中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080414

新花朵朵開—直角三角形三邊上的圖形面積

學校名稱：高雄縣王公國民小學

作者：	指導老師：
小六 黃鈺翔	許月香
小六 呂岡祐	
小六 金文瀚	
小六 邱勉中	
小六 黃璟修	

關鍵詞：直角三角形　相似圖形　面積

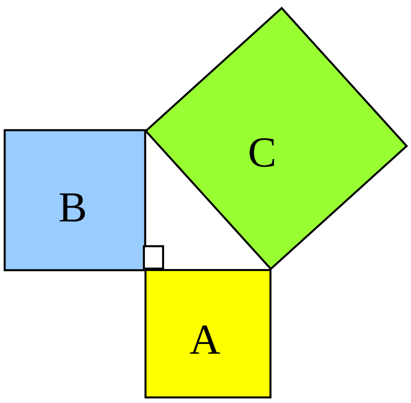
新花朵朵開－直角三角形三邊上的圖形面積

摘要

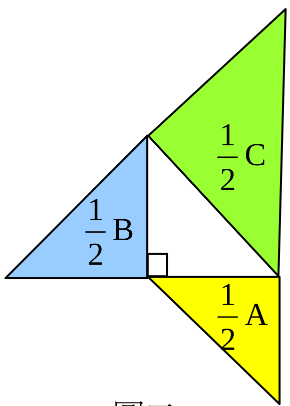
談到畢氏定理時，大家都會想到：如果一個直角三角形的 2 股爲 a 和 b，斜邊爲 c，則這 3 個邊長具有 $a^2+b^2=c^2$的關係；而且，以這 3 個邊爲邊長，所畫出來的 3 個正方形，斜邊上的正方形面積等於 2 股上的正方形面積之和。然而，不只正方形如此而已，有很多形狀的幾何圖形，也都具有這樣的性質：以直角三角形的 3 個邊長爲其中一邊或直徑（半徑），在其斜邊和 2 股上所畫出來的 3 個**相似幾何圖形**，斜邊上的圖形面積也會等於 2 股上的圖形面積之和，就如同以直角三角形爲中心，開出了千變萬化不同的花瓣一樣。

壹、研究動機：

六上的數學課講到有關圖形面積的時候，老師將 3 個正方形圍成一個直角三角形（如下圖一）。我們去測量並算出其中最大的正方形面積等於另外 2 個正方形的面積和，亦即面積 A＋面積 B＝面積 C。老師說：「任何一個直角三角形，假設它的 2 股長爲 a 和 b，斜邊長爲 c，則這 3 邊邊長的關係爲 $a^2+b^2=c^2$，就是很有名的畢氏定理。因此，以直角三角形的 3 邊爲邊長所畫出來的正方形，斜邊上的正方形（最大的正方形）面積＝c^2，在 2 股上的正方形面積分別爲 a^2和 b^2。$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore$最大的正方形面積就等於另外 2 個正方形的面積的和。」我們這一組的同學都感到非常有趣，我們把正方形 A、B、C 都切成一半，那麼剩下的圖形爲三角形（如下圖二），而各個三角形的面積爲$\frac{1}{2}a^2$、$\frac{1}{2}b^2$和$\frac{1}{2}c^2$，$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}c^2$，$\therefore$3 個三角形中，最大的三角形面積也等於另外 2 個三角形的面積和。因此，我們猜想：除了正方形、三角形以外，可能還有其他的圖形也具有這種的性質呢！亦即在直角三角形的 3 邊上，且以這 3 邊爲其中一邊所畫出來的圖形，最大的圖形面積等於另外 2 個圖形的面積和。



圖一



圖二

貳、研究目的：

一、以直角三角形的 3 邊爲其中一個邊長，所畫出來的各種三角形，是否斜邊上的三角形面積會等於 2 股上的三角形面積之和。

二、 除了正方形以外，以直角三角形的 3 邊爲其中的一邊或對角線，所畫出來的四邊形，是否斜邊上的四邊形面積會等於 2 股上的四邊形面積之和。

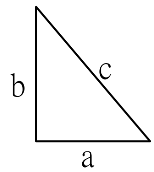
三、以直角三角形的 3 邊為其中的一邊，所畫出來的正 n(n≧5)邊形，是否斜邊上的正 n 邊形面積會等於 2 股上的正 n 邊形面積之和。

四、以直角三角形的 3 邊為直徑或半徑，畫出來的圓形或其他圓弧形，是否斜邊上的圖形面積等於 2 股上的圖形面積之和。

叁、研究器材或設備：直尺、三角板、量角器、圓規、鉛筆、白色圖畫紙、掃描器、電腦

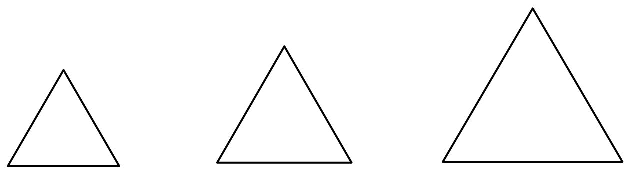
肆、研究過程和方法：

首先，我們先假設有一個直角三角形，它的 2 股長分別為 a 和 b，斜邊為 c（如右圖）。以直角三角形的這 3 個邊長 a、b、c 為其中的一邊或為直徑（半徑）畫出各種圖形來。



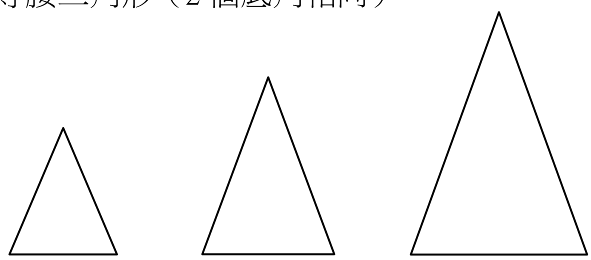
一、以 a、b、c 為其中一邊，畫出相同形狀的三角形，我們共可以畫出下列 6 種三角形：

1、正三角形（3 個角都為 60°）



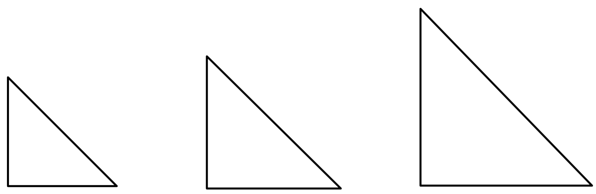
3 邊都為 a　　3 邊都為 b　　3 邊都為 c

2、等腰三角形（2 個底角相同）



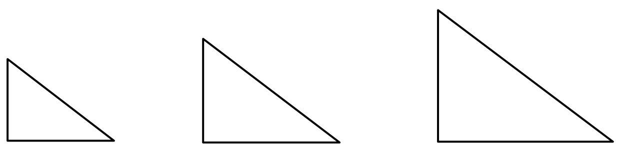
底邊長＝a　　底邊長＝b　　底邊長＝c

3、等腰直角三角形（1 個角為 90°，有 2 個角為 45°）



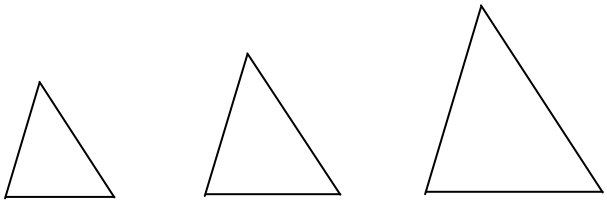
底邊長＝a　　底邊長＝b　　底邊長＝c

4、直角三角形（1 個角為 90°，另外 2 個角的和為 90°）



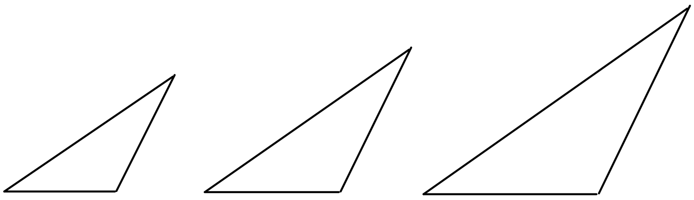
底邊長＝a　　底邊長＝b　　底邊長＝c

5、銳角三角形（3 個角都小於 90°）



底邊長＝a　底邊長＝b　底邊長＝c

6、鈍角三角形（其中 1 個角大於 90°，其他 2 個角的和小於 90°）



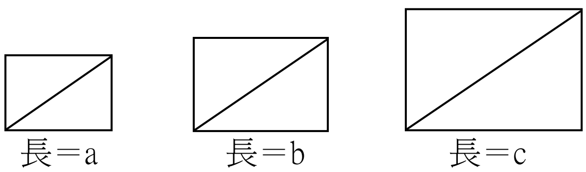
底邊長＝a　底邊長＝b　底邊長＝c

一個圖形經過放大或縮小，除了大小改變以外，其形狀並沒有改變，且對應角相等而對應邊也會成比例，則它們稱爲**相似圖形**。以上 1~6 的各種形狀的三角形，同組的 3 個三角形彼此爲相似三角形，根據相似圖形原理，如果 3 個三角形的底邊邊長爲 a、b、c，則它們的對應邊邊長爲 a：b：c，高的比也爲 a：b：c。

∵三角形的面積＝$\frac{1}{2}$×底邊×高，因此，我們可以假設它們的高分別爲ak、bk、ck（k 爲任意正數），∴同組的 3 個三角形的面積就爲$\frac{1}{2}a^2k$、$\frac{1}{2}b^2k$、$\frac{1}{2}c^2k$，∵$a^2+b^2=c^2$，∴$\frac{1}{2}a^2k+\frac{1}{2}b^2k=\frac{1}{2}(a^2+b^2)k=\frac{1}{2}c^2k$，因此，最大三角形面積等於另外 2 個三角形面積的和。而且，我們可以推論：如果 3 個相似三角形的一邊邊長比爲a：b：c，則其面積比爲a^2：b^2：c^2。

二、除了正方形以外，以 a、b、c 爲其中一個邊長或對角線，畫出相同形狀且**相同比例**的四邊形，此 3 個四邊形也是相似圖形；且一個四邊形可以被分成 2 個三角形，所以，我們可以用三角形的面積關係來推算四邊形的面積關係。我們以下列 4 種不同形的四邊形來說明。

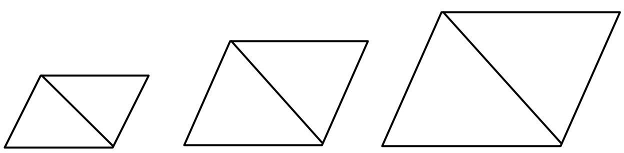
1、相似長方形



長＝a　長＝b　長＝c

一個長方形可以被切成 2 個直角三角形，相似的 3 個長方形會切出 2 組相似的直角三角形。

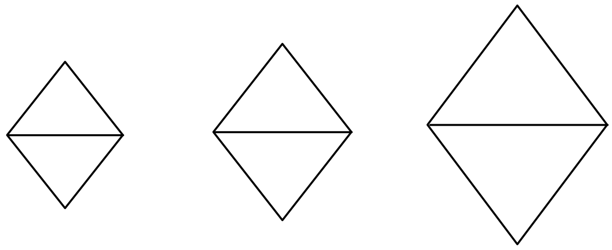
2、相似平行四邊形



底邊＝a　底邊＝b　底邊＝c

一個平行四邊形也可以被切成 2 個銳角三角形，3 個相似的平行四邊形會切出 2 組相似的銳角三角形。

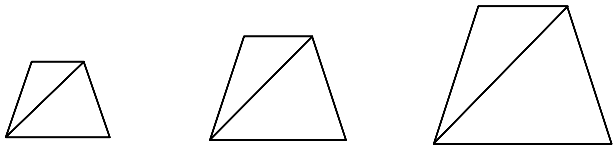
3、相似菱形



對角線＝a　　對角線＝b　　對角線＝c

一個菱形可以切成 2 個等腰三角形，3 個相似的菱形則切出 2 組相似的等腰三角形。

4、相似梯形



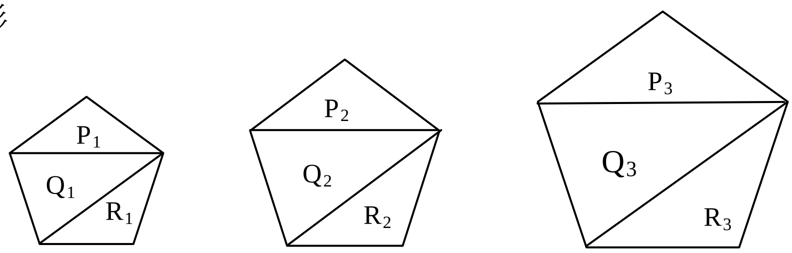
底邊＝a　　底邊＝b　　底邊＝c

一個梯形可以切成一個鈍角三角形和一個銳角三角形，因此就有 1 組相似的鈍角三角形和 1 組相似的銳角三角形。

上列的 4 組四邊形，同組的相似四邊形裡，每個四邊形都由 2 個三角形組成，四邊形面積＝2 個三角形的面積和；∵對應邊爲a：b：c，∴相似的三角形面積比爲 a^2：b^2：c^2，因此 3 個四邊形的面積比也爲 a^2：b^2：c^2，且最大四邊形面積＝另外 2 個四邊形面積之和。

三、分別以直角三角形的 3 個邊長 a、b、c 爲邊長，畫出不同的正多邊形：

1、正 5 邊形

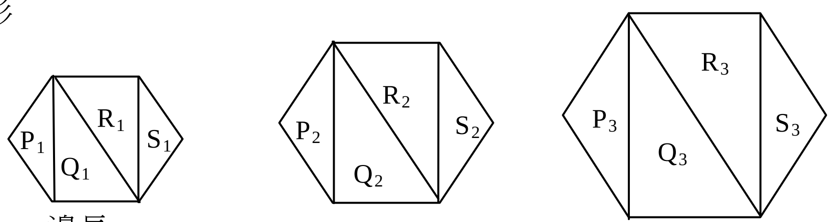


邊長＝a　　邊長＝b　　邊長＝c

我們將每個正五邊形都切成 3 個三角形，那麼就出現對應的相似三角形，P_1、P_2、P_3爲相似三角形，Q_1、Q_2、Q_3爲相似三角形，R_1、R_2、R_3爲相似三角形。根據前面
一的歸納，任何相似三角形的面積比爲邊長的平方比，所以上圖P_1、P_2、P_3這 3 個三角形面積比爲 a^2：b^2：c^2，Q_1、Q_2、Q_3 這 3 個三角形面積比爲 a^2：b^2：c^2，R_1、R_2、R_3 這 3 個三角形面積比也爲 a^2：b^2：c^2，而相似三角形的面積爲：$P_3 = P_1 + P_2$，$Q_3 = Q_1 + Q_2$，$R_3 = R_1 + R_2$，且 1 個正五邊形的面積＝3 個三角形的面積之和，∴ 3 個正五邊形的面積比爲 a^2：b^2：c^2。因此，最大的正五邊形＝另外 2 個正五邊形面積

的和。

2、正 6 邊形



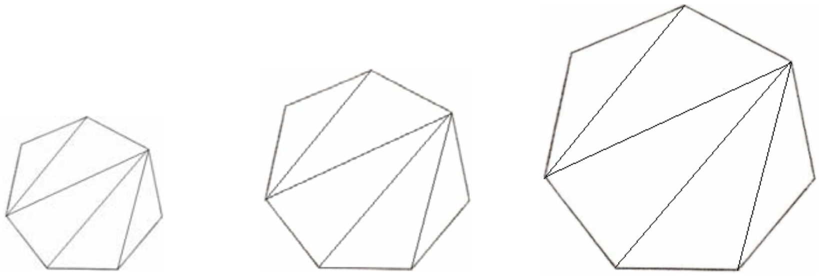
邊長＝a　　　　邊長＝b　　　　邊長＝c

我們將每個正六邊形都切成 4 個三角形，就出現互相對應的 4 組相似三角形，P_1、P_2、P_3為相似三角形，…，S_1、S_2、S_3為相似三角形。任何相似三角形的面積比為邊長的平方比，所以P_1、P_2、P_3這 3 個三角形面積比為a^2：b^2：c^2，…，S_1、S_2、S_3這 3 個三角形面積比為a^2：b^2：c^2。同理可推，上圖的 3 個正六邊形的面積比也為a^2：b^2：c^2，因此，最大的正六邊形＝另外 2 個正六邊形面積的和。

3、正七邊形和正八邊形

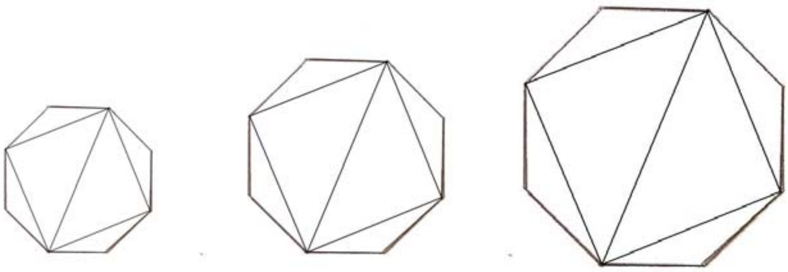
正七邊形可以切成 5 個三角形、正八邊形可以切成 6 個三角形。同理，下圖 3 個正七邊形面積比為邊長的平方比，3 個正八邊形面積比也為邊長的平方比。所以，最大正多邊形的面積＝另外二個正多邊形的面積的和。

(1)正七邊形



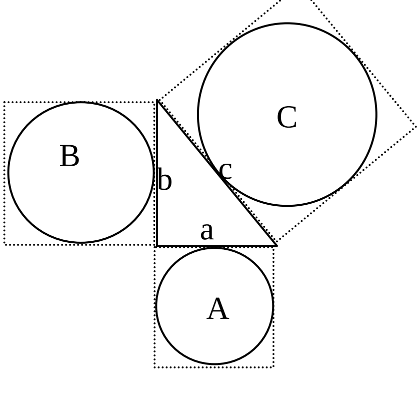
邊長＝a　　　　邊長＝b　　　　邊長＝c

(2)正八邊形



邊長＝a　　　　邊長＝b　　　　邊長＝c

四、在直角三角形的 3 邊上各畫 1 個正方形，那麼以三角形的 3 邊為直徑，各畫出 1 個圓來，我們發現它剛好是正方形的內切圓。而 3 個圓的面積如下：



圓 A 的面積＝$(\frac{1}{2}a)^2\times$ 圓周率＝$\frac{1}{4}a^2\times$ 圓周率

圓 B 的面積＝$(\frac{1}{2}b)^2\times$ 圓周率＝$\frac{1}{4}b^2\times$ 圓周率

圓 C 的面積＝$(\frac{1}{2}c)^2\times$ 圓周率＝$\frac{1}{4}c^2\times$ 圓周率

$\because \frac{1}{4}a^2 \times$ 圓周率 $+\frac{1}{4}b^2 \times$ 圓周率$=\frac{1}{4}\times$ 圓周率 $\times(a^2+b^2)=\frac{1}{4}c^2\times$ 圓周率

$\therefore$最大圓面積等於另外 2 個圓面積的和。

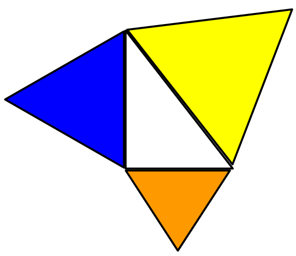
以直角三角形的 3 個邊為直徑所畫出來的圓，最大的圓面積會等於另 2 個的圓面積的和。同理可推，以直角三角形的 3 個邊為直徑所畫出來的半圓，最大的半圓面積會等於另外 2 個的半圓面積的和。而以 3 個邊為半徑畫出來的三分之一圓、四分之一圓、六分之一圓等扇形，也都具有最大的圖形面積等於另外 2 個的圖形面積的和。而且，它們彼此都是相似圖形。

伍、研究結果

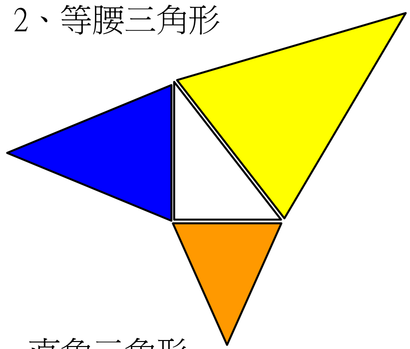
在一個直角三角形的斜邊和 2 股上，並以它們為邊長、對角線、直徑或半徑，畫出相同形狀且相同比例的圖形時，這 3 個圖形彼此為相似圖形，而且它們的面積比為直角三角形 3 個邊長的平方比。所以，斜邊上的圖形面積＝2 股上的圖形的面積之和。

一、直角三角形的 3 個邊為一邊，所畫出來的任意的相似三角形，最大的三角形面積等於另外 2 個三角形的面積和；如下圖：顏色圖形的面積＋顏色圖形的面積＝顏色圖形的面積。

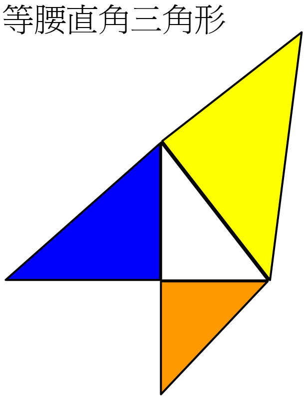
1、正三角形



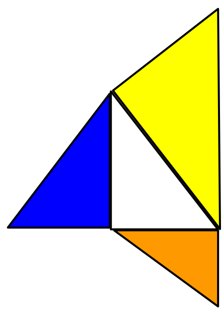
2、等腰三角形



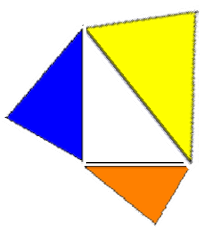
3、等腰直角三角形



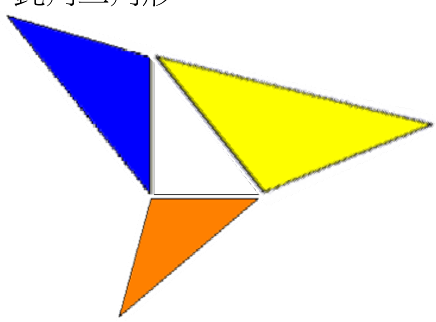
4、直角三角形



5、銳角三角形

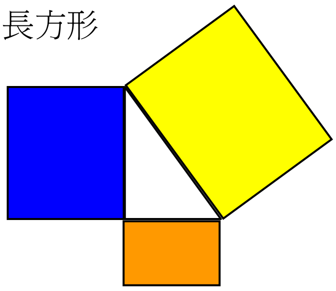


6、鈍角三角形

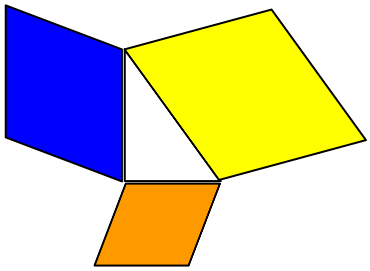


二、直角三角形的 3 個邊爲一邊，所畫出來的相似四邊形，最大的四邊形面積等於另外 2 個四邊形面積的和；如下圖：　顏色圖形的面積＋　顏色圖形的面積＝　顏色圖形的面積。

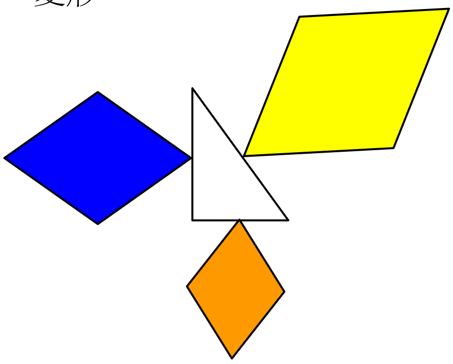
1、長方形



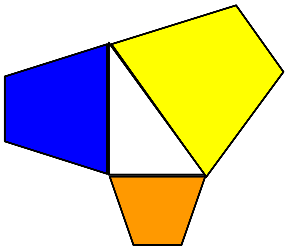
2、平行四邊形



3、菱形

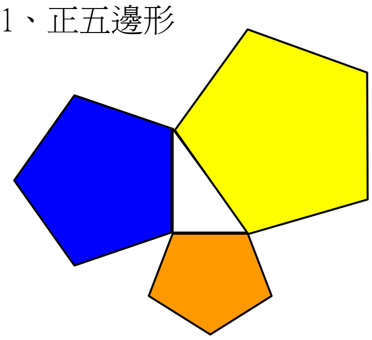


4、梯形

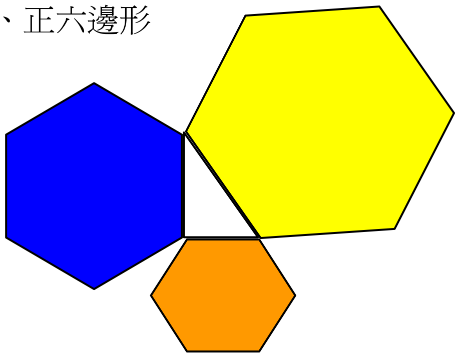


三、直角三角形的 3 個邊爲一邊，所畫出來的正多邊形，最大的正多邊形面積等於另外 2 個正多邊形面積的和；如下圖：　顏色圖形的面積＋　顏色圖形的面積＝　顏色圖形的面積。

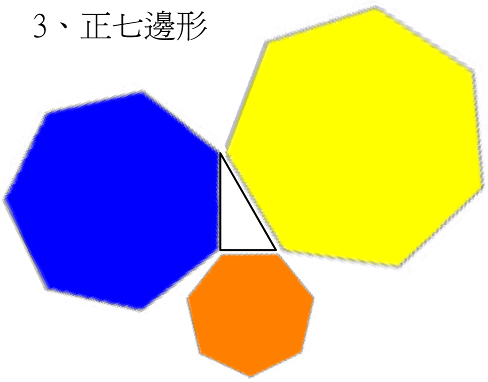
1、正五邊形



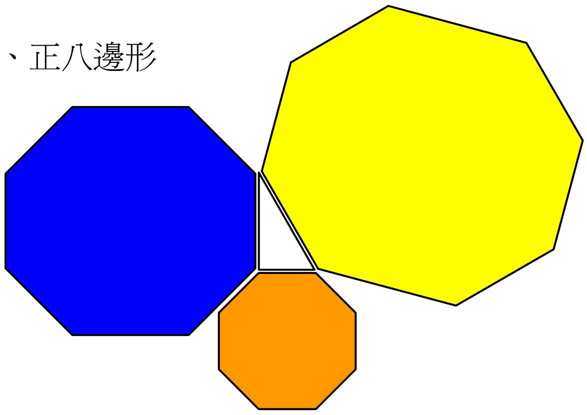
2、正六邊形

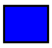
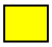


3、正七邊形

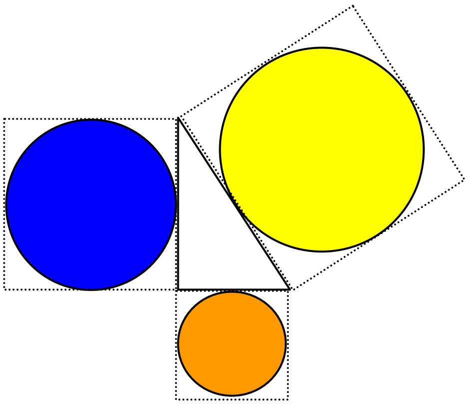


4、正八邊形

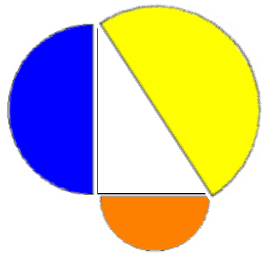


四、以直角三角形的 3 個邊爲直徑或半徑，所畫出來的圓形、半圓、四分之一圓、扇形等，最大的圓弧形面積等於另外 2 個圓弧形面積的和；如下圖： 顏色圖形的面積＋ 顏色圖形的面積＝顏色圖形的面積。

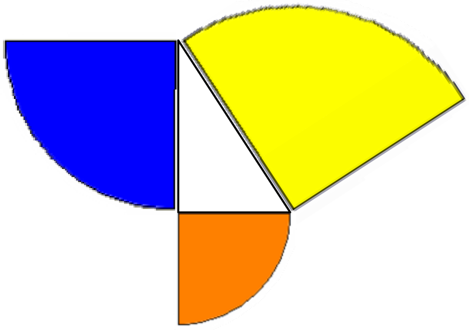
1、圓形(以 3 邊爲直徑)



2、半圓形(以 3 邊爲半徑)

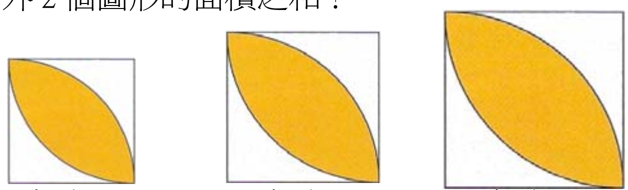


3、四分之一圓(扇形)



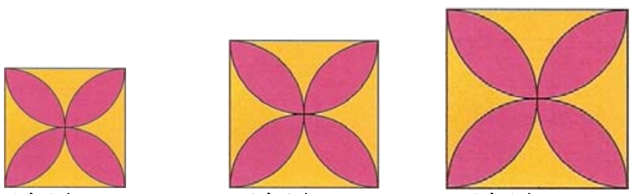
陸、討論

一、除了上述的圖形外，在直角三角形的 3 邊上畫其他的圖形，是否這些圖形也滿足最大的圖形面積會等於另外 2 個圖形的面積之和？



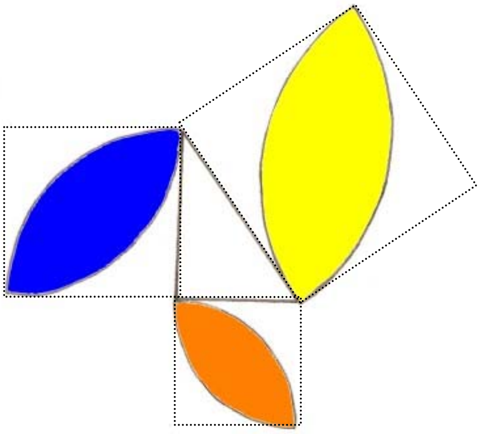
邊長＝a　　邊長＝b　　邊長＝c

上圖 3 個圖形中，橙色的部分，是 2 個扇形重疊的部分，所以它的面積是 2 ×（扇形面積－等腰直角三角形面積），因此，如果 3 個正方形的邊長符合 $a^2+b^2=c^2$的關係，則上圖 3 個橙色圖形面積也會有：最大圖形面積＝另外 2 個圖形的面積之和，如下圖（圖三）。

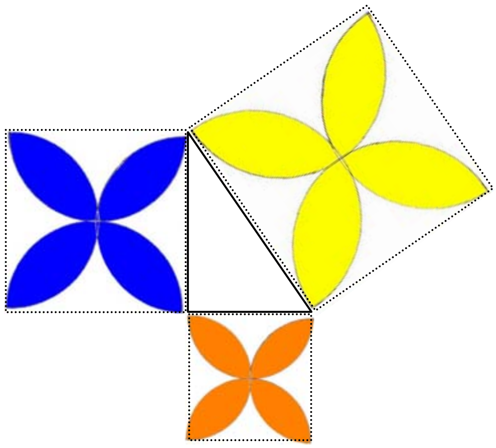


邊長＝a　　邊長＝b　　邊長＝c

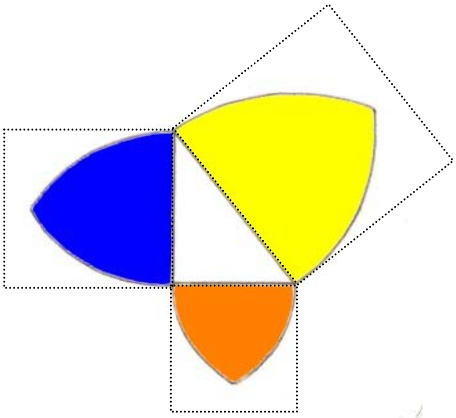
上面圖中粉紅色區域的面積，是（4 個半圓面積）－（正方形面積）。同理，如果 3 個正方形的邊長符合 $a^2+b^2=c^2$的關係式，則上圖 3 個粉紅色花瓣形面積也會有：最大花瓣面積＝另外 2 個花瓣的面積之和，如下圖（圖四）。如果正方形裡的圖形改為拱形、4 個小圓形或其他圖形，仍然滿足斜邊上的圖形面積＝2 股上的圖形面積之和，如下圖（圖五、圖六）。



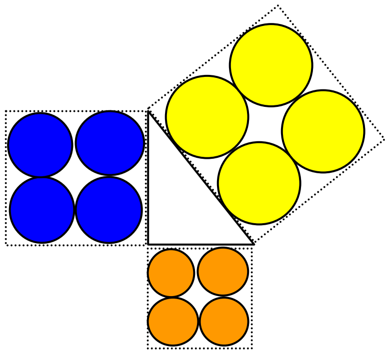
圖三



圖四



圖五

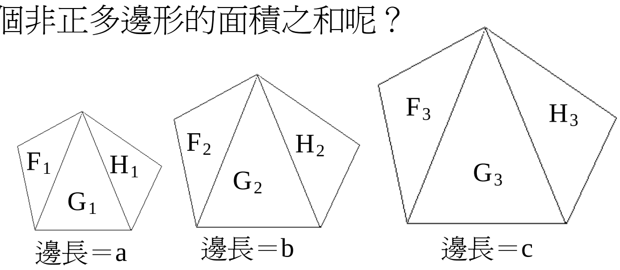


圖六

因此，我們可以推論，在直角三角形 3 邊上畫出來的正方形，在正方形裡所畫出來相同的圖形，這 3 個圖形是相似圖形。當這 3 個相似圖形的其中一邊或直徑（半徑）的比為 a：b：c 時，則最大的圖形面積＝另外 2 個圖形面積的和。

二、3 個相似的非正多邊形，當它們其中一邊的邊長分別為 a、b、c 時，那麼最大的非正多邊形面積是否也等於另外 2 個非正多邊形的面積之和呢？

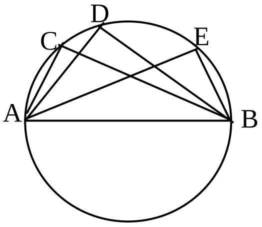
右圖 △F_1、F_2、F_3為相似三角形，
△G_1、G_2、G_3為相似三角形，
△ H_1、H_2、H_3為相似三角形



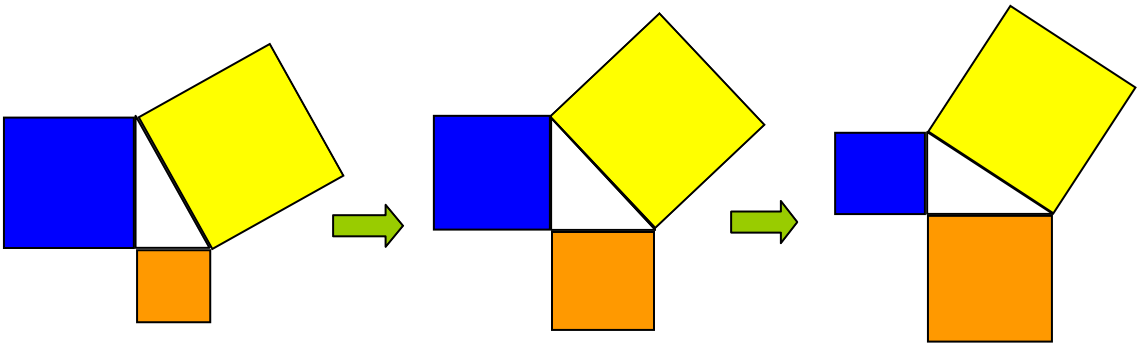
∵3 個為相似圖形，且其中一邊為a：b：c，∴其他對應邊長也為a：b：c。而 3 個五邊形所切出來的 3 組相似三角形（如上圖），面積的關係為：$F_3=F_1+F_2$，$G_3=G_1+G_2$，$H_3=H_1+H_2$，而每組相似三角形面積比為a^2：b^2：c^2，∵非正五邊形的面積＝3 個三角形的面積之和，∴3 個非正五邊形的面積比為a^2：b^2：c^2。因此，最大的五邊

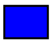
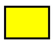
形面積＝另外 2 個五邊形面積的和。同理，我們可以証明非正六邊形、非正七邊形、…，也是最大的非正多邊形面積等於另外 2 個非正多邊形的面積之和。

三、直角三角形的斜邊長固定時，另外的 2 股長會有什麼不同的組合呢？亦即 3 邊上的 3 個相似圖形，當最大的面積固定時，另外 2 個的圖形面積會有什麼變化呢？



如右圖，△ABC、△ABD 和△ABE 都是直角三角形，且斜邊都是 $\overline{AB}$。∴當任意一個直角三角形的斜邊固定時，它的 2 股長可以有任意的組合，當其中一股增長時，另一股就會變短，但是同樣滿足 2 股的平方和等於斜邊的平方。因此，當直角三角形的斜邊長固定，而 2 股有所改變時，則 3 邊所畫出來的圖形面積，斜邊上的圖形面積不會動，但 2 股上的圖形就會隨著 2 股的變動而有所改變，但是，不論圖形如何的變動，同樣滿足斜邊上的圖形面積＝2 股上的圖形的面積之和。



上圖中，3 個直角三角形的斜邊相等，因此斜邊上的黃色正方形面積相同，但是 2 股上的面積，藍色正方形越來越小，而橙色的正方形面積越來越大，但是，3 個直角三角形上的正方形，都滿足  色面積＋ 色的面積＝ 色的面積。

柒、結論

一、在一個直角三角形的 3 邊上，以這 3 邊爲邊長、對角線、直徑或半徑所畫出來的 3 個相似圖形，它們的面積比爲直角三角形的 3 個邊長的平方比，爲 $a^2：b^2：c^2$，且斜邊上的圖形面積＝2 股上的圖形面積的和。

二、在直角三角形的 3 邊上，以 3 邊爲邊長各畫 1 個正方形，且在正方形裡畫各種形狀的相似圖形，且當 3 個相似圖形的一邊邊長（或半徑）比爲 a：b：c 時，則斜邊上的圖形面積＝2 股上的圖形面積之和。

三、在一個直角三角形的 3 個邊上，以 3 個邊爲其中一邊，所畫出來的 3 個非正多邊形，斜邊上的非正多邊形面積＝2 股上的非正多邊形面積之和。

四、當直角三角形的斜邊長固定時，2 股的長度有很多的組合，因此，當斜邊長固定時，可以畫出許許多多不同的直角三角形，以這些不同的直角三角形 3 邊所畫出來的 3 個相似圖形，斜邊上的圖形大小不會改變，而 2 股上的圖形面積大小會有所變化，但仍然滿足斜邊上的圖形面積＝2 股上的圖形的面積之和。

捌、參考資料

一、康軒文教事業股份有限公司（民 95）。數學學習領域教科書（6 上）。康軒文教事業股份有限公司。

二、李毓佩（民 86）。一花引得萬花開。小博士教室（105-108 頁）。國際少年村。

【評　語】　080414　新花朵朵開—直角三角形三邊上的圖形面積

本研究主題是將眾所熟知的畢氏定理做了不同的詮釋。探討方法適切，但學術性及實用性價值不高，創意也略顯不足。