中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080406

聽明的審判—尋找避免囚犯串供問題的解答

學校名稱：臺北縣板橋市後埔國民小學

作者：	指導老師：
小四　鄭士驤	黃秀葉 吳炳源

關鍵詞：囚犯串供　費氏數列　巴斯卡三角形

壹、摘要

這個研究是針對「避免囚犯串供的偵訊選取囚犯的方法數」進行分析。

(1)首先，用圖形劃記分析，找出當有 1-9 個囚犯排成一列等待偵訊，一次至少間隔 1~4 個囚犯的方法數。

(2)進一步，將囚犯以數字編號，然後用樹狀圖列出可能選取囚犯的方法數，確認了劃記的正確性。

(3)接著，依照囚犯人數及間隔人數的不同，我們找出總方法數、固定偵訊人數時的方法數、以囚犯編號計次的方法數各種數列。

(4)分析這些數列，尋找數列的規則，希望能找出問題的解答，在尋找答案的過程中，真的有許多令自己驚訝的發現。

貳、研究動機

老師給我昌爸工作坊討論區的一道題目，題目是這樣的：「在一個監獄裡有 n 名囚犯被手銬銬住，排成一列等待偵訊。偵訊的過程中，為了避免串供，要在這 n 名中取出若干不相鄰的囚犯。舉例而言，若共有 6 名囚犯，編號為 1、2、3、4、5、6，則可取 1、3、6 等三人，亦可取 2,4 等兩人。單單取其中任何一人亦可。考慮在 n 個囚犯的情形下，共有 F(n)個取法。」為了鼓勵我，老師說：「這個題目雖然很難，但是只要你肯努力，說不定也可以找到答案。」；爸爸也說：「有興趣的話就試試看！」在老師的指導及爸爸媽媽的支持下，我決定要全力以赴，尋找問題的解答。

參、研究目的

我認為會有兩個變因，影響偵訊(選取囚犯)的方法數。一個是一次至少間隔多少個不相鄰囚犯，用 m 表示；另一個是囚犯的人數，用 n 表示。也就是說，當 m 、n 決定時，選取囚犯的方法數也會被決定，這樣的對應關係，可以用函數 $f(m,n)$ 表示偵訊的方法數。因此，本研究的目的如下：

一、找出選取囚犯方法數的算式。

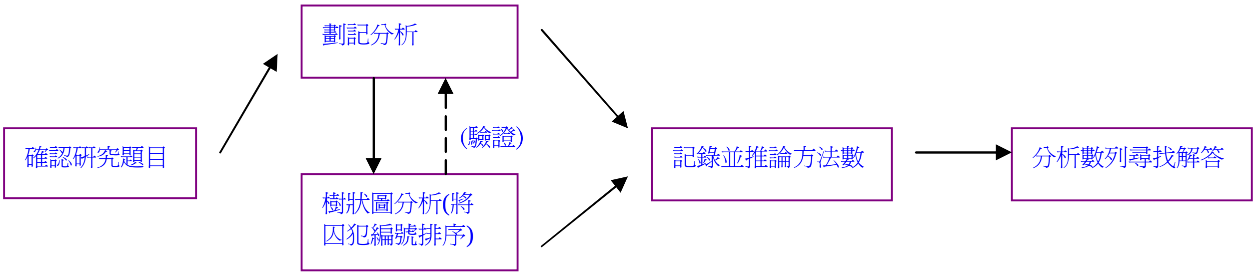
二、分析選取囚犯方法數數列的規則。

肆、研究設備及器材

紙、筆、計算機、電腦

伍、研究過程

一、研究架構



二、劃記 $f(m=1\sim 4, n=1\sim 9)$ 的偵訊情形

(一)我用圖形劃記，並從最簡單的情形開始—囚犯 1 人在至少間隔 1 名囚犯的情形下進行偵訊，以○代表未被偵訊的囚犯，以●代表被偵訊的囚犯，那麼有 1 名囚犯時只有●的情形。限制條件還是至少間隔 1 名囚犯時，囚犯人數變為 2 人，則有○●及●○兩種情形；當囚犯變為 3 人時，則有●○○、○●○、○○●以及●○●共 4 種情形。以此類推，找出當囚犯人數為 1 至 9 人時在至少間隔 1 至 4 名囚犯時進行偵訊，也就是將 $f(m=1\sim 4, n=1\sim 9)$ 的所有情形劃記下來。

(二)圖形網底顏色示意說明(以 9 名囚犯為例)

1.圖形示例：●○○○○○○○○

網底顏色：黃

說明：一次偵訊 1 人

2.圖形示例：●○●○○○○○○

網底顏色：淺藍

說明：一次偵訊 2 人

3.圖形示例：●○●○●○○○○

網底顏色：粉紅

說明：一次偵訊 3 人

4.圖形示例：●○●○●○●○○

網底顏色：草綠色

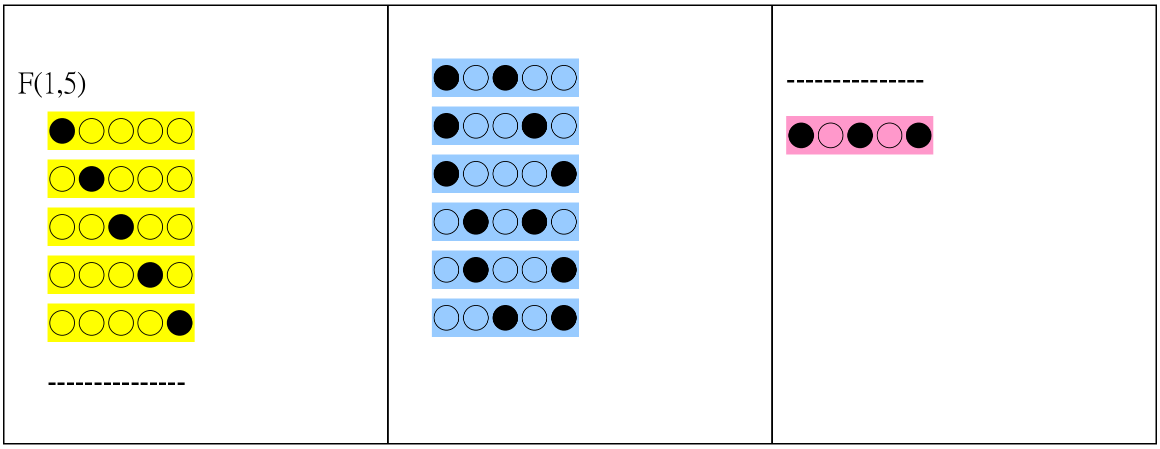
說明：一次偵訊 4 人

5.圖形示例：●○●○●○●○●

網底顏色：灰色

說明：一次偵訊 5 人

(三)劃記方法示意(以 5 名囚犯爲例，僅列出部份劃記資料)



劃記方法示意圖

(四)將劃記結果及推論結果記錄於表 1-1 到表 1-4。

三、證明劃記結果的正確性：

(一)爲了確認劃記結果的正確性，我將囚犯以數字編號，並依照編號把選取囚犯的可能情形用樹狀圖列出。

(二)樹狀圖的畫法說明

1.以 $m=1, n=5$ 即 $f(1,5)$ 時說明：總共 5 名囚犯，將囚犯依 1、2、3、4、5 編號。

2.同時偵訊 2 人時，第 2 層的囚犯編號必須比第一層被偵訊囚犯的編號至少多 $m+1$。同樣的，要增加成同時偵訊 3 人時，第 3 層的囚犯編號必須比第 2 層的偵訊囚犯編號至少多 $m+1$。

3.以囚犯 1 號開始，則有(1)偵訊 1 名囚犯：1 號；(2)偵訊 2 名囚犯：1 號 3 號、1 號 4 號、1 號 5 號；(3)偵訊 3 名囚犯：1 號 3 號 5 號；共 *5* 種情形。

4.以囚犯 2 號開始，則有(1)偵訊 1 名囚犯：2 號；(2)偵訊 2 名囚犯：2 號 4 號、2 號 5 號；共 *3* 種情形。

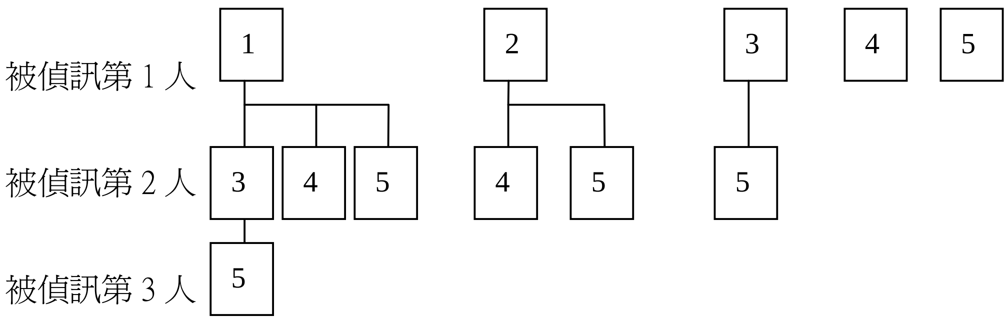
5.以囚犯 3 號開始，則有(1)偵訊 1 名囚犯：3 號；(2)偵訊 2 名囚犯：3 號 5 號；共 *2* 種情形。其中偵訊 2 名囚犯：1 號 3 號及偵訊 3 名囚犯：1 號 3 號 5 號時，在以囚犯 1 開始時，已經算過，不需重複計算。

6.以囚犯 4 號開始，則有(1)偵訊 1 名：囚犯 4 號，共 *1* 種情形。其中偵訊 2 名囚犯：1 號 4 號、2 號 4 號的情形，也已經算過，不需重複。

7.以囚犯 5 開始，則有(1)偵訊 1 名囚犯：5 號，共 *1* 種情形。其中偵訊 2 名囚犯：1 號 5 號、2 號 5 號及 3 號 5 號及偵訊 3 名囚犯：1 號 3 號 5 號時，也已經算過，不需重複。

8.因此 $f(1,5)$ 依囚犯編號的方法數依序爲 5、3、2、1、1，如表 2-1(斜體字部份)。

(三)樹狀圖圖示



方法數　　5(=1+3+1)　　3(=1+2)　　2(=1+1)　　1　　1

樹狀圖示意圖

(四)對照樹狀圖及劃記結果，發現選取囚犯的總方法數相同。進一步分析劃記結果，發現固定偵訊人數的方法數，在不同偵訊人數的數列間，有一定的關係(規則二 A)；分析樹狀圖則發現以囚犯號次找出的方法數中，可由前數項的和推導出後項(規則三 D)。依據這樣子的發現，分別推論到囚犯人數 15 人及偵訊人數 1-7 人，並將劃記結果記錄於表 1-1 到表 1-4，將樹狀圖結果記錄於表 2-1 到 2-4。

表1-1 F(1,n)-囚犯 n 個人時，一次至少間隔 m = 1 人偵訊的方法數

一次偵訊人數 / 囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	總方法數
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	0	0	0	0	0	0	2
3	3	1	0	0	0	0	0	4
4	4	3	0	0	0	0	0	7
5	5	6	1	0	0	0	0	12
6	6	10	4	0	0	0	0	20
7	7	15	10	1	0	0	0	33
8	8	21	20	5	0	0	0	54
9	9	28	35	15	1	0	0	88
10	10	36	56	35	6	0	0	143
11	11	45	84	70	21	1	0	232
12	12	55	120	126	56	7	0	376
13	13	66	165	210	126	28	1	609
14	14	78	220	330	252	84	8	986
15	15	91	286	495	462	210	36	
說明：1.僅劃記至囚犯人數9人時，其餘爲推論數值。								
2.囚犯人數15人時，有一次偵訊8人以上的情形，所以總方法數不完整，故不列出。								

表1-2 F(2,n)-囚犯n個人時，一次至少間隔m=2人偵訊的方法數

一次偵訊人數 / 囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	總方法數
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	0	0	0	0	0	0	2
3	3	0	0	0	0	0	0	3
4	4	1	0	0	0	0	0	5
5	5	3	0	0	0	0	0	8
6	6	6	0	0	0	0	0	12
7	7	10	1	0	0	0	0	18
8	8	15	4	0	0	0	0	27
9	9	21	10	0	0	0	0	40
10	10	28	20	1	0	0	0	59
11	11	36	35	5	0	0	0	87
12	12	45	56	15	0	0	0	128
13	13	55	84	35	1	0	0	188
14	14	66	120	70	6	0	0	276
15	15	78	165	126	21	0	0	405
說明：僅劃記至囚犯人數9人時，其餘爲推論數值。								

表1-3 F(3,n)-囚犯n個人時，一次至少間隔m=3人偵訊的方法數

一次偵訊人數 / 囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	總方法數
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	0	0	0	0	0	0	2
3	3	0	0	0	0	0	0	3
4	4	0	0	0	0	0	0	4
5	5	1	0	0	0	0	0	6
6	6	3	0	0	0	0	0	9
7	7	6	0	0	0	0	0	13
8	8	10	0	0	0	0	0	18
9	9	15	1	0	0	0	0	25
10	10	21	4	0	0	0	0	35
11	11	28	10	0	0	0	0	49
12	12	36	20	0	0	0	0	68
13	13	45	35	1	0	0	0	94
14	14	55	56	5	0	0	0	130
15	15	66	84	15	0	0	0	180
說明：僅劃記至囚犯人數9人時，其餘爲推論數值。								

表1-4 F(4,n)-囚犯n個人時，一次至少間隔m=4人偵訊方法數

一次偵訊人數 / 囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	總方法數
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	0	0	0	0	0	0	2
3	3	0	0	0	0	0	0	3
4	4	0	0	0	0	0	0	4
5	5	0	0	0	0	0	0	5
6	6	1	0	0	0	0	0	7
7	7	3	0	0	0	0	0	10
8	8	6	0	0	0	0	0	14
9	9	10	0	0	0	0	0	19
10	10	15	0	0	0	0	0	25
11	11	21	1	0	0	0	0	33
12	12	28	4	0	0	0	0	44
13	13	36	10	0	0	0	0	59
14	14	45	20	0	0	0	0	79
15	15	55	35	0	0	0	0	105
說明：僅劃記至囚犯人數9人時，其餘為推論數值。								

表2-1 以樹狀圖找出F(1,n)偵訊的方法數

	以囚犯號次找出的方法數(囚犯編號)															總方法數
囚犯人數=n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
5	*5*	*3*	*2*	*1*	*1*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
6	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
7	13	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	33
8	21	13	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	54
9	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	88
10	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	143
11	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	0	0	0	232
12	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	0	0	376
13	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	0	609
14	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	986
15	610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	1596
說明：僅做到9個囚犯時的選取囚犯方法數，其餘為推論數值。																

表2-2 以樹狀圖找出F(2,n)偵訊的方法數

囚犯人數=n	以囚犯號次找出的方法數(囚犯編號)															總方法數
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
5	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
7	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	18
8	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	27
9	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	40
10	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	59
11	28	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0	87
12	41	28	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	128
13	60	41	28	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	188
14	88	60	41	28	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	276
15	129	88	60	41	28	19	13	9	6	4	3	2	1	1	1	405

說明：僅做到9個囚犯時的選取囚犯方法數，其餘為推論數值。

表2-3 以樹狀圖找出F(3,n)偵訊的方法數

囚犯人數=n	以囚犯號次找出的方法數(囚犯編號)															總方法數
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
5	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
6	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
7	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	13
8	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	18
9	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	25
10	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	35
11	14	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0	49
12	19	14	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	68
13	26	19	14	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	94
14	36	26	19	14	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	0	130
15	50	36	26	19	14	10	7	5	4	3	2	1	1	1	1	180

說明：僅做到9個囚犯時的選取囚犯方法數，其餘為推論數值。

表2-4 以樹狀圖找出F(4,n)的偵訊可能情形次數

		以囚犯號次找出的方法數(囚犯編號)															總方法數
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
囚犯人數=n	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
	4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
	5	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
	6	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
	7	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
	8	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	14
	9	5	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	19
	10	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	25
	11	8	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	33
	12	11	8	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	44
	13	15	11	8	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	59
	14	20	15	11	8	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	0	79
	15	26	20	15	11	8	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	105

說明：僅做到9個囚犯時的選取囚犯方法數，其餘爲推論數值。

陸、研究結果資料彙整

一、選取囚犯的總方法數

綜合表 1-1 到表 1-4 及表 2-1 到表 2-4 的結果，當 n (囚犯人數)爲 1-15 人時，偵訊方法數依照 m (至少間隔人數)爲 1~4 人時而有不同。

(一)至少間隔 $m = 1$ 人時，依照囚犯人數，偵訊方法數如下：

囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376	609	986	1596

(二)至少間隔 $m = 2$ 人時，依照囚犯人數，偵訊方法數如下：

囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	2	3	5	8	12	18	27	40	59	87	128	188	276	405

(三)至少間隔 $m = 3$ 人時，依照囚犯人數，偵訊方法數如下：

囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	2	3	4	6	9	13	18	25	35	49	68	94	130	180

(四)至少間隔 $m = 4$ 人時，依照囚犯人數，偵訊方法數如下：

囚犯人數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	2	3	4	5	7	10	14	19	25	33	44	59	79	105

二、固定偵訊人數的方法數

依照表 1-1 到表 1-4，不論 m (間隔人數)爲多少，依照一次偵訊人數 1-7 人時而有不同的方法數(列出一次偵訊人數 1~4 人的偵訊方法數)。(註：討論的部份以 $g(k,l)$ 表示，k 代表一次偵訊人數，l 代表數列順序)

(一)一次偵訊 1 人時，偵訊方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

(二)一次偵訊 2 人時，偵訊方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

(三)一次偵訊 3 人時，偵訊方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680

(四)一次偵訊 4 人時，偵訊方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060

三、以囚犯編號計次的方法數

綜合表 2-1 到表 2-4，以囚犯編號依序計算偵訊方法數，依照 m (至少間隔人數) 爲 1~4 人時而有不同。(註：討論的部份以 $h(m, j)$ 表示， j 代表數列順序)

(一)至少間隔 $m = 1$ 人時，依照囚犯編號計次的方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

(二) 至少間隔 $m = 2$ 人時，依照囚犯編號計次的方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129

(三) 至少間隔 $m = 3$ 人時，依照囚犯編號計次的方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50

(四) 至少間隔 $m = 4$ 人時，依照囚犯編號計次的方法數如下：

數列順序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26

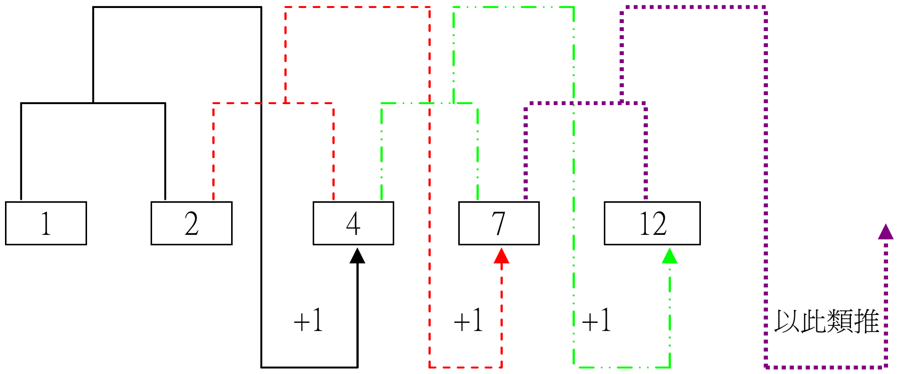
柒、討論

一、總方法數的分析

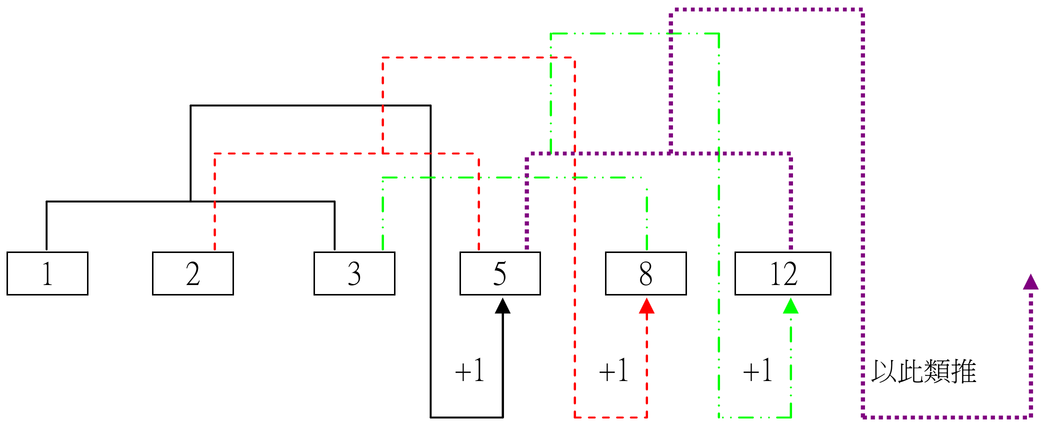
(一)

規則一 A：至少間隔人數爲 m 時，第 n 項加上第 $n+m$ 項再加上 1 就是第 $n+m+1$ 項，也就是 $f(m,n)+f(m,n+m)+1=f(m,n+m+1)$。

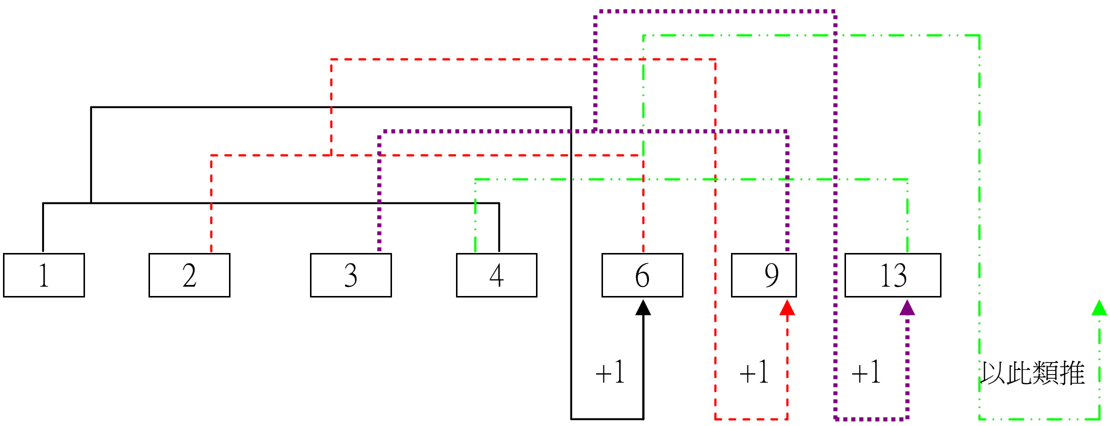
1.至少間隔人數爲 1 人時，



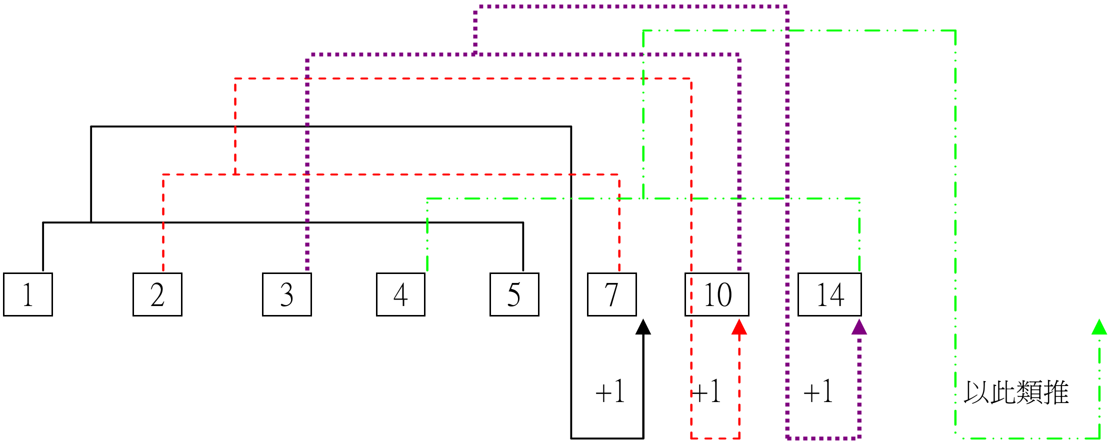
2.至少間隔人數爲 2 人時，



3.至少間隔人數爲 3 人時，



4.至少間隔人數為 4 人時，



(二)

規則一 B：至少間隔人數為 m 時，前 $n-m-1$ 項的和再加上 n 就是第 n 項，也就是 $f(m,1)+...+f(m,n-m-2)+f(m,n-m-1)+n=f(m,n)$

1.在 $m=1$(至少間隔 1 人)的總方法數的每 1 項都加上 1 後，就變成費氏數列第 3 項開始的數列 2、3、5、8、13、21、34、55、89、144…。

2.分析過程：

(1)費氏數列其中有 1 個性質：$F_1+F_2+\ldots+F_{n-1}+F_n+1=F_{n+2}$，意思是第 1 項一直加到第 n 項再加上 1，就是第 $n+2$ 項。

(2)我想要試試看把這種性質應用在 $m=1$(至少間隔 1 人)的總方法數上。所以我就把 $m=1$(至少間隔 1 人)的總方法數第 1 項和第 3 項的差；總方法數第 1 項加上第 2 項的和跟第 4 項的差；總方法數第 1 項加上第 2 項加上第 3 項的和跟第 5 項的差…排成數列，發現數列是：3(總方法數第 1 項和第 3 項的差)、4(總方法數第 1 項加上第 2 項跟第 4 項的差)、5、6、7…。

(3)前項敘述($m=1$時)列成算式如下：

$f(1,3)-f(1,1)=3$；

$f(1,4)-\left(f(1,1)+f(1,2)\right)=4$；

$f(1,5)-\left(f(1,1)+f(1,2)+f(1,3)\right)=5$；

$f(1,6)-\left(f(1,1)+f(1,2)+f(1,3)+f(1,4)\right)=6$；

$f(1,7)-\left(f(1,1)+f(1,2)+f(1,3)+f(1,4)+f(1,5)\right)=7$；

推導出：

$f(1,n)-\left(f(1,1)+\ldots\ldots+f(1,n-3)+f(1,n-2)\right)=n$。

$\Rightarrow f(1,1)+\ldots+f(1,n-3)+f(1,n-2)+n=f(1,n)$

以 $m=1$ ($n=7$)的總方法數說明：

1	2	4	7	12	20	33
n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7

(1+2+4+7+12)+7=33

(4)如同 $m=1$ 時的方式，我分別找出 $m=2$ 、 $m=3$ 、 $m=4$ 時的規律性，現在以 $m=2$ （ $n=8$)的總方法數說明：

1	2	3	5	8	12	18	27
n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8

(1+2+3+5+8)+8=27

(5)以 $m=3$ ($n=10$)的總方法數說明：

1	2	3	4	6	9	13	18	25	35
n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10

(1+2+3+4+6+9)+10=35

(6)以 $m=4$ ($n=11$)的總方法數說明：

1	2	3	4	5	7	10	14	19	25	33
n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11

(1+2+3+4+5+7)+11=33

(三)

規則一 C(限 $f(1,n)$)：在至少間隔人數 $m=1$ 時，總方法數直接求值的公式是

$$f(1,n)=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]-1$$

1. $m=1$(至少間隔 1 人)的總方法數的每個數加上 1 就是費氏數列，把這個數列排序後；2(費氏數列第 3 項)、3、5、8、13⋯。這時，總方法數的第 1 項加上 1 就是費氏數列第 3 項；總方數法的第 2 項加上 1 就是費氏數的第 4 項，由此可知，總方法數的第 n 項加上 1 就是費氏數列的第 $n+2$ 項。
2. 我參考費氏數列直接求值的公式 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$，將費氏數列公式中的 n 次方變成 $n+2$ 次方，這樣子公式就變成費氏數列第 $n+2$ 項直接求值的公式。那也因爲費氏數列第 $n+2$ 是總方法數的第 n 項加上 1，所以最後面再減 1 就是總方法數的第 n 項直接求值的公式了。

二、<u>固定偵訊人數的方法數</u>的分析

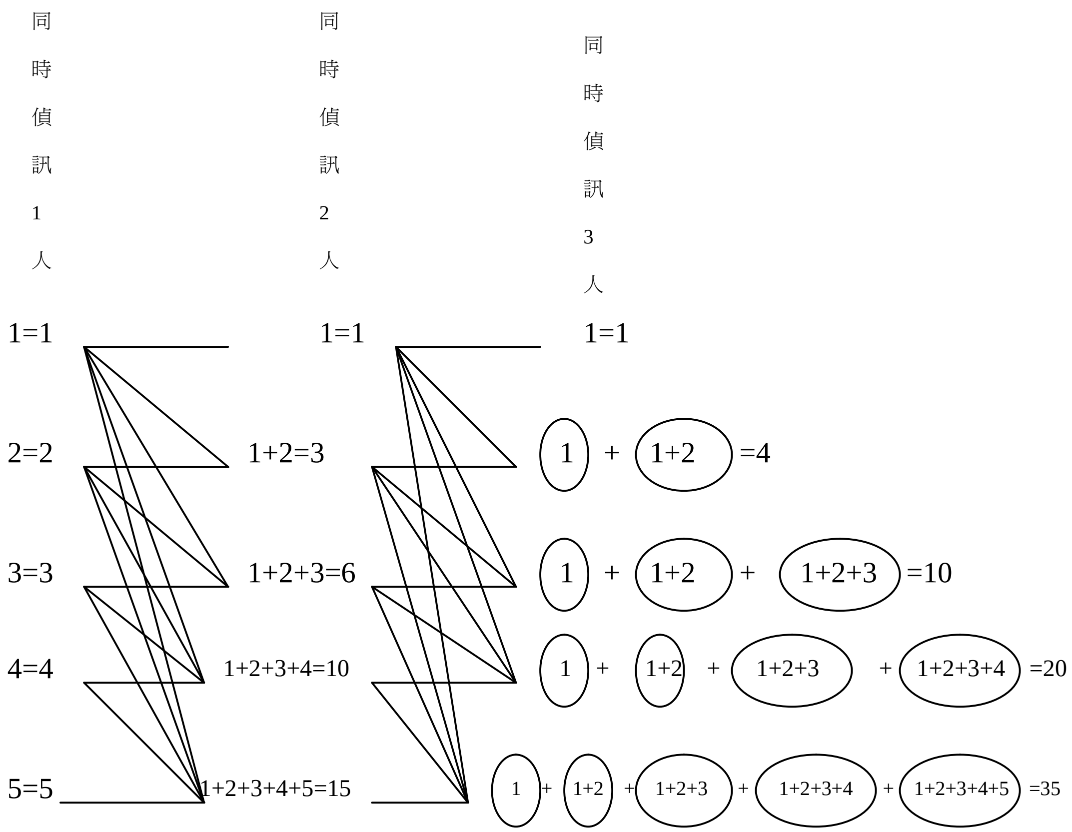
(一)

規則二 A：$g(k,l)$ 表示第 k 行第 l 項的方法數(k 代表偵訊 k 人形成的數列，l 代表數列的第 l 項，數列的首項均爲 1)則

$$g(k,1)+g(k,2)+\ldots+g(k,l-1)+g(k,l)=g(k+1,l)$$

表 3　$f(1,n)$ 進行的分析(節錄部份內容)

		一次偵訊人數							
		1	2	3	4	5	6	7	總方法數
囚犯人數	1	1	0	0	0	0	0	0	1
	2	2	0	0	0	0	0	0	2
	3	3	+2 1	0	0	0	0	0	4
	4	4	+3 3	0	0	0	0	0	7
	5	5	+4 6	+3 1	0	0	0	0	12
	6	6	+5 10	+6 4	0	0	0	0	20
	7	7	+6 15	+10 10	+4 1	0	0	0	33
	8	8	+7 21	+15 20	+10 5	0	0	0	54
	9	9	+8 28	+21 35	+20 15	+5 1	0	0	88



(二)

規則二 B：可以同時偵訊 k 人的條件是囚犯人數 n 必須符合 $n \ge (m+1)k-m$

1.在 $m=1$ 的表格中，可以同時偵訊 1 人的條件是 $n \ge 1$；2 人是 $n \ge 3$；3 人 $\Rightarrow n \ge 5$；4 人 $\Rightarrow n \ge 7 \cdots k$ 人 $\Rightarrow n \ge 2k-1$。

2.在 $m=2$ 的表格中，1 人 $\Rightarrow n \ge 1$；2 人 $\Rightarrow n \ge 4$；3 人 $\Rightarrow n \ge 7$；4 人 $\Rightarrow n \ge 10 \cdots$ k 人 $\Rightarrow n \ge 3k-2$。

3.在 $m=3$ 的表格中，1 人 $\Rightarrow n \ge 1$；2 人 $\Rightarrow n \ge 5$；3 人 $\Rightarrow n \ge 9$；4 人 $\Rightarrow n \ge 13 \cdots$ k 人 $\Rightarrow n \ge 4k-3$。

4.在 $m=4$ 的表格中，1 人 $\Rightarrow n \ge 1$；2 人 $\Rightarrow n \ge 6$；3 人 $\Rightarrow n \ge 11$；4 人 $\Rightarrow n \ge 16 \cdots$ k 人 $\Rightarrow n \ge 5k-4$。

5.推論出，可以同時偵訊 k 人的條件 $n \ge (m+1)k-m$

(三)

規則二 C：不同偵訊人數第 L 項所構成的數列前端加上 1(1、$g(1,l)$、$g(2,l)$、$g(3,l)$、$g(4,l)$)就是同時偵訊 $l-1$ 人的數列。

1.不管 m 是多少，同時偵訊人數 1 人的第 2 項、同時偵訊 2 人的第 2 項及同時偵訊 3 人的第 2 項…，也就是各行第 2 項構成的數列(2、3、4、5、6、7…)，前端再加上 1 就是同時偵訊 1 人時的數列(1、2、3、4、5、6、7…)。

2.同時偵訊人數 1 人的第 3 項、同時偵訊 2 人的第 3 項及同時偵訊 3 人的第 3 項…，也就是各行第 3 項構成的數列(3、6、10、15、21、28、36…)，前端再加上 1 就是同時偵訊 2 人的數列(1、3、6、10、15、21、28、36…)。

3.同時偵訊人數 1 人的第 4 項、同時偵訊 2 人的第 4 項及同時偵訊 4 人的第 4 項…，也就是各行第 4 項構成的數列(4、10、20、35、56、84、120…)，前端再加上 1 就是同時偵訊 3 人的數列(1、4、10、20、35、56、84、120…)。

4.所以，同時偵訊 1 人的第 l 項、同時偵訊 2 人的第 l 項、同時偵訊 3 人的第 l 項…所構成的數列的前端再加上 1 就是同時偵訊 $l-1$ 人的數列。

5. 也就是不同偵訊人數第 l 項所構成的數列前端加上 1 的數列(1、$g(1,l)$、$g(2,l)$、$g(3,l)$、$g(4,l)$)就是同時偵訊 $l-1$ 人的數列。

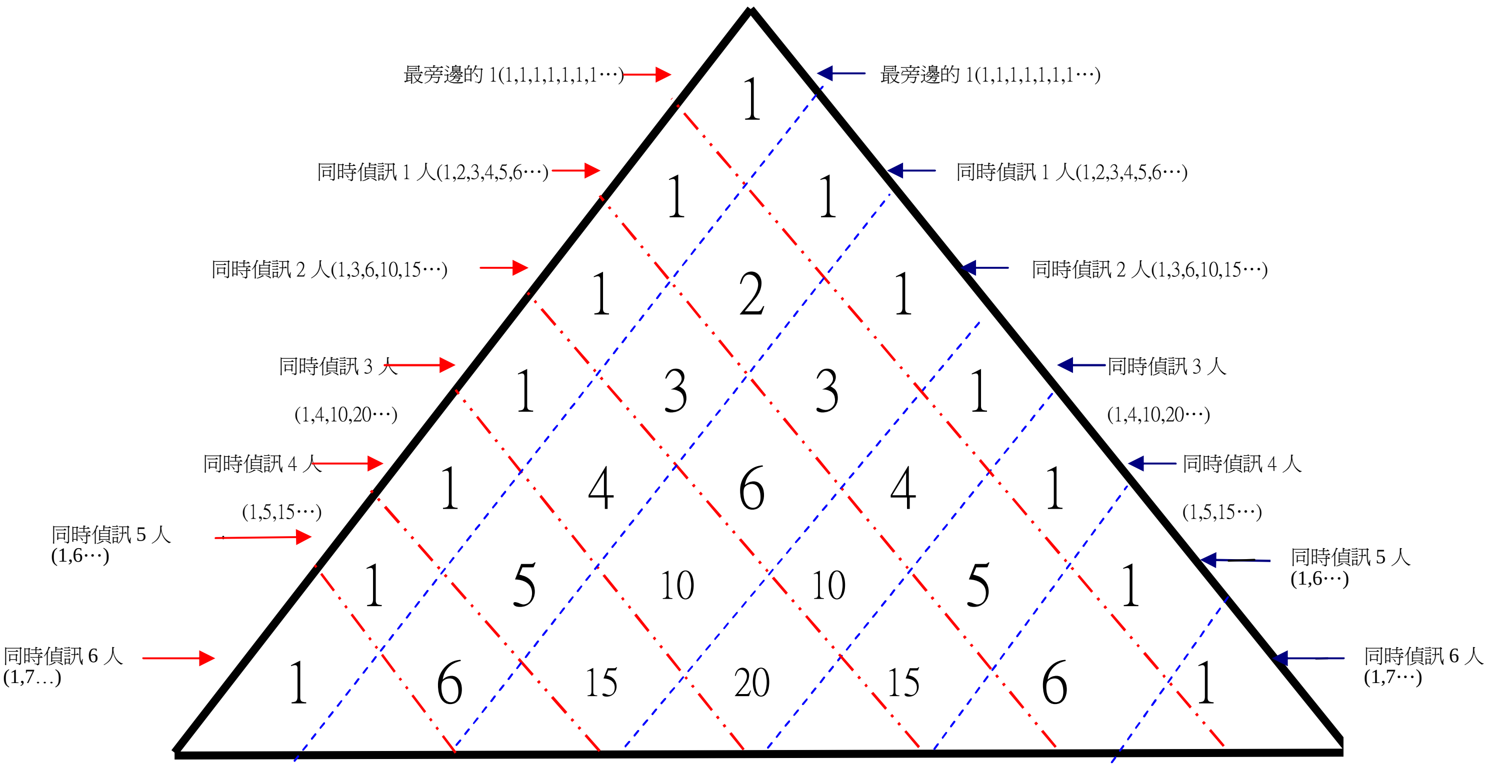
舉例如下：

	同時偵訊1人	同時偵訊2人	同時偵訊3人	同時偵訊4人	同時偵訊5人
1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

(四)

規則二 D：將不同偵訊人數構成的數列後，並在最左邊加上 1，從右下方往左上方看過去，會發現正好是巴斯卡三角形。

不管 m 是多少，同時偵訊人數 1 人、同時偵訊 2 人、同時偵訊 3 人、同時偵訊 4 人…，各行並列後再把每 1 列的最左邊加上 1，從右下方往左上方看過去，會發現正好是巴斯卡(楊輝)三角形。



(五)

規則二 E：同時偵訊 k 人的第 1 項加上同時偵訊 $k-1$ 人的第 2 項…，一直加到同時偵訊 1 人的第 $l(l=k)$ 項是 2^k-1。

1.不管 m 是多少，同時偵訊 1 人的第 1 項是 2-1。

2.同時偵訊 2 人的第 1 項加上同時偵訊 1 人的第 2 項是 2^2-1；

3.同時偵訊 3 人的第 1 項加上偵訊 2 人的第 2 項再加上同時偵訊 1 人的第 3 項是 2^3-1；

4.所以，同時偵訊 k 人的第 1 項加上同時偵訊 $k-1$ 人的第 2 項…，一直加到同時偵訊 1 人的第 $l(l=k)$ 項是 2^k-1。

	同時偵訊1人	同時偵訊2人	同時偵訊3人	同時偵訊4人	同時偵訊5人	同時偵訊6人
2^1-1	1	1	1	1	1	1
2^2-1	2	3	4	5	6	
2^3-1	3	6	10	15		
2^4-1	4	10	20			
2^5-1	5	15				
2^6-1	6					

三、以<u>囚犯編號計次的方法數</u>的分析

(一)

規則三 A：在囚犯編號計次的方法數的數列中，只要在 *m* (至少間隔人數)相同的表格裡，每 1 行(從上到下)與每 1 列(從右到左)的數列皆相同。

m=1的情形

	1				
	1	1			
	2	1	1		
	3	2	1	1	
1,1,2,3,5⇐	5	3	2	1	1

⇓

1,1,2,3,5

m=2的情形

	1					
	1	1				
	1	1	1			
	2	1	1	1		
	3	2	1	1	1	
1,1,1,2,3,4⇐	4	3	2	1	1	1

⇓

1,1,1,2,3,4

m=3的情形

	1						
	1	1					
	1	1	1				
	1	1	1	1			
	2	1	1	1	1		
	3	2	1	1	1	1	
1,1,1,1,2,3,4⇐	4	3	2	1	1	1	1

⇓

1,1,1,1,2,3,4

m=4的情形

	1							
	1	1						
	1	1	1					
	1	1	1	1				
	1	1	1	1	1			
	2	1	1	1	1	1		
	3	2	1	1	1	1	1	
1,1,1,1,1,2,3,4⇐	4	3	2	1	1	1	1	1

⇓

1,1,1,1,1,2,3,4

(二)

規則三 B：在總方法數項次差的數列前端再加 1 個 1，就是囚犯編號計次方法數的數列。

1.以 $m=1$ 爲例，也就是 $f(1,n)$ 總方法數的第 1 項和第 2 項的差是 1；第 2 項和第 3 項的差是 2；$f(1,4)-f(1,3)=3$；$f(1,5)-f(1,4)=5$；$f(1,6)-f(1,5)=8$，把 $f(1,n)$ 的所有相鄰的項次的差寫成數列後是 1、2、3、5、8…；而以囚犯編號計次方法數的數列是 1、1、2、3、5、8…。

2. 以 $m=1$ 爲例：

總方法數		1	2	4	7	12	20	33	54
		+	+	+	+	+	+	+	
總方法數項次差		1	2	3	5	8	13	21	
以囚犯編號計次方法數	$\boxed{1}$	1	2	3	5	8	13	21	

1 個 1

3. 以 $m=2$ 爲例：

總方法數		1	2	3	5	8	12	18	27
		+	+	+	+	+	+	+	
總方法數項次差		1	1	2	3	4	6	9	
以囚犯編號計次方法數	$\boxed{1}$	1	1	2	3	4	6	9	

1 個 1

3. 以 $m=3$ 爲例：

總方法數		1	2	3	4	6	9	13	18
		+	+	+	+	+	+	+	
總方法數項次差		1	1	1	2	3	4	6	
以囚犯編號計次方法數	$\boxed{1}$	1	1	1	2	3	4	6	

1 個 1

4. 以 $m = 4$ 爲例：

總方法數		1	2	3	4	5	7	10	14
		+	+	+	+	+	+	+	
總方法數項次差		1	1	1	1	2	3	4	
以囚犯編號計次方法數	1	1	1	1	1	2	3	4	

1 個 1

(三)

規則三 C：囚犯編號計次方法數的數列，以 j 爲項次，以 $h(m, j)$ 表示該項數值，則 $h(m, j) = 2h(m, j-m-1) + h(m, j-m-2)$
$+ h(m, j-m-3) + \ldots + h(m, j-2m-1)$

1.我發現在 $m = 1$(至少間隔 1 個囚犯)的情形中，以囚犯編號計次的方法數的數列正好是費氏數列，1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233⋯。依照費氏數列的結果，記成表 4-1。

2.發現從第 3 項開始的「可生兔子的成兔」和「幼兔」的數列(1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233⋯)都是費氏數列；從第 4 項開始的「未成熟的成兔」的數列也是費氏數列。換句話說就是第 3 項是第 1 項的 2 倍；第 4 項是第 2 項的 2 倍加上第 1 項；第 5 項是第 3 項的 2 倍加上第 2 項⋯。

3.在 $m = 1$ 時，任何 1 項的前面第 2 項的兩倍加上這 1 項的前面第 3 項的和就是這 1 項，寫成公式：$h(1, j) = 2h(1, j-2) + h(1, j-3)$。

表 4-1 三種兔子 ABC 的對數(紅色部份的數列和「至少間隔 1 個囚犯時，以囚犯編號計次的方法數」的數列相同)

A(幼兔)	B(未成熟的成兔)	C(可生兔的成兔)	不同月份之兔子對數/不同項次的方法數數列	方法數數列的項次值 $h(1,j)$
1			1 $h(1,1)$	$h(1,1)=1$
	1		1 $h(1,2)$	$h(1,2)=1$
1 $h(1,1)$		1 $h(1,1)$	2 $h(1,3)$	$h(1,3)=2h(1,1)$
1 $h(1,2)$	1 $h(1,1)$	1 $h(1,2)$	3 $h(1,4)$	$h(1,4)=2h(1,2)+h(1,1)$
2 $h(1,3)$	1 $h(1,2)$	2 $h(1,3)$	5 $h(1,5)$	$h(1,5)=2h(1,3)+h(1,2)$
3 $h(1,4)$	2 $h(1,3)$	3 $h(1,4)$	8 $h(1,6)$	$h(1,6)=2h(1,4)+h(1,3)$
5 $h(1,5)$	3 $h(1,4)$	5 $h(1,5)$	13 $h(1,7)$	$h(1,7)=2h(1,5)+h(1,4)$
…	…	…	…	…
$h(1,j)=2h(1,j-2)+h(1,j-3)$				

4.目前兔子種類只有 3 種：「可生兔的成兔」、「未成熟的成兔」、「幼兔」。我在想如果「兔子種類」有 4 種、5 種、6 種又是如何呢？

5.兔子種類有 4 種時，記成表 4-2，它的數列，正好與 $m=2$ 至少間隔 2 人)以囚犯編號計次的方法數的數列(1、1、1、2、3、4、6、9、13、19、28、41、60、88、129…)相同，依前法推導，發現任何 1 項的前面第 3 項的兩倍加上前面第 4 項及第 5 項的和就是這 1 項，寫成公式：$h(2,j)=2h(2,j-3)+h(2,j-4)+h(2,j-5)$。

表 4-2 四種兔子 ABCD 的對數(紅色部份的數列和「至少間隔 2 個囚犯時，以囚犯編號計次的方法數」的數列相同)

A 兔	B 兔	C 兔	D 兔	不同月份之兔子對數/不同項次的方法數數列	方法數數列的項次值 $h(2,j)$
1				$1_{h(2,1)}$	$h(2,1)=1$
	1			$1_{h(2,2)}$	$h(2,2)=1$
		1		$1_{h(2,3)}$	$h(2,3)=1$
$1_{h(2,1)}$			$1_{h(2,1)}$	$2_{h(2,4)}$	$h(2,4)=2h(2,1)$
$1_{h(2,2)}$	$1_{h(2,1)}$		$1_{h(2,2)}$	$3_{h(2,5)}$	$h(2,5)=2h(2,2)+h(2,1)$
$1_{h(2,3)}$	$1_{h(2,2)}$	$1_{h(2,1)}$	$1_{h(2,3)}$	$4_{h(2,6)}$	$h(2,6)=2h(2,3)+h(2,2)+h(2,1)$
$2_{h(2,4)}$	$1_{h(2,3)}$	$1_{h(2,2)}$	$2_{h(2,4)}$	$6_{h(2,7)}$	$h(2,7)=2h(2,4)+h(2,3)+h(2,2)$
$3_{h(2,5)}$	$2_{h(2,4)}$	$1_{h(2,3)}$	$3_{h(2,5)}$	$9_{h(2,8)}$	$h(2,8)=2h(2,5)+h(2,4)+h(2,3)$
$4_{h(2,6)}$	$3_{h(2,5)}$	$2_{h(2,4)}$	$4_{h(2,6)}$	$13_{h(2,9)}$	$h(2,9)=2h(2,6)+h(2,5)+h(2,4)$
…	…	…	…	…	…
$h(2,j)=2h(2,j-3)+h(2,j-4)+h(2,j-5)$					

6.兔子種類有 5 種時，記成表 4-3，它的數列，正好與 $m=3$ (至少間隔 3 人)以囚犯編號計次的方法數的數列(1、1、1、1、2、3、4、5、7、10、14、19、26、36⋯)相同，依前法推導，發現任何 1 項的前面第 4 項的兩倍加上前面第 5 項及第 6 項及第 7 項的和就是這 1 項，寫成公式：

$h(3,j)=2h(3,j-4)+h(3,j-5)+h(3,j-6)+h(3,j-7)$ 。

表 4-3 五種兔子 ABCDE 的對數(紅色部份的數列和「至少間隔 3 個囚犯時，以囚犯編號計次的方法數」的數列相同)						
A 兔	B 兔	C 兔	D 兔	E 兔	不同月份之兔子對數/不同項次的方法數數列	方法數數列的項次值 $h(3, j)$
1					1 $h(3,1)$	$h(3,1)=1$
	1				1 $h(3,2)$	$h(3,2)=1$
		1			1 $h(3,3)$	$h(3,3)=1$
			1		1 $h(3,4)$	$h(3,4)=1$
1 $h(3,1)$				1 $h(3,1)$	2 $h(3,5)$	$h(3,5)=2h(3,1)$
1 $h(3,2)$	1 $h(3,1)$			1 $h(3,2)$	3 $h(3,6)$	$h(3,6)=2h(3,2)+h(3,1)$
1 $h(3,3)$	1 $h(3,2)$	1 $h(3,1)$		1 $h(3,3)$	4 $h(3,7)$	$h(3,7)=2h(3,3)+h(3,2)+h(3,1)$
1 $h(3,4)$	1 $h(3,3)$	1 $h(3,2)$	1 $h(3,1)$	1 $h(3,4)$	5 $h(3,8)$	$h(3,8)=2h(3,4)+h(3,3)+h(3,2)+h(3,1)$
2 $h(3,5)$	1 $h(3,4)$	1 $h(3,3)$	1 $h(3,2)$	2 $h(3,5)$	7 $h(3,9)$	$h(3,9)=2h(3,5)+h(3,4)+h(3,3)+h(3,2)$
3 $h(3,6)$	2 $h(3,5)$	1 $h(3,4)$	1 $h(3,3)$	3 $h(3,6)$	10 $h(3,10)$	$h(3,10)=2h(3,6)+h(3,5)+h(3,4)+h(3,3)$
4 $h(3,7)$	3 $h(3,6)$	2 $h(3,5)$	1 $h(3,4)$	4 $h(3,7)$	14 $h(3,11)$	$h(3,11)=2h(3,7)+h(3,6)+h(3,5)+h(3,4)$
…	…	…	…	…	…	…
$h(3,j)=2h(3,j-4)+h(3,j-5)+h(3,j-6)+h(3,j-7)$						

7.兔子種類有 6 種時，記成表 4-4，它的數列，正好與 $m=4$(至少間隔 4 人)以囚犯編號計次的方法數的數列(1、1、1、1、1、2、3、4、5、6、8、11、15、20、26…)相同，依前法推導，發現任何 1 項的前面第 5 項的兩倍加上前面第 6 項、第 7 項、第 8 項、第 9 項的和就是這 1 項，寫成公式：

$h(4,j)=2h(4,j-5)+h(4,j-6)+h(4,j-7)+h(4,j-8)+h(4,j-9)$

8.最後我把 $m=1\sim4$ (至少間隔 1~4 人)以囚犯編號計次方法數數列的公式匯集起來後，整理成規則三 C 的公式。

表 4-4 六種兔子 ABCDEF 的對數(紅色部份的數列和「至少間隔 4 個囚犯時，以囚犯編號計次的方法數」的數列相同)

A 兔	B 兔	C 兔	D 兔	E 兔	F 兔	不同月份之兔子對數/不同項次的方法數數列	方法數數列的項次值 $h(4,j)$
1						$1_{h(4,1)}$	$h(4,1)=1$
	1					$1_{h(4,2)}$	$h(4,2)=1$
		1				$1_{h(4,3)}$	$h(4,3)=1$
			1			$1_{h(4,4)}$	$h(4,4)=1$
				1		$1_{h(4,5)}$	$h(4,5)=1$
$1_{h(4,1)}$					$1_{h(4,1)}$	$2_{h(4,6)}$	$h(4,6)=2h(4,1)$
$1_{h(4,2)}$	$1_{h(4,1)}$				$1_{h(4,2)}$	$3_{h(4,7)}$	$h(4,7)=2h(4,2)+h(4,1)$
$1_{h(4,3)}$	$1_{h(4,2)}$	$1_{h(4,1)}$			$1_{h(4,3)}$	$4_{h(4,8)}$	$h(4,8)=2h(4,3)+h(4,2)+h(4,1)$
$1_{h(4,4)}$	$1_{h(4,3)}$	$1_{h(4,2)}$	$1_{h(4,1)}$		$1_{h(4,4)}$	$5_{h(4,9)}$	$h(4,9)=2h(4,4)+h(4,3)$ $+h(4,2)+h(4,1)$
$1_{h(4,5)}$	$1_{h(4,4)}$	$1_{h(4,3)}$	$1_{h(4,2)}$	$1_{h(4,1)}$	$1_{h(4,5)}$	$6_{h(4,10)}$	$h(4,10)=2h(4,5)+h(4,4)$ $+h(4,3)+h(4,2)+h(4,1)$
$2_{h(4,6)}$	$1_{h(4,5)}$	$1_{h(4,4)}$	$1_{h(4,3)}$	$1_{h(4,2)}$	$2_{h(4,6)}$	$8_{h(4,11)}$	$h(4,11)=2h(4,6)+h(4,5)$ $+h(4,4)+h(4,3)+h(4,2)$
$3_{h(4,7)}$	$2_{h(4,6)}$	$1_{h(4,5)}$	$1_{h(4,4)}$	$1_{h(4,3)}$	$3_{h(4,7)}$	$11_{h(4,12)}$	$h(4,12)=2h(4,7)+h(4,6)$ $+h(4,5)+h(4,4)+h(4,3)$
…	…	…	…	…	…	…	…
$h(4,j)=2h(4,j-5)+h(4,j-6)+h(4,j-7)+h(4,j-8)+h(4,j-9)$							

(四)

規則三 D：以 j 代表囚犯編號計次的方法數列的項次，則 $$h(m,j)+h(m,j+m)=h(m,j+m+1)$$

1.我的發現與分析：因爲 $m=1$(至少間隔 1 人)以囚犯編號計次方法數的數列是費氏數列，而費氏數列有一個性質是這 1 項、下 1 項的和就是下第 2 項，即：$(F_n+F_{n+1}=F_{n+2})$。那 $m=1$(至少間隔 1 人)以囚犯編號計次方法數的數列也可以寫成式子：$h(1,j)+h(1,j+1)=h(1,j+2)$，咦！這不是跟在規則 1A 的公式：$f(1,n)+f(1,n+1)+1=f(1,n+2)$ 很像嗎？只要把公式 $f(1,n)+f(1,n+1)+1=f(1,n+2)$ 去掉「+1」就是 $h(1,j)+h(1,j+1)=h(1,j+2)$。此規則在 $m=1$(至少間隔 1 人)時成立，那 $m=2\sim 4$(至少間隔 2~4 人)應該可以成立，所以我用同樣的方法試，結果成功了。

2.規則的歸納：

(1)根據 $m=1\sim 4$ 中以囚犯編號計次的方法數列，若 j 是指此數列的項次，在 $m=1$ 的條件下，數列中的第 1 項加上第 2 項就是第 3 項。$h(1,2)+h(1,3)=h(1,4)$(這裡的 2、3、4 就是指 j)；$h(1,3)+h(1,4)=h(1,5)\cdots\Rightarrow h(1,j)+h(1,j+1)=h(1,j+2)$

(2)在 $m=2$ 的條件下，數列中的第 1 項加上第 3 項就是第 4 項。

$h(2,2)+h(2,4)=h(2,5)$，$h(2,3)+h(2,5)=h(2,6)\cdots$

$\Rightarrow h(2,j)+h(2,j+1)=h(2,j+3)$。

(3)在 $m=3$ 的條件下，數列中的第 1 項加上第 4 項就是第 5 項。

$h(3,2)+h(3,5)=h(3,6)$，$h(3,3)+h(3,6)=h(3,7)\cdots$

$\Rightarrow h(3,j)+h(3,j+3)=h(2,j+4)$。

(4)在 $m=4$ 的條件下，數列中的第 1 項加上第 5 項就是第 6 項。

$h(4,2)+h(4,6)=h(4,7)$，$h(4,3)+h(4,7)=h(4,8)\cdots$

$\Rightarrow h(4,j)+h(4,j+4)=h(4,j+5)$。

(5)推導出：$h(m,j)+h(m,j+m)=h(m,j+m+1)$。

捌、結論

一、總方法數的分析

(一)針對總方法數的數列進行分析，發現依照數列的規律性，可以從前面的項次的值，推導出後面項次的值，規則一 A：$f(m,n)+f(m,n+m)+1=f(m,n+m+1)$，與規則一 B：$f(m,1)+...+f(m,n-m-2)+f(m,n-m-1)+n=f(m,n)$都是這個樣子。

(二)但是依照規則一 A 與規則一 B，我要找出答案只能一個一個加，慢慢求出答案，從目前發現的規則中，我還沒有足夠的線索，找出直接求值的公式，在對照費氏數列的公式，發現當至少間隔人數爲$m=1$時，可以直接算出它的方法數，規則一 C：$f(1,n)=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]-1$；雖然有這樣子的結果，我想我還是應該從數列中慢慢推導出規則一 C 的公式，才有可能推出m不等於 1 的公式。

二、固定偵訊人數方法數的分析

(一)規則二 A：$g(k,1)+g(k,2)+...+g(k,l-1)+g(k,l)=g(k+1,l)$的發現，確認了表 1-1 至表 1-4 部份推論的數值。

(二)規則二 B 提出了同時偵訊人數的條件限制；規則二 C、規則二 D、規則二 E 則提出了固定偵訊人數方法數數列間有趣的關係及發現，讓我覺得這些數列間好像藏了好多密碼，等待我去破解。

三、囚犯編號方法數的分析

(一)從規則三 B 中，讓我知道以囚犯編號的計次的方法數，能直接轉換成總方法數，因此對囚犯編號方法數的規則進行分析就顯得很重要了。

(二)從$m=1$(至少間隔 1 個囚犯)的情形中，以囚犯的編號計次的方法數剛好是費氏數列，讓我能推導出規則三 C，也就是找出以囚犯編號計次方法數$h(m,j)$的數值。這個發現讓我覺得很開心，也讓我對費氏數列有了更多的認識，也更想進一步的去研究它。

(三)規則三 D 讓我們能從前二項的和推估到這一項，一方面確認了表 2-1 到表 2-4 的部份推論，另一方面我也發現其實它與總方法數的規則一 A 很相似。

四、心得與檢討

我是從去年十二月開始進行這個研究，剛開始我用劃記法解題，雖然費時費力，但是總算有了開始，之後我將結果整理出表格，試著看出一點兒端倪。那時候，看著整理出的表格，竟然有了一、二個特別的發現，我欣喜若狂，把發現的結果告訴爸爸，爸爸說他被我「嚇了三跳」呢！。

之後，我每發現一個規則，爸爸就幫我輸入電腦裡，我相信，只要持之以恆，我一定可以找出更多的線索。隨著發現的規則一個個出現，我是愈做愈起勁。因此，過年時別人吃豐盛的年菜，我則是在寫複雜的數字；別人放鞭炮、玩遊戲機，我則

在是寫公式，雖然如此，我還是樂此不疲。

規則雖然一個個找出來，可是我心裡最想的是能夠找出 $f(m,n)$ 直接求值的公式，我參考由一元二次方程式求出來的費氏數列的公式，運用相同的方法，想辦法推導公式。不過現階段，因為我的數學能力不足，還是沒有成功，我會繼續努力充實，相信遲早有一天我會找出答案的。

玖、參考資料

Ian Stewart（1995）Nature’s Numbers: the unreal reality of mathematical imagination。葉李華(譯)，**大自然的數學遊戲**。**液滴、狐與兔、花瓣**。臺北市：天下。

白啓光(民 91)。費氏數列及黃金分割。取自 http://xserve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/carnival/fibonacci/index.htm

串供(民 95 年 6 月 6 日)。囚犯。**昌爸工作坊討論區**。民國 95 年 6 月 6 日，取自 http://www.mathland.idv.tw/

紀素雲等（民 93）。從兔子繁殖問題到勾股數組。**枯井的啓示—數學的故事**。（76-80 頁）。臺北市：倚天文化。

紀素雲等（民 93）。勤學善算的數學家—楊輝。**枯井的啓示—數學的故事**。（106-109 頁）。臺北市：倚天文化。

黃田奇、黃偉綸、鄭龍驊、林芳維、徐湘婷、許忠誠（民 93）。**小朋友上樓梯—費氏數列的推廣與應用**。中華民國第四十四屆中小學科學展覽會作品說明書(編號 080412)

黃敏晃(民 63)。漫談費布那齊數列。**科學月刊，5(7)**，64-66。

維尼哥哥開講 29：巴斯卡三角形（民 89 年 6 月 20 日）。取自：http://www.bud.org.tw/Winnie/Wshow29.htm

【評　語】　080406　聰明的審判—尋找避免囚犯串供問題的解答

研究中能找出選取囚犯方法數的算式以及分析數列的規則，尤其針對不同間隔人數也能深入剖析。建議文中對於不同函數符號 f、F、g 以及 n、k、m、l 所代表的意義能更詳實清晰。