中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第一名

040425

永不妥協

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高二 林孟俞	胡裕仁
高二 陳紹宇	洪儒
高一 劉瑞文	
高二 王曉薇	

關鍵詞：Sperner 定理　必勝定則　數學歸納法

摘要

本文是籍由一套數學遊戲來找出它的必勝方法，並且依其設定的遊戲規則來找出它背後的數學原理，作為我們在本文的主要目標。

遊戲名稱：永不妥協

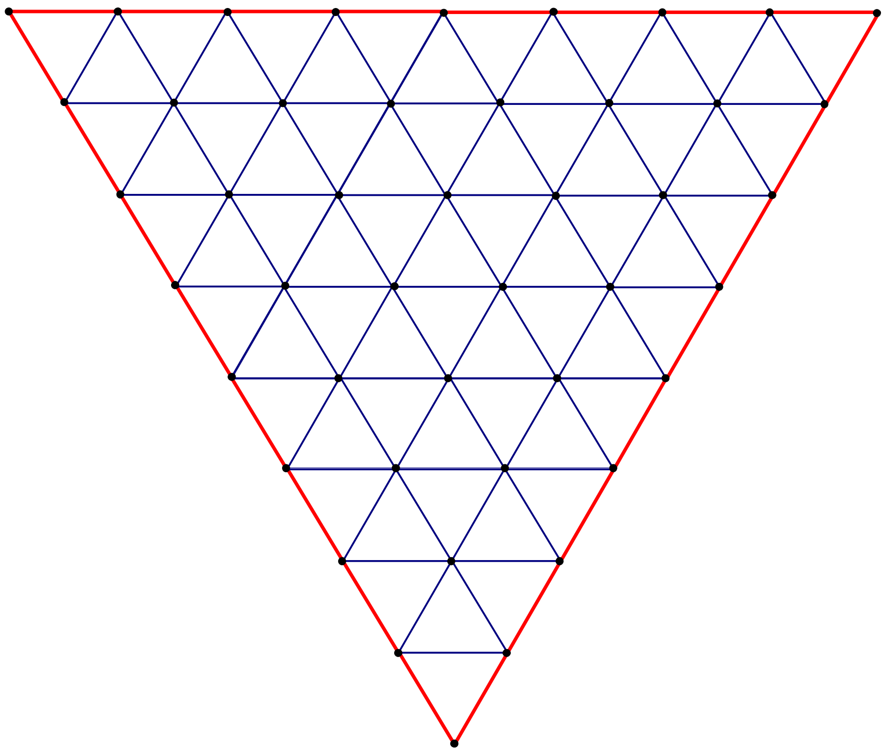
（因為此遊戲永遠沒有和棋的結果）

玩法：兩位玩家利用兩種顏色的棋子，在三角形棋盤上下棋，只要能先在棋盤上產生一條同色棋子的連通線，且該連通線可同時連接上三角形最外的3個周界（紅色部分）者，即獲勝。

道具：

黑白棋子○，●若干

下圖的棋盤一紙。



在本文中我們利用了德國數學家E. Sperner提出的理論方法，及高一所學的歸納法、反證法…等數學證明方法，解決潘建強、邵慰慈兩位教授留下來沒有證完的遊戲結果[1]，並將此遊戲依它的特性命名為『永不妥協』。

1、研究動機

剛上高中時，由於對數學的熱愛而參加數學研究社，在第一次的上課中，老師告訴我們參加數學研究社有一項偉大使命，就是要養三朵花（花時間、花腦筋、花金錢）來做科展，因此，不到一個的時間，同社的同學便剩下三分之一了。

經過老師一些時間的方法指導後，我們開始利用網路及學校圖書館資源進行題目查找，最後在學校圖書館的一個角落發現一本叫做「數學傳播」的季刊，並在108期中看到有關『Sperner引理及其應用』的主題，而此主題剛好與老師前幾天在數學競賽中提到的『Sperner引理』[2][3]名字很像，因此便仔細地去閱讀它，原作者在該篇文章中提到了一個數學下棋遊戲，此遊戲的最終結果必存在唯一勝方(即永不和棋)。

但是，作者卻留下二個問題未加以討論，『第一個問題:先下棋是否有利？』、『第二個問題:若獲勝則方式為何?』因此抱持著一股好奇心，我們幾位同學便與老師開始討論並且玩起這個遊戲。

2、研究目的

（1）在遊戲進行中，玩家不可更換棋色時，判斷先下或後下何者較有利？

（2）玩家不可更換棋色時，遊戲的必勝方法，及其最佳的致勝方式。

（3）在遊戲進行中，玩家可任意更換棋色時，其結果如何？

3、 研究設備及器材

1、 電腦壹台。

2、 數學方程式符號編輯器Equation、GSP、Word、VISIO軟體各壹套。

3、 彩色印表機一台。

4、 黑白棋子若干。

5、 大型圖紙一份。

4、 文獻探討及研究方法

1911 年，L. Brouwer 發表一個著名的不動點定理，它對分析、拓樸等多方面都有深刻的影響[8]。1928 年，德國數學家 E.Sperner 發現一個簡單的證明，他利用組合學的方法證明 Brouwer 不動點定理。本文將介紹 Sperner 引理及應用 Sperner 引理證明[1]其所提出數學遊戲存在唯一的勝方，並嘗試找到可能獲勝的規律及其方法[7]。

Sperner 引理

給定一個‘大’三角形 $V_1V_2V_3$，並將它**三角化**(把它畫分成有限多個較‘細’的三角形且每個‘細’三角形的邊都是另一個‘細’三角形的邊或落在‘大三角形的邊上)。若將各頂點以下述的規定標記：

・頂點 V_i 的標號為 i ，$i = 1,2,3$ ；

・在 V_iV_j 邊上的頂點只可以用 i 或 j 作為標號；

・不在‘大’三角形邊上的頂點可隨意以 1，2 或 3 作為標號；

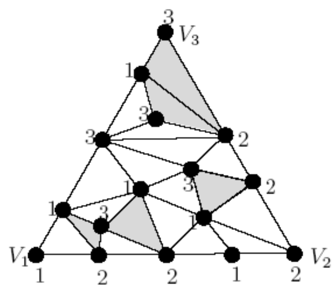


圖 4-1

則至少存在一個‘細’三角形其三個頂點的標號分別為 1，2 及 3。

圖 4-1 是一個已標號的三角化三角形的例子，劃上陰影的‘細’三角形就是 Sperner 引理結論中所說的三角形。要證明這個定理須以握手定理來協助，這個定理通常在圖

論書上都以握手來舉例，因此稱為握手定理。[1][3]

握手定理：設 G 為一 n 階圖，則 G 的 n 個頂點的度之和等於邊數的兩倍。即 G 中 n 個頂點為 v_1，v_2，…，v_n，邊數為 e，則

$$d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)=2e$$

證明：所有頂點的度之和 $d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)$，表示以頂點 v_1，v_2，…，v_n 中某個頂點為一個端點的邊之總數，由於一條邊有二個端點，因此圖 G 的每條邊在和 $d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)$ 中被計入兩次，所以所有頂點的度之和為邊數的兩倍。

Sperner 引理證明：設 T 為已三角化的三角形 $V_1V_2V_3$，其頂點的標記方法是根據 Sperner 引理中所要求的。考慮 T 的半對偶圖 T’[4]，其中 T’ 的頂點是 T 的面，為了表示 T’ 的點，在 T 中每一個‘細’三角形和無限面內劃一個小圓點(如圖 4-2 的白圓點)，兩白圓點有一連線若且為若這兩點所代表的面其公共邊的兩端點分別標著 1 和 2。

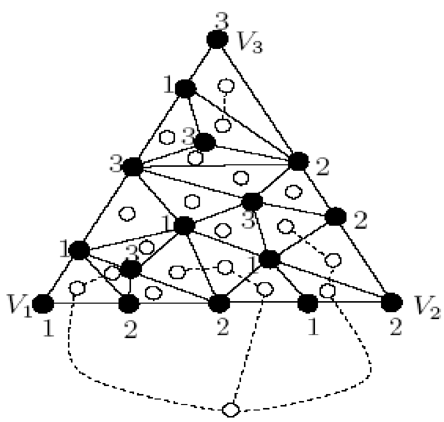


圖 4-2

見圖 4-2：我們很容易看出半對偶圖 T’ 中的頂點，除對應著無限面的頂點外，其度數不超過 2。在 T’ 中度數為 1 的頂點對應著 T 中標著 1，2 及 3 的‘細’三角形

所組成的面；度數為 2 的頂點對應著 T 中只標著 1 及 2 的‘細’三角形所組成的面；度數為 0 的頂點只對應著 T 中不同時標著 1 和 2 的‘細’三角形所組成的面。因為在 V_1V_2 邊上只得單數多條邊的兩端點是分別記號為 1 及 2 的，所以在半對偶圖中對應著無限面的頂點的度數是單數。若 T’ 中沒有度數為 1 的頂點，那麼其頂點度數之和必為單數，這與握手定理相矛盾。因此，結論就是必定存在一‘細’三角形，其三個頂點的標號分別為 1，2 及 3。[1]

<u>三角形棋盤上的遊戲</u>

前面說明了 Sperner 引理，在此介紹本文主題在三角形棋盤上的遊戲，同時利用 Sperner 引理證明該遊戲必存在唯一的勝利者。本文所謂三角形棋盤，就是一個大的正三角形板簡稱為大三角板，其頂點為 V_1，V_2 及 V_3。把大三角板畫分成一些全等的‘細’ 三角形板且這些‘細’三角形的邊與該三角形板之邊平行。記 T_l 為有 l 層的三角形棋盤。例如:

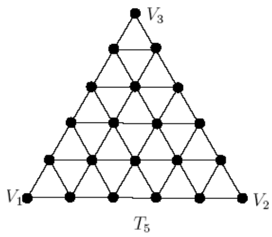


圖 4-5

定義一：線段的相交點稱為該三角形棋盤的頂點。

定義二：將三角形板的周界分解為 P_1，P_2 及 P_3 三直線段使得 V_i P_i，即

$P_1=(V_2,\text{跂},V_3)$ 、$P_2=(V_1,\text{跂},V_3)$ 、$P_3=(V_1,\text{跂},V_2)$

定義三:設 S 為該三角形棋盤頂點的子集。將 S 的點聯同以 S 的點作為兩端點的邊所組成的圖稱為 S 的衍生子圖。

定義四:設 S 為該三角形棋盤頂點的子集，且滿足下列兩條件：

(1)若 S 至少包含著 P_1，P_2 及 P_3 中各一頂點，

(2)其衍生子圖是連通圖，

則 S 稱為連通集。

以下是兩連通集如圖 4-6 及 4-7(白色的點)的例子:

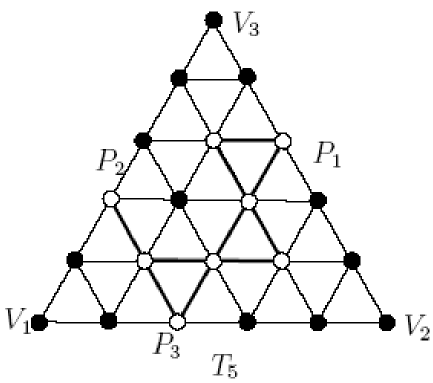


圖 4-6

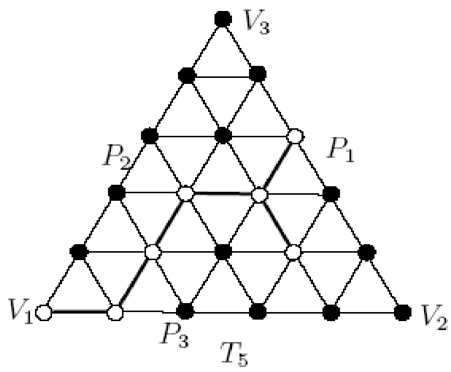


圖 4-7

<u>遊戲的方法:</u>

用具:(1)三角形棋盤 T_l。　　(2)兩種顏色的棋子(白色及黑色)。

玩法:此乃二人遊戲，每人分別使用不同顏色的棋子。各人輪流將棋子放在三角形棋盤的頂點上，若其中一人的棋子能組成一**連通集**(滿足定義四中(1)及時(2)兩點，結果如下四張圖)，那人就是得勝者。

這遊戲的規則簡單，但發現其原理與 Sperner 引理有關[1]。因此我們命名遊戲方式為『永不妥協』，其存在結果為**永不妥協定理。**

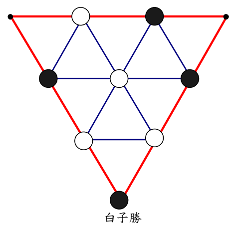


圖 4-7

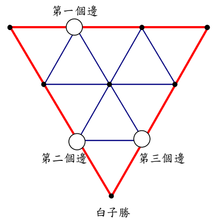


圖 4-8

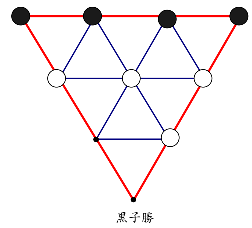


圖 4-9

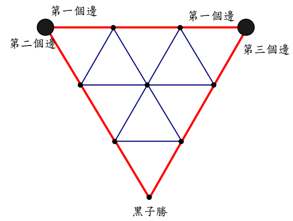


圖 4-10

永不妥協定理：在三角形棋盤上T_l下棋，若以上述的遊戲規則，則總有一位且只有一位得勝者(即：遊戲沒有和局)。

證明黑棋子和白棋子不能同時為連通集

(1) 證明黑棋子和白棋子不能同時為連通集：設B為黑棋子的連通集，W為白棋子的連通集。因此在P_1上，存在一頂點b B及w W。在不失一般性，設b在V_3及w之間。由於W是連通的，所以可找到一條以w的點為頂點所組成的路徑使得它連接在到P_2上，這條路徑把T_l分成上下兩部分，那麼連通集B就不可能連通了(不能連接點b與P_3上的頂點，如圖 4-11)。

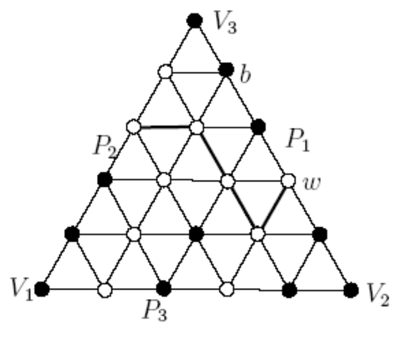


圖 4-11

(2) 證明假設出現和棋的情況：在T_l上每個頂點都放滿了棋子，但W和B都不是

連通集。對任意的頂點v，至少存在著一條直線段P_1，P_2或P_3使v不能透過和本身同顏色的棋子到達。定義各頂點v　T_l的標號為

$$\lambda(v) = \min\{i : v\text{不能透過和本身相同顏色的棋子到達 P}_i\}.$$

因此對每一個T_l上的頂點都以 1，2 或 3 作了標記。很容易觀察到其標號滿足 Sperner 引理的要求。根據此定理，在棋盤上存在一‘細’三角形其頂點分別以 1，2 及 3 為標號。由『鴿籠原理』知這三個頂點中至少有 2 個頂點的棋子顏色是相同。在不失一般性之下，設標號為 1，2 的頂點上棋子的顏色為黑色，並且記這兩頂點分別為a_1及a_2。根據定義，a_1不能透過黑色的棋子通往P_1而a_2則可。因a_1與a_2是相鄰，而a_2上的棋子也是黑色的。那麼a_1能通過a_2，再由a_2通過一些黑色的棋子到達P_1。矛盾，命題證畢[1]。

證明T_l三角形棋盤的圖，其最小連通集的基數為 B(T_l)=ℓ+1

證明：當ℓ=1 時，設 H 為該最小連通集的衍生子圖，則 H 為一樹，且其頂點的基數為 2=ℓ+1。所以當ℓ=1 時，命題成立。

假設當ℓ=k 時，命題成立。

設ℓ=k+1 時，設 H’為 T_{k+1} 的最小連通集的衍生子圖，則 H’為一樹且P_j　H'只得 1 個頂點（j=1、2、3）。設x　P_1　H’，則x的度數為 1。把x及它相連的邊

從 H 中拿掉的圖記成 H’－x，則 H’－x 是在 T_l 的最小連通集衍生子圖，根

據歸納法假設 $|H'-x| = k+1$，所以，$|H'| = k+2$ 。

根據數學歸納法，在 T_l 中的最小連通集的基數為 $\ell+1$。

由於本文的目的是要解決原作者留下的問題；即（1）玩家不可更換棋色時，先下棋者是否有利？（2）若是，他的必勝策略如何？（3）玩家可任意更換棋色時，其結果又如何？

根據上述定理，我們只知不會有和局的結果並不保證前述的情形恆成立，因此下一節我們的目標即是要解決上述問題。

5、 研究過程及結果

1、 兩人對奕，不可任意更換顏色

設一個 $n \times n \times n$ 的三角形棋盤 T_l。則 ℓ（層數）和 n（周界的頂點數）的關係為 $\ell = n+1$（$n \geq 1,\ n \in N$）。實驗分析：由 2x2x2 棋盤開始討論至 10x10x10 的棋盤，分析結果如下：圖 5-1 至 5-18。

（數學歸納法）

ℓ=1，n=2 時：
頂點為 2x2x2 棋盤，奇數層，頂點數為 3（奇數）－先玩的得勝『鴿籠原理』

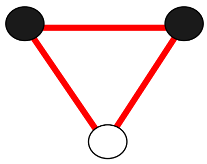


圖 5-1

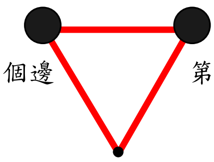


圖 5-2

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 1 個邊、2 個點；勝利條件最少 2 個同色點。

$\ell=2$，$n=3$ 時：
頂點為 3x3x3 棋盤，偶數層，頂點數為 6（偶數）-先玩的得勝

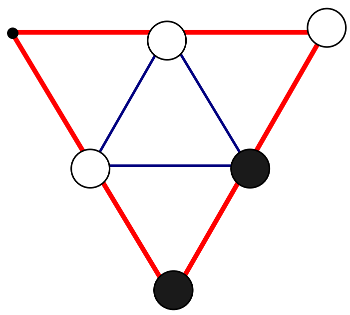


圖 5-3

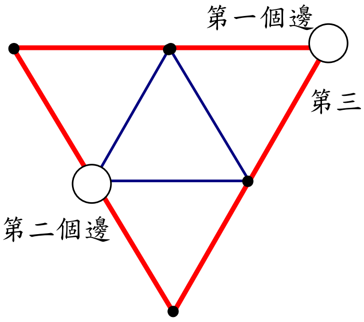


圖 5-4

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 2 個邊、3 個點；勝利條件最少 3 個同色點。

$\ell=3$，$n=4$ 時：
頂點為 4x4x4 棋盤，奇數層，頂點數為 10（偶數）-先下者得勝

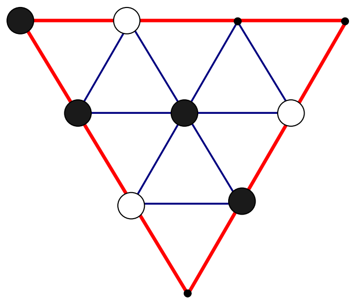


圖 5-5

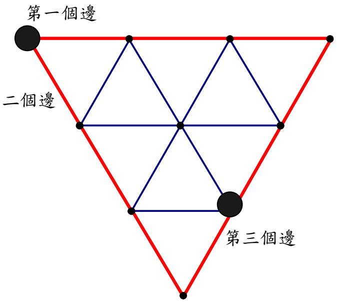


圖 5-6

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 3 個邊、4 個點；勝利條件

最少 4 個同色點。

$\ell=4$，$n=5$ 時：

頂點為 5x5x5 棋盤，偶數層，頂點數為 15（奇數）-先下者得勝

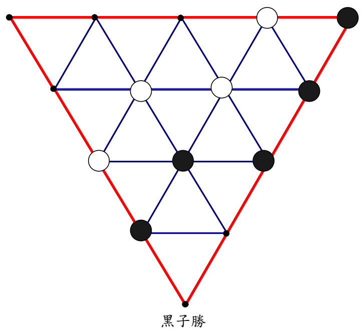


圖 5-7

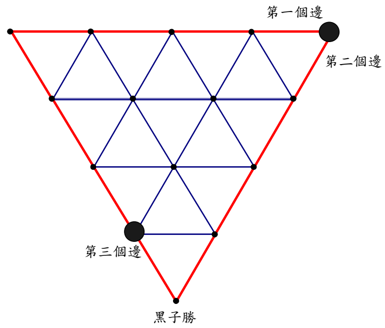


圖 5-8

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 4 個邊、5 個點；勝利條件最少 5 個同色點。

$\ell=5$，$n=6$ 時：

頂點為 6x6x6 棋盤，奇數層，頂點數為 21（奇數）-先下者得勝

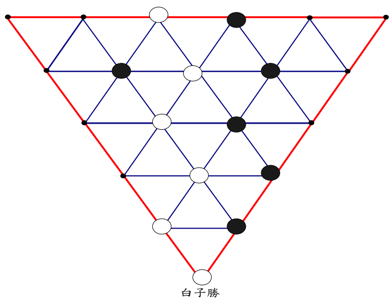


圖 5-9

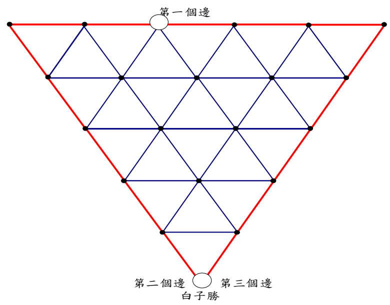


圖 5-10

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 5 個邊、6 個點；勝利條件最少 6 個同色點。

$\ell=6$，$n=7$ 時：

頂點為 7x7x7 棋盤，偶數層，頂點數為 28（偶數）-先下者得勝

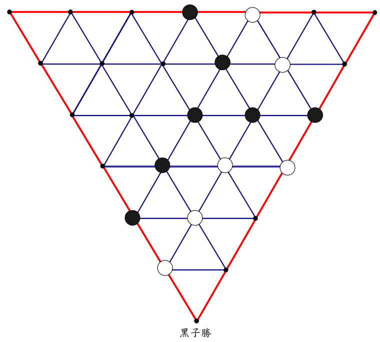


圖 5-11

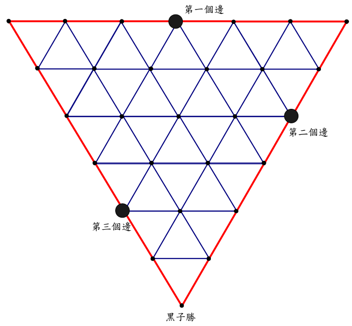


圖 5-12

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 6 個邊、7 個點；勝利條件最少 7 個同色點。

$\ell=7$，$n=8$ 時：

頂點為 8x8x8 棋盤，奇數層，頂點數為 36（偶數）-先下者得勝

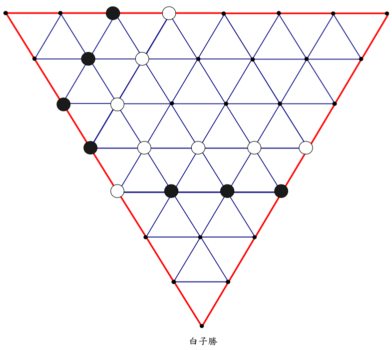


圖 5-13

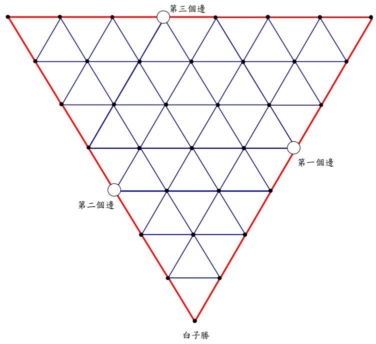


圖 5-14

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 7 個邊、8 個點；勝利條件最少 8 個同色點。

$\ell=8$，$n=9$ 時：

頂點為 9x9x9 棋盤，偶數層，頂點數為 45（奇數）-先下者得勝

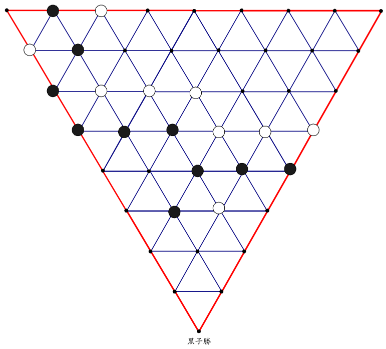


圖 5-15

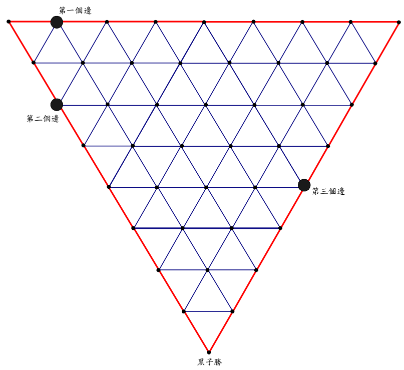


圖 5-16

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 8 個邊、9 個點；勝利條件最少 9 個同色點。

$\ell=9$，$n=10$ 時：
頂點為 10x10x10 棋盤，奇數層，頂點數為 55（奇數）-先下者得勝

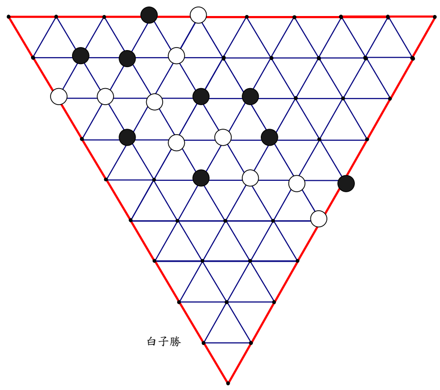


圖 5-17

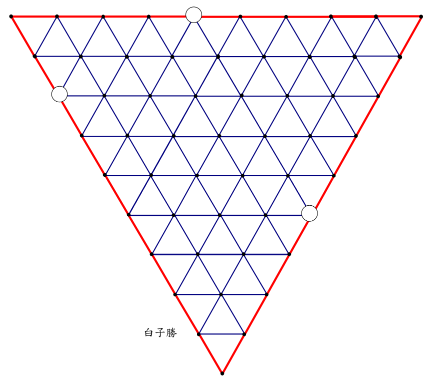


圖 5-18

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 9 個邊、10 個點；勝利條件最少 10 個同色點。

由圖 5-1 至圖 5-18（即 $\ell=1-9$）時，我們試驗了各方面的下棋方法，在 $T_l=1$ 時因為有三個頂點，所以我們可以很清楚的了解先下者一定勝-『鴿籠原理』，而在不失一般性之下，先下者最少要下 n 次，方可獲勝。

在三角形棋盤上的遊戲滿足下列定義：

定義一：線段的相交點稱為該三角形棋盤的頂點。

定義二：將三角形板的周界分解為 P_1，P_2 及 P_3 三直線段使得 $V_i \quad P_i$，即

$$P_1=(V_2,\ldots,V_3)\text{、}P_2=(V_1,\ldots,V_3)\text{、}P_3=(V_1,\ldots,V_2)$$

定義三:設 S 為該三角形棋盤頂點的子集。將 S 的點聯同以 S 的點作為兩端點的

邊所組成的圖稱為 S 的衍生子圖。

定義四: 設 S 為該三角形棋盤頂點的子集。若 S 至少包含著 P_1，P_2 及 P_3 中各一頂點及其衍生子圖是連通圖，則 S 稱為連通集。

在一個 nxnxn 的三角形棋盤 T_l，在不失一般性之下，先下者最少要 n 次，方可獲勝。

（即:先下棋者是否有利？若是，必勝策略如何？）

證明：設一個 nxnxn 的三角形棋盤 T_l。則 $\ell = n+1$ （$n \geq 1$ 且 $n \in N$）

n=1 時；先下者恆勝。

由 n=2 時；如圖 5-1 中的結果（或窮舉法『鴿籠原理』），我們可知頂點數為 3，所以先下者有比後下者多一次的機會，故在不失一般性之下，先下者恆勝。

同理設 n=k、$(k \in N)$ 時，在不失一般性之下，先下者恆勝的條件成立。

若 n=k+1 時；先參考下列三種情形，例:（ℓ=8，n=9）

白子在端點上： 如右圖，若先下者將白子棋下於大三角形的端點，則在不失一般性的情形之下，先下者恆勝的條件，最少要沿著大三角形周界內的衍生子圖走完 9 步，才可獲勝。

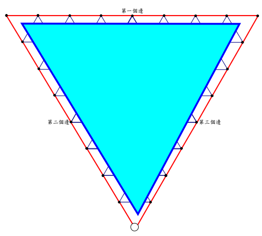


圖 5-19：白子在端點上

白子在周界上： 如右圖，若先下者將白子棋下於大三角形周界上（非端點），則在不失一般性的情形之下，先下者恆勝的條件，最少要沿著相鄰大三角形周界內的二個衍生子圖的周界走完 9 步，才可獲勝。

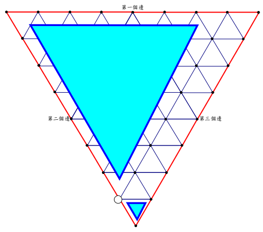


圖 5-20：白子在周界上

白子在衍生子圖的某一交點上： 如右圖，若先下者將白子棋下於大三角形衍生子圖內的任一交點，則在不失一般性的情形之下，先下者恆勝的條件，最少要沿著相鄰大三角形周界內的三個衍生子圖的周界走完 9 步，才可獲勝。

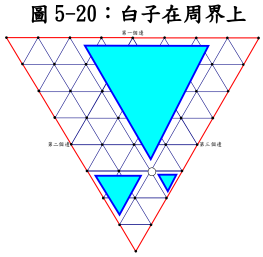


圖 5-21：白子在大三角形內

由（ℓ=8，n=9）這個例子，我們可以推廣至 $n = k+1$ 時，先下者在不失一般性之下，恆勝的條件最少要下 $k+1$ 次，而由窮舉法得知，對任一邊數的三角形棋盤其可能

情形不外乎上述三種情形，因此，由數學歸納法可知，原敘述為真。

故先下棋者在不失一般性之下恆勝。因先下者，最少要下 n 個步驟才會勝利，所以其最佳的必勝策略，為沿箸第一棋子之後所分割出的衍生子圖（如圖 5-19 至 5-21）才有最少步驟獲得勝利。

2、 兩人對奕，可任意更換顏色

設一個 n婓n n 的三角形棋盤 T_l。則 ℓ（層數）和 n（周界的頂點數）的關係為 $\ell = n + 1$（n傑1 n N）。實驗分析：由 2x2x2 棋盤開始討論至 6x6x6 的棋盤，分析結果如下：圖 5-22 至 5-27。

（數學歸納法）

ℓ=1，n=2 時：
頂點為 2x2x2 棋盤，奇數層，頂點數為 3（奇數）-後下者得勝

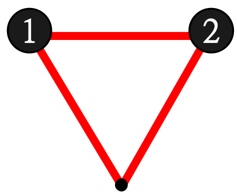


圖 5-22

在不失一般性之下，後下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 1 個邊、2 個點；勝利條件最少 2 個同色點。

ℓ=2，n=3 時：
頂點為 3x3x3 棋盤，偶數層，頂點數為 6（偶數）-後下者得勝

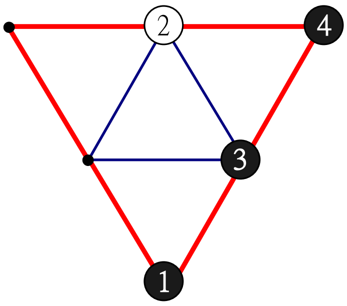


圖 5-23

在不失一般性之下，後下者得勝，其勝利的路徑至少經過 2 個邊、3 個點；勝利條件最少 3 個同色點。

【特利：先下者得勝的情況】

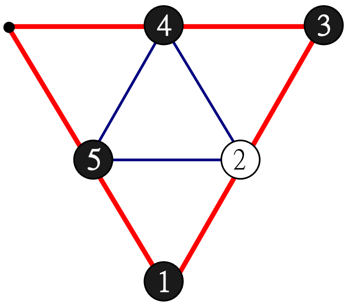


圖 5-24

ℓ=3，n=4 時：
頂點為 4x4x4 棋盤，奇數層，頂點數為 10（偶數）-後下者得勝

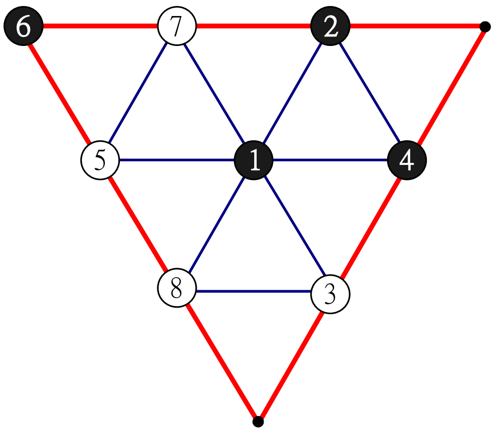


圖 5-25

在不失一般性之下，後下者得勝，其勝利的路徑至少經過 3 個邊、4 個點；勝利條件最少 4 個同色點。

ℓ=4，n=5 時：
頂點為 5x5x5 棋盤，偶數層，頂點數為 15（奇數）-先下者得勝

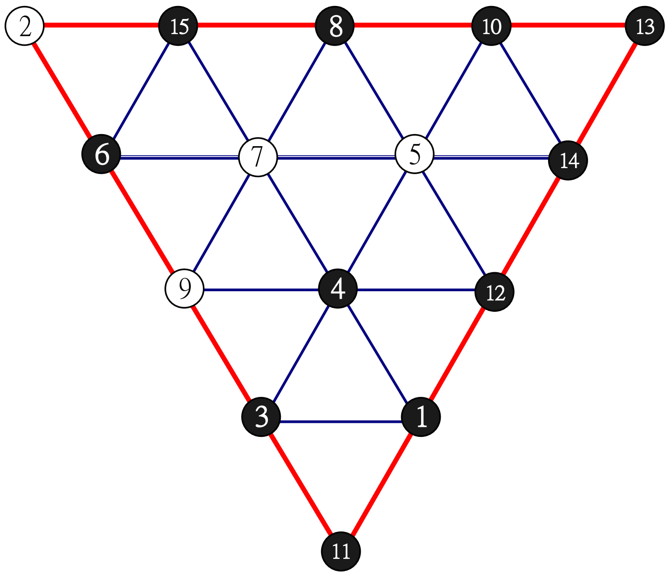


圖 5-26

在不失一般性之下，先下者得勝，其勝利的路徑至少經過 4 個邊、5 個點；勝利條件最少 5 個同色點。

ℓ=5，n=6 時：

頂點為 6x6x6 棋盤，奇數層，頂點數為 21（奇數）-先下者得勝

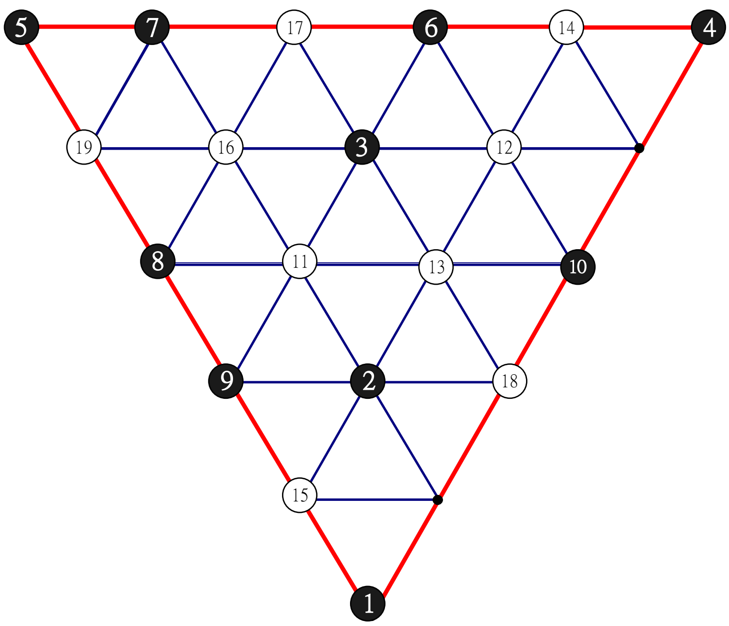


圖 5-27

在不失一般性之下，先下者得勝，其勝利的路徑至少經過 5 個邊、6 個點；勝利條件最少 6 個同色點。

可歸納出結果如下表：

ℓ（層數）	總頂點數	獲勝連通集的最少點頂數（最快獲勝步數）	勝方
1	a_1=1+2=3（奇數）	2	後下者
2	a_2=1+2+3=6（偶數）	3	後下者
3	a_3=1+2+3+4=10（偶數）	4	後下者
4	a_4=1+2+3+4+5=15（奇數）	5	先下者
5	a_5=1+2+3+4+5+6=21（奇數）	6	先下者
6	a_6=1+2+3+4+5+6+7=28（偶數）	7	後下者
7	a_7=1+2+⋯+7+8=36（偶數）	8	後下者
8	a_8=1+2+⋯+8+9=45（奇數）	9	先下者
9	a_9=1+2+⋯+9+10=55（奇數）	10	先下者

推論 $a_n = 1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

由數學歸納法我們可以很明顯地證出，當有 n 層棋盤時會有 $\boxed{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$ 的空格可以填入（總頂點數），因此，如果遊戲在進行開始前，玩家可以先依層數產生的總頂點數來評估先下或後下何者較有利的情形。

6、討論

在本文中我們解決了作者所留下的三個問題:（1）玩家不可更換棋色時，先下棋者是否有利？（2）若是，他的必勝策略如何？（3）玩家可任意更換棋色時，其結果如何前二個問題為玩家不可更換棋色，則『先下者恆有獲得勝利的先機』，而勝利的方式為沿著『第一個棋子所下的位置為始點的衍生子圖上』。一般在兩人對奕的遊戲中，如果可以在有限步驟完成，且存有勝負之分，則存有必勝法則[5]。

定理：兩人對奕的遊戲中，遊戲在有限步驟內完成且有勝負之分，那必定存在著『必勝法則』。

證明：(數學歸納法)我們對於『步數』做數學歸納法：若遊戲進行一步就結束，則先下者為贏。因此，有『必勝法則』。若遊戲進行兩步就結束，則進行完第一步後，再下

一步則必分勝負。因此，下第一步者必盡量使其達到必勝的狀況，除非所有情況都導致先下者敗，所以必有『必勝法則』。假設遊戲進行n步就結束，由

前n=1、2 時，存在著『必勝法則』。

設$n=k\geqq 2$時存在著『必勝法則』。

則$n=k+1$時，當先下者下了第一步時，此時，遊戲變成k步結束，由前假設必有『必勝法則』，可能是先下者也可能是後下者。若先下者下的第一步可使其達到$n=k$的必勝狀態，則先下者便有『必勝法則』；反之，若先下者在下第一步後無法達到$n=k$的必勝狀態，則後下者有『必勝法則』。則$n=k+1$時確實存在著必勝法則。故由數學歸納法得證。

因此，兩人在棋盤中以黑、白棋輪流下子對奕必可分出勝負，先下棋者，在求勝利且不下錯棋的情況之下（即不失一般性的結果），才可以由『必勝法則』取得勝利。因此，由研究結果發現可以歸納出本遊戲的必勝法則為：『先下者保持攻勢，在不失一般性之下，先下者恆得勝』。

其實，當我們在研究下棋時，我們發現另一個簡單的證明方式，因為先下者如果下在棋盤內的頂點，後下者若想圍堵該頂點的出路，則有 6 種可行的路徑，自然不易圍堵，即使先下者下在端點上，也有 2 種可行的路徑可走，因此，在不失一般性之下，自然先下為勝。

若下棋者不一定要在開始比賽前預先選定好棋子的顏色，棋手可以在每下一步棋時才選用他認為最有利的顏色棋子，誰下最後一棋子後，得到一個同色的連通集便是勝方，即兩人對奕，可任意更換顏色時，其結果如何？此時，可在遊戲進行開始前，玩家先依層數產生的頂點數來做評估，總頂點數若是奇數，則選擇先下者較為有利；總頂點數若是偶數，則選擇後下者較為有利。

7、結論

經過無數次的實驗發現，玩家在不可更換棋色時，先出手的玩家比較可以掌握致勝先機，無論三角形頂點數為何，玩家一定要掌握先機先下為勝，而在一個n斐n n的三角形棋盤下，玩家最少要下n次，方可獲勝，而得勝的最佳策略為沿著圖 5-19 至圖 5-21 的藍色區域及其周界連續進攻，所獲勝的結果最快。

而在下棋時棋手可以任意選擇棋子顏色的進階玩法中，我們發現另一個有趣結果，也就是說這時候不再只是先下者較易為勝的情形如此簡單，而是要去分析棋盤的層數及其總頂點數，我們也得到初步的歸納結果，也就是在黑白棋輪流下且棋手下棋可不拘棋子顏色時（在下到全部位置都填滿為止），在不失一般性之下且層數在 3 層之上時，我們可推論出下列二種結論：

1. 總頂點數為奇數時，先下者易獲勝，例如：5 層的棋盤中其總頂點數為 21，先下者易獲勝。
2. 總頂點數為偶數時，後下者易獲勝，例如：6 層的棋盤中其總頂點數為 28，後下者易獲勝。

我們藉由解決作者未完成的問題為目標[1]，進一步來探索出其結果作為本文研究的目標，因此，可以說此次的實驗有著完美的結果。

8、參考資料及其他

[1] 潘建強、邵慰慈，Sperner引理及其應用，數學傳播108期，2003。
[2] 張　垚 編著，數學競賽中的組合問題，上海華東師大出版社，2005。

[3] 熊　斌、鄭仲義 編著，圖論，上海華東師大出版社，2005。

[4] 傅恆霖，圖上的數字，數學傳播十九卷三期，1995。

[5] 陳健儒、陳樟中、林芷音、董佳玲，「矩」棋不定，中華民國第四十六屆中小學科學展，2006。
[6] 李炯生，棋盤染色問題與二部 Ramsey 數，數學傳播 83 期，1997。

[7] JONATHAN HUANG，ON THE SPERNER LEMMA AND ITS APPLICATIONS，from www.cs.cmu.edu/~jch1/research/old/sperner.pdf［英文］。

[8] Brouwer's Fixed Point Theorem，from，http://cepa.newschool.edu/het/essays/math/fixedpoint.htm［英文］。

【評　語】　　040425　永不妥協

1) 優點：主題十分具有數學味道，是非常具有理論上及應用上的研發題材。

2) 優點：作者以具體數學遊戲來解說具體的解決方法 (Sperner’s Lemma)。

3) 優點：概念清楚。

4) 建議：可考慮使用電腦來隨機產生「Sperner 棋盤」：三角化的三角形棋盤，依照 Sperner Lemma 的規則隨機定義頂點的標號 0,1,2，並「自動的」尋找出 0,1,2 均出現的三角形。此一棋盤可以當作極有深度的數學教具。