中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080408

<u>數字的鏡子乘法</u>

學校名稱：臺北縣三峽鎮三峽國民小學

作者：	指導老師：
小五 莊雅涵	龔凡凱
小五 江山牧	
小五 林柏諺	

關鍵詞：<u>鏡子乘法</u>　<u>進位制</u>　<u>費式數列</u>

數字的「鏡子乘法」

摘要

我們研究的題目是屬於「覆面算」的一種題型。探討在 n 進位制中，符合 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{m-2}A_{m-1}A_m \times N = A_mA_{m-1}A_{m-2}\cdots\cdots A_3A_2A_1$ 的 m 位被乘數，其中 N＝2～(n－1)，n 爲該進位制的「基數」。並歸納在所有進位制中，解答的一般性。

壹、研究動機

「有一個四位數 ABCD，乘以 4 後得到的答案是 DCBA，請問這個四位數是多少？」。答案爲「2178」—2178×4＝8712。然後我們想到：若這個題目的被乘數爲二位到多位，會有什麼樣的答案？如果乘數換成其他正整數，又會有什麼發展？於是我們便著手研究。

而在縣賽結束後，老師到比賽現場，碰到另外一位國展作品指導老師，他建議我們要做「n 進位」。一經探究，這使研究成員們發現了更多數學之美。

貳、研究目的

一、求出在十進位制中，符合 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{m-2}A_{m-1}A_m \times N = A_mA_{m-1}A_{m-2}\cdots\cdots A_3A_2A_1$ 的 m 位數。

二、承一，並求出解答之形式及答案數量。

三、求出十二進位～二進位的鏡子乘法解，並探求其形式及數量。

四、證明各進位的鏡子乘法解之一般性

參、研究器材及專有名詞

一、筆、計算紙、電算器、電腦軟體 Microsoft Excel。

二、專有名詞：**覆面算、鏡子乘法、迴文數、進位制、高斯符號、費式數列**。

(一)**覆面算**：是指將算式中全部或一部分的數字，改成用文字或符號來替代的計算問題；一個覆面算問題，可能會有數個解答。

(二)**鏡子乘法**：（本研究小組命名）

1.在 n 進位制中，如果 $(A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{m-2}A_{m-1}A_m)_n \times (N)_n = (A_mA_{m-1}A_{m-2}\cdots\cdots A_3A_2A_1)_n$ 成立，2≦N≦(n－1)，n 是基數；稱此時的乘式爲「鏡子乘法」。

2.我們稱 $(A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{m-2}A_{m-1}A_m)_n \times (N)_n = (A_mA_{m-1}A_{m-2}\cdots\cdots A_3A_2A_1)_n$，爲 **“N 的 m 位鏡子乘法“**。

3.而符合鏡子乘法算式的「被乘數」就是 N 的鏡子乘法解。

(三)**迴文數**：迴文數是指類似 25452，從前面讀與從後面讀皆相同，所以稱爲迴文數。

(四)進位制：**進位制**是一種記數方式，可以用有限的數字符號代表所有的數值。可使用數字的數目稱爲基數，基數爲 n，即可稱 n 進位制，簡稱 n 進位。現在最常用的是十進位，通常使用 10 個阿拉伯數字 0-9 進行記數。

在本研究中，因處理的數字甚多，爲了記錄方便，如果不會混淆，有時不會記成進位制的形式。

(五)高斯符號：高斯符號是一個數學符號，形式爲方括號〔x〕，表示不大於（等於或小於）數 x 的最大整數，即 x－1＜〔x〕≦x

(六)費式數列："1、1、2、3、5、8……"這個數列稱爲費波那契數列，簡稱「費氏數列」。性質是：由第 3 項起，某項等於前兩項和。

(七)

1.原始解：研究的過程會發現大部份多位數解是由某一固定解變化而來，此固定解稱之，例如 2178、1089、$(1078)_9$……等。

2.擴張解：由原始數解變化而得的多位數解，稱之。例如 21978、217802178 等皆和「2178」有關。

(八)其他：爲了表達某多位數中一般性的位值，有時會「框」起來表示。例如 10$\boxed{n\text{-}2}\boxed{n\text{-}1}$是一個四位數；1$\boxed{t\text{-}2}$是兩位數。

肆、研究過程與方法

一、討論 4 的鏡子乘法

(一)探求被乘數 4 位的解答

討論順序：我們依被乘數的位數爲序；由 4 位、5 位……任意多位探究起，再討論 1～3 位。

我們將 ABCD×4＝DCBA 討論的過程做成表格一如下：

<table>
<tr><th>位名</th><th>條件</th><th>可能値</th><th>推論</th><th>成立的可能性</th><th>推得的位値</th><th>解答</th></tr>
<tr><td rowspan="2">千位A 個位D</td><td rowspan="2">A 不能太大，因爲如果太大，乘積會變成五位數，因此 A 只可能是 1 或 2</td><td>A＝1</td><td>表示乘積的個位數 D 是 1，但 4 的倍數裡個位數沒有 1，故 A≠1。</td><td>×</td><td rowspan="2">A＝2
D＝8</td><td rowspan="5">2178x4＝8712</td></tr>
<tr><td>A＝2</td><td>表示 D 可能是 3、8。如果是 3，答案的首位就要放 3，但兩千多x4 的答案不會是三千多，所以 D 只可能是 8—可符合兩千多x4 的積變成八千多。</td><td>✓</td></tr>
<tr><td rowspan="3">百位B 十位C</td><td rowspan="3">B 若是大於 3 的數，進位之後，D 會比 8 大，乘積甚至變成五位數，所以 B 只能是 0、1、2。</td><td>B＝0</td><td>4 的倍數加上個位數進位的 3，個位數不會出現 0，所以 B≠0。</td><td>×</td><td rowspan="3">B＝1
C＝7</td></tr>
<tr><td>B＝1</td><td>C 可能是 2、7。先放 2，看有沒有符合「2128x4＝8212」，但 2100x4≧8400＞8212，所以 C＝7。若 C 是「7」，則得到 2178x4＝8712，我們便找到答案了。</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>B＝2</td><td>因爲 4xD 進位 3，表示 4xC 的個位數爲 9，相加才會是 2，但 4 的倍數個位不會有 9，所以沒有答案，因而 B≠2。</td><td>×</td></tr>
</table>

【表格一】

故確定 ABCDx4＝DCBA 被乘數的答案是 2178，而且只有這個解；我們討論的方法是：

1. 先探討被乘數左起第一位和最後一位，因這兩位的數字會相互對調。
2. 再探討第二位和倒數第二位、第三位和倒數第三位等……。
3. 利用十進位制數的乘法運算規則和結果，估測位值。
4. 有時一個位值有二種以上的可能，這時我們便推求該位值的合理性；或窮舉試算。

之後的求解過程，便是依照上述的步驟進行，因篇幅故而省略。

(二)探求被乘數 4～8 位的解答

我們將被乘數 4～8 位等答案做成表格如下觀察：

4 的鏡子乘法解答列表(4～8 位)	
被乘數位數	被乘數的解答
4	2178
5	21978
6	219978
7	2199978
8	21999978 21782178

【表格二】

表格一分析：1.被乘數是 4～7 位時皆只有一個答案。
2.被乘數為 8 位有兩個答案。
3.以上面表格看來，解答的一種形式為前兩位為「21」，末兩位為「78」，中間則皆是「9」
4.被乘數為 8 位，則解答有另一種形式：將兩個「2178」「組合」起來。

(三)探求被乘數 9～14 位的解答

求解過程略，答案列表如下：

4 的鏡子乘法解答列表(9～14 位)		
被乘數位數	被乘數的解答	答案的數目
9	219999978 217802178	2
10	2199999978 2197821978 2178002178	3
11	21999999978 21780002178 21978021978	3
12	219999999978 219978219978 217821782178 217800002178 219780021978	5

13	2199999999978 2178000002178 2178219782178 2197800021978 2199780219978	5
14	21999999999978 21780000002178 21782199782178 21978217821978 21978000021978 21997800219978 21999782199978 21780217802178	8

【表格三】

表格三分析

在此我們的觀察以答案的「形式」爲主，在同一個被乘數位數中：

1.第一種形式，是前兩位爲 21、末兩位爲 78，中間皆是 9，其後我們將此形式記成「1」。

2.除了上述形式，其他答案可分成若干「段」，且每「段」的「長度」有大有小，排列呈現迴文數的性質。以 14 位的解答爲例，見下表：

位數	解答	分段形式
14	21999999999978 21780000002178 21782199782178 21978217821978 21978000021978 21997800219978 21999782199978 21780217802178	1 4-6-4(1) 4-6-4(2) 5-4-5(1) 5-4-5(2) 6-2-6 7-7 4-1-4-1-4

【表格四】

＊表格四中的分段形式有些相同，故在其後標示(1)、(2)

(四)分段形式的更進一步探討

7
8
9
21 A BX…… Y DC78
× 4
87 C DY…… …X BA12

在求 4 的多位數的鏡子乘法解中，我們在求解的過程，發現被乘數左起兩位必是填 2 和 1，十個和個位必是 7 和 8（求解過程如表格一）。因為 A 須進位「3」，故 A 可能是 7、8、9，我們的探討整理如下方簡表：

<table>
<tr><th>可能值</th><th colspan="2">推測位值</th><th>結果</th><th>餘下的算式類型</th></tr>
<tr><td rowspan="2">A＝7</td><td>C＝1</td><td>B＝7、8、9，而 B 為 4xD 的個位數。故 B＝8</td><td>2178X……Y2178x4
＝8712Y……X8712</td><td>I</td></tr>
<tr><td>C＝6</td><td>表示 Bx4 得進位「8」，但最多進位「3」，故 C≠6</td><td colspan="2">╳</td></tr>
<tr><td>A＝8</td><td colspan="2">表示 Cx4 的個位為 5，但沒有 C 符合此條件，故 A≠8。</td><td colspan="2">╳</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A＝9</td><td>C＝4</td><td>表示 Bx4 進位得「8」，但最多進位「3」，故 C≠4</td><td colspan="2">╳</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C＝9</td><td rowspan="2">B＝7、8、9 但 B≠8 因為若成真則 Dx4 的個位數為 5，矛盾！故 B＝7、9</td><td>2197X……YD978x4
＝879DY……X7912</td><td>II</td></tr>
<tr><td>2199X……YD978x4
＝879DY……X9912</td><td>III</td></tr>
</table>

【表格五】

類型 II 的 D 經推算為 7，X＝8、Y＝2。觀察表格五，我們分類了算式類型來觀察，如下：

算式類型	被乘數
I	2178X□…□Y2178
II	21978□…□87912
III	2199X□…□Y9912

【表格六】

繼續推算中間尚未填數的部份，則得到表格七：

算式類型	被乘數	**X、Y、U、V 的可填值**
I	2178X□…□Y2178	(X、Y)＝(0、0)或(2、8)
II	21978U……V87912	(U、V)＝(0、0)或(2、8)
III	2199X□…□Y9912	(X、Y)＝(9、9)或(7、7)
註：(X、Y)及(U、V)係經推算而來，過程省略。		

【表格七】

我們將 14 位數解以類型來分，則有：

位數	解答	分段形式	類型
14	21999999999978	1	Ⅲ
	21780000002178	4-6-4(1)	Ⅰ
	21782199782178	4-6-4(2)	Ⅰ
	21978217821978	5-4-5(1)	Ⅱ
	21978000021978	5-4-5(2)	Ⅲ
	21997800219978	6-2-6	Ⅲ
	21999782199978	7-7	Ⅲ
	21780217802178	4-1-4-1-4	Ⅰ

【表格八】

表格八分析：十四位數的所有解皆可由類型來分類。

1.討論：

由於這三種類型是由推算多位數時，必會發生的形式，因而多位數鏡子乘法皆可分類爲這三種型式。

(1)分段形式之所以是「迴文數」，是因我們求解時，由左起第 n 位和倒數 n 逐個推算，左右往中間推進，因數字填寫的選擇而有各類的分段。

(2)這三種類型也可視爲一種樣子：多位數解左右兩端各 k 位，因應 k 值，左右兩端 k 位則各填入「k 位的『1』形式鏡子乘法解。

2.分段形式統整：

(1)除「1」形式外其它皆爲迴文數。

(2)其它形式，左右兩段各爲 219…978……219…978，「9」的數目由 0 起至多個。

3.我們依據討論，擬定了寫多位數解答的步驟如下：

(1)最左段和最末段不得比 4 位少，也只填該段位數的 4 鏡子乘法解中的「1 形式」就是 2199…978 的形式。

(2)比 4 位少的該段填「0」

(3)相鄰兩段不可同時比 4 位少

(4)相鄰段不可以都填「0」。

(5)若某段不少於 4 位，則有兩種填法：a.填該段位數的 4 鏡子乘法之「1」形式，b.都填「0」。例如將 14 位分成 4-1-4-1-4，則可寫成 21780217802178，但需遵守(2)、(3)限制。

4.步驟說明：

(1)上述(3)的限制則是爲了避免相鄰段皆比 4 位少，而必須都填「0」，便會違反(4)。

(2)上述(4)的限制是爲了避免答案重複，如果不限制，以 14 位爲例：2178-0-0000-0-2178 就會和 2178-0000000000-2178 重複。

(五)應用分段的步驟

我們應用分段步驟，加上互相訂正檢討——期間我們還幫老師補充了一些答案，指出老師忽略的解答——做出 4 的鏡子乘法解爲 15 到 20 位的結果，記錄在學生筆記本中。

以 18 位爲例，先依分段的數目依序寫下，再於不同數目的段數中，依照限制寫出答案：

分段的數目	可分段的形式	答案
1	1	219999999999999978
2	9-9	219999978219999978
3	4-10-4(1) 4-10-4(2) 5-8-5(1) 5-8-5(2) 6-6-6(1) 6-6-6(2) 7-4-7(1) 7-4-7(2) 8-2-8	217800000000002178 217821999999782178 219780000000021978 219782199997821978 219978000000219978 219978219978219978 219997800002199978 219997821782199978 219999780021999978
4	4-5-5-4 5-4-4-5	217821978219782178 219782178217821978
5	4-1-8-1-4 4-2-6-2-4 4-3-4-3-4 4-4-2-4-4 5-1-6-1-5 5-2-4-2-5 6-1-4-1-6	217802199997802178 217800219978002178 217800021780002178 217821780021782178 219780219978021978 219780021780021978 219978021780219978
6	4-1-4-4-1-4	217802178217802178
7	7 段以上則違反步驟(1)，故以下無解。	

【表格九】

(六)被乘數爲 1～3 位無解，推算過程請參見學生筆記本。

(七)鏡子乘法解的數目

江同學發現，若將被乘數的位數以「奇」「偶」來分類，觀察它們的解答數目：

奇數位數	1	3	5	7	9	11	13
解答數目	0	0	1	1	2	3	5
偶數位數	2	4	6	8	10	12	14
解答數目	0	1	1	2	3	5	8

【表格十】

表格七分析：

解答數目的數列恰和數學習作的習題相吻合，正是「費氏數列」。

討論：

1.若真的是費式數列，就能掌握多位數的鏡子乘法解答數目了！

由於費式數列的內容超出國小數學課程範圍，我們查了資料，但仍知之不多。轉而請教老師，老師依據江同學提供的「線索」，證明了真的是「費式數列」！ (證明請參見附錄 1)

2.解答數量的表達式

為了配合本研究，規定費氏數列為 $F_0=0$、$F_1=1$，$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$，$k\geqq0$

因而有：

奇數位數	1	3	5	7	9	11	13
解答數目	F_0	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
偶數位數	2	4	6	8	10	12	14
解答數目	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6

【表格十一】

歸納則有：

位數 m	解答數量表示	一般式(使用高斯符號)
奇數	$F_{(m-3)/2}$，$m\geqq3$	$F_{[(m-2)/2]}$，$m\geqq2$ ($m=1$，解答數目$=0$)
偶數	$F_{(m-2)/2}$，$m\geqq2$	

【表格十二】

回顧：我們得到 4 的多位鏡子乘法解的形式和答案數目。

二、探討 9 的鏡子乘法

(一)

被乘數位數	被乘數的解答	答案的數目
2	×	0
3	×	0
4	1089	1
5	10989	1
6	109989	1
7	1099989	1
8	10891089 10999989	2

【表格十三】

表格十三分析：1.被乘數的解答和表格二有著相同的形式。
2.答案的分段也和表格二相同。

因而我們將表格二和十三合併如下比較：

被乘數位數	4 的鏡子乘法解	9 的鏡子乘法解	答案的數目
4	2178	1089	1
5	21978	10989	1
6	219978	109989	1
7	2199978	1099989	1
8	21999978 21782178	10891089 10999989	2

【表格十四】

分析和推測：我們猜想 9 的鏡子乘法答案的形式和 4 的一致。

(二)討論：

經過大家的探討，得到一些「9」和「4」鏡子乘法的相同點：

1.一～三位皆沒有解答；四位以上才有答案。
2.五位～八位的答案形式以及解答的數目。

推算 9 的多位鏡子乘法解過程類似 4 的鏡子乘法，我們記錄在學生筆記本裡。

故結果是 9 的鏡子乘法解和 4 的鏡子乘法解分段形式相同，分段步驟和寫法限制也一樣；m 位數答案數目也因位數一樣而一致——$F_{[(m-2)/2]}$，$m \geqq 2$。

(三) 被乘數爲 1～3 位無解，試算過程請參見學生筆記本。

(四)統整 9 的鏡子乘法解答：
1.答案分段形式和 4 的鏡子乘法解相同。
2.找答案的方法和 4 的鏡子乘法相同
3.多位數的解答數目相同。

三、2、3、5、6、7、8 的鏡子乘法

我們在試算 2、3、5、6、7、8 的 **2～5** 位鏡子乘法時，都沒有解答。
它們都是因爲在推求左起第一位和個位時，便找不到數字可滿足條件；或雖填了這兩位後，但算式無法成立。因字數限制故僅列簡表如下，討論過程請見學生筆記。

n 的鏡子乘法	無解的原因	
2 的鏡子乘法	算式不成立	無數字可滿足條件
3 的鏡子乘法	✓	
5 的鏡子乘法	✓	
6 的鏡子乘法		✓
7 的鏡子乘法		✓
8 的鏡子乘法		✓

【表格十五】

回顧：

4、9 的鏡子乘法有解，並有相同形式解和數目，而前述皆在十進位制中討論，有了不錯的結果，但若是在其他進位制中，又有什麼發展呢？

四、n 進位的探討

探討範圍：二至九進位的被乘數一～八位數，乘數 2～(n－1)，其中 n 是進位制的基數。

(一) n 進位制的意義，記數方式，運算規則和原理，請閱參考資料。

(二)本小組探討方式，以九進位爲例：

首先我們依據九進位的運算及記數規則，造了「八八乘法表」(見學生筆記)，以利用這個乘法表協助我們運算。探討範圍是：被乘數一～八位，乘數爲 2～8。

我們一步一步找解，思考及找答案方式略如十進位制，只是運算和表示要服從九進位的規定。

找答案的方式如下：

1.以四位數x3 爲例【無解的情形】:

$$\begin{array}{rr} & \text{ABCD} \\ \times & 3 \\ \hline & \text{DCBA} \end{array}$$

<table>
<tr><th>位名</th><th>條件</th><th>可能值</th><th>推論</th><th>成立的可能性</th><th>推得的位值</th><th>解答</th></tr>
<tr><td rowspan="2">千位 A
個位 D</td><td rowspan="2">A 不能太大，如果太大，乘積會變成五位數，因此 A 只可能是 1 或 2</td><td>A＝1</td><td>查八八乘法表得找不到 D 使得 Dx3 的個位數爲 1</td><td>×</td><td rowspan="2">×</td><td rowspan="2">×</td></tr>
<tr><td>A＝2</td><td>查八八乘法表得找不到 D 使得 Dx3 的個位數爲 2</td><td>×</td></tr>
</table>

【表格十六】

2.以四位數x8 爲例【有解的情形】:

$$\begin{array}{rr} & \text{ABCD} \\ \times & 8 \\ \hline & \text{DCBA} \end{array}$$

<table>
<tr><th>位名</th><th>條件</th><th>可能值</th><th>推論</th><th>成立的可能性</th><th>推得的位值</th><th>解答</th></tr>
<tr><td>千位 A
個位 D</td><td>A 不能太大，因爲如果太大，乘積會變成五位數，因此 A 只可能是 1。</td><td>A＝1</td><td>查八八乘法表得 D＝8 使得 Dx3 的個位數爲 1</td><td>✓</td><td>A＝1
D＝8</td><td rowspan="3">1078x8＝8701</td></tr>
<tr><td rowspan="2">百位 B
十位 C</td><td rowspan="2">Bx8 後未進位至千位</td><td>B＝0</td><td>表示 8xC+3 的個位是 0，其中 3 是由個位進位的數。查表得 C＝7，經驗算後得解：1078x8＝8701</td><td>✓</td><td>B＝0
C＝7</td></tr>
<tr><td>B＝1</td><td>表示 8xC+3 的個位是 1，查表得 C＝2，但 C 同時是 Bx8 的結果——「8」，產生矛盾。</td><td>×</td><td>×</td></tr>
</table>

【表格十七】

礙於篇幅所致，其他進位制，求鏡子乘法解的運算過程不在此呈現，我們把求出的答案連同十進位的列表於下：

<table>
<tr><th colspan="3">十進位～二進位的鏡子乘法解列表</th></tr>
<tr><th>進位制</th><th>被乘數位數</th><th>鏡子乘法解</th></tr>
<tr><td rowspan="7">十</td><td>1</td><td>×</td></tr>
<tr><td>2</td><td>×</td></tr>
<tr><td>3</td><td>×</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1089x9＝9801
2178x4＝8712</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10989x9＝98901
21978x4＝87912</td></tr>
<tr><td>6</td><td>109989x9＝989901
219978x4＝879912</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1099989x9＝9899901
2199978x4＝8799912</td></tr>
</table>

	8	10999989x9＝98999901、10891089x9＝98019801 21999978x4＝87999912、21782178x4＝87128712
九	1	╳
	2	17x4＝71
	3	187x4＝781
	4	1078x8＝8701 1887x4＝7881 1717x4＝7171 3256x2＝6523
	5	10878x8＝87801 18887x4＝78881 17017x4＝71071 32856x2＝65823
	6	108878x8＝878801 188887x4＝788881 187187x4＝781781 171717x4＝717171 170017x4＝710071 328856x2＝658823
	7	1088878x8＝8788801 1888887x4＝7888881 1870187x4＝7810781 1718717x4＝7178171 1700017x4＝7100071 3288856x2＝6588823
	8	10888878x8＝87888801、10781078x8＝87018701 18888887x4＝78888881 18717187x4＝78171781 18871887x4＝78817881 18700187x4＝78100781 17188717x4＝71788171 17171717x4＝71717171 17017017x4＝71071071 17000017x4＝71000071 32888856x2＝65888823、32563256x2＝65236523
	1	╳
	2	25x2＝52
	3	275x2＝572
	4	1067x7＝7601

八		1015x5＝5101 2156x3＝6512 2775x2＝5772 2525x2＝5252
	5	10767x7＝76701 11165x5＝65111 21756x3＝65712 25025x2＝25025 27775x2＝57772
	6	107767x7＝767701 102515x5＝515201 112665x5＝566211 217756x3＝657712 277775x2＝577772 252525x2＝525252 250025x2＝520052 275275x2＝572572
	7	1077767x7＝7677701 1016015x5＝5106101 1127665x5＝5667211 2177756x3＝6577712 2777775x2＝5777772 2750275x2＝5720572 2527525x2＝5257252 2500025x2＝5200052
	8	10777767x7＝76777701、10671067x7＝76017607 27777775x2＝57777772 27525275x2＝57252572 27752772x2＝57725772 27500275x2＝57200572 25277525x2＝52577252 25252525x2＝52525252 25025025x2＝52052052 25000025x2＝52000052 21777756x3＝65777712、21562156x3＝65126512
	1	╳
	2	15x3＝51
	3	165x3＝561
	4	1056x6＝6501

七		1665x3＝5661 1515x3＝5151
	5	10656x6＝65601 16665x3＝56661 15015x3＝51051
	6	106656x6＝656601 166665x3＝566661 165165x3＝561561 151515x3＝515151 150015x3＝510051
	7	1066656x6＝6566601 1666665x3＝5666661 1650165x3＝5610561 1516515x3＝5156151 1500015x3＝5100051
	8	10666656x6＝65666601、10561056x6＝65016501 16666665x3＝56666661 16515165x3＝56151561 16651665x3＝56615661 16500165x3＝56100561 15166515x3＝51566151 15151515x3＝51515151 15015015x3＝51051051 15000015x3＝51000051
六	1	╳
	2	╳
	3	╳
	4	1045x5＝5401 2134x2＝4312
	5	10545x5＝54501 21534x2＝43512
	6	105545x5＝545501 215534x2＝435512
	7	1055545x5＝5455501 2155534x2＝4355512
	8	10555545x5＝54555501、10451045x5＝54015401 21555534x2＝43555512、21342134x2＝43124312
	1	╳
	2	13x2＝31

五	3	143x2＝341
	4	1034x4＝4301 1443x2＝3441 1313x2＝3131
	5	10434x4＝43401 14443x2＝34441 13013x2＝31031
	6	104434x4＝434401 144443x2＝344441 131313x2＝313131 130013x2＝310031 143143x2＝341341
	7	1044434x4＝4344401 1444443x2＝3444441 1430143x2＝3410341 1314313x2＝3134131 1300013x2＝3100031
	8	10444434x4＝43444401、10341034x4＝43014301 14444443x2＝34444441 14313143x2＝34131341 14431443x2＝34413441 14300143x2＝34100341 13144313x2＝31344131 13131313x2＝31313131 13013013x2＝31031031 13000013x2＝31000031
四	1	╳
	2	╳
	3	╳
	4	1023x3＝3201
	5	10323x3＝32301
	6	103323x3＝323301
	7	1033323x3＝3233301
	8	10333323x3＝32333301，10231023x3＝32013201
三	1	╳
	2	╳
	3	╳
	4	1012x2＝2101
	5	10212x2＝21201

	6	102212x2＝212201
	7	1022212x2＝2122201
	8	10222212x2＝21222201，10121012x2＝21012101
二	1	╳
	2	╳
	3	╳
	4	1001x1＝1001
	5	10101x1＝10101
	6	101101x1＝101101
	7	1011101x1＝1011101
	8	10111101x1＝10111101，10011001x1＝10011001

【表格十八】

表格十八分析

1.各進位制中的共同點

(1)多位數皆由二位或四位的「原始解」「擴張」而成。

進位制	原始解	
	兩位數	四位數
十	╳	1089、2178
九	17	1078、3256
八	25	1067、2156
七	15	1056
六	╳	1045、2134
五	13	1034
四	╳	1023
三	╳	1012
二	╳	1001

【表格十九】

(2)擴張解形式似和十進位的「分段形式」相同。

(3)「奇」進位制裡皆有兩位數的解答，而且我們發現它們的形式是

$$1\boxed{t\text{-}2}\times\frac{t-1}{2}=\boxed{t\text{-}2}1$$ 其中 t 為奇基數。

(4)在 n 進位中，總有 $10\boxed{n\text{-}2}\boxed{n\text{-}1}\times(n-1)=\boxed{n\text{-}1}\boxed{n\text{-}2}01$ 的鏡子乘法解

(5)部分進位制中，若有二種以上原始解，有些則有倍數關係，見下表：

進位制	原始解的倍數關係
十	1089x2＝2178
九	1078x3＝3256
八	1067x2＝2156
六	1045x2＝2134

【表格二十】

(6)八進位中有一解「1015」，經試算仍無法歸納其形式變化，故無法掌握其數量。

(三)討論

1.列表觀察

莊同學猜測，她覺得在 n 位中總有一種形式的解答，就是：

$10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times(n-1)=\boxed{n-1}\ \boxed{n-2}\ 01$，其中 n 是該進位制的基數。

我們將十～二進位的 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times M$ 的乘積列表觀察：

十到二進位的 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times M$ 的乘積列表(n 是基數、M＝1～(n－1))									
進位制 / 乘數	十	九	八	七	六	五	四	三	二
被乘數	1089	1078	1067	1056	1045	1034	1023	1012	1001
x1	1089	1078	1067	1056	1045	1034	1023	1012	1001
x2	2178	2167	2156	2145	2134	2123	2112	2101	
x3	3267	3256	3245	3234	3223	3212	3201		
x4	4356	4345	4334	4323	4312	4301			
x5	5445	5434	5423	5412	5401				
x6	6534	6523	6512	6501					
x7	7623	7612	7601						
x8	8712	8701							
x9	9801								

【表格二十一】

2.表格二十一的發現

林同學針對表格二十一有了新的觀察：在 n 進位制中，由x1~xn-1 的乘積來看，千位和百位數值以「1」累增；十位和個位的數值則以「1」累減。因為乘法和連加有關，為了說明此現象，老師建議我們用一般式來探討——不妨先研究如下的式子(＊)

$$
\begin{array}{rcccc}
 & A & B & C & D \\
+ & 1 & 0 & \boxed{n-2} & \boxed{n-1} \\
\hline
 & E & F & G & H
\end{array}
$$

林同學提到：「D」扣掉 1 ，把「1」給加數的個位，因而使它滿成基數進位 1，那麼 H＝D－1。C 扣掉 1 給「n－2」，「n－2」再加上進位的 1，使 n－2 滿基數而進位。得到 G＝C－1。顯然 F＝B＋1、E＝A＋1，如此便說明了：在 n 進位制中，若四位數加上 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}$，那麼結果便有林同學發現的現象。

＊這裡的 C、D 應有限制：C＞1、D＞1。

若有 k 個 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}$ 連加，可看作 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}$ 運用林同學發現的規則「k－1」次，而得到 $k\ \boxed{k-1}\ \boxed{n-2-k}\ \boxed{n-1-k}$，所以得到下列定理：

林氏定理：n 進位中，形如 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}$ 的四位數，則有

$$10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1} \times k = k\ \boxed{k-1}\ \boxed{n-2-k}\ \boxed{n-1-k} \qquad 1 \leq k \leq (n-1)$$

3.表格二十一的另一個新發現

我們的目的是要證明莊同學的猜測，還在苦無線索時，江同學和莊同學又從表格發現了：每個進位制中，$10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1} \times k$ 和 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1} \times (n-k)$ 的乘積互為相反數。江同學表示似和林氏定理有關。經大伙討論後，對此，莊同學有個很棒的說明：

觀察其中一行的乘積，千位和百位數的順序分別是 1～(n－1)、0～n；十位和個位數的順序分別是(n－1)～0、n～1，見下表。

n 進位 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1} \times k$ 的乘積				
×k	千位	百位	十位	個位
1 2 3 ⋮ k ⋮ (n-2) (n-1)	1 2 3 ⋮ k ⋮ (n-2) (n-1)	0 1 2 ⋮ (k-1) ⋮ (n-3) (n-2)	(n-2) (n-3) ⋮ (n-2-k) ⋮ 2 1 0	(n-1) (n-2) ⋮ (n-1-k) ⋮ 3 2 1

【表格二十二】

千位這行的數字「旋轉」180˚後便和「個位」那行的相同；百位這行的數字「旋轉」180˚後便和「十位」那行的相同。而每行有 n－1 個數字，如此一來，千位該行第 k 個數字和個位第 n－k 數字相同；百位該行第 k 個數字和十位第 n－k 數字相同。

因而把第 k 列和第 n－k 列的四位數相比如下：

	千位	百位	十位	個位
第 k 列數	A_k	B_k	C_k	D_k
第 n－k 列數	A_{n-k}	B_{n-k}	C_{n-k}	D_{n-k}

【表格二十三】

故得到 $A_k=D_{n-k}$、$B_k=C_{n-k}$、$C_k=B_{n-k}$、$D_k=A_{n-k}$，這就表示第 k 列數和第 n－k 列數互為相反數，根據林氏定理，這兩數分別為 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times k$ 和 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times(n-k)$ 的乘積，故得證。

江—莊定理：

在 n 進位制中，$10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times k$ 和 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times(n-k)$ 的乘積互為相反數，$1\leq k\leq(n-1)$

$n\geqq 2$

4.峰迴路轉

利用江莊定理，當 k＝1 時，莊同學的推測便成立了。

5.表格十五的分析(5)，也是江—莊定理應用的結果。如果 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times A$ 和 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times B$ 的乘積互為相反數，而當 B＝A×C 時，則 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times A$ 和 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times A\times C$ 相反，表示 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}\times A$ 也是一個解，而且是 $10\boxed{n-2}\ \boxed{n-1}$ 的「A」倍。

6.奇進位的二位形式解

$$1\boxed{t-2}\times\frac{t-1}{2}=\boxed{t-2}1 \qquad \text{其中 t 爲奇基數}$$

(1)觀察下列表格

進位制	九	七	五
被乘數	17	15	13
×1	17	15	13
×2	35	33	31
×3	53	51	
×4	71		

【表格二十四】

分析：

①每行中的乘積，上下列的數字，下列的十位比上列的多「2」；而個位則少「2」。

②承 1，以九進位爲例：17→35→53→71，「17」的「1」連加 2 變成「7」;「7」連減變

成「1」。

這時我們想起乘法就是連加，同樣觀察下列加式：(＊)

$$\begin{array}{cccc} & A & & B \\ + & 1 & & (t-2) \\ \hline & C & & D \end{array}$$

仿照林同學的方法，B 扣掉 2，給(n－2)，使它滿基數進位「1」，故 D＝B－2。而 C＝A＋2，這表示每加一次 1$\boxed{t\text{-}2}$，和的十位總是多 2、個位總是少 2。
所以在連加的過程中，十位以「2」連加、個位以「2」連減，我們覺得不妨看成每加一次，個位就「給」一個 2 給十位；十位「接收」個位丟過來的 2。

＊B＞2

(2)說明：

數個 1$\boxed{t\text{-}2}$連加後，若$\boxed{t-2}$「給」出足夠的 2，就會剩下 1，因爲 t 是奇數，t－2 也是奇數。而十位「1」就會「接收」個位所有給出的「2」，而變成「t－2」。那麼，會接收多少個 2 呢？其數量：〔(t－2)－1〕÷2＝(t－3)÷2。

由表格可知，給了 k 個 2 表示有 k+1 個 1$\boxed{t\text{-}2}$連加——(t－3)÷2＋1＝(t－1)÷2，得到：

t 進位中，總有此種二位數形式的解：1$\boxed{t\text{-}2}\times\frac{t-1}{2}=\boxed{t\text{-}2}$1　　t≧5，且爲奇數。

五、試推測十～三進位的多位鏡子乘法解數量

以下的探討除十進位外，其餘進位制的研究，由於知識略深，僅進行猜測的整理。

(一)四位數擴張解與原始解的關係如下，以十、九、八進位爲例。

進位制	基數－1	原始解	六位數解答	八位數解答
十	9	1089	109989	10891089、10999989
九	8	1078	108879	10888878、10781078
八	7	1067	107767	10777767、10671067

【表格二十五】

分析：1.原始解擴張至八位的形式，皆塡入基數－1 的數。

推測：在十～三進位，只要是由某四位數原始解擴張的多位數解，其數目應爲 $F_{[(m-2)/2]}$

討論：因這部份超出範圍，故不予討論。

(二)二位數原始解與擴張解數目

觀察九進位的二位原始解 17，並分析其二位～八位答案個數：

位數	答案個數	寫成 2 的乘冪	推測位數與指數的關係
2	**1**	**1**	〔**(2-2)/2**〕＝**0**
3	**1**	**1**	〔**(1-2)/2**〕＝**0**
4	**2**	$\mathbf{2^1}$	〔**(4-2)/2**〕＝**1**
5	**2**	$\mathbf{2^1}$	〔**(5-2)/2**〕＝**2**
6	**4**	$\mathbf{2^2}$	〔**(6-2)/2**〕＝**2**
7	**4**	$\mathbf{2^2}$	〔**(7-2)/2**〕＝**2**
8	**8**	$\mathbf{2^3}$	〔**(8-2)/2**〕＝**3**

【表格二十六】

推測：在十～三進位，由某二位數原始解擴張的多位數解，其數目應皆爲 $2^{[(m-2)/2]}$

討論：關於「2 的乘冪」超出本研究內容，茲將討論九進位的「17」的擴張解數目列於附錄二。

(三)二進位數是由「0」、「1」組成，老師提到其多位數解答數目爲 2 的乘冪，和十至三進位略不同，我們便省去不論。

(四)將十～三進位的 m 位數猜測的解答數量列表如下：

進位制	原始解		猜測的 m 位數鏡子乘法解答數量
	2 位數	4 位數	
10	╳	1089、2178	$2F_{[(m-2)/2]}$(已確定)
9	17	1078、3256	$2^{[(m-2)/2]}+2F_{[(m-2)/2]}$
8	25	1067、2156、1015	未解決
7	15	1056	$2^{[(m-2)/2]}+F_{[(m-2)/2]}$
6	╳	1045、2134	$2F_{[(m-2)/2]}$
5	13	1034	$2^{[(m-2)/2]}+F_{[(m-2)/2]}$
4	╳	1023	$F_{[(m-2)/2]}$
3	╳	1012	$F_{[(m-2)/2]}$

【表格二十七】

六、猜想

由表格二十七來看，可得一個最主要的形式問題，我們想了很久仍不得其解，故決定做爲猜想：

鏡子乘法解形式猜想：n 進位中，鏡子乘法的「原始解」不是二位就是四位。

如果這個猜想能被證明爲真，則 n 進位的鏡子乘法解形式就能掌握得更精確。

伍、研究結果

一、我們給出了十～三進位(除了八進位)鏡子乘法解 2～8 位數之形式和其數量。
二、同學們發現及證得了適用各進位制的兩個定理：林氏定理、江莊定理。
三、除了 3 進位外，奇進位制的一種二位數形式解。
四、推測了十～三進位的鏡子乘法解數目。
五、留下鏡子乘法原始解的最終形式猜想。

陸、參考資料

一、翰林出版事業教科書編撰委員會(民 96)。找規律。國民小學數學課本第十冊。台南市：翰林出版事業股份有限公司
二、Brian Bolt(民 84)。數學遊樂園之茅塞頓開。台北市：牛頓
三、高源清(民 70)。科學教授—物理、化學、數學篇。台北市：故鄉
四、吳振奎(民 89)。斐波那契數列。台北市：九章。

附錄

附錄一：證明 4 的多位鏡子乘法解數目，為和位數相關的費式數列項。

1.江同學提供了如下的線索，她依分段形式把解答分成兩類：(8 位數以上)

Ⅰ、最左和最右兩「段」爲「1」形式，例如 21978⋯21978、219978⋯219978 等等。

Ⅱ、最左和最右兩「段」爲 2178。

位數(偶/奇) 分類	8/9 位	10/11 位	12/13 位	14/15 位	16/17 位	18/19 位	20/21 位
Ⅰ	1	2	3	5	8	13	21
Ⅱ	1	1	2	3	5	8	13

2.她的分析爲：

(1).某偶/奇數位的所有解答數目即爲下個偶數位的「Ⅰ」形式的解答數目。

(2).某偶/奇數位的「Ⅰ」形式解答數目爲下個偶數位的「Ⅱ」形式解答的數目。

3.承 2 有了證明的思路：

(1)證明江同學的分析。(2)使用引理完成證明。

4.〈證明 1〉

引理：$H_1=H_2=1$，若｛H_k｝滿足 $H_{k+2}=H_k+H_{k-1}+H_{k-2}+\cdots\cdots H_2+H_1+1$，那麼｛$H_k$｝是費式數列。

(1)證明分析-(1)

令 G_m 爲 m 位數的解答數目，G_{m1} 爲「Ⅰ」類解答的數目；G_{m2} 爲「Ⅱ」類解答的數目。

①不妨將某 m 位數的每個解答的左起第二位和第三位之間；百位和十位之間皆插入「9」，如此便得到(m＋2)位數的部份「Ⅰ」類解，則有 $G_m \leqq G_{(m+2)1}$

②將(m＋2)位數的「Ⅰ」類解的最左及最右兩段各拿走一個「9」，便得到 m 位數的一些解，則有 $G_{(m+2)1} \leqq G_m$。

③因此 $G_m=G_{(m+2)1}$，可得到：$\mathbf{G_{(m)1}=G_{m-2}}$。

(2)證明分析-(2)

分析「Ⅰ」類解答的組合：

<table>
<tr><th></th><th>類型</th><th>數目</th><th rowspan="2">說明</th></tr>
<tr><td colspan="2">m 位數的「Ｉ」類解答數目
2178……………………2178</td><td>$G_{m1}=G_{m-2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="9">m
位
數
I
類
解
答
的
各
種
組
合</td><td>217821…………………782178</td><td>G_{m-8}</td><td rowspan="9">可看作計數中間框起的位數，它的所有解數目。</td></tr>
<tr><td>2178021………………7802178</td><td>G_{m-10}</td></tr>
<tr><td>21780021……………78002178</td><td>G_{m-12}</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>217800…0219999780…002178
217800…0217821780…002178</td><td>G_8</td></tr>
<tr><td>2178000…02199780…0002178</td><td>$G_6=1$</td></tr>
<tr><td>2178000…00217800…0002178</td><td>$G_4=1$</td></tr>
<tr><td>217800000…0000…000002178</td><td>1</td></tr>
</table>

得到：$G_{m-2}=G_{m-8}+G_{m-10}+G_{m-12}+\cdots\cdots 1+1+1$，根據引理便知｛$G_m$｝為費式數列。

附錄二：證明九進位的二位原始解 17 的擴張解為 m 位時，擴張解數目為 $2^{[(m-2)/2]}$

〈證明 2〉(於下為簡略的證明)

不妨以填寫出 m 位形式的解來觀察：**1ABCD………□□7**，其中 A 可填 7 或 8。

(1)僅看 m 位的左半部，因為右半部的填法依據著左半部的數值，以 A＝7 為例：

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>…</th></tr>
<tr><td rowspan="8">7</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>…</td></tr>
<tr><td>1</td><td>…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>7</td><td>…</td></tr>
<tr><td>8</td><td>…</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">7</td><td>0</td><td>…</td></tr>
<tr><td>1</td><td>…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td>7</td><td>…</td></tr>
<tr><td>8</td><td>…</td></tr>
</table>

(2)由上表得知，由左往右填數時，決定了某個位值後，右邊位值總有 2 種可能，因此

①m 為偶數：去頭尾兩位後，餘下位數再對半，擴張解數目就有 $2^{(m-2)/2}$

②m 為奇數：去頭尾兩位後，因分段需對稱，中間位值只有一種選擇，故擴張解數目為 $2^{(m-3)/2}$

統整①②則歸納為 $\mathbf{2^{[(m-2)/2]}}$。

【評　語】　080408　數字的鏡子乘法

透過鏡子鏡射的概念，發展出十進位~二進位的鏡子乘法解列法，並能清晰且深入探討其間變化，享受數字變化的奧妙，分析完整具延伸性，值得嘉許。