中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080412

運用因數分析法揭開自然數大爆炸的奧秘

學校名稱：臺中市南屯區文山國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳采萱	林睿傑
小六 賴楷穎	許雲秋
小四 陳逸軒	
小四 呂盈臻	
小四 陳宜君	
小四 顏羽羚	

關鍵詞：因數　倍數　黑洞數字

摘 要

從有關黑洞數字的兩個有趣問題開始引起我們的研究興趣，進而自創互補數差法則，繪製出自然數大爆炸圖譜，發現可以用因數分析法預測和檢驗圖譜中的數圈系的類型及大小。我們也從數圈系觀察到數圈內的數字存在著等倍數列的關係，於是創造出 **K-N 法則，**繪製出 K-N 大爆炸圖譜，並在繪製過程中發現橡皮筋現象。最後我們分析 1-N~4-N 大爆炸圖譜，得到許多從來沒有人發現自然數黑洞現象的奇異結果。

壹、 研究動機

在一個數學專題研究的課堂上，我們接觸到有關黑洞數字的兩個有趣問題：

一、 隨便選一個二位數，將它的十位數字和個位數字對調，得到一個新數，再以大數減去小數，運算數次後，所得的差一定會落在（9,90）、（18,81）、（36,63）、（27,72）、（45,54）這五組黑洞數字之中。

二、 任意一個數字經過數次 n 次方數字和的動作後，一定會落入一組黑洞數字的循環中。

這引起我們很大的興趣，於是就著手尋找跟黑洞數相關資料，而我們也很意外的在一篇數學期刊－「數學傳播」找到有關黑洞數字的完整研究，在分析資料的過程中我們除了知道自然數在經過某種特別的運算後會落入黑洞數字，我們還發現了從來沒有人發現的自然數奇異現象。

貳、 研究目的

一、 利用互補數對新的運算概念製作出自然數大爆炸圖譜。

二、 利用自然數之間的因數和倍數關係，找出大爆炸的規律。

三、 發現將爆炸上限 N 去除等倍數列可產生新的大爆炸規則，並探討內含的數學法則。

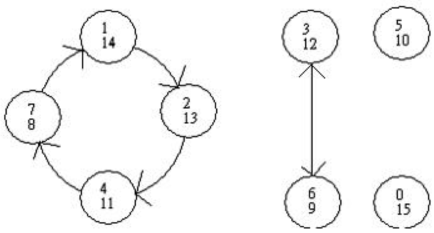
參、 研究器材和設備

白紙、筆、電腦和自製立體模型

肆、 研究過程和方法

一、自然數之大爆炸過程

自然數的範圍可從 1 至無限大，所以我們把自然數增加的過程想像成一場爆炸。一開始必須先訂定爆炸範圍的上限。假設上限為 N，我們找到了爆炸範圍內所有的互補數對，再將兩個互補數寫在一個數圈內，之後用兩個互補數相減找出下一個互補數對，但最常從 1 和 N-1 兩數開始去畫出數圈及相關聯的軌道，就完成了自然數 N 的大爆炸圖譜，下圖是爆炸上限為 15 的大爆炸圖譜。而圖中的箭頭我們稱之為軌道。



二、名詞解釋

互補數：

假設爆炸上限的數字爲 N，小於 N 的任二數的和爲爆炸上限的數字 N，則稱這兩數爲互補數。例：設爆炸上限爲 20，而 3+17=20，即說 3 爲 17 的互補數，17 爲 3 的互補數。

數圈：

數圈是 2 個數字上下並排組成一個自然數對，這 2 個數字互爲和等於 N 的互補數 。

數圈系：

數圈系是指由數圈與數圈所構成的軌道運行系統，其種類多樣。

自然數大爆炸圖譜：

依照大爆炸的過程，我們繪製出 N：1~200 在爆炸過程中產生的數圈系，而這些數圈系的圖形即爲自然數大爆炸圖譜。

n-層數圈系：

隨著自然數爆炸範圍的擴大，其爆炸圖譜內的數圈系也跟著變大，爲了方便我們敘述這些屬於同一型卻大小不一的數圈系，於是視其大小稱作 n-層數圈系。以 3-樹型數圈系爲例，染色的數圈是黑洞數圈，往上數共有 4 層，所以是 4 層樹型數圈系，如圖 1。

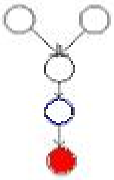


圖 1

數圈系群：

在上限爲 N 的自然數大爆炸圖譜中，同時有 2 個或 2 個以上的數圈系，可稱作數圈系群。

黑洞：

指數圈運行到某數圈或數圈系時，運行軌道不斷在某些數圈循環，例如於單環狀數圈群中旋轉，或運行到某一數圈時完全停擺，此單環狀數圈群或數圈就稱爲環狀黑洞或黑洞數圈。

三、由互補數差法則產生之數圈系的運行系統之分類、命名

在嘗試繪製自然數大爆炸{N：1~200}所產生數圈運行軌道的過程中，我們發現這些數圈所產生的軌道運行系統可分爲三型。

1. **孤立型：**

指只有單獨一個數圈的系統，如圖 2。

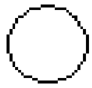
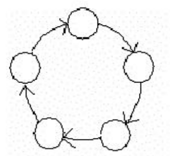
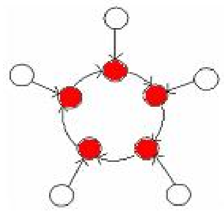
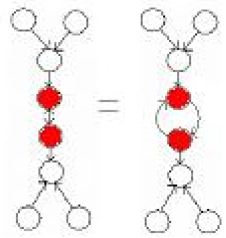


圖 2

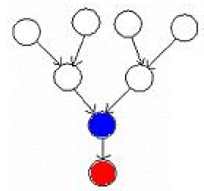
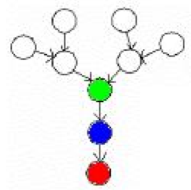
2. **環型：**

指某個自然數爆炸時的運行以環狀黑洞爲中心的軌道運行系統。可再細分三個亞型－「單環型」、「多層環型」、「啞鈴型」。

單環型： 指數圈的運行軌道爲一個環狀黑洞，如圖是循環節爲 5 的單環型數圈系。	
多層環型： 爲單環型的擴張，指數圈以環狀黑洞爲中心所構成的多層環，由最外層的數圈依軌道箭頭往內運行，並最終吸引到環狀黑洞內的數圈循環軌道，如圖是循環節爲 5 的雙層環型數圈系。	
啞鈴型： 指數圈的運行軌道像啞鈴一樣，如圖爲 3 層啞鈴型數圈系，其實從圖中可看出啞鈴型也是循環節爲 2 的多層環型數圈系。	

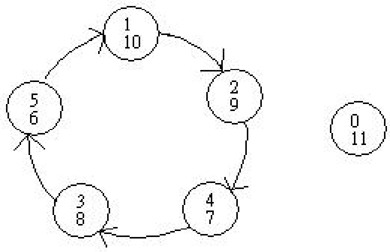
3. **樹型：**

指數圈的運行軌道像一棵樹，可再細分兩個亞型－「2—樹型」、「3—樹型」。

2—樹型： 它的主幹的部分有 2 個數圈，所以稱爲「2 —樹型」。而紅色數圈爲其根部，也是 2—樹型數圈系的黑洞。	
3—樹型： 它的主幹的部分有 3 個數圈，所以稱爲「3—樹型」。而紅色數圈爲其根部，也是 3—樹型數圈系的黑洞。	

四、自然數大爆炸圖譜可由二倍數列除以爆炸上限 N 的規則找出

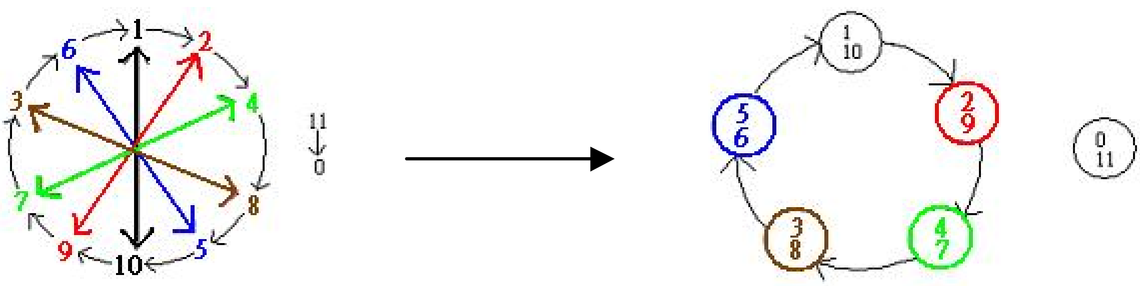
剛開始著手研究，我們是以互補數差找出大爆炸圖譜，以爆炸上限 N＝11 為例，從圖譜知道數圈內互補數的差能讓我們找出下一個數圈內的自然數對。



隨著研究的進行，我們發現數圈之間的數有著微妙關係，下一個數是前一數×2 再除以爆炸上限 N 所得的餘數，所以我們從這種特性開發出新的繪製圖譜方法。以 **2 倍數列**除以爆炸上限 N 所得的**餘數數列**，依照排列順序來畫出簡型，並將數字以互補數關係加以組合，最後繪製爆炸圖譜。例如 **2 倍數列**：**1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256 , 512……**除以 11 之**餘數數列**為 **1 , 2 , 4 , 8 , 5 , 10 , 9 , 7 , 3 , 6 , 1 ……**

2 倍數列	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
餘數數列	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
2 倍數列	3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536	3072
餘數數列	3	6	1	2	4	8	5	10	9	7	3
2 倍數列	5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120
餘數數列	5	10	9	7	3	6	1	2	4	8	5
2 倍數列	7	14	28	56	112	224	448	896	1792	3584	7168
餘數數列	7	3	6	1	2	4	8	5	10	9	7
2 倍數列	11	22	44	88	176	352	704	1408	2816	5632	11264
餘數數列	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

根據上表所得的餘數數列，依照排列順序來畫出 N=11 的爆炸簡型。



N=11 的簡型

N=11 簡型的形狀就有如橡皮筋一般，將這條橡皮筋依照圖中的箭頭對折，使數字與數字結合，就能製作出 N=11 的大爆炸圖譜，我們便將這個有趣的現象稱為「**橡皮筋現象**」。

五、嘗試以 K 倍數列除以爆炸上限 N 的規則繪製新的自然數大爆炸圖譜

我們從 2 倍數列除以爆炸上限 N 的規則可繪製新的自然數大爆炸圖譜，從中發現若是把 2 倍數列換成 3 倍數列甚至是 4 倍數列，結果會是如何？於是爲了方便我們敘述，以 K 倍數列除以爆炸上限 N 的規則繪製新的自然數大爆炸圖譜可簡稱爲 **K－N 大爆炸圖譜**，而此規則也簡稱爲 **K-N 法則**。

伍、 研究結果

一、 自然數大爆炸的研究流程

運用互補數差法則製作自然數大爆炸圖譜

研究成果：

1. 製作出 N=1~200 的爆炸圖譜
2. 數圈系的運行系統之分類、命名
3. 發現可以以因數分析法找出爆炸規律
4. 發覺二倍數列在數圈系扮演的角色

探討爆炸上限 N 去除二倍數列的大爆炸規則

研究成果：

1. 發現自然數大爆炸圖譜可由爆炸上限 N 去除二倍數列的大爆炸規則找出
2. 發現「橡皮筋現象」，並利用此現象畫出自然數大爆炸圖譜
3. 猜測爆炸上限 N 去除 K 倍數列可產生新的爆炸規律

以爆炸上限 N 去除三倍、四倍數列探討內含的數學法則

研究成果：

1. 製作出三倍、四倍數列之 N=1~100 的爆炸圖譜
2. 分類新的運行系統並找出爆炸規律
3. 找出 K 倍數列之間彼此結果的異同

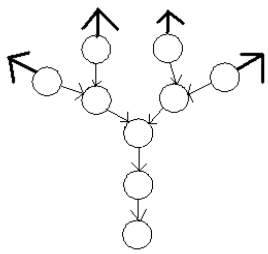
發明出兩種全新的方式討論自然數的黑洞現象，並以因數分析的方法預測出爆炸法則。

二、利用互補數差法則產生的數圈系和爆炸上限的關係

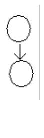
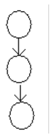
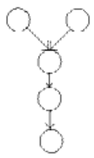
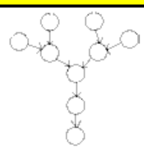
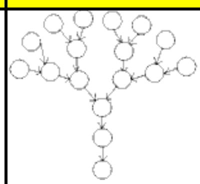
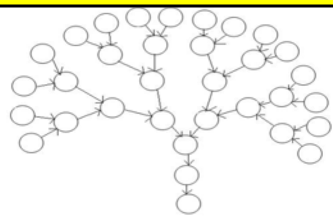
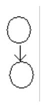
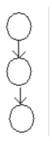
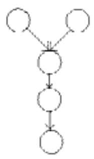
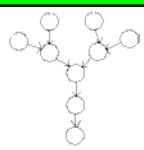
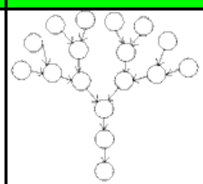
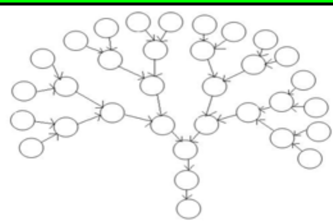
1. 自然數是 奇數 時一定有孤立型數圈系

當自然數是 奇數 時有（0,N）型孤立型數圈系。當自然數是 3×奇數 時有（0,N）、（$\frac{N}{3}$，$\frac{2N}{3}$）型孤立型數圈系。

2. 3-樹型數圈系和 N 的關係

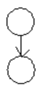
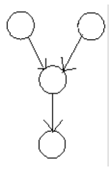
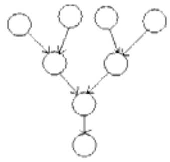
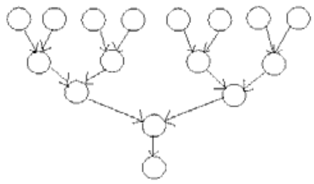
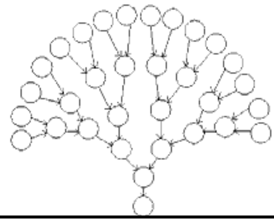
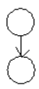
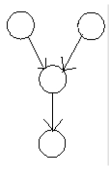
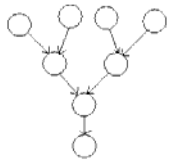
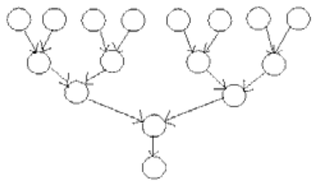
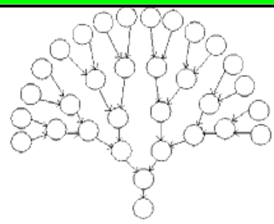


我們發現 3-樹型數圈系原型黑洞數圈 必爲（0,N）：{1, 3, 5, 7, 9⋯ }，數圈系會在數圈（$\frac{N}{4}$，$\frac{3N}{4}$）上往兩側擴張，然後有如樹木分枝一般再往上分支成 4 個數圈，並以類推繼續擴大。

包含 3-樹型數圈系之自然數的因數分解圖表						
1	2	4	8	16	32	64
						
1	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
3	6	12	24	48	96	192
						
3	3×2^1	3×2^2	3×2^3	3×2^4	3×2^5	3×2^6

3. 2-樹型之數圈系和 N 的關係

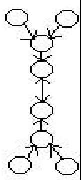
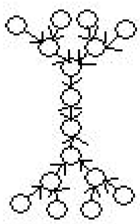
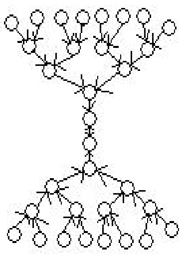
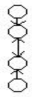
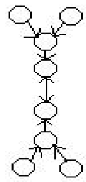
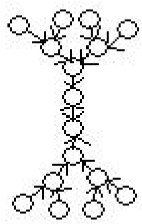
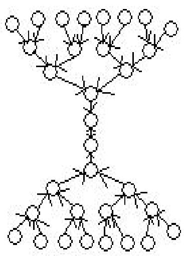
所有 2-樹型數圈系原型黑洞數圈 必爲（$\frac{N}{3}$，$\frac{2N}{3}$）：{3, 9, 15, 21, 27⋯ }，然後有如樹木分枝一般往上擴大。

包含 2-樹型數圈系之自然數的因數分解圖表					
3	6	12	24	48	96
					
3	3×2^1	3×2^2	3×2^3	3×2^4	3×2^5
9	18	36	72	144	288
					
9	9×2^1	9×2^2	9×2^3	9×2^4	9×2^5

4. 啞鈴型數圈系和 N 的關係

我們發現啞鈴型數圈系原型黑洞數圈必爲（$\frac{N}{5}$，$\frac{4N}{5}$）、（$\frac{2N}{5}$，$\frac{3N}{5}$）：{5, 15, 35, 45⋯ }，

然後數圈層數會隨著質因數 2 的個數增加而擴大。

包含啞鈴型數圈系之自然數的因數分解圖表									
5	10	20	40	80	15	30	60	120	240
									
5	5x2	5×2^2	5×2^3	5×2^4	15	15x2	15×2^2	15×2^3	15×2^4

5. 單環型數圈系的數圈個數與爆炸上限的關係

我們整理出單環型數圈系的數圈個數與爆炸上限的關係表（**K 為奇數**）：

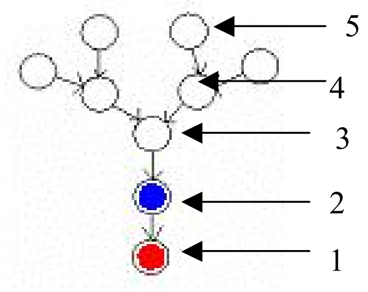
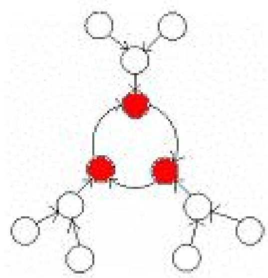
數圈個數	3 個數圈	4 個數圈	5 個數圈	6 個數圈	7 個數圈	8 個數圈
爆炸上限	7xk、9xk	15xk、17xk	11xk、31xk	13xk、21xk	43xk、127xk	51xk、85xk
數圈個數	9 個數圈	10 個數圈	11 個數圈	12 個數圈	14 個數圈	15 個數圈
爆炸上限	19xk、27xk	25xk、41xk	23xk、89xk	35xk、45xk	29xk、113xk	99xk、151xk

為什麼 **K 為奇數**呢？

由自然數的大爆炸圖譜中，可以發現爆炸上限 N 為偶數時，它所擁有的環型一定是個多層環型。換言之，若乘以偶數的話,，它將會是 1 個多層環型，而不是單環型了。

6. 質因數 2 在數圈系裡的角色

在研究過程中，我們發現質因數 2 在各數圈系裡扮演著重要的角色。不少數圈系（包括：樹型、多層環型）裡的結構圖都有好多層數圈，如果我們將爆炸上限 N 作質因數分解，發現質因數 2 的個數跟數圈系結構圖的數圈層數有關係，N 有多少個質因數 2，它的數圈系結構圖裡就有多少層數圈。

樹型數圈系的結構圖裡，除了 2-樹型、3-樹型的原型主幹以外（如右圖著色部分），有幾個 2 的次方，它就會有幾層數圈（主幹含於其中）。例：N＝16＝ 2^4 ，所以 N＝16 圖譜裡的樹型數圈系的結構圖就會有 5 層。	
環型數圈系的結構圖裡，第 2 層的數圈數和第 1 層一樣的多，第 3 層之後只要每增加 1 層數圈，每 1 個分支上就會再增加 2 個數圈，它的原型為最裡面的環狀黑洞數圈。例；N=28＝ $2^2 \times 7^1$ ，因為 28 有 2 個 2，所以在 28 的圖譜裡多層環型數圈系就會有 3 層數圈。	

二、利用 3-N 法則產生的數圈系和爆炸上限的關係

1. 自然數不是 3 的倍數 時一定有孤立型數圈系

（1）除了 3 的倍數，所有的自然數皆有（0,N）型孤立型數圈系。如：1、2、4、5、7、8、10、11.........

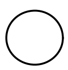
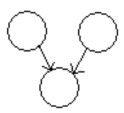
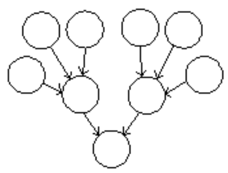
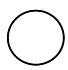
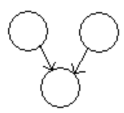
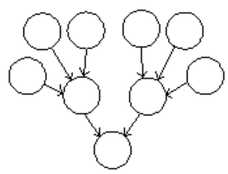
（2）除了 3 的倍數，所有的偶數皆有（$\frac{N}{2}$,$\frac{N}{2}$）型孤立型數圈系。如：

2、4、8、10、14、16、20.........

（3）除了 3 的倍數，所有 4 的倍數（$\frac{N}{4}$,$\frac{3N}{4}$）型孤立型數圈系。如：4、 8、 16、 20 、28 、32.........

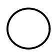
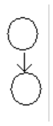
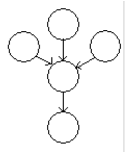
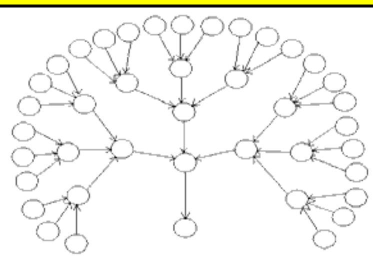
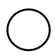
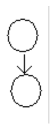
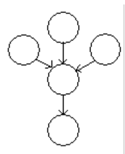
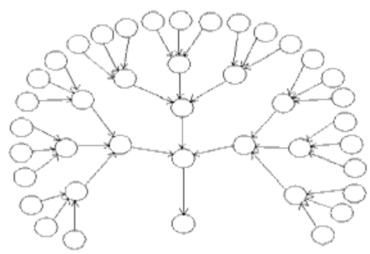
2. 1-樹型數圈系和 N 的關係

我們發現 1-樹型數圈系原型黑洞數圈必為（$\frac{N}{4}$,$\frac{3N}{4}$）：{4, 8, 16, 20, 28⋯}，隨著爆炸上限 N 的質因數 3 個數的增加，數圈系會在數圈（$\frac{5N}{12}$,$\frac{7N}{12}$）、（$\frac{N}{12}$,$\frac{11N}{12}$）上往上擴張，然後有如樹木分枝再往上分支成 3 個數圈，並以類推繼續擴大。

4	12	36	8	24	72
					
4	4×3	4×3^2	8	8×3^1	8×3^2

3. 2-樹型數圈系和 N 的關係

2-樹型數圈系有兩組：在 2-樹型數圈系**原型黑洞數圈**必爲（**0，N**）：{1, 2, 4, 5, 7⋯ }和（$\frac{N}{2}$，$\frac{N}{2}$）：{2, 4, 8, 10, 14⋯ }，隨著爆炸上限 N 的質因數 3 個數的增加，數圈系會在數圈（$\frac{N}{3}$，$\frac{2N}{3}$）或（$\frac{N}{6}$，$\frac{5N}{6}$）上往上擴張，然後有如樹木分枝往上分支成 3 個數圈，並以類推繼續擴大。

1	3	9	27	81
				
1	3	3^2	3^3	3^4
2	6	18	54	162
				
2	2×3	2×3^2	2×3^3	2×3^4

4. 啞鈴型數圈系和 N 的關係

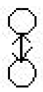
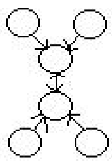
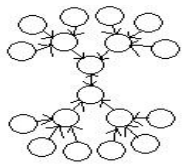
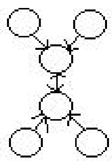
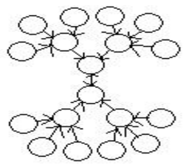
我們發現了啞鈴型中 N 有質因數 3，會影響啞鈴型的層數關係：若 N 有 2 個質因數 3，則啞鈴型有 3 層，以此類推。啞鈴型的兩個數圈黑洞內自然數的數對有 3 組，啞鈴型原型黑洞數圈必

爲 $(\frac{N}{5},\frac{4N}{5})$、$(\frac{2N}{5},\frac{3N}{5})$：{5, 10, 20, 25, 35⋯}；

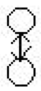
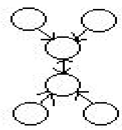
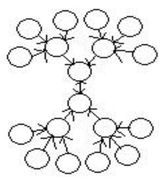
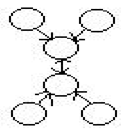
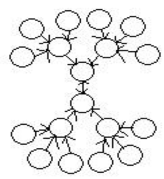
$(\frac{N}{10},\frac{9N}{10})$、$(\frac{3N}{10},\frac{7N}{10})$：{10, 20, 40, 50, 70⋯}；

$(\frac{N}{8},\frac{7N}{8})$、$(\frac{3N}{8},\frac{5N}{8})$：{8, 16, 32, 40, 56⋯}。

5 的倍數: 10 的倍數:

5	15	45	10	30	90
					
5^1	5×3^1	5×3^2	10	10×3^1	10×3^2

8 的倍數:

8	24	72	16	48	144
					
8	8×3	8×3^2	16	16×3	16×3^2

5. 單環型數圈系的數圈個數與爆炸上限的關係

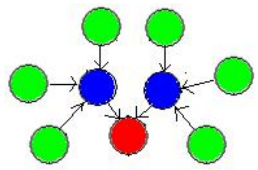
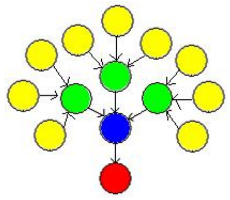
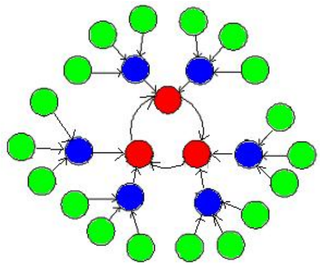
我們整理出單環型數圈系的數圈個數與爆炸上限的關係表（k≠3 的倍數）：

數圈個數	3 個數圈	4 個數圈	5 個數圈	6 個數圈	8 個數圈	9 個數圈
爆炸上限	7xk、13xk	16xk、20xk	11xk、61xk	52xk、56xk、73xk、91xk	17xk、32xk	19xk、37xk

由自然數的大爆炸圖譜中，可以發現爆炸上限 N 爲 3 的倍數時，它所擁有的環型一定是個多層環型。換言之，若乘以 3 的倍數的話，它將會是一個多層環型，而不是單環型了。

6. 質因數 3 在數圈系裡的角色

我們將爆炸上限 N 作質因數分解，發現質因數 3 的個數跟數圈系結構圖的數圈層數有關係，N 有多少個質因數 3，它的數圈系結構圖裡就有多少層數圈。

1-樹型數圈系的結構圖裡，以紅色黑洞數圈開始往上伸展，有幾個 3 的次方，它就會有幾層數圈。例：N＝36＝ 4×3^2 ，所以 N＝36 圖譜裡的 1-樹型數圈系的結構圖就會有 3 層，第 1 次是往上長 2 個數圈，之後每次增加都是 1 個數圈往上長 3 個數圈。	
2-樹型數圈系的結構圖裡，以紅色黑洞數圈開始往上伸展，有幾個 3 的次方，它就會有幾層數圈。例：N＝27＝ 3^3 ，所以 N＝27 圖譜裡的 2-樹型數圈系的結構圖就會有 4 層，第 1 次是往上長 1 個數圈，之後每次增加都是 1 個數圈往上長 3 個數圈。	
在環型數圈系的結構圖裡，多層環型的第 2 層的數圈是由第 1 層的數圈發展出來的。第 1 層的每個數圈往外發展，分支就會多 2 個數圈；如果第 2 層又有分支，則分支的數圈數就是 3 個數圈，之後每次增加都是 1 個數圈往上長 3 個數圈。它的原型爲最裡面的環狀黑洞數圈。例：N=63= $3^2\times 7$,因爲有 2 個 3，所以除了第一層的環狀黑洞數圈，往外擴張 2 層的數圈。	

四、利用 4-N 法則產生的數圈系和爆炸上限的關係

1. 自然數是 奇數 時一定有孤立型數圈系

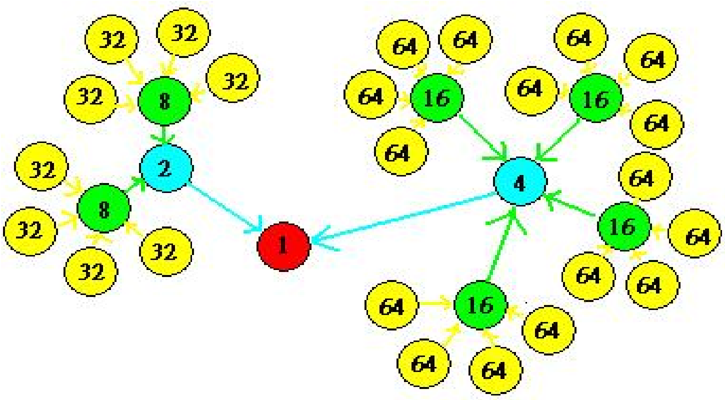
（1）當自然數爲奇數時，皆有（0,N）型孤立型數圈系。如：1 、 3 、 5 、 7 、 9 、 11.........

（2）當自然數爲 3×奇數時，皆有（$\frac{N}{3}$,$\frac{2N}{3}$）型孤立型數圈系。如： 3、 9 、 15 、 21.........

（3）當自然數爲 5×奇數時，皆有（$\frac{N}{5}$,$\frac{4N}{5}$）、（$\frac{2N}{5}$,$\frac{3N}{5}$）型孤立型數圈系。如： 5、15、25、35、45.........

2. 由孤立型數圈系推導出樹型數圈系

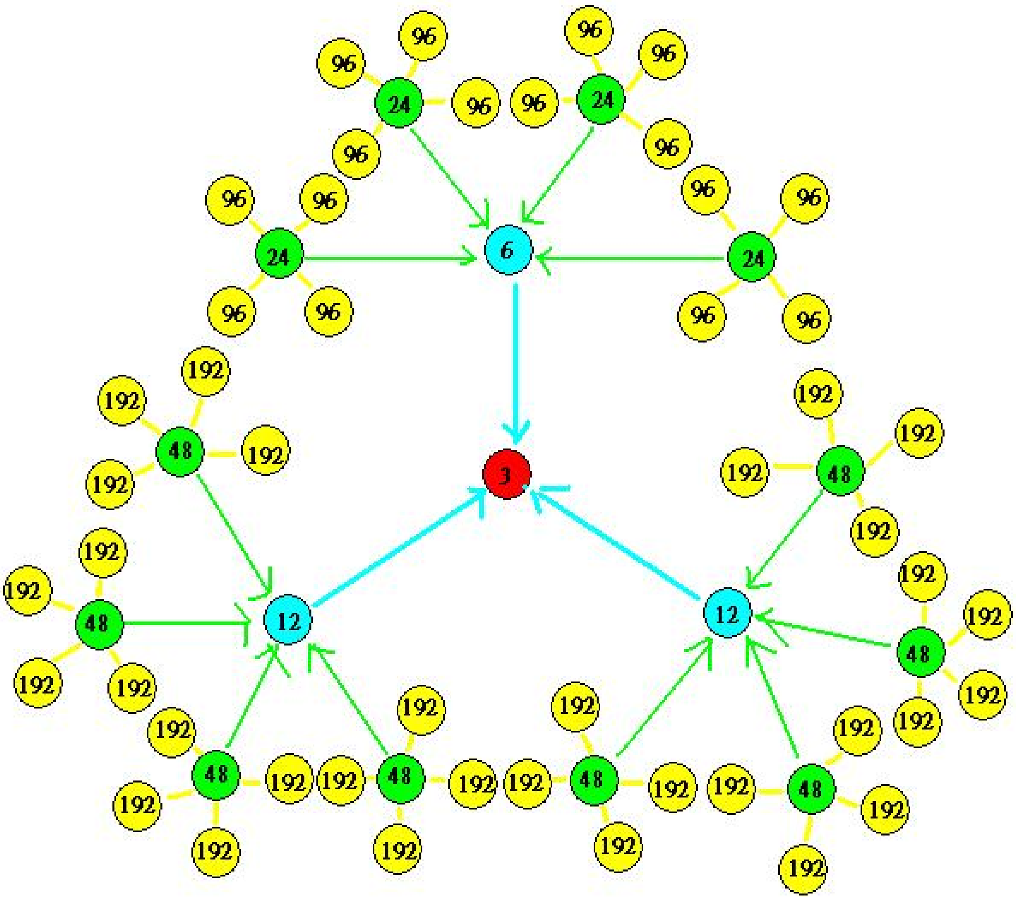
在 4 -N 爆炸模型中，共會有 4 組不同的孤立型數圈系，它們的通式分別爲（0,N）、（$\frac{N}{3}$,$\frac{2N}{3}$）、（$\frac{2N}{5}$,$\frac{3N}{5}$）、（$\frac{N}{5}$,$\frac{4N}{5}$）。我們發現這些孤立型數圈會依爆炸規模的擴大，長成不同型態的樹型數圈系。我們發現乘上 2 倍與乘上 4 倍所得的自然數爆炸模型成長的方式會不同，於是將它們的關係整理成如下的圖形。



（0.N）{1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .13…}

上圖中，紅色數圈爲（0,N）的孤立型數圈，（0,N）的孤立型數圈在奇數皆會出現，就是上方數列所表達的意思。由數圈中的數字可看出，中央的 1 乘以 2 時會往一邊長出 1 個數圈（藍 2），再乘以一個 2〈就等同 1×4＝4 的結果〉會往另一個方向長出另 1 個數圈（藍 4），最後完成了第 2 層數圈。接著再乘以一個 2，從（藍 2）往左邊長出 2 個數圈（綠 8），再乘上一個 2〈就等同 1× 4× 4＝16 的結果〉，從（藍 4）往右邊長出 4 個數圈（綠 16），最後完成了第 3 層數圈。

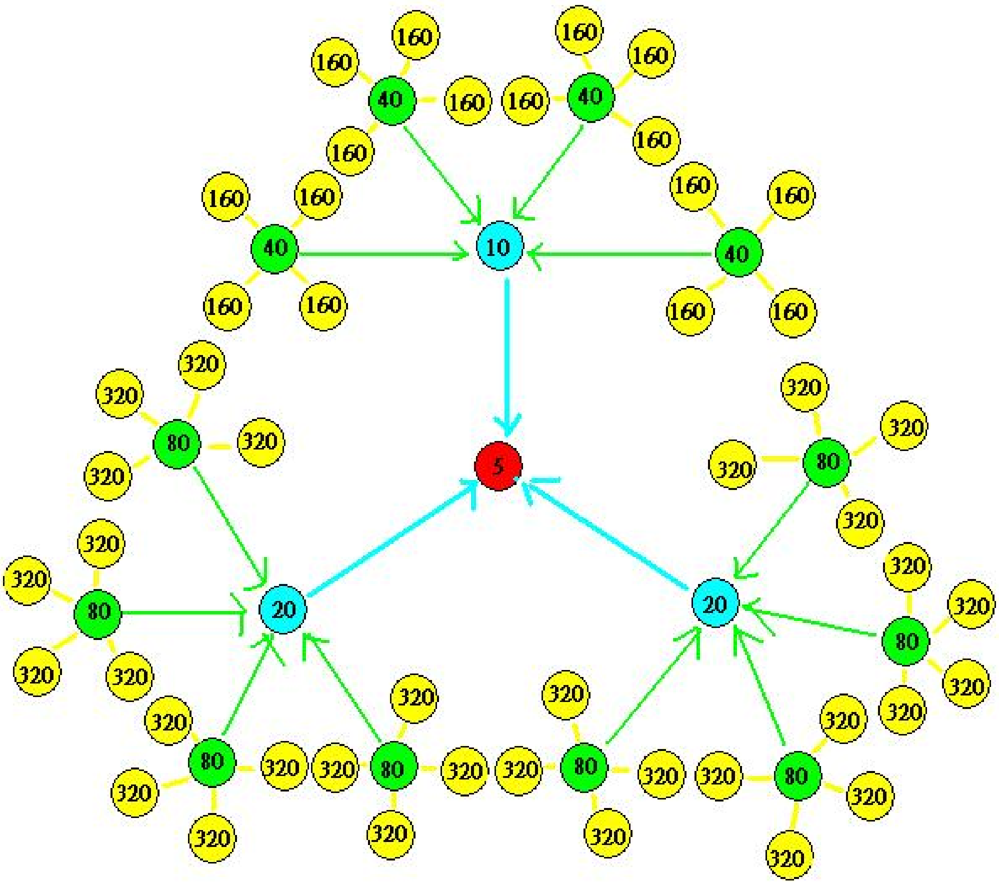
所以隨著爆炸上限從 N=**1**→ **2**→ **4**→ **8**→ **16**→ **32**→ **64**，爆炸模型會隨之以上述方式成長。當 N＝3 時，其爆炸模型內必會有（0,N）的孤立型數圈，從 N=**3**→ **6**→ **12**→ **24**→ **48**→ **96**→ **192**，爆炸模型會隨之以上述方式成長。



$$\left(\frac{N}{3},\frac{2N}{3}\right)；\{\mathbf{3 , 9 , 15 , 21 , 27 \ldots}\}$$

上圖中，紅色數圈為（$\frac{N}{3}$, $\frac{2N}{3}$）的孤立型數圈，（$\frac{N}{3}$, $\frac{2N}{3}$）的孤立型數圈在 3×奇數皆會出現。由數圈中的數字可看出，中央的 3 乘以 2 時會往一邊長出 1 個數圈（藍 6），再乘以一個 2〈就等同 3x4＝12 的結果〉會往另二個方向長出另 2 個數圈（藍 12），最後完成了第 2 層數圈。又乘以一個 2 會往第一次的方向長出 4 個數圈（綠 24），再乘上一個 2〈就等同 3× 4× 4＝48 的結果〉，從 2 個（藍 12）往右邊各長出 4 個數圈（綠 48），最後完成了第 3 層數圈。

所以隨著爆炸上限從 N=**3→ 6→ 12→ 24→ 48→ 96→ 192**，爆炸模型會隨之以上述方式成長。當 N＝9 時，其爆炸模型內必會有（0,N）的孤立型數圈，從 N=**9→ 18→ 36→ 72 → 144→ 288→ 576**，爆炸模型會隨之以上述方式成長。



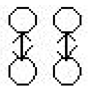
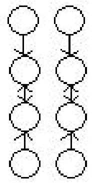
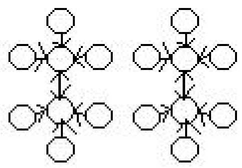
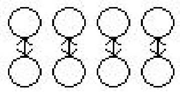
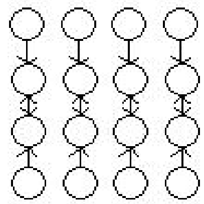
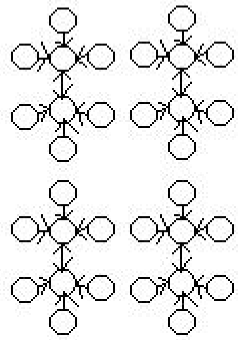
$$\left(\frac{N}{5},\frac{4N}{5}\right);\left(\frac{2N}{5},\frac{3N}{5}\right)\ \{5\ ,15\ ,25\ ,35\ ,45\ \ldots\}$$

上圖中，紅色數圈爲 $\left(\frac{2N}{5},\frac{3N}{5}\right)$ 和 $\left(\frac{N}{5},\frac{4N}{5}\right)$ 的兩組孤立型數圈，在 N=5×奇數會同時出現。此樹型的構造與 N＝3×奇數時的樹型相同，不同的是，這兩組樹型出現時的自然數數列和上一組是不同的。

3. 4-N 大爆炸中啞鈴型數圈系和 N 的關係

啞鈴型的兩個數圈黑洞內自然數的數對有 6 組， 15 的倍數有 2 組，17 的倍數有 4 組。我們發現了啞鈴型中 N 有因數 2 和 4，會影響啞鈴型的層數關係。另外，以啞鈴型數圈系原型黑洞數圈出現規律必爲{15, 45, 75, 105 … }；{17, 51, 85, 119 … }。

15 的倍數：　　　　　　　　　　　　　17 的倍數：

15	30	60	17	34	68
					
15	15×2	15×4	17	17×2	17×4

4. 單環型數圈系的數圈個數與爆炸上限的關係

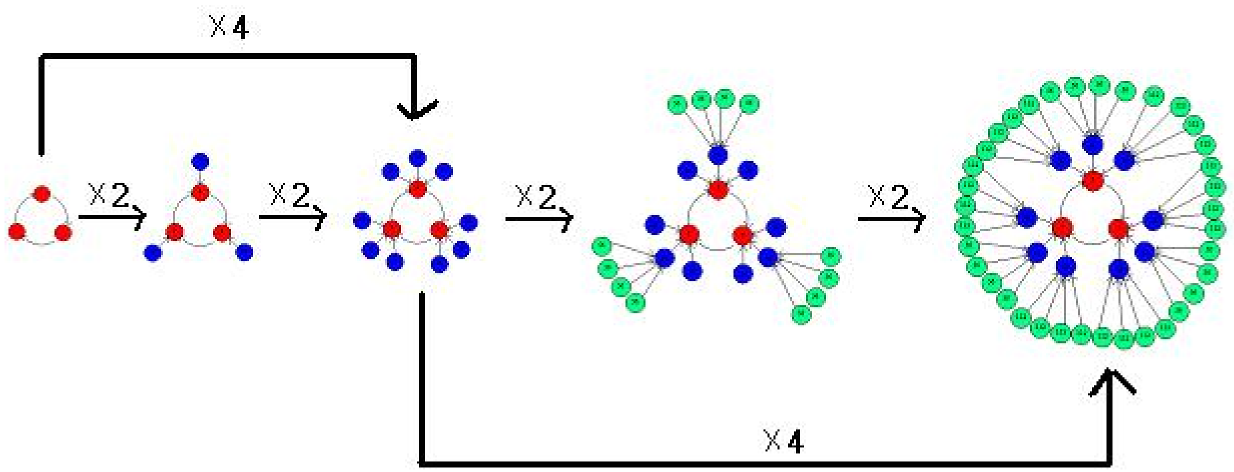
我們整理出單環型數圈系的數圈個數與爆炸上限的關係表（k=奇數）：

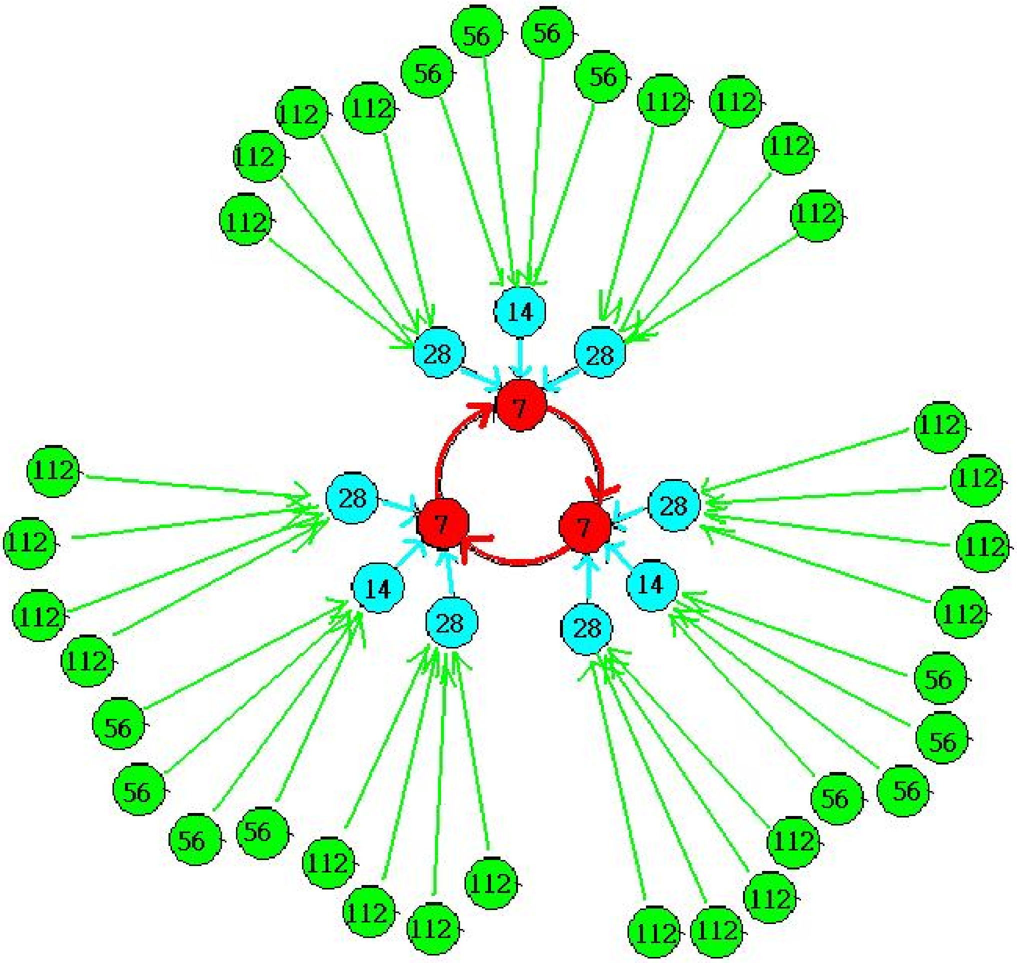
數圈個數	3 個數圈	4 個數圈	5 個數圈	6 個數圈	7 個數圈	9 個數圈	10 個數圈
爆炸上限	7xk、9xk	51xk、85xk	11xk、25xk	35xk、39xk	29xk、43xk	19xk、27xk	55xk、75xk

由自然數的大爆炸圖譜中，可以發現爆炸上限 N 為偶數時，它所擁有的環型一定是個多層環型。換言之，若乘以偶數的話,，它將會是一個多層環型，而不是單環型了。

5. 因數 2 和 4 在數圈系裡的角色

在 4-N 爆炸圖譜裡，4 的因數有 1，2，4。所以爆炸上限 N 只要乘上 2 或 4，就會多 1 層的分支，有擴張的效果。以循環節是 3 的單環型數圈系為例，在單環型數圈系的結構圖裡，只要爆炸上限 N×2，必會從紅色黑洞數圈往外伸展，在第 2 層長了分支，但並未完全長齊。必須再乘上 1 個 2，則第 2 層的所有分支才會完全生成。以 N =14 為例，其圖譜有第二層的分支，但卻未全部長齊。但只要再乘 1 個 2，N=28 的爆炸圖譜的第 2 層分支就全都生成完整（如下圖）。





在第 2 層到第 3 層也是相同的伸展方式。以爆炸上限 N=56 為例，我們從 28×2=56 發現在 N=56 的爆炸圖譜中只長出了第 3 層某部分的分支。而 N=56×2=112 的爆炸圖譜中，在第 3 層的分支就全部生成完整。

所以環型數圈系若爆炸上限乘以 2，雖然會增加 1 層，但只會長出一部分的分支，要完整的生成下一層需再乘以 1 個 2 才能達成。如果爆炸上限直接乘以 4，那就會將下一層的分支全部一次長齊。

陸、 討論

一、 突破思考方式，以嶄新的方向討論自然數黑洞現象

過去的科展作品只是仿造別人曾經作過的數學遊戲，再加以擴大數字範圍討論，除了較無新意之外，還有一些缺點：

1. 只是不斷作機械式反覆計算，畫出部分結構圖並找出黑洞數字而已。
2. 沒有一套有效的分析方法，不能利用數學推理導出更大範圍的自然數結構圖。
3. 無法檢驗所畫結構圖的正確性，以致錯誤百出。

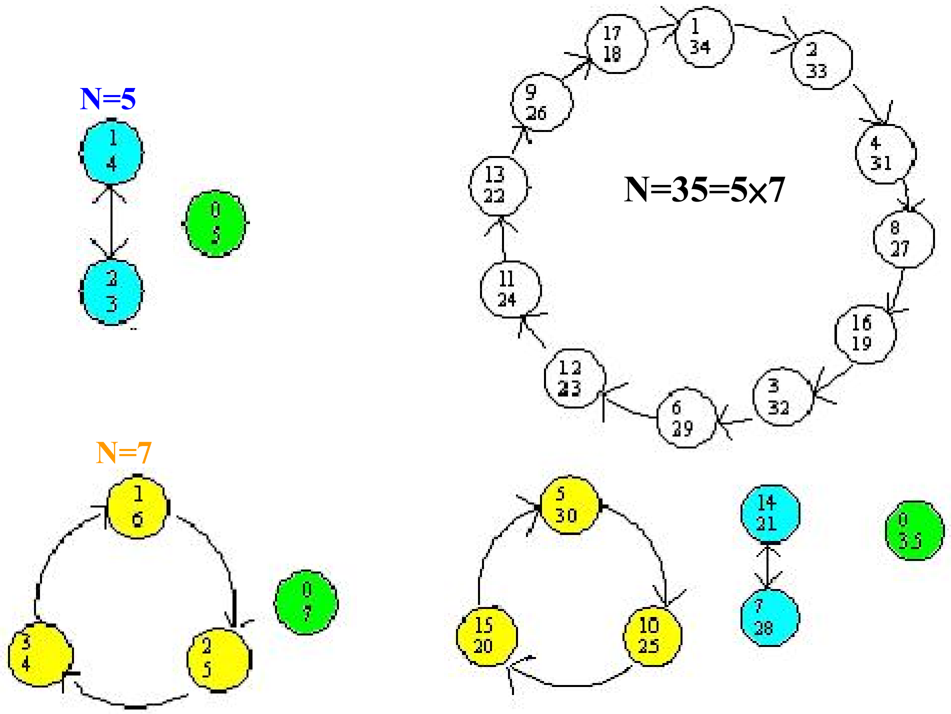
於是我們嘗試以全新的思考方式去探討自然數黑洞現象。首先我們討論一群自然數之間是否有黑洞現象，這些自然數以某種計算後一定要落入固定範圍，否則黑洞現象不會發生；再來一定要用某種計算把某個自然數經由計算連結到下一個自然數，於是就發明了**互補數差法則**來探討自然數黑洞現象。在我們的研究中，自然數因爲有了爆炸上限，所以有了產生黑洞現象的條件，而且我們把自然數經由互補數差法則連結到下一個自然數，最後當我們利用**互補數差法則**完成 N=1~200 的爆炸圖譜後，竟然發現可以利用自然數之間因倍數關係分析大爆炸圖譜。

對於爲什麼過去沒有人會想到以這種角度研究自然數的黑洞現象，我們歸納出幾點：

1. 利用**互補數**的概念作爲配對的方式是全新的嘗試。
2. 大家都知道所有的自然數同除以 N，其餘數必小於 N，卻沒人會聯想到以等倍數列同除以 N 會產生循環，而且這種循環可以用橡皮筋現象去組合成數圈系。而我們是剛好從結構圖上無意中觀察到，所以當初沒有利用**互補數**的概念可能也不會有此發現。
4. 我們使用電腦幫助作大量的 K-N 法則計算，過去在電腦未如此普遍的年代是沒法完成如此大的數的計算。

二、 發現可以利用自然數之間因倍數關係分析大爆炸圖譜

以 K-N 法則畫出的自然數爆炸圖譜，數圈系的結構圖可以用爆炸上限 N 的因倍數關係來分析，例如在 2-N 法則下 N=35 時，35 有因數 5 和 7，所以 N=35 的結構圖內的數圈系群必有 N=5 和 N=7 的數圈系。換句話說，N=5 時，有孤立型和啞鈴型數圈系；N=7 時，有孤立型和 3-環型數圈系→ N=35 時必有孤立型、啞鈴型和 3-環型數圈系。



因數分析法的效用：

1. 不管爆炸上限 N 設定多少，利用自然數的因倍數關係，運用因數分解法找出 N 的所有因數，我們可以預測出它的爆炸圖譜有哪些數圈系。
2. 我們可以運用因數分解法檢驗所畫圖譜的正確性，例如當我們畫 N＝35 的圖譜時，沒有畫出啞鈴型數圈系，但是我們知道 N=5 的圖譜有啞鈴型數圈系，我們就知道少畫了；在 N＝35 時，若畫出樹型數圈系，但是我們知道樹型數圈系是不可能出現在奇數上，我們就知道畫錯了。

用爆炸上限 N 的因倍數關係來分析數圈系結構圖的原理：

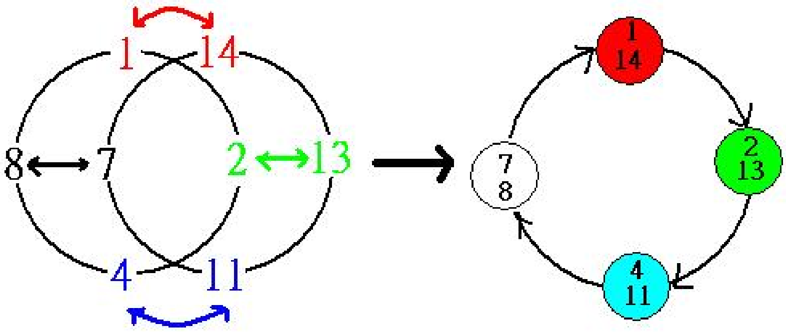
舉例說明，N=5 有啞鈴型數圈系（1,4）<->（2,3），因為 35 是 5 的 7 倍，我們把（1,4）<->（2,3）內的數字乘以 7，所以 N=35 時，必有啞鈴型數圈系（7,28）<->（14,21）。

三、 橡皮筋現象

由**研究過程四**我們知道，利用 K-N 法則算出餘數數列可畫出爆炸上限 N 圖譜的簡型，再利用**橡皮筋現象**組成圖譜。**橡皮筋現象**是我們非常重大的發現，從未有人把所有自然數以 K 倍數列的方式呈現，再同除以 N 算出餘數數列，最後把這些有循環節的餘數數列可以以互補數的角度結合。**橡皮筋現象**共有二型：

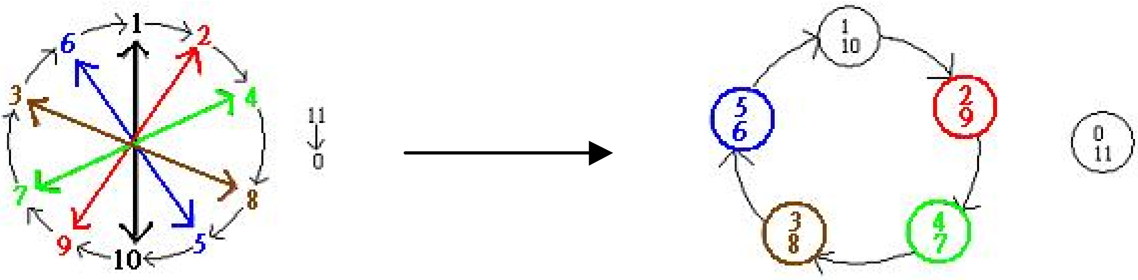
1．疊合型：

以 N=15 爲例，利用 **2-15 法則**所得的餘數數列，依照排列順序來畫出簡型。其簡型如下圖爲兩個環型循環，如同兩條一樣大小的橡皮筋，利用互補數的原理，將兩條橡皮筋疊再一起，最後組合成一個循環節是 4 的單環型數圈系。



2．自我生成型：

以 N=11 的簡型爲例，利用互補數的原理，將一條橡皮筋對折成兩圈，使數字與數字結合，最後組合成一個循環節是 5 的單環型數圈系。



N=11 的簡型

四、 孤立型數圈系與樹型數圈系的關係探討

分類 2-N 爆炸圖譜~4-N 爆炸圖譜的數圈系，發現所有樹型數圈系都是從孤立型數圈系生成來的。觀察 K-N 爆炸圖譜，我們發現：

1. 在 K-N 爆炸圖譜中，爆炸上限 N 是 K 的倍數時，絕不會出現的孤立型數圈系。
2. 討論 K1-N 和 K2-N 爆炸圖譜，當 K1 是 K2 的因數時，K2-N 爆炸圖譜的孤立型數圈系必包含著 K1-N 爆炸圖譜的孤立型數圈系。例如在 4-N 爆炸圖譜中，(0，N)型和（$\frac{N}{3}$，$\frac{2N}{3}$）型的孤立型數圈系也是 2-N 爆炸圖譜中的孤立型數圈系。

K-N 爆炸圖譜的孤立型數圈系通式表			
	2-N	3-N	4-N
(0，N)型	奇數	自然數（3 的倍數除外）	奇數
（$\frac{N}{3}$，$\frac{2N}{3}$）型	3×奇數		3×奇數
（$\frac{N}{2}$，$\frac{N}{2}$）型		偶數（3 的倍數除外）	
（$\frac{N}{4}$，$\frac{3N}{4}$）型		4 的倍數（3 的倍數除外）	
（$\frac{N}{5}$，$\frac{4N}{5}$）型			5×奇數
（$\frac{2N}{5}$，$\frac{3N}{5}$）型			5×奇數

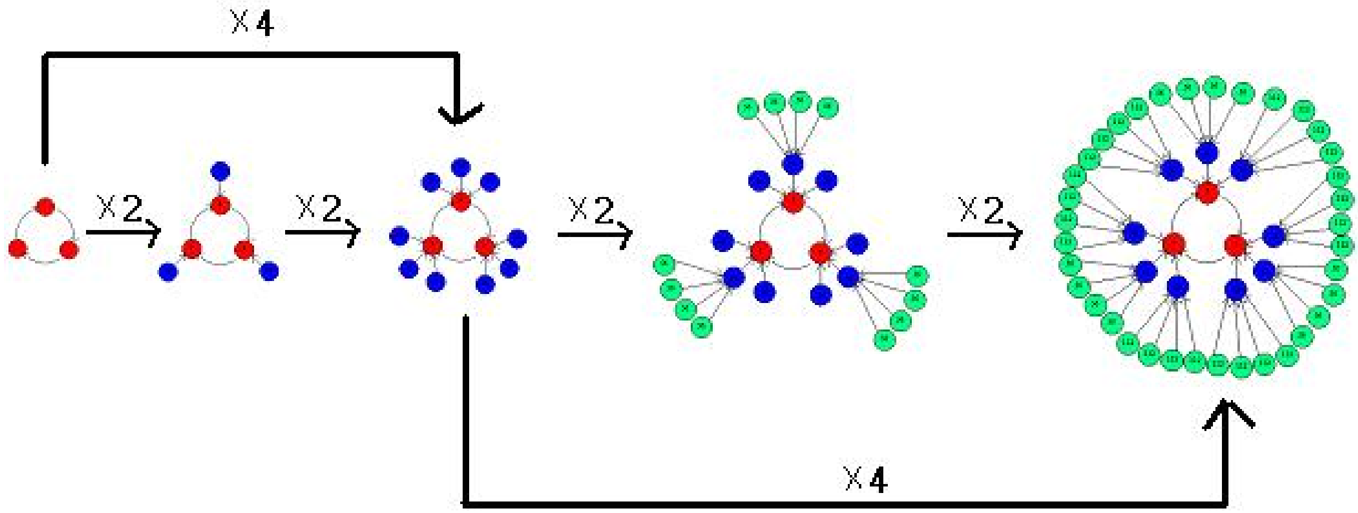
3. 所有的數圈系可分成二大系統：環型和樹型。孤立型數圈系的個數決定樹型數圈系的種類個數，例如 3-N **爆炸圖譜**有三種孤立型數圈系，所以也有三種樹型數圈系。
4. 在所有的 **K-N 爆炸圖譜**中，如果爆炸上限 N 是**質數**，則只會存在**孤立型數圈系**和**單環型數圈系**。因爲若 N 是質數，K 不是 N 的因數，就不會增加數圈系的層數。
5. 由上面表格通式的分母，我們可以猜測出 **5-N 爆炸圖譜孤立型數圈系**的通式及個數，但我們仍無法分析出其原因。

五、 K 在 K-N 爆炸圖譜中和數圈系之層數關係

如果 K 是爆炸上限 N 的質因數，則 N 有 n 個質因數 K，其數圈系就有 n+1 層。以 2-28 爆炸圖譜爲例，N＝2×2×7，有 2 個**質因數 2**，所以其環型數圈系共有 3 層，2-樹型數圈系共有 3 層。

如果 K 是爆炸上限 N 的因數，則 N 有 n 個因數 K，其數圈系就有 n+1 層。但是如果 N 只是 K 的因數之倍數，K 的因數也會增加層數，但是會長得不完全，我們稱這種狀態爲不完全增長。

在 4-N 爆炸圖譜裡，4 的因數有 1，2，4。所以爆炸上限 N 只要乘上 2 或 4，就會多一層的分支，有擴張的效果。以循環節是 3 的單環型數圈系爲例，在單環型數圈系的結構圖裡，只要爆炸上限 N×2，必會從紅色黑洞數圈往外伸展，在第 2 層長了分支，但並未完全長齊。必須再乘上 1 個 2，則第 2 層的所有分支才會完全生成。以 N =14 爲例，其圖譜有第 2 層的分支，但卻未全部長齊。但只要再乘 1 個 2，N=28 的爆炸圖譜的第 2 層分支就全都生成完整（如下圖）。



六、1-N ～ 4-N 爆炸圖譜中數圈系的結果彙整

1-N 爆炸圖譜只有孤立型數圈系。以 1-4 爆炸圖譜為例，以 1-4 法則可畫出 3 個孤立型數圈系－（0, 4)；(1, 3)；(2, 2)。

1 倍數列	1	1	1	1	1	1	1
餘數數列	1	1	1	1	1	1	1
1 倍數列	2	2	2	2	2	2	2
餘數數列	2	2	2	2	2	2	2
1 倍數列	3	3	3	3	3	3	3
餘數數列	3	3	3	3	3	3	3
1 倍數列	4	4	4	4	4	4	4
餘數數列	4	4	4	4	4	4	4

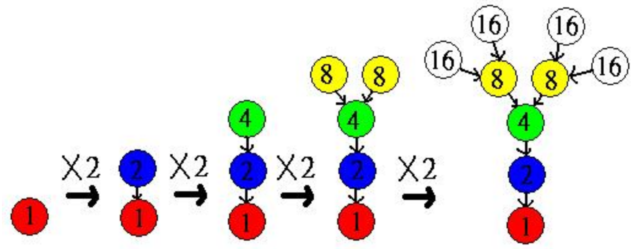
樹型數圈系和爆炸上限的關係：

2-N 爆炸圖譜

3-樹型－原型黑洞數圈

必為（0,N)：{1, 3, 5, 7, 9⋯ }。

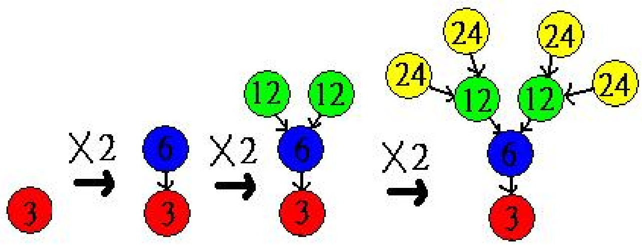
爆炸上限 N 每增加 2 倍，數圈軌道會往上增加一層。



2-樹型－原型黑洞數圈

必為（$\dfrac{N}{3}$，$\dfrac{2N}{3}$）：{3, 9, 15, 21, 27⋯ }。

爆炸上限 N 每增加 2 倍，數圈軌道會往上增加一層。

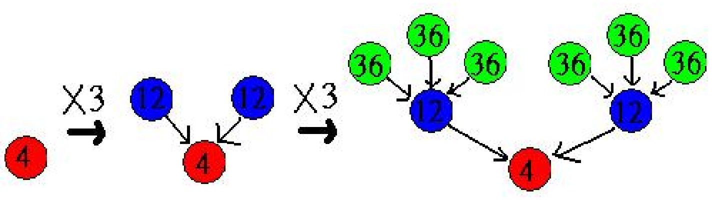


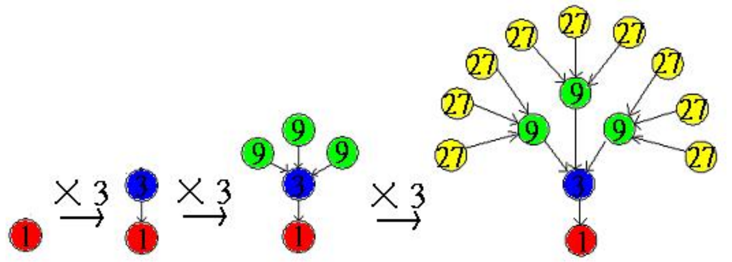
3-N 爆炸圖譜

1-樹型－原型黑洞數圈

必為（$\dfrac{N}{4}$，$\dfrac{3N}{4}$）：{4, 8, 16, 20, 28⋯ }。

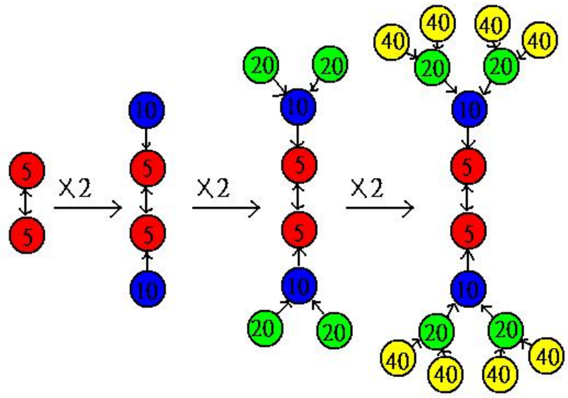
爆炸上限 N 每增加 3 倍，數圈軌道會往上增加一層。



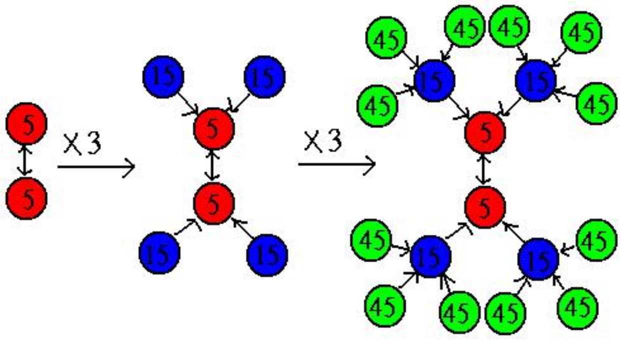
2-樹型－原型黑洞數圈 必為（0，N）：{1, 2, 4, 5, 7⋯ }和 $\left(\frac{N}{2},\frac{N}{2}\right)$：{2, 4, 8, 10, 14⋯ }。 爆炸上限 N 每增加 3 倍，數圈軌道會往上增加一層。	

啞鈴型數圈系和爆炸上限的關係：

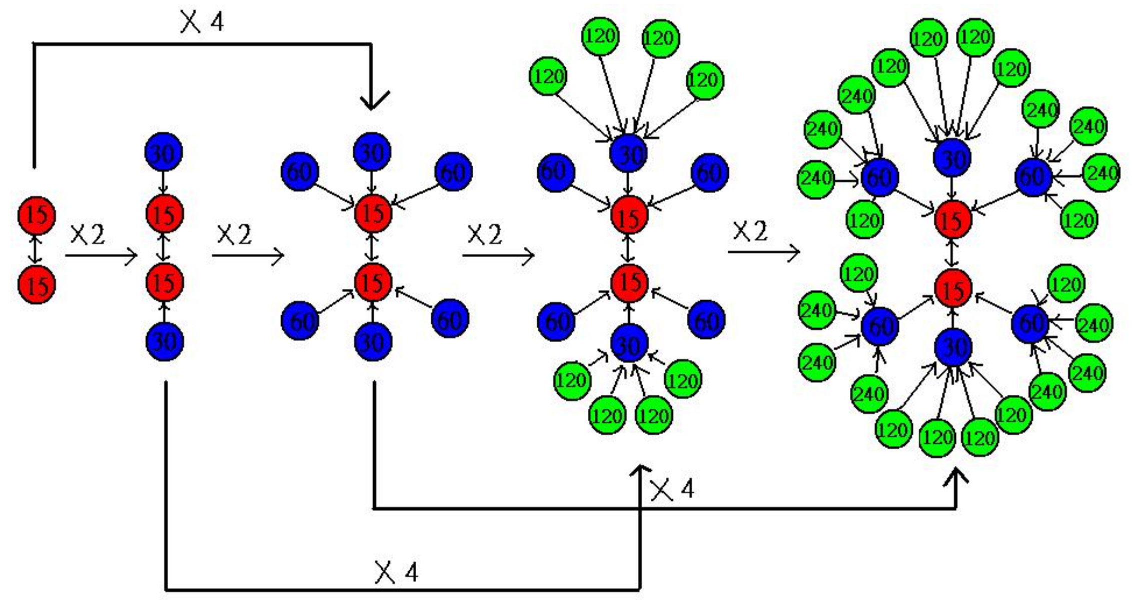
2-N 爆炸圖譜

原型黑洞數圈 必為 $\left(\frac{N}{5},\frac{4N}{5}\right)$、$\left(\frac{2N}{5},\frac{3N}{5}\right)$：{5, 15, 35, 45⋯ }。 爆炸上限 N 每增加 2 倍，數圈軌道會增加一層。	

3-N 爆炸圖譜

原型黑洞數圈必為 $\left(\frac{N}{5},\frac{4N}{5}\right)$、$\left(\frac{2N}{5},\frac{3N}{5}\right)$： {5, 10, 20, 25, 35⋯ }； $\left(\frac{N}{10},\frac{9N}{10}\right)$、$\left(\frac{3N}{10},\frac{7N}{10}\right)$： {10, 20, 40, 50, 70⋯ }； $\left(\frac{N}{8},\frac{7N}{8}\right)$、$\left(\frac{3N}{8},\frac{5N}{8}\right)$： {8, 16, 32, 40, 56⋯ }。 爆炸上限 N 每增加 3 倍，數圈軌道會增加一層。	

4-N 爆炸圖譜

原型黑洞數圈出現規律必爲{15, 45, 75, 105 … }；{17, 51, 85, 119 … }。 爆炸上限 N 每增加 2 倍，數圈軌道會增加一層，但是是不完全增長；每增加 4 倍，數圈軌道會完整增加一層。


因爲啞鈴型數圈系爲多層環型數圈系的一種，多層環型數圈系和爆炸上限的關係可直接討論啞鈴型數圈系就行了。

七、研究限制

由於我們只是小學生，對於更深入的研究礙於數學知識的不足，所以對於某些部分無法作出更完整的結果，只能依據現有資料作出可能的一些推論，我們升上國中後會繼續研究，希望能有所突破。以下是我們分析過後的 2 個疑問：

1. 我們知道 K 在 K-N 爆炸圖譜中會影響數圈系的層數，但是原因我們還沒找到。
2. K 在 K-N 爆炸圖譜中是如何作用在數圈上，使得每層增加個數我們可以用通式算出，這點我們也未找到。

柒、 結論

一、 運用自創的互補數差法則所產生數圈系的類別與大小和爆炸上限的因數有關。

二、 觀察到橡皮筋現象，橡皮筋現象有兩型：疊合型和自我生成型。利用橡皮筋現象創造**K-N** 法則產生 K-N 爆炸圖譜。

三、 **K-N 法則：**

以 K 倍數列除以爆炸上限 N 的規則繪製新的自然數大爆炸圖譜可簡稱爲 K－N 大爆炸圖譜，而此規則也簡稱爲 K-N 法則。

四、 K-N 爆炸圖譜內的數圈系可分爲兩大類型：樹型和環型。其中的樹型是從孤立型進化來的，圖譜內孤立型的種類和個數決定樹型的種類和個數。

五、 **可以利用自然數之間因倍數關係分析大爆炸圖譜。**

1．運用因數分解法找出 N 的所有因數，我們可以預測出它的爆炸圖譜有哪些數圈系。

2．可以運用因數分解法檢驗所畫圖譜的正確性。

六、 在 K-N 爆炸圖譜中如果 K 是爆炸上限 N 的質因數，則 N 有 n 個質因數 K，其數圈系就有 n+1 層。

如果 K 是爆炸上限 N 的因數，則 N 有 n 個因數 K，其數圈系就有 n+1 層。如果 N 只是 K 的因數之倍數，K 的因數也會增加層數，但是會長得不完全，我們稱這種狀態爲不完全增長。

七、 在 K-N 爆炸圖譜中如果 K 的所有因數不是爆炸上限 N 的因數，圖譜內所有的數圈都是黑洞數圈。在所有的 K-N 爆炸圖譜中，如果爆炸上限 N 是質數，則只會存在孤立型數圈系和單環型數圈系。

捌、 參考資料及其他

一、 南一書局：國民小學數學第九冊（五上），因數和倍數。修訂版。民國 95 年八月。

二、 南一書局：國民小學數學第十冊（五下），怎樣解題－數列的規律。修訂版。民國 96 年元月。

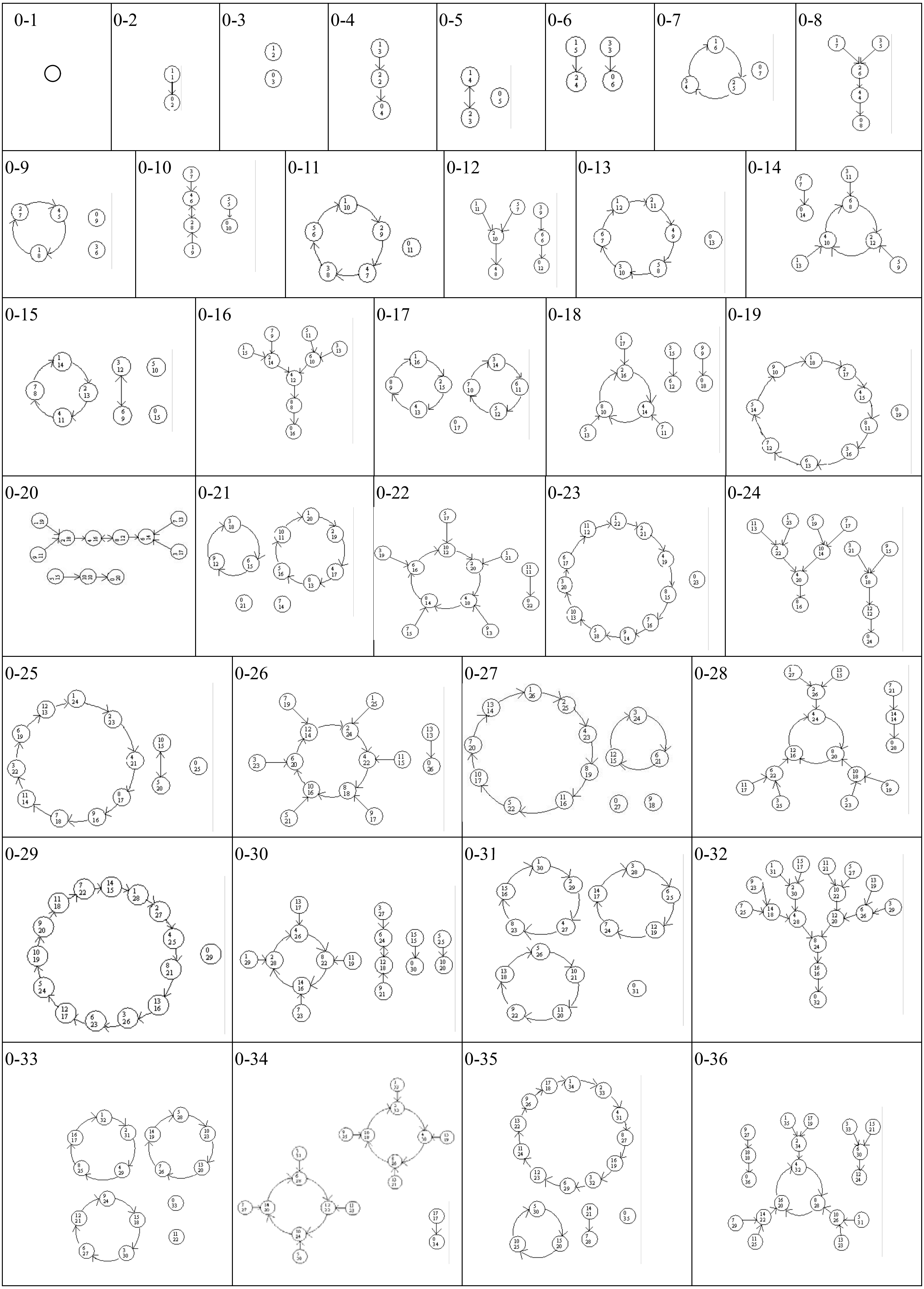
三、 南一書局：國民小學數學第十一冊（六上），最大公因數和最小公倍數，比和比值。修訂版。民國 95 年八月。

四、 第 45 屆全國科展國小數學科－魔數繞圈圈--從卡布列克序列出發。

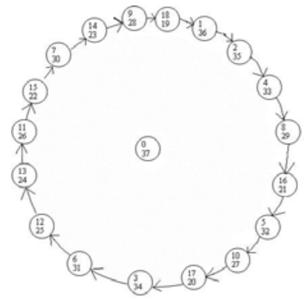
五、 第 46 屆全國科展國中數學科－旋渦鳴人—n 次方和黑洞的探討。

六、 數學傳播，22 卷 2 期，映射數列問題。民國 87 年 6 月。

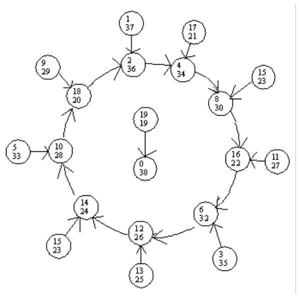
2-N 爆炸圖譜（範例）


0-1
0-2
0-3
0-4
0-5
0-6
0-7
0-8
0-9
0-10
0-11
0-12
0-13
0-14
0-15
0-16
0-17
0-18
0-19
0-20
0-21
0-22
0-23
0-24
0-25
0-26
0-27
0-28
0-29
0-30
0-31
0-32
0-33
0-34
0-35
0-36

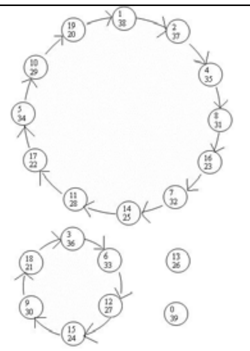
0-37



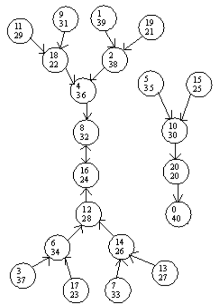
0-38



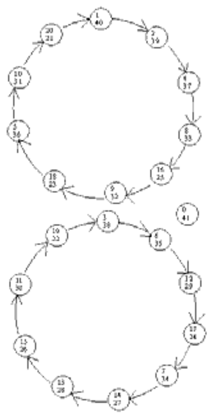
0-39



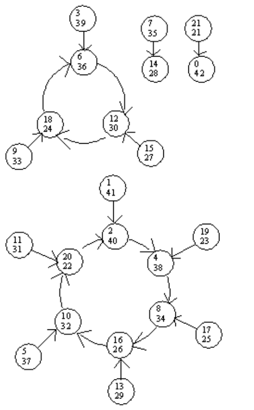
0-40



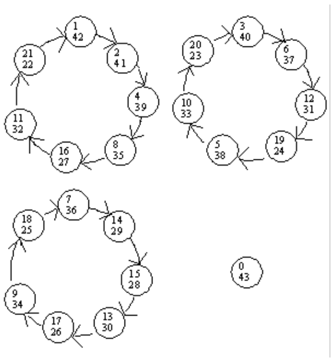
0-41



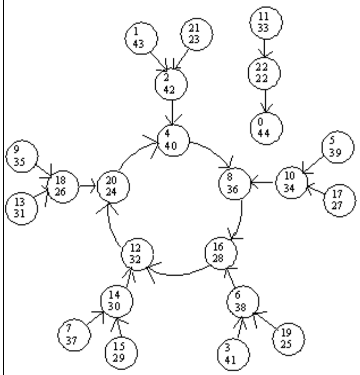
0-42



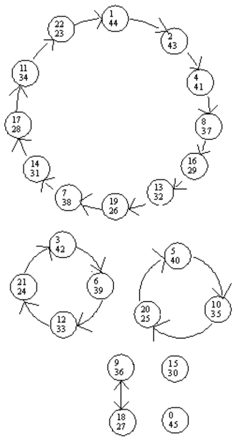
0-43



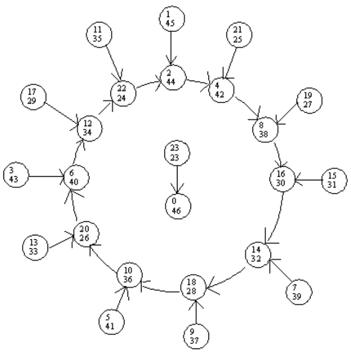
0-44



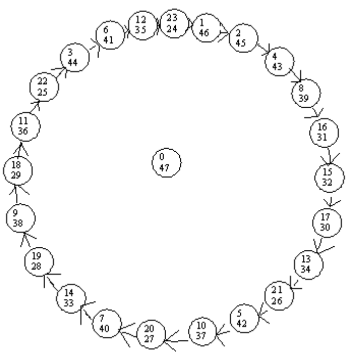
0-45



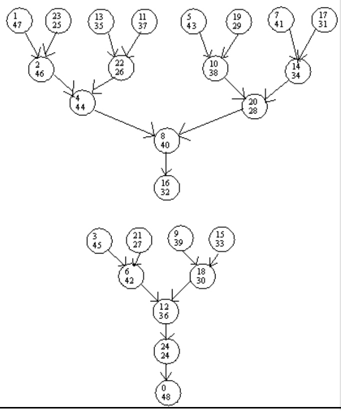
0-46



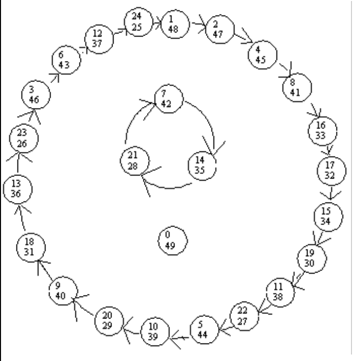
0-47



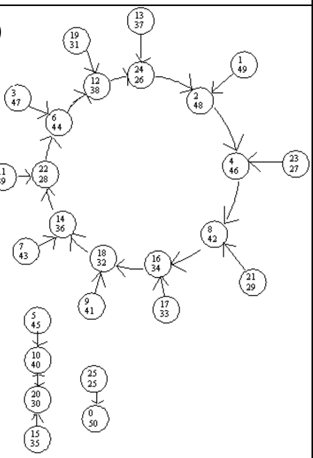
0-48



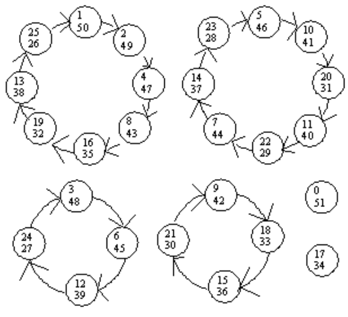
0-49



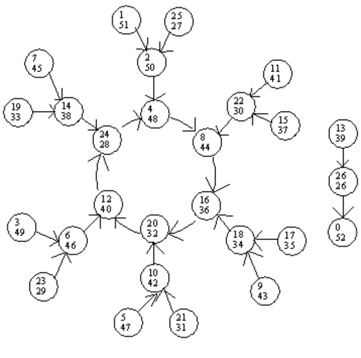
0-50



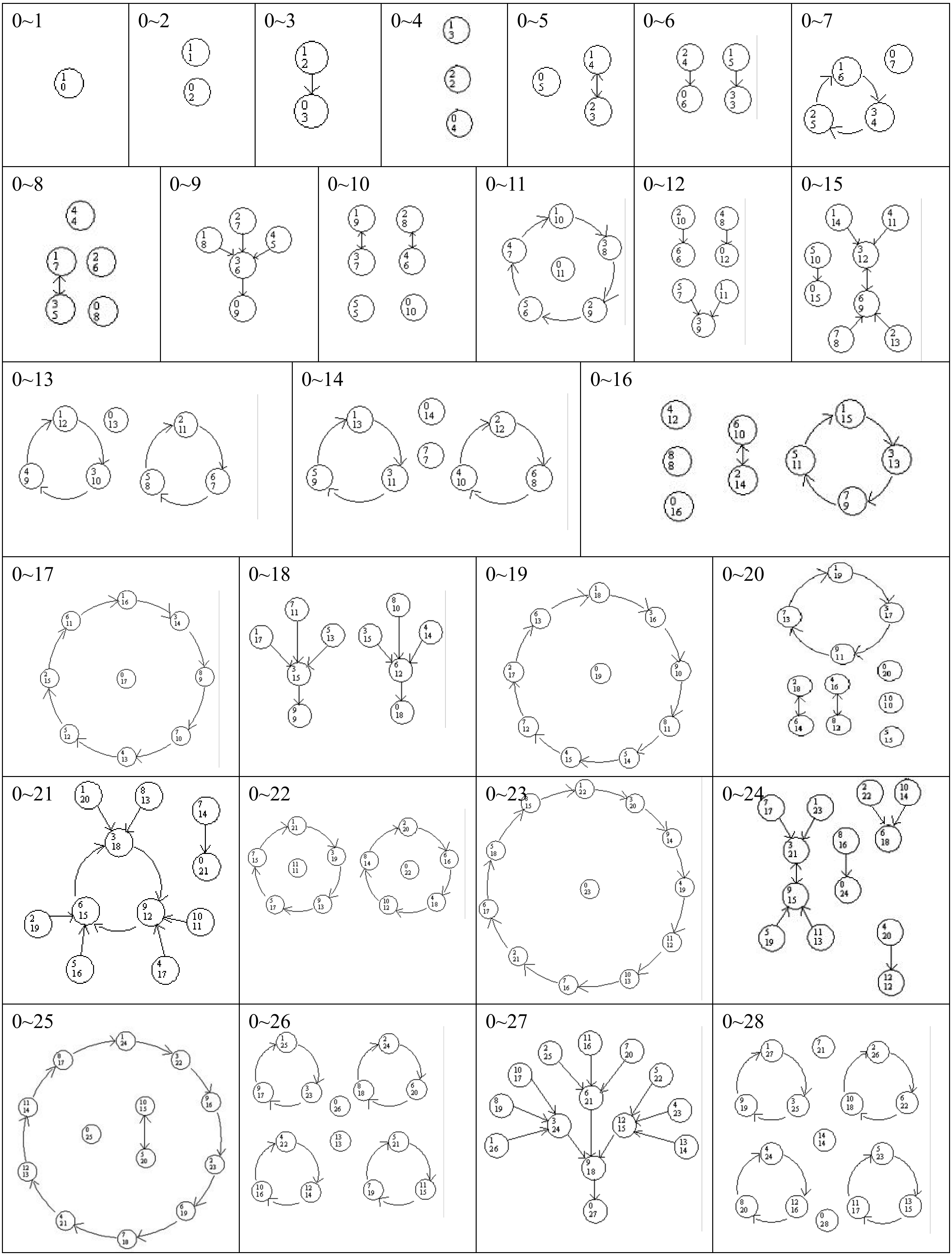
0-51



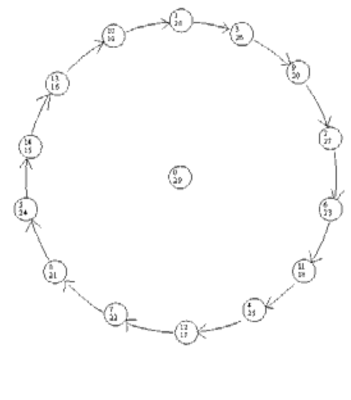
0-52



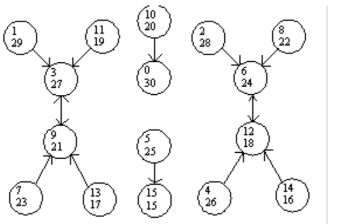
3-N 爆炸圖譜（範例）


0~1
0~2
0~3
0~4
0~5
0~6
0~7
0~8
0~9
0~10
0~11
0~12
0~15
0~13
0~14
0~16
0~17
0~18
0~19
0~20
0~21
0~22
0~23
0~24
0~25
0~26
0~27
0~28

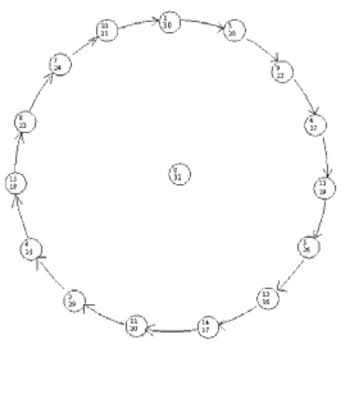
0~29



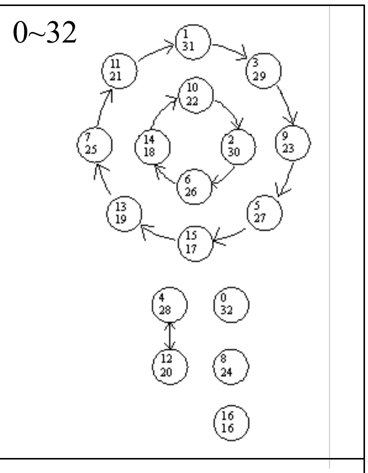
0~30



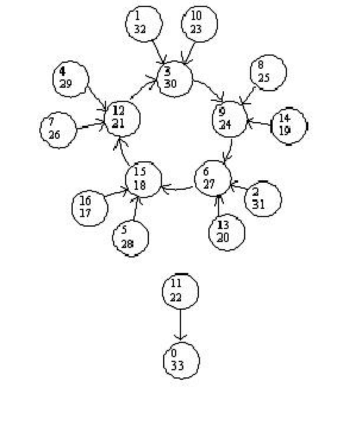
0~31



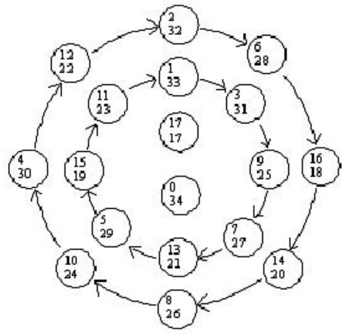
0~32



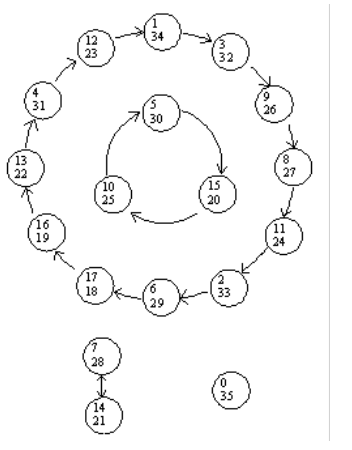
0~33



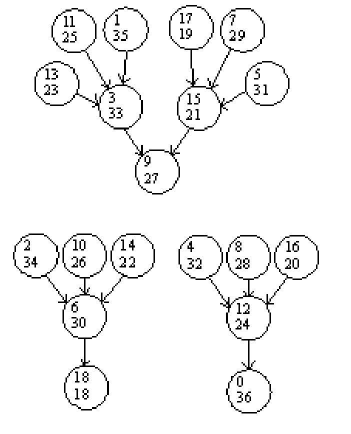
0~34



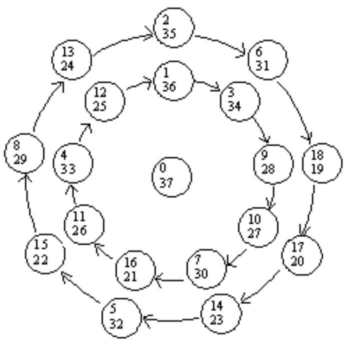
0~35



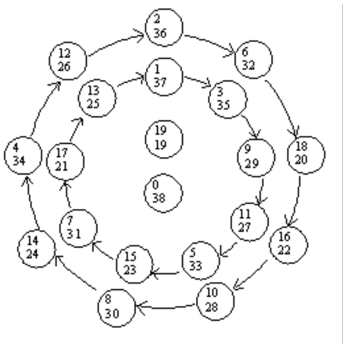
0~36



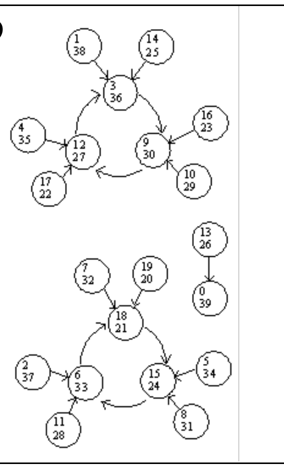
0~37



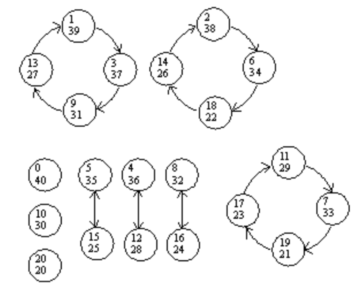
0~38



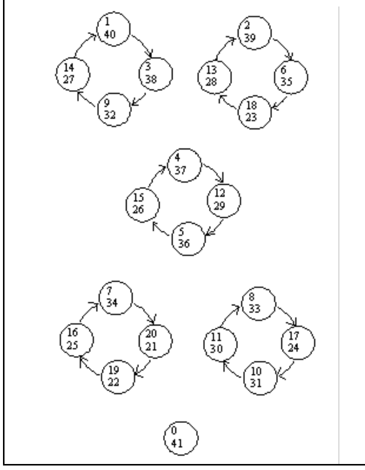
0~39



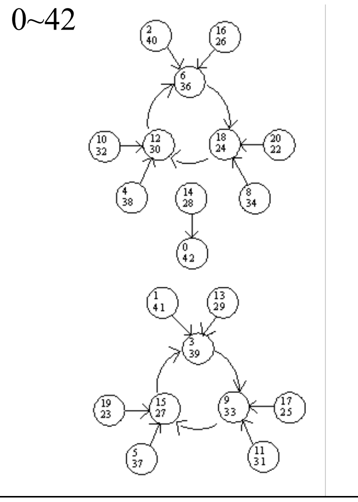
0~40



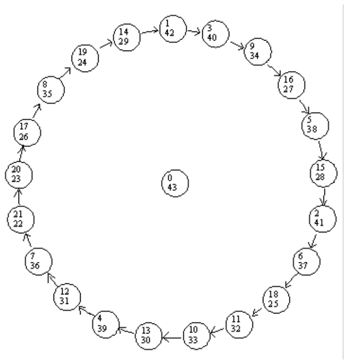
0~41



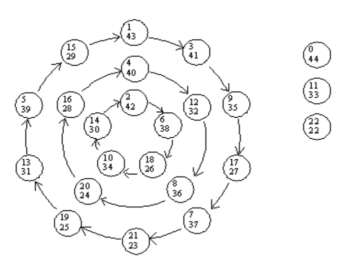
0~42



0~43



0~44



【評　語】　080412　運用因數分析法揭開自然數大爆炸的奧秘

本研究主題嘗試引用「黑洞」的概念。結合互補數對，以製作出自然數大爆炸圖譜，方法新穎有趣，探討過程細緻值得鼓勵。