2.選擇出發點	3.連接圓心和出發點	4.選擇入射角 60 度
圖示				
步驟說明	5.連接圓心和碰撞點	6.選擇反射角 60 度	7.連接圓心和碰撞點	8.選擇反射角 60 度
圖示				
步驟說明	9.連接圓心和碰撞點	10.選擇反射角 60 度	11.連接圓心和碰撞點	12.選擇反射角 60 度
圖示				
步驟說明	13.連接圓心和碰撞點	10.選擇反射角 60 度	11.將輔助線擦掉	經過以上步驟，我們發現出發後的第六次碰撞，再度回到原來出發點。而且軌跡是一個正六邊形。
圖示				

（二）嘗試其他入射角，進行圓內的彈性碰撞。實際作圖畫畫看，並且判斷能不能再度回到原來出發點。記錄並作圖如下：

入射角	12 度	18 度	24 度	36 度
圖示				
入射角	40 度	50 度	54 度	75 度
圖示				

（三）角度本來有無限多種，雖然我們選擇的角度是整數，但是仍有無限多個。話說雖然如此，但是在實際操作時，我們發現角度不可能是 90 度以上，不然軌跡就會在圓外，這樣是無法作圖的，因此最多只有 89 度，最少是 0 度，然而，在 0 度以上與 89 度以下只有 90 個整數，所以只有 90 個入射角可以選擇。

在作圖的過途中，我們發現 30 度、45 度、60 度這些入射角所畫出的軌跡很容易可以判斷有沒有再度回到原來出發點。但是於 18 度、36 度，甚至 40 度，這些入射角所畫出的軌跡往往會因爲角度的誤差導致誤判，本來是可以回到原來出發點的，卻因爲角度的誤差導致以爲還沒有回到原來出發點。或者本來是還沒有回到原來出發點的，卻因爲角度的誤差導致以爲已經可以回到原來出發點。因此，我們請教老師如何更精確作圖。

老師希望我們能用電腦軟體解決這問題，因爲角度是測量出來的，並不像蘋果的數目，每個人所說出來的大小都會是相同的，因此我們需要比量角器更精密的儀器，然而老師推薦我們使用幾何繪圖軟體。使用之後我們發現除了更精確的作圖之外，也更便利，使得實驗能夠順利進行。

但是好景不常，雖然使用幾何繪圖軟體作圖排除了誤差的可能性，但是在嘗試一些軌跡比較密集的入射角（例如：12 度）作圖，就發現我們要選取反射軌跡和反射點有些困難，因爲軌跡太密集，而

且有時不知道能不能再次回到原來的出發點，我們只能一直作圖，期待再次回到原來出發點，發現這樣好像不是一個好的方法。因此，我們請教老師，除了作圖以外有沒有比較好的方式，因而老師建議我們，從觀察以上很多個能夠再度回到原來出發點的軌跡，並且從中尋找規律性。

【活動二實驗結果】

（一）我們觀察以上很多個能夠再度回到原來出發點的軌跡，發現有些軌跡的線與線有交叉的現象，有些則沒有，而成爲一個正多邊形，因此我們猜測結果與軌跡可能有關，但是真相如何我們需要進一步求證。

（二）我們一開始作圖時，一再利用入射角的角度，所以我們猜測結果與角度可能有關，但是這也是需要進一步求證的。

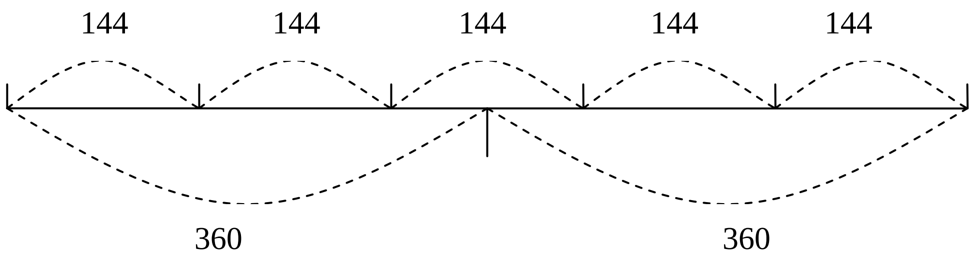
【活動三實驗結果】

（一）從以上很多個能夠再度回到原來出發點的軌跡中，我們發現「**軌跡是否有交叉的現象，是不能拿來判斷能不能再度回到原來出發點。**」因爲以上很多個能夠再度回到原來出發點的軌跡中，就同時包含兩種情形，因此，軌跡是否有交叉的現象不是一個判斷的方法。

（二）

1. 從以上很多個能夠再度回到原來出發點的軌跡中，我們發現「**軌跡的長短與是否能夠再度回到原來出發點，沒什麼關聯性。**」
2. 此外，我們只能說**能夠再度回到原來出發點的情形，所走的軌跡長度是有限的，另外一方面，凡是無法再度回到原來出發點的情形，所走的軌跡長度是無限的**。
3. 雖然這是一個判斷能否再次回到原來出發點的方法，但不是一個好方法，因爲作圖需要時間，而且生命是有限的，不可能爲了一個無法再次回到原來出發點的作圖，而耗盡我們的生命。

（三）我們發現，在能夠再次回到原來出發點的的情形下，**<u>與 360 度和圓心角的最小公倍數有關</u>**。以下圖為例，我們將角度標示在一條直線上，繞一圈所經過的角度是 360 度，而且以入射角為 18 度為例，這時候的圓心角就是 144 度（180 度－18 度－18 度＝144 度）。



1. 凡是每碰撞一次，代表著已經經過一個 144 度，碰撞了兩次，代表著已經經過兩個 144 度，碰撞了三次，代表著已經經過三個 144 度，以此類推，因此我們發現能夠再度碰撞到圓周，所經過的角度是 144 度的倍數，然而出發點就是在圓周上，所以能夠再度回到原來出發點的情形，**<u>所經過的角度一定也是 144 度的倍數</u>**。
2. 另外一方面，想再度回到原來出發點一定是經過了完整的一圈或者好幾圈，而且每繞一圈，代表著已經經過一個 360 度，繞兩圈，代表著已經經過兩個 360 度，繞三圈，代表著已經經過三個 360 度，以此類推，因此我們發現能夠再度回到原來出發點的情形，**<u>所經過的角度一定也是 360 度的倍數</u>**。
3. 從以上兩個發現的結果，我們進一步發現能夠再度回到原來出發點所經過的角度，是 144 度的倍數，也是 360 度的倍數，因此，能夠再度回到原來出發點**<u>所經過的角度是 144 度和 360 度的公倍數</u>**。
4. 如果要找出發後到**<u>第一次</u>**回到原來出發點之間所經過的角度，就要找**<u>圓心角和 360 度的最小公倍數</u>**。
5. 在上圖中，我們在線的上方每 144 度畫一個記號，在線的下方每 360 度畫一個記號，當經過 720 度（720 度是 144 度和 360 度的最小公倍數）在線上和線下兩個記號會重疊在一起，這時候我們也發現共經過 2 圈（720 度÷360 度＝2 圈）再度回到原來出發點，而且在這 2 圈中，總共碰撞了 5 次（720 度÷144 度＝5 次）。

6. 在行進中，我們發現每經過一個圓心角就會碰撞一次，因此我們得到一個結論：

$$\frac{\text{圓心角和360度的最小公倍數}}{\text{圓心角}} = \text{最少碰撞次數}$$

（四）以上的結論，固然正確，但是我們一開始所選擇的是入射角，而不是圓心角，但是我們發現圓心角是由 180 度（三角形的內角和）減掉一個入射角，再減掉一個反射角得到的，此外，入射角等於反射角，所以我們得到一個小結論：

<u>圓心角＝180 度－入射角×2</u>

接下來，再將這一個小結論套用到上一個結論，因此可以把上一個結論變成以下的形式：

$$\frac{[(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\text{，}360\text{度}]}{180\text{度}-\text{入射角}\times 2} = \text{最少碰撞次數}$$

（五）我們我在作圖的過程發現，如果能夠再回到原來出發點的情形下，必定有最少碰撞次數，不然就會無窮無盡碰撞下去，因此，是不是能夠再度回到原來出發點與有沒有最少碰撞次數有密切關係，更詳細得說，**<u>如果能夠再度回到原來出發點，代表著有最少碰撞次數，如果有最少碰撞次數，代表著能夠再度回到原來出發點</u>**。

（六）合併（四）和（五）的結論，我們可以得到進一步的結論：如果我們所選擇的入射角，帶入之前的結論

$$\frac{[(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\text{，}360\text{度}]}{180\text{度}-\text{入射角}\times 2} = \text{最少碰撞次數}$$

可以得到最少碰撞次數的話，我們就可以斷定於出發後，經過彈性碰撞後，必定能夠再次回到原來出發點。

因此，我們可以從這個公式的運算，就能知道是否能夠再次回到原來出發點，而不需實際作圖。甚至可以知道，在出發後到第一次回到原來出發點之間，總共碰撞幾次。

（七）我們一開始所要研究的範圍是所有整數角度的入射角，但是在之前作圖中，發現可能的範圍縮小到只有 0 度以上與 89 度以下的 90 個整數角度。接下來，我們將這 90 個入射角代入以上公式，

發現都有最少碰撞次數。所以我們得到一個結論：

所有 0 度以上與 89 度以下的整數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點。

【活動四實驗結果】

（一）將公式推廣到小數時，立刻遭遇到一個問題，就是「**一個小數如何和 360 算最小公倍數**」，因爲如果入射角是一個小數，那麼（180 度－入射角x2）也會是一個小數。

經由查閱倍數的相關書籍以及上網搜集倍數的資料，以及請教老師之後，我們知道如何找小數與整數的最小公倍數。

例如：找 **0.8** 和 **2** 的最小公倍數

【方法一】

分別將 0.8 和 2 的倍數列出，接下來找最小的共同數字。

0.8、1.6、2.4、3.2、4、4.8、5.6、6.4、7.2、8、8.8

2 、 4、 6 、 8、 10

找到 4 和 8 都是 0.8 和 2 的公倍數，而且 4 是最小的，因此 4 是 0.8 和 2 的最小公倍數。

【方法二】

分別將 0.8 和 2 乘以 10，使得 0.8 和 2 都變成整數，再找最小公倍數。

$0.8\times10=8$ 和 $2\times10=20$

$$\begin{array}{r|rr} 4 & 8 & 20 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

$4\times2\times5=40$

接下來，我們把這個數除以 10，得到 4 是 0.8 和 2 的最小公倍數。

例如：找 **0.56** 和 **2** 的最小公倍數

分別將 0.56 和 2 乘以 100，使得 0.56 和 2 都變成整數，再找最小公倍數。

$0.56\times100=56$ 和 $2\times100=200$

$$\begin{array}{r|rr} 8 & 56 & 200 \\ \hline & 7 & 25 \end{array}$$

$8\times7\times25=1400$

接下來，我們把這個數除以 100，得到 14 是 0.56 和 2 的最小公倍數。

（二）我們發現將小數變成整數的過程是關鍵，而且我們利用以上方法，把之前的公式變成以下的樣子：

如果入射角的小數點之後有 n 位，那麼公式會變成以下的樣子：

$$\frac{[(180度－入射角\times 2)\times 10^n，360度\times 10^n]}{(180度－入射角\times 2)\times 10^n} = 最少碰撞次數$$

<u>公式的由來</u>：（運用以上的方法）

分別將（180 度－入射角×2）和 360 乘以 10^n，使得（**180 度－入射角×2**）和 360 都變成整數，再找最小公倍數：

［（180 度－入射角×2）×10^n，360 度×10^n ］。

接下來，我們把這個數除以 10^n，就可以得到（**180 度－入射角×2**）和 360 的最小公倍數：

［（180 度－入射角×2）×10^n，360 度×10^n]÷10^n。

因此，

$$最少碰撞次數 = \frac{圓心角和360度的最小公倍數}{圓心角}$$

$$= \frac{[(180度－入射角\times 2)\times 10^n，360度\times 10^n]\div 10^n}{(180度－入射角\times 2)}$$

$$= \frac{[(180度－入射角\times 2)\times 10^n，360度\times 10^n]}{(180度－入射角\times 2)\times 10^n}$$

從以上結論，我們發現所有有限小數角度的入射角代入以上公式，發現都有最少碰撞次數。因此，我們得到一個結論：

<u>所有大於等於 0 度且小於 90 度的整數或有限小數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點。</u>

【活動五實驗結果】

（一）將公式推廣到分數時，立刻遭遇到一個問題，就是「**<u>一個分數如何和 360 算最小公倍數</u>**」，因爲如果入射角是一個分數，那麼（180 度－入射角×2）也會是一個分數或整數。

經由查閱倍數的相關書籍以及上網搜集倍數的資料，以及請教老師之後，我們知道如何找分數與整數的最小公倍數。

例如：找 $\frac{3}{5}$（最簡分數）和 2 的最小公倍數

【方法一】

分別將 $\frac{3}{5}$ 和 2 的倍數列出，接下來找最小的共同數字。

$\frac{3}{5}$、$1\frac{1}{5}$、$1\frac{4}{5}$、$2\frac{2}{5}$、3、$3\frac{3}{5}$、$4\frac{1}{5}$、$4\frac{4}{5}$、$5\frac{2}{5}$、6、$7\frac{1}{5}$、$7\frac{4}{5}$

2、4、6

找到 6 是 $\frac{3}{5}$ 和 2 的公倍數，而且 6 是最小的，因此 6 是 $\frac{3}{5}$ 和 2 的最小公倍數。

【方法二】

分別將 $\frac{3}{5}$ 和 2 乘以 5（$\frac{3}{5}$ 的分母），使得 $\frac{3}{5}$ 和 2 都變成整數，再找最小公倍數。

$$\frac{3}{5}\times 5=3 \quad 和 \quad 2\times 5=10$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 10 \\ \hline & 3 & 10 \end{array}$$

$$1\times 3\times 10=30$$

接下來，我們把這個數除以 5，得到 6 是 $\frac{3}{5}$ 和 2 的最小公倍數。

例如：找 $\frac{4}{10}$（非最簡分數）和 2 的最小公倍數

【方法一】

分別將 $\frac{4}{10}$ 和 2 的倍數列出，接下來找最小的共同數字。

$\frac{4}{10}$、$\frac{8}{10}$、$1\frac{2}{10}$、$1\frac{6}{10}$、2、$2\frac{4}{10}$、$2\frac{8}{10}$、$3\frac{2}{10}$、$3\frac{6}{10}$、4、$4\frac{4}{10}$、$4\frac{8}{10}$

2、4、6

找到 2 和 4 都是 $\frac{4}{10}$ 和 2 的公倍數，而且 2 是最小的，因此 2 是 $\frac{4}{10}$ 和 2 的最小公倍數。

【方法二】

分別將 $\frac{4}{10}$ 和 2 乘以 10（$\frac{4}{10}$ 的分母），使得 $\frac{4}{10}$ 和 2 都變成整數，再找最小公倍數。

$$\frac{4}{10}\times 10 = 4 \quad \text{和} \quad 2\times 10 = 20$$

$$\begin{array}{r|rr} 4 & 4 & 20 \\ \hline & 1 & 5 \end{array}$$

$$4\times 1\times 5 = 20$$

接下來，我們把這個數除以 10（$\frac{4}{10}$ 的分母），得到 2 是 $\frac{4}{10}$ 和 2 的最小公倍數。

（二）我們發現將分數變成整數的過程是關鍵，而且我們利用以上方法，把之前的公式變成以下的樣子：

如果入射角是分數，不論是最簡分數還是非最簡分數，而且假設分母是 a，那麼公式會變成以下的樣子：

$$\frac{[(180度-入射角\times 2)\times a，360度\times a]}{(180度-入射角\times 2)\times a} = \text{最少碰撞次數}$$

<u>**公式的由來**</u>：（運用以上的方法）

分別將（**180 度－入射角×2**）和 360 乘以 **a**，使得（**180 度－入射角×2**）和 360 都變成整數，再找最小公倍數：

［（180 度－入射角×2）× a，360 度× a ］。

接下來，我們把這個數除以 **a**，就可以得到（**180 度－入射角×2**）和 360 的最小公倍數：

［（180 度－入射角×2）× a，360 度× a ］÷ a。

因此，

$$\begin{aligned}\text{最少碰撞次數} &= \frac{\text{圓心角和360度的最小公倍數}}{\text{圓心角}} \\ &= \frac{[(180度-入射角\times 2)\times a，360度\times a]\div a}{(180度-入射角\times 2)} \\ &= \frac{[(180度-入射角\times 2)\times a，360度\times a]}{(180度-入射角\times 2)\times a}\end{aligned}$$

從以上結論，我們發現所有分數角度的入射角代入以上公式，發現都有最少碰撞次數。因此，我們得到一個結論：

所有大於等於 0 度且小於 90 度的分數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點。

【活動六實驗結果】

經由查閱有關小數的書籍以及上網搜集倍數的資料，以及請教老師之後，我們知道**小數可以分成「有限小數」和「無限小數」，而且無限小數又可以分成「有規律的」和「沒有規律的」**。

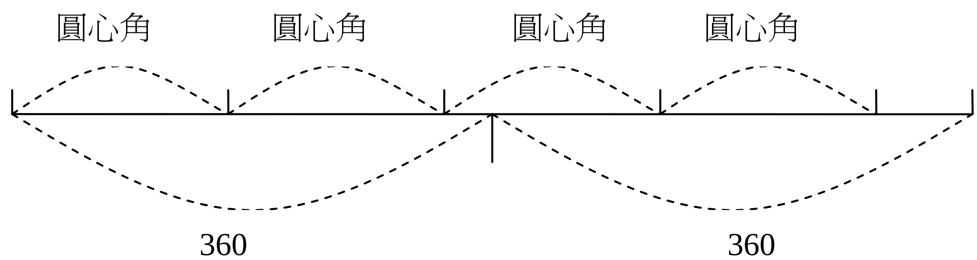
我們之前已經把有限小數角度的入射角問題解決了，因此現在還剩下有規律的無限小數和沒有規律的無限小數的問題。但是我們從資料中發現**任何的有規律無限小數都會等於某一個分數**，因此，我們就可以知道所有有規律無限小數角度的入射角，都有最少碰撞次數。因此，我們得到一個結論：

所有大於等於 0 度且小於 90 度的有規律的無限小數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點。

【活動七實驗結果】

現在還剩下沒有規律的無限小數的問題，在計算過程中，我們發現「**入射角如果是沒有規律的無限小數，那麼圓心角也會是沒有規律的無限小數**」。

我們之前發現，**在能夠再次回到原來出發點的的情形下，與 360 度和圓心角的最小公倍數有關**。以下圖為例，我們將角度標示在一條直線上，繞一圈所經過的角度是 360 度，而且以入射角是沒有規律的無限小數，這時候的圓心角也會是沒有規律的無限小數。



1. 凡是每碰撞一次，代表著已經經過一個沒有規律無限小數的角度，碰撞了兩次，代表著已經經過兩個沒有規律無限小數的角度，碰撞了三次，代表著已經經過三個沒有規律無限小數的角度，以此類推，因此我們發現能夠再度碰撞到圓周，**所經過的角度是沒有規律無限小數的角度的倍數**。
2. 另外一方面，想再度回到原來出發點一定是經過了完整的一圈或者好幾圈，而且每繞一圈，代表著已經經過一個 360 度，

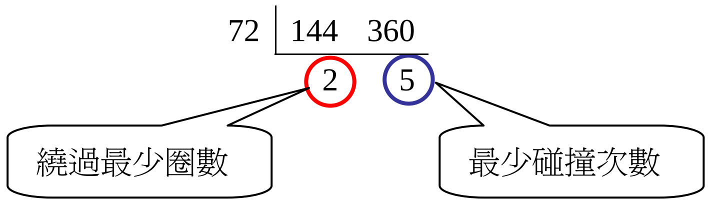
繞兩圈，代表著已經經過兩個 360 度，繞三圈，代表著已經經過三個 360 度，以此類推，因此我們發現能夠再度回到原來出發點的情形，**所經過的角度一定也是 360 度的倍數**。

3. 360 度的倍數一定是一個整數，但是**對於沒有規律無限小數的角度，不論變大幾個整數倍，都不可能變成一個整數**，所以我們發現「在這種情形下 360 度和圓心角是找不到最小公倍數」，因此沒有最少碰撞次數，所以在圓內彈性碰撞後，是無法再度回到原來的出發點。所以我們得到一個結論：

所有大於等於 0 度且小於 90 度的沒有規律無限小數角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，是無法再度回到原來的出發點。

【活動八實驗結果】

當我們將圓心角與 360 度以短除法的方式求最小公倍數時，我們發現以下的現象：以入射角為 18 度為例，這時候的圓心角就是 144 度



因此我們大膽猜測會有以下結果：

$$\frac{360\text{度}}{\text{圓心角和}360\text{度的最大公因數}} = \textbf{最少碰撞次數}$$

和

$$\frac{\text{圓心角}}{\text{圓心角和}360\text{度的最大公因數}} = \textbf{繞過最少圈數}$$

公式的由來：

接下來，我們進一步說明這猜測是正確的：

因為

$$\frac{\text{圓心角和}360\text{度的最小公倍數}}{\text{圓心角}} = \text{最少碰撞次數}$$

而且

$$\text{圓心角和}360\text{度的最小公倍數} = \frac{\text{圓心角}\times 360\text{度}}{\text{圓心角和}360\text{度的最大公因數}},$$

所以

$$\frac{360\text{度}}{\text{圓心角和}360\text{度的最大公因數}} = \text{最少碰撞次數}$$

同樣的方式也可以說明

$$\frac{\text{圓心角}}{\text{圓心角和360度的最大公因數}} \quad = \quad \text{繞過最少圈數。}$$

進一步推廣：

分別將（180 度－入射角×2）和 360 乘以 10^n或a（分數的分母），使得（**180 度－入射角×2**）和 360 都變成整數，再找最大公因數：

$$\left(\left(180\text{ 度}-\text{入射角}\times 2\right)\times 10^{n}，360\text{ 度}\times 10^{n}\right)$$

或

$$\left(\left(180\text{ 度}-\text{入射角}\times 2\right)\times a，360\text{ 度}\times a\right)。$$

接下來，我們把這個數除以 10^n或a（分數的分母），就可以得到（**180 度－入射角×2**）和 360 的最大公因數：

$$\left(\left(180\text{ 度}-\text{入射角}\times 2\right)\times 10^{n}，360\text{ 度}\times 10^{n}\right)\div 10^{n}$$

或

$$\left(\left(180\text{ 度}-\text{入射角}\times 2\right)\times a，360\text{ 度}\times a\right)\div a。$$

因此，所有大於等於 0 度且小於 90 度的入射角，在圓內彈性碰撞後，能再度回到原來的出發點之間的最少碰撞次數，分別說明如下：

（一）整數

$$\frac{360\text{度}}{\left(\left(180\text{度}-\text{入射角}\times 2\right)，360\text{度}\right)} \quad = \quad \text{最少碰撞次數}$$

（二）有限小數：如果入射角的小數點之後有 n 位，那麼最少碰撞次數：

$$\frac{360\text{度}\times 10^{n}}{\left(\left(180\text{度}-\text{入射角}\times 2\right)\times 10^{n}，360\text{度}\times 10^{n}\right)} \quad = \quad \text{最少碰撞次數}$$

（三） 分數或有規律無限小數：如果入射角是分數，不論是最簡分數還是非最簡分數，而且假設分母是 a，則最少碰撞次數：

$$\frac{360\text{度}\times a}{\left(\left(180\text{度}-\text{入射角}\times 2\right)\times a，360\text{度}\times a\right)} \quad = \quad \text{最少碰撞次數}$$

陸、結論

小數可以分成有限小數和無限小數，而且無限小數又可以分成有規律的和沒有規律的。整理整理之前所有的結論，並下總結：

（一）可以與無法再度回到原來的出發點的情形

1. 所有大於等於 0 度且小於 90 度的**整數或有限小數**角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點。

2. 所有大於等於 0 度且小於 90 度的**分數（或有規律無限小數）**角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點。
3. 所有大於等於 0 度且小於 90 度的**沒有規律無限小數**角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，是「無法」再度回到原來的出發點。

（二）如果可以再度回到原來的出發點，之間最少的碰撞次數

1. 所有大於等於 0 度且小於 90 度的**整數**角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點之間的最少碰撞次數：

$$\frac{[(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\text{，}360\text{度}]}{180\text{度}-\text{入射角}\times 2} = \text{最少碰撞次數}$$

2. 所有大於等於 0 度且小於 90 度的**有限小數**角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點之間的最少碰撞次數：
   如果入射角的小數點之後有 n 位，那麼最少碰撞次數：

$$\frac{[(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\times 10^{n}\text{，}360\text{度}\times 10^{n}]}{(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\times 10^{n}} = \text{最少碰撞次數}$$

3. 所有大於等於 0 度且小於 90 度的**分數（或有規律無限小數）**角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點之間的最少碰撞次數：
   如果入射角是分數，不論是最簡分數還是非最簡分數，而且假設分母是 a，則最少碰撞次數：

$$\frac{[(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\times a\text{，}360\text{度}\times a]}{(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\times a} = \text{最少碰撞次數}$$

4. 所有大於等於 0 度且小於 90 度的角度的入射角，在圓內彈性碰撞後，都能再度回到原來的出發點之間的最少碰撞次數都可以回歸到最原始的方式算出：

$$\frac{\text{圓心角和360度的最小公倍數}}{\text{圓心角}} = \text{最少碰撞次數}$$

或

$$\frac{[(180\text{度}-\text{入射角}\times 2)\text{，}360\text{度}]}{180\text{度}-\text{入射角}\times 2} = \text{最少碰撞次數}$$

5. 最後，我們用簡單的一段話來描述以上的結果：

只要給我們一個入射角，我們就可告訴你，在圓內彈性碰撞後，能不能再度回到原來的出發點，如果可以再度回到原來的出發點的話，我們可以進一步告訴你，出發後到下一次回到原來的出發點之間，總共碰撞了幾次。

柒、心得與感想

在一開始的時候，我們都深深覺得一定有一些整數角度的入射角，於出發後是無法回到原來出發點的，所以我們一直朝向找出哪些整數角度的入射角，於出發後是無法回到原來出發點的，但是不論是尺規作圖，或者電腦輔助作圖，都無法找到我們想要的答案，這時候我們才把目標轉變成，是不是所有的整數角度的入射角，於出發後「都是」回到原來出發點的，後來發現事實的確如此，但也相當驚訝！

後來，查資料的過程中我們發現小數也能算最小公倍數，因此，我們將結果再進一步推廣到小數。我們研究到此，以爲不是小數或整數角度的入射角，就無法再度回到原來出發點，但是事實並非如此，因爲我們看到一個圖形，就是圓內接一個正七邊形，它的圓心角是 $\frac{360}{7}$ 度，因此入射角就是 $\frac{450}{7}$ 度（$\left(180-\frac{360}{7}\right)\div 2=\frac{450}{7}$），而 $\frac{450}{7}$ 度是一個分數角度，所以，我們知道之前的推論是錯誤的。但是除了整數、小數或分數以外其他都無法再度回來嗎？

接下來，查資料的過程中我們發現小數可以分成有限小數和無限小數，而無限小數更可以進一步區分成有規律的和沒有規律的，因此，我們將結果再進一步推廣到無限小數。我們研究到此，以爲所有角度除了無限小數角度的入射角，是無法再度回到原來出發點，但是事實並非如此，因爲 $\frac{450}{7}$ 度是可以再度回到原來出發點，但是 $\frac{450}{7}$ 這數字並沒辦法換成一個有限小數（$\frac{450}{7}=64.2857\overline{142857}$），所以，我們知道之前的推論是錯誤的，接下來，我們大膽假設只有不規律的無限小數角度的入射角，最後發現我們這次的假設是正確的。

在文章的最後，我們將公式做進一步的改變，如此一來，我們可以快速而且正確求得最少碰撞次數。

這結果讓我們深深體會到一個平凡無奇的題目，也會有如此的學問存在，在這過程中，我們學會了不少事情，包括用電腦繪圖、上網查資料等，以及讓我們深深覺得千萬不要用直覺直接斷定很多事情的結論，否則常常會有誤會，我們應該要仔細觀察與研究，否則漏洞百出。

捌、參考文獻

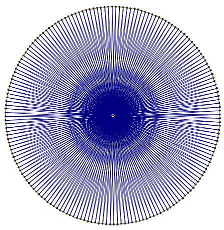
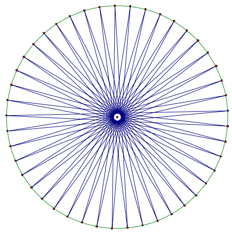
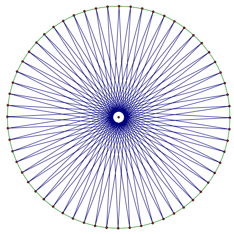
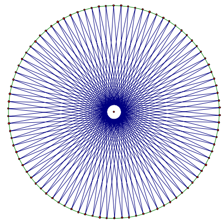
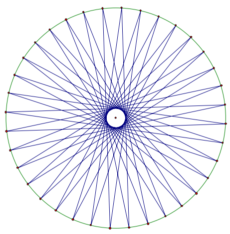
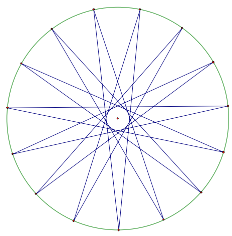
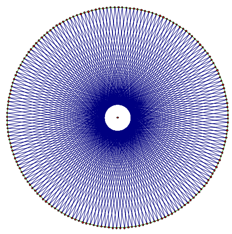
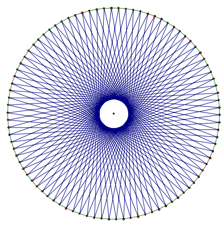
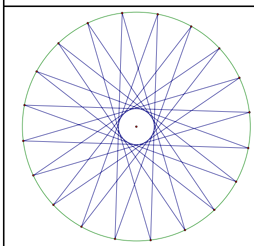
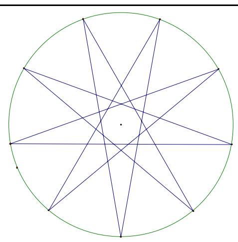
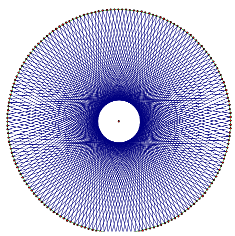
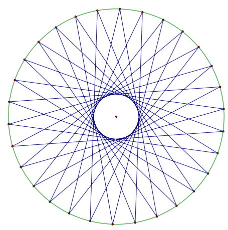
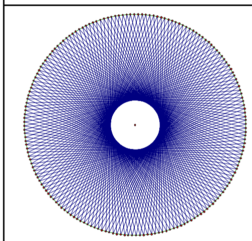
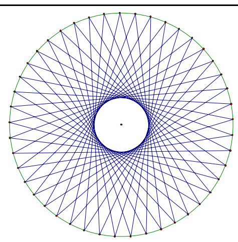
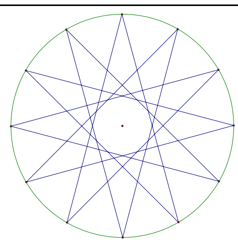
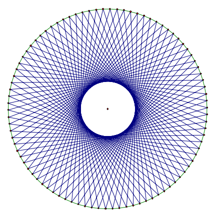
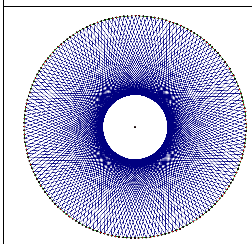
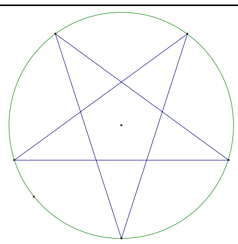
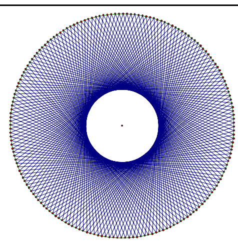
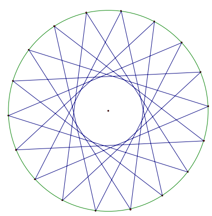
1. 王登傳、劉臻文（2003）。<u>最大公因數與最小公倍數</u>。高雄：前程出版社。

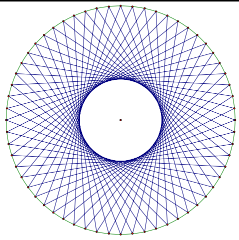
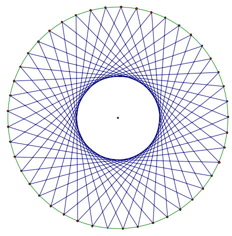
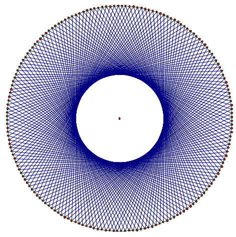
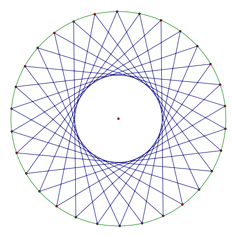
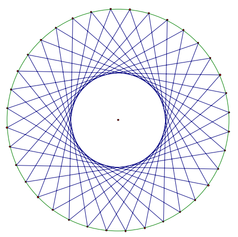
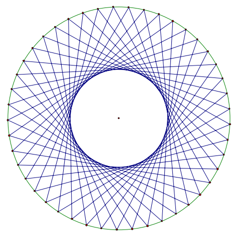
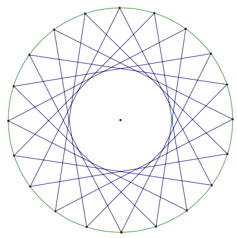
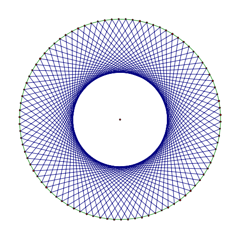
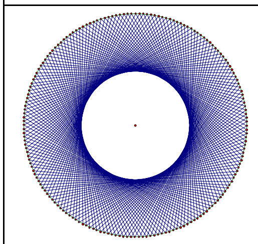
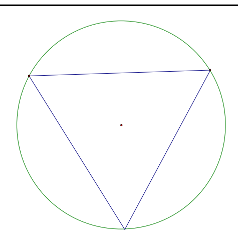
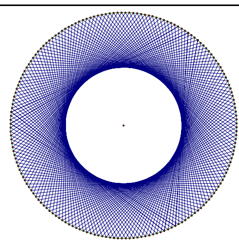
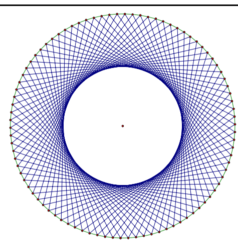
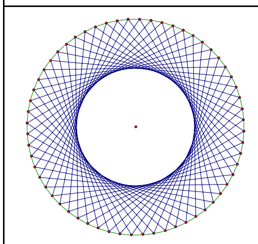
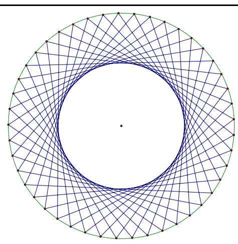
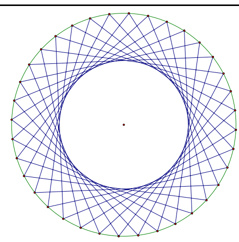
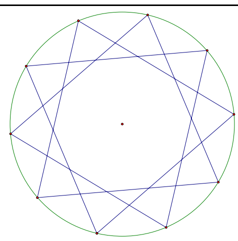
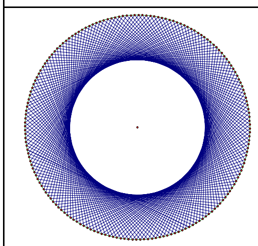
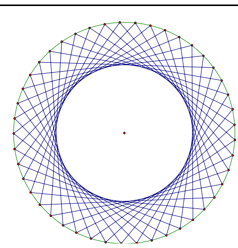
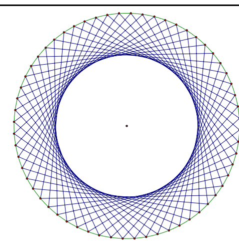
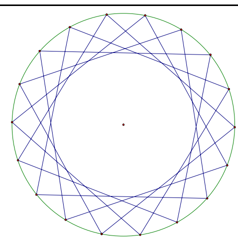
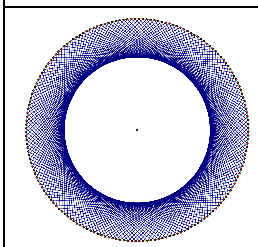
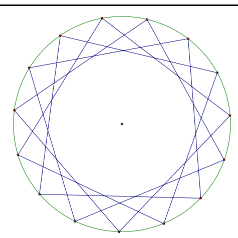
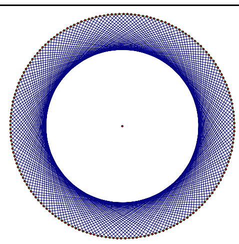
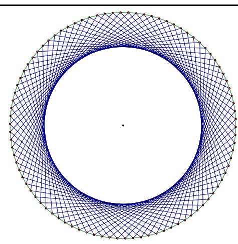
2. 王心瑩（譯）（2005）。Marilyn Burns著。魔數小子:噓，螞蟻搬東西(倍數的秘密)。台北：遠流。

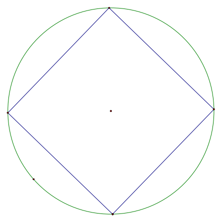
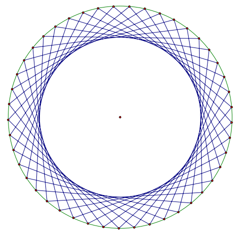
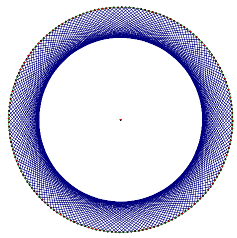
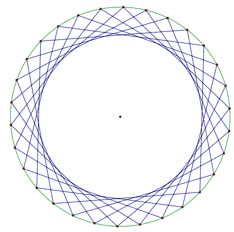
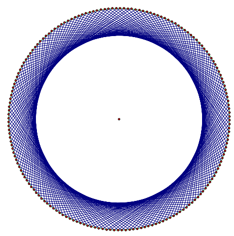
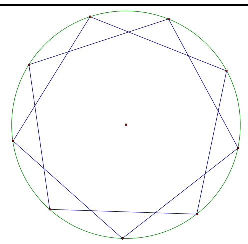
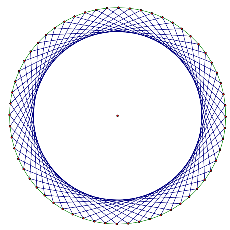
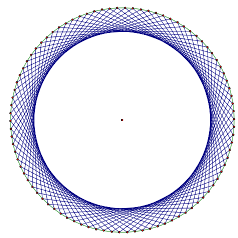
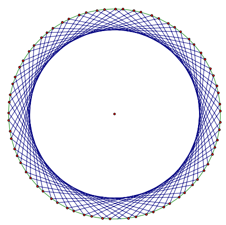
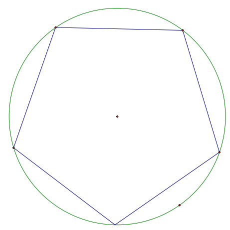
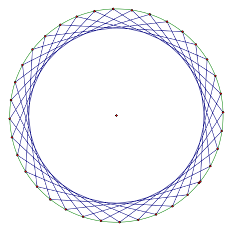
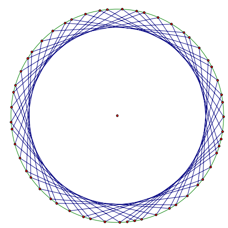
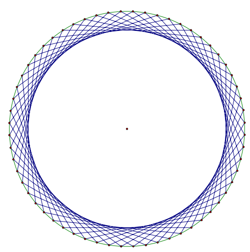
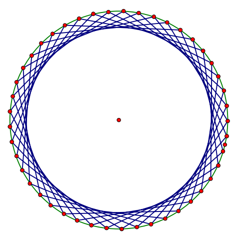
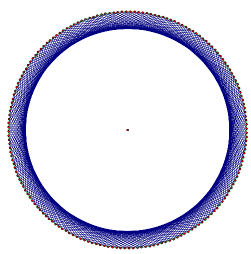
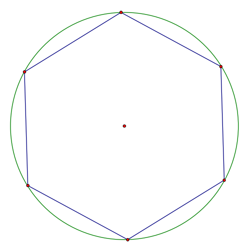
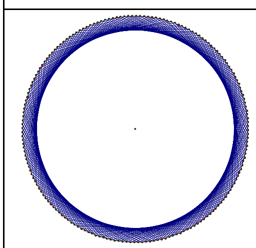
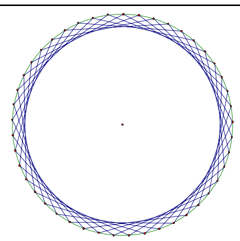
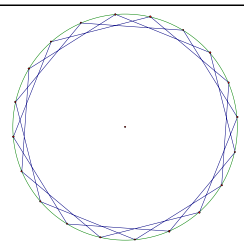
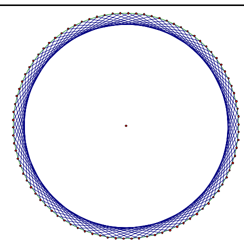
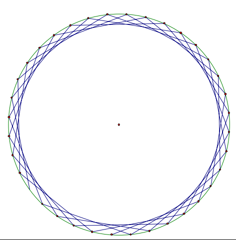
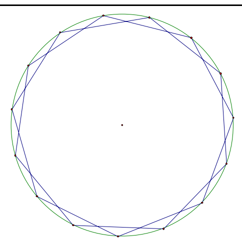
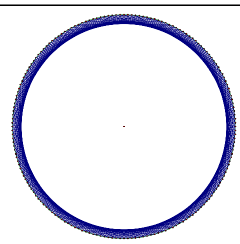
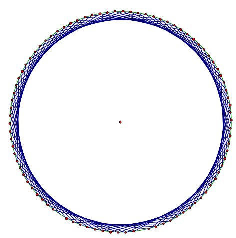
附　　　件

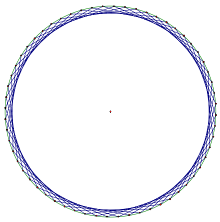
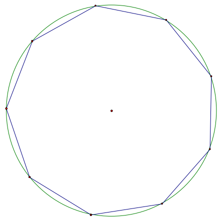
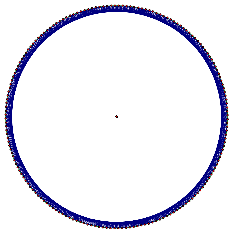
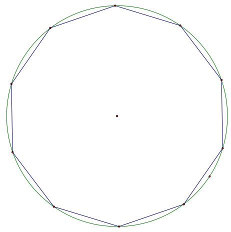
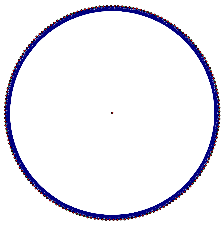
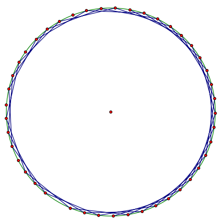
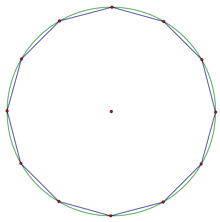
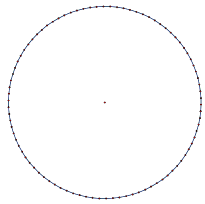
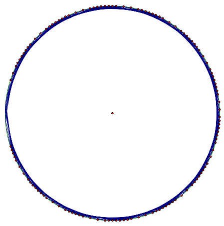
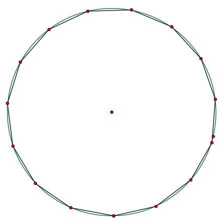
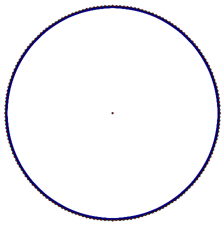
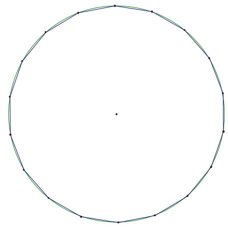
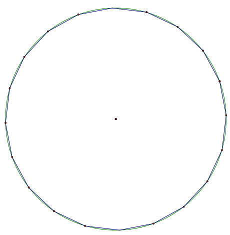
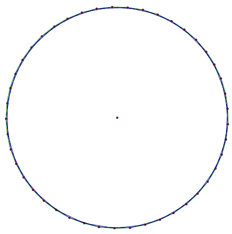
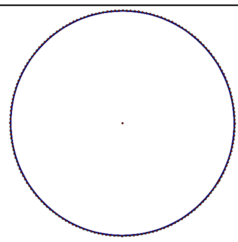
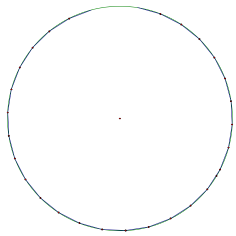
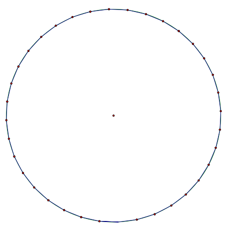
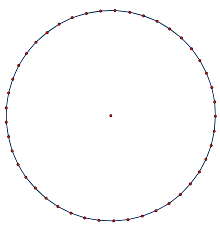
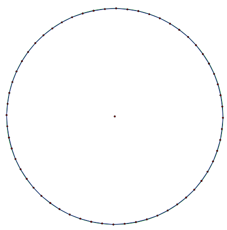
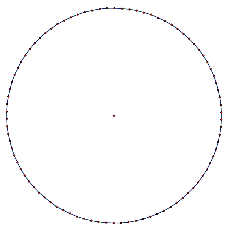
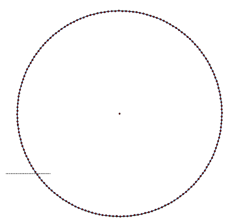
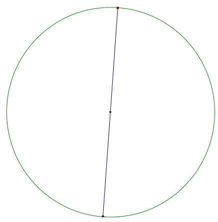
圓內彈性碰撞所經過的軌跡

---「整數」角度的入射角（0 度 ~ 89 度）

1 度	2 度	3 度	4 度
			
5 度	6 度	7 度	8 度
			
9 度	10 度	11 度	12 度
			
13 度	14 度	15 度	16 度
			
17 度	18 度	19 度	20 度
			

21 度	22 度	23 度	24 度
			
25 度	26 度	27 度	28 度
			
29 度	30 度	31 度	32 度
			
33 度	34 度	35 度	36 度
			
37 度	38 度	39 度	40 度
			
41 度	42 度	43 度	44 度
			

45 度	46 度	47 度	48 度
			
49 度	50 度	51 度	52 度
			
53 度	54 度	55 度	56 度
			
57 度	58 度	59 度	60 度
			
61 度	62 度	63 度	64 度
			
65 度	66 度	67 度	68 度
			

69 度	70 度	71 度	72 度
			
73 度	74 度	75 度	76 度
			
77 度	78 度	79 度	80 度
			
81 度	82 度	83 度	84 度
			
85 度	86 度	87 度	88 度
			
89 度	0 度		
			

【評　語】　080415　迷途知返？-圓內彈性碰撞回歸問題

利用幾何的一些性質結合因倍數概念，找出簡易法則，以判斷圓內彈性碰撞能否回歸起點問題，為一應用數學解決問題的最好例證，值得嘉許。