中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080407

<u>撿石頭</u>

學校名稱：臺北縣樹林市大同國民小學

作者：	指導老師：
小六 羅嵩詠	顏榮皇
小六 陳宇軒	陳怡伶
小六 蔡承璋	

關鍵詞：<u>拈</u>　<u>控制點</u>　<u>費氏數列循環節奇偶性</u>

壹、前言

一、摘要

古老數學遊戲「拈」是本研究的主題。

本研究發展出一套可以贏的策略， 提出主控制點和副控制點，研究單純主控制點數學、證明複合主控制點存在性，並發現拈具有費式數列的現象，進而研究費式數列循環節奇偶性。

二、研究動機:

長期以來，學校訂閱三種科學性的雜誌:「科學人」、「科學月刊」及「數學傳播」。這三種雜誌給我們很大的幫忙。這個遊戲就是數學傳播第三卷第二期,「拈及其變形遊戲」提問的題目。

三、遊戲規則

有 100 顆石頭，甲乙兩個人輪流取，第一次只能取 1 顆至 99 顆，第二次以後，其中一方所取石頭，最少取一顆，最多取敵方所取石頭的 2 倍。最後取到第 100 顆的人贏。

四、研究目的

尋找「撿石頭」遊戲，有 100 顆石頭最少取一顆，最多取敵方所取石頭的 2 倍贏的方法。

五、研究設備與器材

筆記本、筆、沖洗過且擦乾的石頭。

六、研究過程與方法

（一）文獻探討

（二）對於 2 倍石頭取法的討論

（三）對於 3 倍石頭取法的討論

（四）對於 n 倍石頭取法的討論

（五）費式數列奇偶性的討論

（六）贏的存在性及唯一性評估

貳、文獻探討

一、數三十

民國八十二年版國民小學五年級數學課本，有搶 30 遊戲。遊戲是有 30 個石子給兩個人輪流拿，每一個人最少拿一個，最多拿 2 個石子，拿到最後一顆石子的人算輸。因為，2＋1=3，故，看對方拿幾個？我方再決定拿幾個。所以每隔 3，要檢討一次，依照對方步數決定下一次策略。因此，我們有下面的討論如表 2~1。

表 2~~1、數三十遊戲

情況	遊戲規則	控制點
1	拿到最後一顆石頭算輸的搶 30 遊戲	要剩下 28、25、22、19、16、13、10、7、4 及 1
2	搶 30 遊戲，拿到最後一顆石子的人算贏	要剩下 30、27、24、21、18、15、12、9、6 及 3。
3	有 Y 顆石頭，每次最少拿 1 顆，最多拿 x 顆，拿到最後一顆石頭算輸	要剩下 $1+a(x+1)$、…、$1+3(x+1)$、$1+2(x+1)$、$1+(x+1)$、1，而，$1+a(x+1)\leqq Y$
4	有 Y 顆石頭，每次最少拿 b 顆，最多拿 x 顆，拿到最後一顆石頭算輸	控制點要改為 $1+a(x+b)$ 、……、$1+3(x+b)$、$1+2(x+b)$、$1+(x+b)$、1，而，$1+a(x+b)\leqq Y$，$c<b$。
5	有 Y 顆石頭，每次最少拿 b 顆，最多拿 x 顆，拿到最後 c 顆石頭算輸	控制點要改為 $c+a(x+b)$ 、……、$c+3(x+b)$、$c+2(x+b)$、$c+(x+b)$、c，而，$1+a(x+b)\leqq Y$，$c<b$。

二、歷屆科學展覽作品

表 2~~2、和本研究相關歷屆全國科學展覽作品

屆別	組別	作品名稱	對本研究影響
39	國小	誰是最後贏家	搶 30 遊戲
42	國小	先下手為強嗎？	兩人對局的拈遊戲
43	國小	沙漠任務	遞迴關係
44	國小	小朋友上樓梯	費式數列
45	國小	撲克撲克你在哪裡	歸類各種不同贏的策略
45	國小	神奇線條魔法秀	分門別類的致勝策略
45	國小	丟球	費式數列的奇偶性分析
45	國中	出「棋」致勝	致勝點概念延伸本研究「控制點」
46	國小	神奇的尺	費式數列的搜尋理論
46	國中	一個對局遊戲研究與推廣	取石頭遊戲中，加入特殊條件。

叁、研究工具

一、控制點

二進位法及安全殘局的概念，在拈的數學遊戲非常有效。但，本研究中，我們嘗試由二進位逐步解決的共通點，卻失敗了；只有安全殘局所衍伸的「控制點」概念為本研究中贏的策略。

本研究對於贏的策略設立主控制點及副控制點，其原則如下：

（一）能拿完全部石子，無論什麼情況，拿完，就是贏。

（二）一定要拿主控制點，至於副控制點，就沒有那麼重要了。

（三）當無法全部拿完也拿不到主控制點時，就拿離你最近的副控制點。

二、副控制點：

本研究設置副控制點的目的在於複合數主控制點 F(n，s+k)到 F(n，s+k+1)之間有一段很長的整數 F(n，k)，為了讓我們能夠順利的拿到主控制點，設置了副控制點，V（n，s+k，j)，定義為取 n 倍石頭，第 k 個複合數下第 j 個副控制點。

表 3~~1、副控制點表

主控制點	副控制點	副控制點公式
F（n，s+1）	V（n，s+1，1）	V（n，s+1，1） = F（n，s+1）+F（n，1）
F（n，s+2）	V（n，s+2，1）	V（n，s+2，1） = F（n，s+2）+F（n，1）
	V（n，s+2，2）	V（n，s+2，2） = F（n，s+2）+F（n，2）
…		

三、名詞定義：

表 3~~2 名詞定義(新)

符號	定義
F（n，e）	取 n 倍石頭，第 e 個單純主控制點
F（n，s）	取 n 倍石頭，最大單純主控制點
F(n，s+1）	取 n 倍石頭，最小的複合主控制點
F（n，s+k）	取 n 倍石頭，第 k 個複合主控制點
I(m)	費式數列第 m 個數，I(m)=F（2，m-3），m≧4。而，I（1）=1，I（2）=1，I（3）=2，I（4）=3，I（m）=I（m-1）+I（m-2)。
C（r）=x	費式數列循環節數目，I（m） mod r = I（m+x） mod r

肆、研究結果

一、直觀觀察：

表 4~~1、取 2 倍石頭 100 顆直觀觀察（節錄）(新)

<table>
<tr><td>剩下的石子</td><td>對方拿</td><td>我方拿</td><td>剩下來的石子</td><td>說明</td><td>控制點特性</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td rowspan="2">我方勝</td><td rowspan="2">主控制點</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td rowspan="2">我方勝</td><td rowspan="2">主控制點</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">8</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td rowspan="3">我方勝</td><td rowspan="3">主控制點</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">11</td><td>1</td><td>2</td><td>8</td><td rowspan="2">我方勝</td><td rowspan="3">副控制點</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>給我方 8</td><td>我方可能輸</td></tr>
<tr><td rowspan="5">13</td><td>1</td><td>1</td><td>11</td><td rowspan="5">我方勝</td><td rowspan="5">主控制點</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>不要讓對方拿 5 以上</td></tr>
<tr><td rowspan="5">16</td><td>1</td><td>2</td><td>13</td><td rowspan="4">我方勝</td><td rowspan="5">副控制點</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>13</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>11</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>11</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>給我方 11</td><td>我方可能輸</td></tr>
<tr><td rowspan="5">18</td><td>1</td><td>1</td><td>16</td><td>我方勝</td><td rowspan="5">副控制點</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>給我方 16</td><td>我方可能輸</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>13</td><td rowspan="2">我方勝</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>13</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>給我方 13</td><td>我方可能輸</td></tr>
<tr><td colspan="6">說明：18 以上的主控制點與副控制點的直觀觀察，詳見面試時資料。</td></tr>
</table>

二、取 2 倍的控制點

表 4~~2、：2 倍的主控制點與副控制點

主控制點	副控制點
3	
5	
8	11
13	16、18
21	24、26、29、32
34	37、39、42、45、47、50、52
55	58、60、63、66、68、71、73、76、79、81、84、87
89	92、94、97、100、102、105、107、110、113、115、118、121、123
	126、128、131、134、137、139、141

三、數學簡潔性與數學精確性

由上面的直觀觀察，2 倍石頭只要控制：3、5、8、13、21、34、55 及 89 我們就可以贏。於是，我們面臨兩個問題：

（一）只有選 3、5、8、13、21、34、55 及 89 就好嗎？有沒有其他方法？

（二）為何，我們的研究要使用 3、5、8、13、21、34、55 及 89？

「搶 30」在 100 顆石頭取 2 倍的遊戲要 $\left[\frac{100}{3}\right]$=33 個控制點。

數學的簡潔是我們的老師所要求的。

去年第 46 屆全國中小學科學展覽會國小數學科作品「神奇的尺」，以「組合」的方式，選用少許的度量衡達到各種長度的組合以便數學的簡潔，給我們很大的啟示。因此，「搶 30」是另外一種取法，可以考慮，換言之，贏的方式不唯一。而，本研究的直觀分析，使用 3、5、8、13、21、34、55 及 89 方法的主要理由是簡潔。

周春荔所翻譯「斐波那契數」第 55 頁至第 59 頁就曾經討論二進位法、十進位法及以費式數列記數的方法的優缺點，周春荔雖然認為二進位法在數學精確性優於費式數列記數的方法，但，以本研究控制點所找出來的方法，顯然，在本遊戲中，以數學簡潔性，優於傳統的「搶 30」。

四、取 2 倍石頭一般式的猜想

表 4~~3、2 倍主控制點的猜想

F（n，e）	關係式	F（n，e）	關係式
F（2，1）	3= 2+1	F（2，2）	5= 3+ 2
F（2，3）	8= 5+3	F（2，4）	13= 8+ 5
F（2，5）	21=13+8	F（2，6）	34=21+13
F（2，7）	55=34+21	F（2，8）	89=55+34
一般式猜測: F(2，m)=F（2，m-1）+F（2，,m-2）………1 式			

五、存在性的文獻探討

在『拈及其各種變形遊戲』，曾經對於（1 式）做取 2 倍石頭控制點存在性的，我們引用如下：

表 4~4　存在性的文獻探討

直觀觀察	F(2，1)＜F(2，2)＜2F(2，1) F(2，2)＜F(2，3)＜2F(2，2)
假設：	F(2，k-1)＜F(2，k)＜2F(2，k-1)……………………（2 式） F(2，k-2)＜F(2，k-1)＜2F(2，k-2) …………………（3 式）
證明：	由（1 式）定義，(2 式）＋（3 式）得證 F(2，k)＜F(2，k+1)＜2F(2，k)

伍、取 3 倍石頭遊戲

一、直觀觀察

取 3 倍 100 顆石子遊戲主控制點及副控制點如下所示：

表 5~~1 取 3 倍 100 顆石子遊戲（節錄）

剩下的石子	對方拿	我方拿	剩下來的石子	說明	控制點特性
4	1	3	0	我方勝	主控制點
	2	2	0		
	3	1	0		
6	1	1	4	我方勝	主控制點
	2	6	0		
8	1	1	6	我方勝	主控制點
	2	6	0		
11	1	2	8	我方勝	主控制點
	2	1	8		
	3	8	0		
15	1	3	11	我方勝	主控制點
	2	2	11		
	3	1	11		
	4	11	0		
19	1	3	15	我方可能輸	副控制點
	2	2	15		
	3	1	15		
	4	15	0	我方勝	
21	1	1	19	我方勝	主控制點
	2	4	15		
	3	3	15		
	4	2	15		
	5	1	15		
	6	15	0		
說明：21 以上的主控制點與副控制點的直觀觀察，詳見面試時資料。					

二、取 3 倍石頭遊戲第一控制點

取 3 倍石頭時，第 1 個主控制點取為 4 的假設是我們取 1 顆石頭後，剩下 4 顆讓對方取，而，依照題目規定對方只能最多取我方的 3 倍，故，不論對方取 1 顆或最多為 3 顆，最後 1 顆必然會被我方取走。

三、以逐步的方法找出 100 顆石子三倍時必勝的猜測

表 5~~2、100 顆石頭拿三倍的結果

階層	主控制點	副控制點
1	4	
2	6	
3	8	
4	11	
5	15	19
6	21	25、27
7	29	33、35、37
8	40	44、46、48、51
9	55	59、61、63、66、70、74
10	76	80、82、84、87、91、95、97

四、取 3 倍的存在性推理

推測 3 倍主控制點的存在性如表 5~3。

表 5~~3 取 3 倍石頭主控制點存在性推理：

直觀觀察	F（3，1）=4，F（3，2）=6， F（3，3）=8，F（3，4）=11， F（3，5）=15，F（3，6）=21，
猜測	F（3，m）=F（3，m-1）+F（3，m-4）................（4 式）
直觀推理	F（3，1）＜F（3，2）＜3F（3，1） F（3，2）＜F（3，3）＜3F（3，2） F（3，3）＜F（3，4）＜3F（3，3） F（3，4）＜F（3，5）＜3F（3，4） F（3，5）＜F（3，6）＜3F（3，5） 直觀推理： F（3，k）＜F（3，k+1）＜3F（3，k）
完整證明	請參考表 6~2 及表 8~1

陸、取 n 倍石頭遊戲單純主控制點

一、取 n 倍第 1 個主控制點

由於第一次不可全部拿完，又不能不拿，設對方拿 z 個，必定剩下的數 y－z≦n，因此，第一個主控制點一定是 n＋1。

二、主控制點非為複合數取法的原則

遊戲規定，你拿 x 個，對方就可拿 nx 個；若你拿 x 個之後剩下個數小於或等於 nx 個，輸。所以，找尋主控制點時，若這次加 x 個超過 nx，下一次開始就要加 x＋1 個，以避免對方拿走剩下的全部。依上面原則 F(n，e+1)定義如下。

(x-1)n＜F（n，e）≦xn，則 F(n，e+1)=F(n，e)+x………5 式

三、單純主控制點 F(n，e)

以取 4 倍石頭為例，推測單純主控制點 F(n，e) 的一般式並證明如表 6~1

表 6~~1、取 n 倍石頭主控制點 F(n，e) 的一般式

	取 4 倍石頭主控制點	說明
第一個	4+1=5	F（n，1）=n+1
第二個	5+2=7	當 e≧1 時， F（n，e＋1）一般式猜測
第三個	7+2=9	F（n，e+1）
第四個	9+3=12	$=F(n,e)+1+\left[\frac{F(n,e)-1}{n}\right]$
第五個	12+3=15	
第六個	15+4=19	（本公式列為第 6 式）
複合數	24=19+5	取 4 倍中最小複合數控制點：24
証明		

(x-1)n＜F（n，e）≦xn，

（x-1）n≦F（n，e）-1＜xn，$\left[\frac{F(n,e)-1}{n}\right]=x-1$，

e≦s-1，

F（n，e+1）

$=F(n,e)+1+\left[\frac{F(n,e)-1}{n}\right]$

$=F(n,e)+1+x-1$

$=F(n,e)+x$

結論：(x-1)n＜F（n，e）≦xn，F（n，e+1）== $F(n,e)+x$

四、單純主控制點的存在性

2 倍已經證明過，當 n≧3，單純主控制點的存在性如表 6~2。

表 6~~2 單純主控制點存在性

F（n，e）	證明
F（n，1）	F（n，1）=n+1＞1＞0
F（n，e）， 設 e≧2	F（n，e）≦xn，F（n，e）= F（n，e-1）+x 又，F（n，1）=n+1＞n， 顯然，x 為正整數， F（n，e）=F（n，e-1）+x F（n，e-1）＜F（n，e） 當 n≧3＞2， 2F(n，e-1) ＜nF（n，e-1） 再依 5 式，(x-1)n＜F（n，e）≦xn， F（n，e）=F（n，e-1）+x＜2F(n，e-1)， F（n， e-1）＜F（n，e）＜nF（n，e-1）..................（7 式）

五、最大單純主控制點 F(n，s)

我們把最大單純主控制點定義為 F(n，s)。 討論如表 6~3。

表 6~~3 F(n，s)

F(n，s)	說明
一般式	F(n，s+1)=F(n，s)+F(n，1)=F(n，s)+n+1.............（8 式）
範圍	n×n＜F(n，s)≦(n+1)n..（9 式）
證明	Claim: n×n＜F(n，s)，n＞1， 用反證法，設，(n−1)×n＜F(n，s)≦n×n，則〔 $\frac{F(n,s)-1}{n}$ 〕=n−1， F(n，s+1)=F(n，s)+n 顯然和 8 式矛盾，所以，n×n＜F(n，s)。 Claim: F(n，s)≦(n+1)n 設 F(n，s)為最大的單純數控制點，則 F(n，s-1)為次大單純數控制點。 用反證法，設 F(n，s)> (n+1)n， $\frac{F(n,s)-1}{n}$ =n+1， F(n，s+1)=F(n，s)+1+n+1= F(n，s)+n+2> F(n，s)+n+1，不合理。 故，n×n＜F(n，s)≦(n+1)n，得証。

六、取 2 倍至取 14 倍的單純數主控制點

表 6~~4、 2 到 13 倍的單純數主控制點

2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	6 倍	7 倍	8 倍	9 倍	10 倍	11 倍	12 倍	13 倍
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	11	12	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		15	15	16	16	17	18	19	22	21	22
		19	18	19	19	20	20	21	24	23	24
			22	23	22	23	23	24	27	25	26
			27	27	26	26	26	27	30	28	28
				32	30	30	29	30	33	31	31
				38	35	34	33	33	36	34	34
					40	39	37	37	40	37	37
					46	44	42	41	44	41	40
					53	50	47	46	48	45	44
						57	53	51	53	49	48
						65	59	57	58	54	52
							66	63	64	59	56
							74	70	70	64	61
							83	77	77	70	66
								85	84	76	72
								94	92	83	78
								104	101	90	84
									111	98	91
									122	106	98
										114	106
										123	114
										133	123
										144	133
										156	144
											156
											168
											181

柒、F（n，e）=xn 的討論

一、F（n，e）=2n 的討論

討論 F（n，s）範圍時，我們很想知道什麼時候，F（n，e）=xn？分析如下：

表 7~~1 F（n，e）=2n 的討論

情況	存在性	唯一性
設 n 奇數	設 n 為奇數， F(n，1)=n+1，偶數，每次都加 2， F(n，w（0）) =n+1+2（w（0）-1），偶數。。	保證出現 F（n，e）=2n 令 w（1）為滿足 F（n，e）=2n 的答案， n+2W(1)-1=2n， 答案，$W(1)=\frac{n-1}{2}$ ，
設 n 是偶數	設 n 為偶數， F(n，1)=n+1，奇數。 F(n，w（2）) =n+1+2（w（2）-1）奇數， 保證 F（n，e）≠2n。	保證：F（n，e）≠2n 答案不存在，故，唯一性不討論。

二、F（n，e）與 3n

嘗試分成六個情況討討論 F(n，e)=3n 如表 7~2，整理如表 7~3。

表 7~~2、F(n，e)=3n 的討論

情況	存在性	答案
n=6g	因為，n=6g，3g×2=6g=n，F(n，1)=6g+1 故，F(6g，3g+1)=6g+1+2(3g)=12g+1=2n+1， 由 F(6g，3g+1)開始必須要每次加 3， 直到 3n，設 F(6g，3g+1+W(3))=3n。 F(6g，3g+1)=2n+1，2n+1+3×W(3)=3n， 3×W(3)=n-1=6g-1＝3×W(3)，矛盾， 故，n=6g 時，F(n，e)≠3n。	無法找到自然數 W(3)， 使得 3×W(3)=6g-1 答案不存在。
n=6g+1	因為，n=6g+1， F(6g+1，3g+1) =n+1+2(3g)=6g+1+1+6g=2(6g+1)=2n， 取 W(4)=3g+2， 因此，F(n，W(4))=2n+2 才開始每次加 3， 3n-(2n+2)=n-2=6g+1-2=6g-1＝3×W(5)，矛盾 故，n=6g+1 時，F(n，e)≠3n。	無法找到自然數 W(5)， 使得 3×W(5)=6g-1， 答案不存在。

（表 7~2 待續）

（接上頁）

情況	存在性	答案
當 n =6g+2	因為，n=6g+2， F(6g+2，3g+1) =n+1+2(3g)= 2(6g+2)-1=2n-1， 取 W(6)=3g+2， F(n，W(6))=2n+1 才開始每次加 3， 3n-(2n+1)=n-1=6g+2-1=6g+1＝3×W(7)，矛盾， 故，n=6g+2 時，F(n，e)≠3n。	無法找到自然數 W(7)， 使得 3×W(7)=6g+1 答案不存在。
當 n =6g+3	因為，n=6g+3， F(6g+3，3g+1)=n+1+2(3g) 2(6g+3)-2=2n-2， 取 W(8)=3g+3， 因此，F(n，W(8))=2n+2 才開始每次加 3， 3n-(2n+2)=n-2=6g+3-2=6g+1＝3×W(9)，矛盾 故，n=6g+3 時，F(n，e)≠3n。	無法找到自然數 W(9)， 使得 3×W(9)=6g+1 答案不存在。
當 n =6g+4，	因為，n=6g+4， F(6g+4，3g+1)=n+1+2(3g)= 2(6g+3)-1=2n-1， 取 W(10)=3g+2， 因此，F(n，W(10))=2n+1 才開始每次加 3， 3n-(2n+1)=n-1=6g+3 找到自然數 W(11)=2g+1，使得 3×W(11)=6g+3，	W（12） =W（10）+W（11） =3g+2+2g+1 =5g+3， F(n，5g+3)=3n。
當 n =6g+5	因為，n=6g+5， F(6g+5，3g+1)=n+1+2(3g) =2(6g+5)-4=2n-4， 取 W(13)=3g+4， 因此，F(n，W(13))=2n+2 才開始每次加 3， 3n-(2n+2)=n-2=6g+5-2=6g+3， 找到自然數 W(14)=2g+1，使得 3×W(14)=6g+3， 故，n=6g+5 時，存在 F(n，e)=3n。	令 W（15） =W（13）+W（14） =3g+4+2g+1 =5g+5， 故，n=6g+5， 取 W（15）=5g+5， F(n，5g+5)=3n。
結論	當 n=3g+4 及 3g+5，必然發生 F（n，e）=3n。	

表 7~~3、F（n，e）=3n

開始每次加 3 的最小值 T	3n−T	3n−T	答案
F(6g　，3g+1）=2n+1	n−1	6g−1	不存在
F(6g+1，3g+2）=2n+2	n−2	6g−1	不存在
F(6g+2，3g+2）=2n+1	n−1	6g+1	不存在
F(6g+3，3g+3）=2n+2	n−2	6g+1	不存在
F(6g+4，3g+2）=2n+1	n−1	6g+3	5g+3
F(6g+5，3g+4）=2n+2	n−2	6g+3	5g+5

三、F（n，e）=Xn 的討論

利用 excel 的方程式，判斷是否會發生 F（n，e）= xn 的情形如下：

B2=IF(MOD($A2+1,B$1)=0,B$1,MOD($A2+1,B$1)) .... （10 式）

C2=IF(MOD($A2-B2,C$1)=0,C$1,MOD($A2-B2,C$1)) .... （11 式）

表 7~4、F（n，e）與 xn

取 n 倍	2n	3n	4n	5n	6n	7n	8n	9n	10n
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	1	2	1	2	1	2	1	2
4	1	3	1	3	1	3	1	3	1
5	2	3	2	3	2	3	2	3	2
6	1	2	4	2	4	2	4	2	4
7	2	2	1	1	6	1	6	1	6
8	1	1	3	5	3	5	3	5	3
9	2	1	4	5	4	5	4	5	4
10	1	3	3	2	2	1	1	9	1
11	2	3	4	2	3	1	2	9	2
12	1	2	2	5	1	4	8	4	8
13	2	2	3	5	2	4	1	3	10
14	1	1	1	3	5	2	4	1	3
15	2	1	2	3	6	2	5	1	4
16	1	3	1	5	5	4	4	3	3
17	2	3	2	5	6	4	5	3	4
18	1	2	4	4	2	2	8	1	7
19	2	2	1	3	4	1	2	8	1
20	1	1	3	2	6	7	5	6	4
21	2	1	4	2	1	6	7	5	6
22	1	3	3	4	6	2	4	9	3
23	2	3	4	4	1	1	6	8	5
24	1	2	2	2	4	6	2	4	10
25	2	2	3	2	5	6	3	4	1
25 以上的部份，面試時繳交。									

出現 F(n，e)=xn 的循環是（2、3、4、5、... 、x）的最小公倍數。

【證明】

因為，是逐次由 2 倍、3 倍、4 倍、5 倍、... 、x 倍增加，其路徑上，後面的倍數，若有其因數，則後面倍數循環必然會重複其因數循環。如 4 倍的一次循環，包含 2 倍兩次循環。所以，4 倍是 t 值增加 12 次就出現一次循環。

⊕

灰色部分不會是 F(n，e)值，但每一列相鄰兩格的值和是 n。

由 11 式 C2=IF(MOD($A2-B2,C$1)=0,C$1,MOD($A2-B2,C$1))，得到證明。

捌、取 n 倍石頭遊戲複合數主控制點

一、複合數主控制點

表 8~~1 複合數主控制點

定義	第 n 倍石頭，第 k 個複合數主控制點為 F（n，s+k）
一般式	F（n，s+k）=F（n，s+k-1）+F（n，k）............................（12 式）
存在性	因為取 2 倍以上的石頭，2≦n， 依 12 式，F（n，s+k）=F（n，s+k-1）+F（n，k） 很顯然的，F（n，k）＞0， 又，s＞1，s+k-1＞k，很顯然，F(n，s+k-1)＞F(n，k) F（n，s+k） =F（n，s+k-1）+F（n，k）＜2 F（n，s+k-1）≦n F（n，s+k -1）， F（n，s+k-1）＜F（n，s+k）＜nF（n，s+k-1）

二、2倍至10倍複合數主控制點

表 8~~2：2 倍至 10 倍複合數主控制點

2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	6 倍	7 倍	8 倍	9 倍	10 倍
8								
13								
21	15							
34	21							
55	29	24						
89	40	31						
144	55	40	33					
233	76	52	41					
377	105	67	51	45				
610	145	86	63	54				
987	200	110	78	65				
1597	276	141	96	78	61			
2584	381	181	118	94	71			
4181	526	233	145	113	83	74		
6765	726	300	178	136	97	85		
10946	1002	386	219	163	113	98		
17711	1383	496	270	195	132	113	93	
28657	1909	637	333	233	154	130	105	
46368	2635	818	411	278	180	150	119	
75025	3637	1051	507	332	210	173	135	115
121393	5020	1351	625	397	245	199	153	128
196418	6929	1737	770	475	285	229	173	143
317811	9564	2233	948	569	331	263	196	160
514229	13201	2870	1167	682	384	302	222	179
832040	18221	3688	1437	818	445	346	251	200
1346269	25150	4739	1770	981	516	396	284	224
2178309	34714	6090	2181	1176	599	453	321	251
3524578	47915	7827	2688	1409	696	518	363	281

說明：

黃色部份，為 F（2，s+k）為費式數列一部份。

最小複合數主控制點：F（n，s+1）=F（n，s）+n+1=F（n，s+1）+F（n，1）

複合數主控制點一般式：F（n，s+k）=F（n，s+k−1）+F（n，k）

玖、費式數列循環節的奇偶性

一、今天的妳是否比昨天的妳更進步

有史以來， 學姐是台灣國際科學展覽會最年輕得獎者，曾以國小畢業數學專題「約瑟夫數列」得到 2006 年該展覽佳作，這對於全校師生有莫大的鼓勵。

「今天的妳是否比昨天的妳更進步」是本研究問題提供教授指導學姐時，勉勵學姊的話，也因此，在我們完成「撿石頭」作品，獲得＊＊縣國展代表權後，指導老師要求我們繼續研究。

「丟球」是學姐參予第 45 屆全國科展國小組作品，學姊曾經告訴我們，國展評審對於「丟球」一篇，討論到拈具有費式數列現象，非常有興趣。而，我們發現 F(2，e)及 F(2，s+k)相當於費式數列。為了方便分析，我們均列入考慮，並規定如下：

表 9~~1 費式數列 I（m）與 F(2，e)及 F(2，s+k)

I（1）= 1，	I（2）= 1，
I（3）= 2，	I（4）= 3=F（2，1），
I（5）= 5=F（2，2），	I（6）= 8=F（2，3），
...	
I(m)=F（2，m-3）	
I(m)=I（m-1）+I（m-2）	

二、費式數列的奇偶性

由表 8~2 及 9~1 我們發現費式數列的奇偶性是 3 個一循環，如表 9~1。

表 9~~2　　費式數列的奇偶性

性質	費式數列 I（m）的奇偶性是 3 個一循環，連續兩個奇數後再偶數。
證明	I(1)=1→奇數；I(2)=1→奇數；I(3)=2→偶數； I(4)=3→奇數；I(5)=5→奇數；I(6)=8→偶數； 設 I(3h-2)→奇數；I(3h-1)→奇數；I(3h)→偶數； I(3（h+1）-2) =I(3h+1) =I(3h)+I(3h-1)→偶數+奇數→奇數， 同理可證： I(3（h+1）-1) →奇數，I(3（h+1）) →偶數。得証。 費式數列奇偶性是 3 個一循環。

三、費式數列循環節

費式數列的循環節是一個很有趣的課題。當我們研究過奇偶性後，利用 Excel 電腦軟體討論費式數列循環節 C(r)。

設 C（r）=x，則 I（m） mod r ≡I（m+x） mod r。

C(x)的 Excel 方式舉例：B7=MOD（B5+B6，B$1）………………13 式

若，直觀報表中，I（x-1）=1，且 I（x）=0，則我們認為 C（r）=x。

表 9~~3 費式數列循環節的直觀觀察

序號 m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	1	2	1	0	5	5	5	5	5	5	5
6	0	2	0	3	2	1	0	8	8	8	8
7	1	1	1	3	1	6	5	4	3	2	1
8	1	0	1	1	3	0	5	3	1	10	9
9	0	1	2	4	4	6	2	7	4	1	10
10	1	1	3	0	1	6	7	1	5	0	7
11	1	2	1	4	5	5	1	8	9	1	5
12	0	0	0	4	0	4	0	0	4	1	0
13	1	2	1	3	5	2	1	8	3	2	5
14	1	2	1	2	5	6	1	8	7	3	5
15	0	1	2	0	4	1	2	7	0	5	10
16	1	0	3	2	3	0	3	6	7	8	3
17	1	1	1	2	1	1	5	4	7	2	1
18	0	1	0	4	4	1	0	1	4	10	4
19	1	2	1	1	5	2	5	5	1	1	5
20	1	0	1	0	3	3	5	6	5	0	9
21	0	2	2	1	2	5	2	2	6	1	2
22	1	2	3	1	5	1	7	8	1	1	11
23	1	1	1	2	1	6	1	1	7	2	1
24	0	0	0	3	0	0	0	0	8	3	0
25	1	1	1	0	1	6	1	1	5	5	1
26	1	1	1	3	1	6	1	1	3	8	1

（接前頁）

序號 m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	0	2	2	3	2	5	2	2	8	2	2
28	1	0	3	1	3	4	3	3	1	10	3
29	1	2	1	4	5	2	5	5	9	1	5
30	0	2	0	0	2	6	0	8	0	0	8
31	1	1	1	4	1	1	5	4	9	1	1
32	1	0	1	4	3	0	5	3	9	1	9
33	0	1	2	3	4	1	2	7	8	2	10
34	1	1	3	2	1	1	7	1	7	3	7
35	1	2	1	0	5	2	1	8	5	5	5
36	0	0	0	2	0	3	0	0	2	8	0
37	1	2	1	2	5	5	1	8	7	2	5
38	1	2	1	4	5	1	1	8	9	10	5
39	0	1	2	1	4	6	2	7	6	1	10
40	1	0	3	0	3	0	3	6	5	0	3
41	1	1	1	1	1	6	5	4	1	1	1
42	0	1	0	1	4	6	0	1	6	1	4
43	1	2	1	2	5	5	5	5	7	2	5
44	1	0	1	3	3	4	5	6	3	3	9
45	0	2	2	0	2	2	2	2	0	5	2
46	1	2	3	3	5	6	7	8	3	8	11
47	1	1	1	3	1	1	1	1	3	2	1
48	0	0	0	1	0	0	0	0	6	10	0
49	1	1	1	4	1	1	1	1	9	1	1
50	1	1	1	0	1	1	1	1	5	0	1
51	0	2	2	4	2	2	2	2	4	1	2
52	1	0	3	4	3	3	3	3	9	1	3
53	1	2	1	3	5	5	5	5	3	2	5
54	0	2	0	2	2	1	0	8	2	3	8
55	1	1	1	0	1	6	5	4	5	5	1
56	1	0	1	2	3	0	5	3	7	8	9
57	0	1	2	2	4	6	2	7	2	2	10
58	1	1	3	4	1	6	7	1	9	10	7
59	1	2	1	1	5	5	1	8	1	1	5
60	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0
61	0	1	2	2	4	1	2	7	1	2	10

為顧及篇幅，I（m）序位中，m＞60 及 I（m） mod r，r＞12，於面試提供。

整理費式數列的循環節 C(r)，如表 9~4。猜測費式數列的循環節 C(r)，在 r=2 時 C(r)是奇數，在 r＞2 時，C(r)都是偶數。

表 9~~4 費式數列的循環節 C(r)

mod r	C(r)	mod r	C(r)	mod r	C(r)	mod r	C(r)
1		2	3	3	8	4	6
5	20	6	24	7	16	8	12
9	24	10	60	11	10	12	24

四、費式數列的文獻探討

文獻探討一直是指導老師的要求。對於費式數列的文獻探討如表 9~5 及表 9~6。

表 9~~5 費式數列的文獻探討

編號	內容	說明	出處
14 式	I（m）=I（m+2）- I（m+1）	費式數列的移項	周 P7
15 式	I（m+n） =I（m-1）I（n）+I（m）I（n+1）	猴仔跳格子： 一類：不過第 m 格 一類：要過第 m 格	周 P12~P13
16 式	I（2m） = I（m+1）^{2}-I（m-1）^{2}	由 15 式，當 m=n 時，就得到 16 式	周 P14
17 式	當 P 是質數，C（P^n）=C（P）×P^{n-1}	詳見如表 9~6	林
說明 1.文獻出處：周：周春劦翻譯「斐波那契數」。 2.文獻出處：林：林冠樺等本學年度（95 學年度）**市第 40 屆高中科展作品。			

表 9~~6、質數為 P 時的費式數列循環節 C（P）

2	3	5	7
C（2）=3	C（3）=8	C（5）=20	C（7）=16
C（4）=6	C（9）=24	…	…
C（8）=12	…	…	…
…	…	…	…
推測 C（2^n）=3x2^{n-1}	推測 C（3^n）=8x3^{n-1}	推測 C（5^n）=20x5^{n-1}	推測 C（7^n）=16x7^{n-1}
推測 C（P^n）=C（P）xP^{n-1} C（P）規律性在＊＊女中的學長在今年**市高中組科展作品中已經對此現象做過證明。我們只把我們的費式數列的循環節 C(x)在 x=2~12 觀察和推測列在表 9~4。			

五、I（-m）的定義與分析

由 15 式，我們定義 I（-m）如表 9~7。

表 9~~7 I（-m）的定義

直觀觀察	運算	I（m）
當 m=7	I（7）=I（6）+I（5）=13	13
當 m=6	I（6）=I（5）+I（4）=8	8
當 m=5	I（5）=I（4）+I（3）=5	5
當 m=4	I（4）=I（3）+I（2）=3	3
當 m=3	I（3）=I（2）+I（1）=2	2
當 m=2	I（2）=I（1）+I（0）=1	1
當 m=1	I（1）=1	1
當 m=0	I（0）=0	0
當 m=-1	I（-1）=I（1）-I（0）=1	1
當 m=-2	I（-2）=I（0）-I（-1）= -1	-1
當 m=-3	I（-3）=I（-1）-I（-2）=2	2
當 m=-4	I（-4）=I（-2）-I（-3）= -3	-3
當 m=-5	I（-5）=I（-3）-I（-4）=5	5
當 m=-6	I（-6）=I（-4）-I（-5）= -8	-8
當 m=-7	I（-7）=I（-5）-I（-6）= 13	13
推測 由上面觀察，我們猜測一般式 I（-m）=（-1）$^{m+1}$ xI（m）…………18 式		

接著我們對於 I（-m） mod r 坐直觀的觀察如表 9~8。

表 9~~8 當 m 含有正號及負數時的 I（m） mod r

m	I(m)	mod 2	mod 3	mod 4	mod 5	mod 6	mod 7	mod 8
20	6765	1	0	1	0	3	3	5
19	4181	1	2	1	1	5	2	5
18	2584	0	1	0	4	4	1	0
17	1597	1	1	1	2	1	1	5
16	987	1	0	3	2	3	0	3
15	610	0	1	2	0	4	1	2
14	377	1	2	1	2	5	6	1
13	233	1	2	1	3	5	2	1
12	144	0	0	0	4	0	4	0
11	89	1	2	1	4	5	5	1
10	55	1	1	3	0	1	6	7
9	34	0	1	2	4	4	6	2
8	21	1	0	1	1	3	0	5
7	13	1	1	1	3	1	6	5
6	8	0	2	0	3	2	1	0
5	5	1	2	1	0	5	5	5
4	3	1	0	3	3	3	3	3
3	2	0	2	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	1	1	1	1	1	1	1	1
-2	-1	1	2	3	4	5	6	7
-3	2	0	2	2	2	2	2	2
-4	-3	1	0	1	2	3	4	5
-5	5	1	2	1	0	5	5	5
-6	-8	0	1	0	2	4	6	0
-7	13	1	1	1	3	1	6	5
-8	-21	1	0	3	4	3	0	3
-9	34	0	1	2	4	4	6	2
-10	-55	1	2	1	0	5	1	1
-11	89	1	2	1	4	5	5	1
-12	-144	0	0	0	1	0	3	0
-13	233	1	2	1	3	5	2	1
-14	-377	1	1	3	3	1	1	7
-15	610	0	1	2	0	4	1	2
-16	-987	1	0	1	3	3	0	5
-17	1597	1	1	1	2	1	1	5
-18	-2584	0	2	0	1	2	6	0
-19	4181	1	2	1	1	5	2	5
-20	-6765	1	0	3	0	3	4	3

費式數列的奇偶性已經在表 9~2 證明。其它說明如表 9~9。

表 9~9　當 m 為整數，I（m） mod r 的一些說明

式子	性質	說明
19	I（x） mod r ≡ 0	依定義 C（r）=x＞0， 推理，如表 9~7，當 b_1 為整數， I（b_1X） mod r ≡ 0，
20	1 mod r ≡ 1	推理：存在整數 b_2 I（x+1） mod r ≡ 1， I（b_2X+1）mod r ≡ 1， I（-x+1） mod r ≡ 1
21	I（x-1） mod r ≡ 1	I（x-1）=I（x+1）-I(x)， 存在整數 b_3、b_4， I（x-1）= b_3r+1， I（x-1） mod r ≡ 1， I（b_4x-1） mod r ≡ 1，
22	（-1） mod r ≡ r-1	-1 = -r + r-1= -1xr + r-1。 推理：存在整數 b_5 I（x-2） mod r ≡ r-1， I（b_5X-2） mod r ≡ r-1，
23	I（x+2） mod r ≡ 1	I（x+2）=I（x+1）+I（x）

六、費式數列循環節奇偶性的完整証明

表 9~10　費式數列循環節奇偶性的完整証明

項目	證明
分析	自然數分奇數及偶數。只要證明 r 為何數 C（r）是奇數即可。
C（2）為奇數	表 8~2，C（2）=3，C（2）是奇數，得証。
C（r）為奇數時，r=2 的唯一性。	設 C（r）=x＞0 且 x 是奇數，則由直觀觀察，C（r）= x≧3， 設 C（r）=x 是奇數，x-1 是偶數，x−1+1=x 是奇數， 由 18 式，I（-m）=（-1）$^{m+1}$ xI（m） gr+1=I（x-1） =- I（-（x-1））= -I（1-x）=-I（-x+1）， I（-x+1）= -I(x-1) = -gr-1 I（-x+1） mod r ≡（-1） mod r ≡ r-1………24 式 再依 20 式及 24 式，1 ≡ I（-x+1） mod r ≡ r-1＞0， 1 = r-1，r=2，造成現象，乃是我們假設 C（r）=x 是奇數。
結論	費式數列的循環節 C(r)，在 r=2 時 C(r)是奇數，在 r＞2 時，C(r)都是偶數。

拾、研究討論

一、「教授！你還欠我們一碗牛肉麵」及「撿石頭」比較

在『拈及其各種變形遊戲』，以東南亞電影和一碗年肉麵為獎品公開徵求本研究的答案。去年，學長以「教授！你還欠我們一碗牛肉麵」參賽；今年，我們做了改進，以「撿石頭」參賽。兩篇作品如表 10~1。

表 10~1、「教授！你還欠我們一碗牛肉麵」及「撿石頭」比較

	教授！你還欠我們一碗牛肉麵	撿石頭
作者	去年的學長	我們
完成時間	2006 年 3 月	2007 年 3 月
參加比賽	94 學年**縣科學展覽會	95 學年**縣科學展覽會
複合數主控制點	F（n，s＋1） ＝F(n，1)+F（n，2n-2）	F（n，s＋1） ≠F(n，1)+F（n，2n-2） （可由表表 8~2 得到反証。）
充分性	未證明	有證明
唯一性	未討論	有討論
F(2，u)	未討論	費式數列奇偶性

二、思考架構的限制

圖一、架構的限制

採用副控制點是本研究特色，但，也是思考架構的限制、

如圖一，倍數遊戲有一個缺點那就是:你無法從第 m 個主控制點的第 n 個副控制點直接拿到第一個複合數，你只能從第 m 個主控制點的第 n 個副控制點慢慢的將對方引誘第 m 個主控制點(大黑點代表第 m 個主控制點的第 n 個副控制點，最上面的小黑點代表第一個複合數，最下面的小黑點代表第 m 個主控制點)。

三、存在性

表 10~~2、取 n 倍石頭存在性證明

取 n 倍石頭	式子	索引
取 2 倍石頭	F(2，k)＜F(2，k+1)＜2F(2，k)	張鎮華教授証明
取 3 倍石頭	F(3，k)＜F(3，k+1)＜3F(3，k)	式
當 n＞3，1＜e≦s	F(n，e-1)＜F(n，e)＜nF(3，e)	12 式
當 n＞3，k 為自然數	F（n，s+k-1）＜F（n，s+k） 且 F（n，s+k）＜n×F（n，s+k-1）	12 式

四、唯一性

至少還有 3 種取 n 倍石頭的遊戲穩贏的方法。

第一種方法：

由「數 30」演化過來的「數 Y」遊戲，我們把 n+1 的倍數當作主控制點。

換算成本研究的格式：

F(n，e)=e(n+1)，F(n，s+k)=(s+k)(n+1)

第二種方法

只採用主控制點，不用副控制點。

F（n，1）=n+1，

e≦s−1，F（n，e+1）=F(n，e)+ 〔$\frac{F(n,e)-1}{n}$〕，

F(n，s+k)=F(n，s+k−1)+n+1= F(n，s+k−1)＋F(n，1)

第三種方法

多出副控制點的模式，如下所示：

F（n，1）=n+1，

e≦s−1，F（n，e+1）=F(n，e)+ 〔$\frac{F(n,e)-1}{n}$〕，

F(n，s+k)=F(n，s+k-1)+ F(n，k)

V（n，s+k，j）= F（n，s+k）＋F（n，j）

可以確定撿石頭遊戲的方法不唯一，我們把三種方法比較如下。

表 10~~3、三種方法的比較

方法別	特色	優點	缺點
第一種	採用 n+1 倍數做控制點	安全性高	不簡潔
第二種	只採納主控制點	安全性高	略簡潔
第三種	本研究方法	最簡潔	安全性略差

拾壹、結論

一、單純數的主控制點

取 n 倍「撿石頭」遊戲，單純主控制點如下所示：

F（n，1）$=n+1>1>0$，

$e \leqq s-1$，F（n，e+1）=F(n，e)+ 〔$\dfrac{F(n,e)-1}{n}$〕，

最大單純數的主控制點 F（n，s），$n \times n <$ F（n，s）$\leqq n(n+1)$

二、複合數的主控制點

取 n 倍「撿石頭」遊戲，複合數主控制點如下所示：

最小複合數的主控制點 F（n，s+1）=F（n，s）+F（n，1）= F（n，s）+n+1
F(n，s+k)=F(n，s+k-1)+ F(n，k)

三、副控制點

取 n 倍「撿石頭」遊戲，副控制點如下所示：

V（n，s+k，j）= F（n，s+k）＋F（n，j）

拾貳、參考文獻

一、教育部科學教育館辦理歷屆全國中小學科學展覽會作品

1. 郭哲維、謝依臻、林子筠「誰是最後贏家」，39 屆國小數學科作品。
2. 黃偉城、林智仁、陳彥儒「先下手為強嗎？」，42 屆國小數學科作品。
3. 陳鈺婷、葉于甄「沙漠任務」，43 屆國小數學科作品。
4. 黃田奇、林芳維、黃偉綸、徐湘婷、鄭龍驊、許忠誠「小朋友上樓梯」，44 屆國小數學科作品。
5. 曾金智、劉羿廷、姜沛伸、劉佳璋「撲克撲克你在哪裡」，45 屆國小數學科作品。
6. 吳佳家、黃薏婷、陳逸恩「神奇線條魔法秀」，45 屆國小數學科作品。
7. 葉佩雯、陳彥至、陳威銘、劉書魁、林家安、陳源弘「丟球」，45 屆國小數學科作品。
8. 李昀修、陳盈君、陳柏豪、楊承翰「出「棋」致勝」，45 屆國中數學科作品。
9. 李淨雯、游瑞夫、劉人豪、邱翊婷、陳奕璁「神奇的尺」，46 屆國小數學科作品。
10. 左祺、陳治均、陳皓宇、張昕漢「一個對局遊戲研究與推廣」，46 屆國中數學科作品。

（以上科展作品均刊登在教育部科學教育館網站）

二、各縣市政府辦理中小學科學展覽會作品

1. 鍾肇燁、陳盛騰、孫子堯三人「教授!你還欠我們一碗牛肉麵」**縣 94 學年度國小組數學科科展。
2. 林冠樺、李雅芯、邱嵐芙、張雯雯「週而復始的費式數列」**市高中組數學科 95 學年度科學展覽會作品。

（以上屬於縣市級科展作品，未出品）

三、文章

張鎮華『拈及其各種變形遊戲』數學傳播第三卷第二期。

四、國小教科書

八十二年版國小五年級上學期數學課本第五單元，習題「搶三十」。

五、科普書籍

周春荔翻譯「斐波那契數」九章出版社，台北市。

【評　語】　080407　撿石頭

能從相關歷屆科展作品中，延伸「控制點」概念爲研究中贏的策略，內容完整深入，但是口試表達過程中，未能清楚說明費式數列循環節的驗證過程，希望能再接再勵。