

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040424

魔方陣的變形

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 高婕瑄	蘇俊鴻
高二 許舒涵	

關鍵詞：魔方陣

壹、摘要

本次科展作品由三角邊形的魔方陣出發，設定規則如下；在 n 階三角形魔方陣中填入給定數字，使其三個 $n-1$ 階三角形數字和相等。我們得出如何從 n 階魔方陣推至 $(n+1)$ 階魔方陣，與給定任意一個 n 階魔方陣，如何填出一組解的方法。遵循著三角形魔方陣的填法，我們可將其推廣在平面任意 m 邊形及正四面體上。前者，我們得到給定任意 n 階 m 邊形填出一組解的方法。後者，則是可由 n 階立體魔方陣推至 $(n+1)$ 階立體魔方陣；當給定偶數階立體魔方陣時，可利用自創的圓形圖進行求解，文末亦討論了具有特殊性質點的個數。

貳、研究動機

高一的專研課時老師給了我們「論保其壽的渾圓圖」此份報告，裡面從渾圓圖的淵源開始敘述，並在文末附了各式的渾圓圖，有別於我們一般常見的正方形方陣，卻各有其玄妙之處，於是我們不禁開始思考，若將魔方陣由正方形改為三角形或是其他形狀，是否都會有解？並且會有著正方形方陣所不具有的性質？也是數與坐標系這個單元讓我們了解到如何去處理一些數列的計算，觀察和歸納的方法。這讓我們有勇氣著手研究魔方陣的變形，並期望變形後的魔方陣可以運用在更多不同的領域。

參、研究目的

探討另類魔方陣的解，試著找出能任意填出解的方法，從 n 階推至 $(n+1)$ 階，並推廣至平面 m 邊形及立體。

肆、研究設備及器材

Microsoft Visio

伍、研究過程或方法

利用試誤法後觀察規律，並融入所學加以驗證。

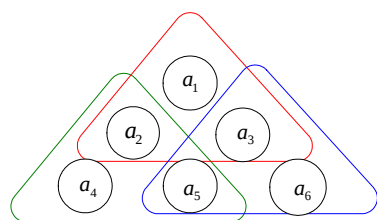
陸、研究結果

一、平面三角形魔方陣

(一)、遊戲規則：數字和相等

令每邊含 n 個數字的三角形魔方陣為「 n 階三角形魔方陣」，以下簡稱「 n 階魔方陣」。

1. 以 3 階為例



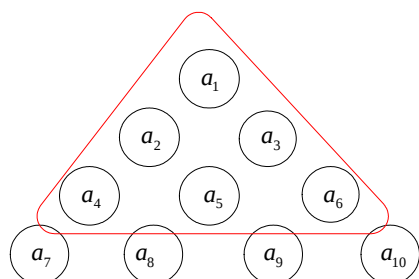
(圖一)

$$\forall a_i \in \square$$

不重複地填入 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\text{滿足 } a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_4 + a_5 = a_3 + a_5 + a_6$$

2. 以 4 階為例



(圖二)

$$\forall a_i \in \square$$

不重複地填入 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$$\text{滿足 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a_2 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8 + a_9 = a_3 + a_5 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

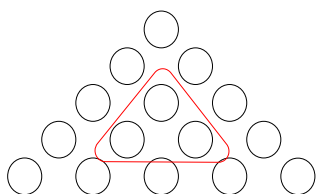
3. n 階規則依此類推，數字從 $1 \sim \sum_{k=1}^n k$ ， $n \in \square$ ， $3 \leq n$ 。

4. 稱 n 階魔方陣中所有數字和為 s_n ，所求 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個相等的數字和稱為 A_n 。

(二)、遊戲限制：

為了簡化解的情況，我們給了一些限制，如下：

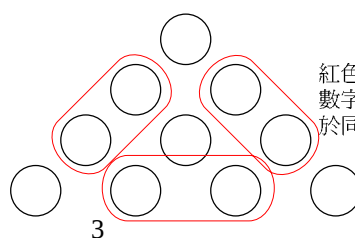
1. 若兩組魔方陣經由旋轉、鏡射可重疊，視為同一組。
2. 最中間一區不影響數字和，擺入最大的幾個數。



(圖三)

3. 三角形的三個頂點擺入最小的三個數，即 (1, 2, 3)，因為旋轉過後視為同一組，因此不妨令最上方的為 1，左下角的頂點為 2，右下角為 3。

4. n 階魔方陣中，稱三邊最中間的 (n-2) 個數為同一區塊，同一區塊內的數互換不影響數字和。

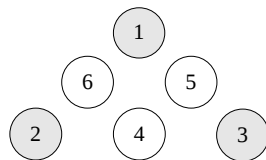


紅色框內的
數字分別位
於同一區塊

(圖四)

(三)、3階的解：

易知其解為



$$S_3=21$$

$$A_3=12$$

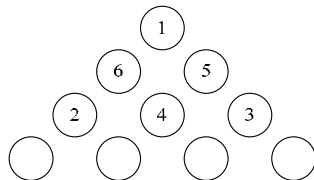
$$\text{邊長和}=9$$

(圖五)

(四)、從 n 階到 $(n+1)$ 階：

以 3 階到 4 階為例

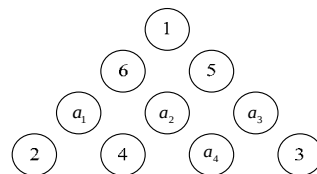
1.展開：



不合!

(圖六)

2.考慮一整排移動：往下擴



(圖七)

3.考慮不合情況：

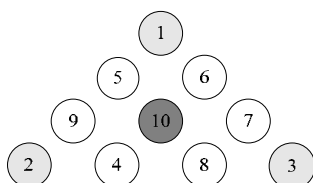
(1)已可確定 a_2 為 10，左右下角為 2 及 3

(2)左下角+6 $\neq$ 右下角+5

4.排除不合情況，得出最後一排符合條件者：

(3, 4, a_4 , 2) (3, a_4 , 4, 2) --> 同組

5.(左右鏡射後)得出其解為：



$$S_4=55$$

$$A_4=38$$

$$\text{邊長和}=17$$

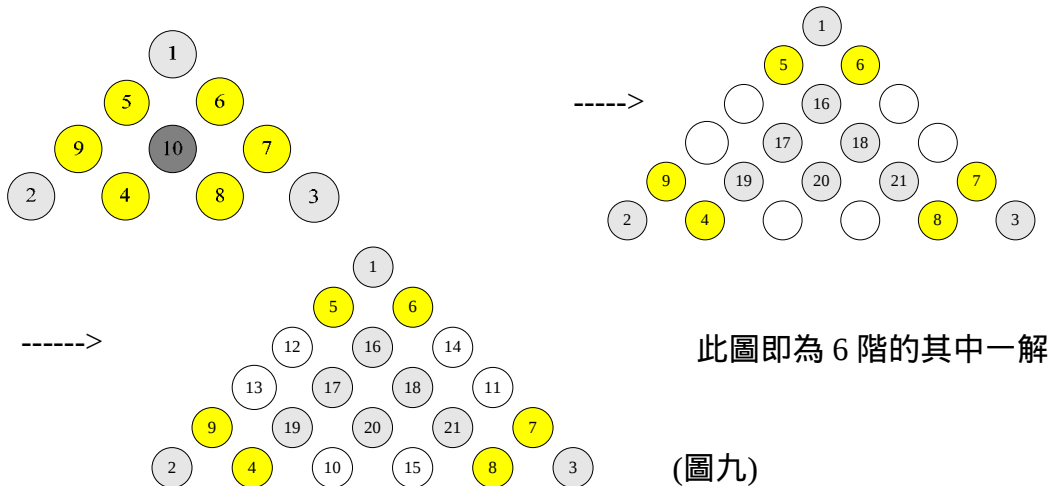
(圖八)

6.往左擴及往右擴可先旋轉後再討論，利用向下擴的方法求解。

7. n 是偶數時的推廣：

(1)從 $(2p)$ 階到 $(2q)$ 階， $p < q$ ： $(2q)$ 階的邊長內的空格先和 $(2p)$ 階填入完全一樣的數，再將剩下的數由任一區塊開始，依順時針每一區塊各填入一數字，此三數為小到大連續數字，再從最後填入的區塊開始逆時針填入連續數字，反覆操作至填滿為止。

(2) 以 4 階到 6 階為例：



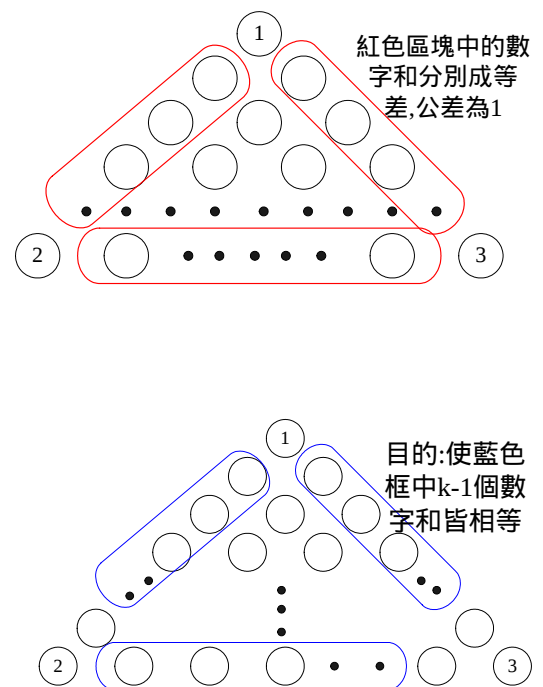
結論：4 階推至 5 階者方法亦相同，由以上經驗可知， n 階魔方陣可由此法推至 $(n+1)$ 階魔方陣，當然，推廣的方法其實有很多種，我們只採取其中比較簡單的作討論。

(五)、如何任意填出一個 n 階魔方陣：

一律先將最大及最小的幾個數填入規定的格子內(如右圖)，剩下的數由小到大開始填，一個區塊一次填入一個數。

將頂點填好之後，我們可以知道三個區塊和必須要成等差，其公差為 1；因為我們填入的數字是連續數字，所以我們設法將每區塊 k 個數字中 $k-1$ 個數字的和相等，每區塊中剩下的 1 個數再填入三個連續數字，這樣可使三區塊的和成等差，也就滿足每邊和相等。

以下採用兩個方法，在不失一般性的情況下，我們以順時針為主，使區塊中 $k-1$ 個數的和相等。



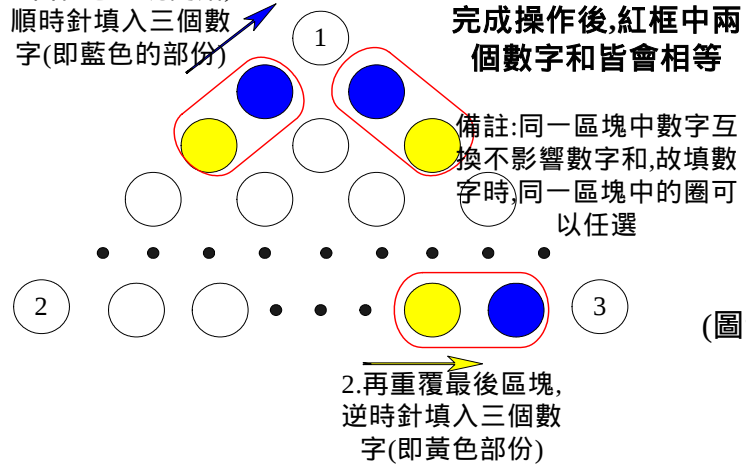
(圖十)

1.方法一

(1)填法：由任一區塊開始，順時針填入三個連續數字，再從最後填入的區塊開始逆時針填入連續數字。完成此操作後，每一區塊內數字的和相等。

(2)說明：用此方法，我們可以讓不同區塊內任意偶數個數字和相等。

1.由任意區塊開始，順時針填入三個數字(即藍色的部份)

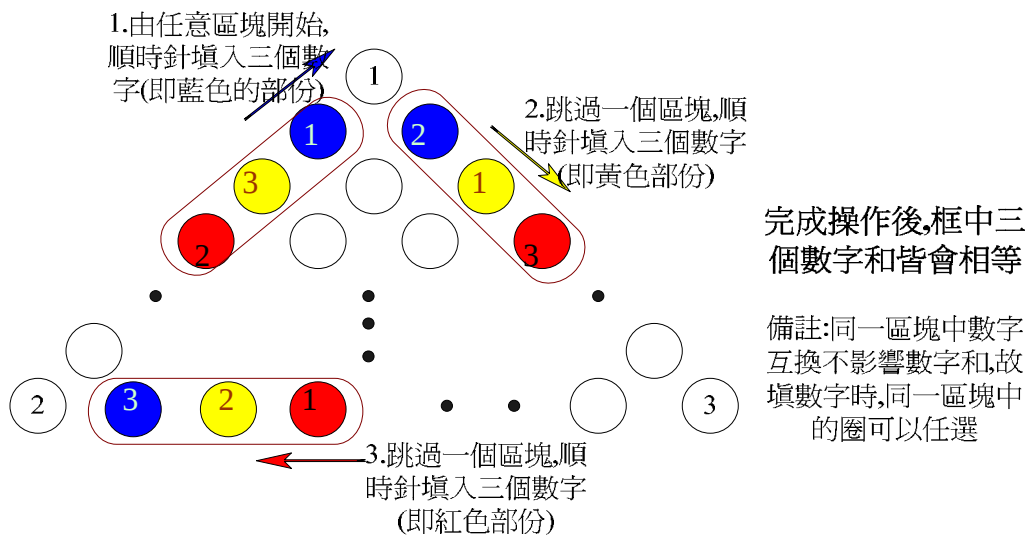


(圖十一)

2.方法二

(1)填法：由任一區塊開始，順時針填入三個連續數字，跳過下一區塊，重複此操作，再跳過下一區塊，重複此操作，即可使每一區塊內數字和相等。

(2)說明：用此方法，我們可以讓不同區塊內任意 $3m$ 個數數字和相等。

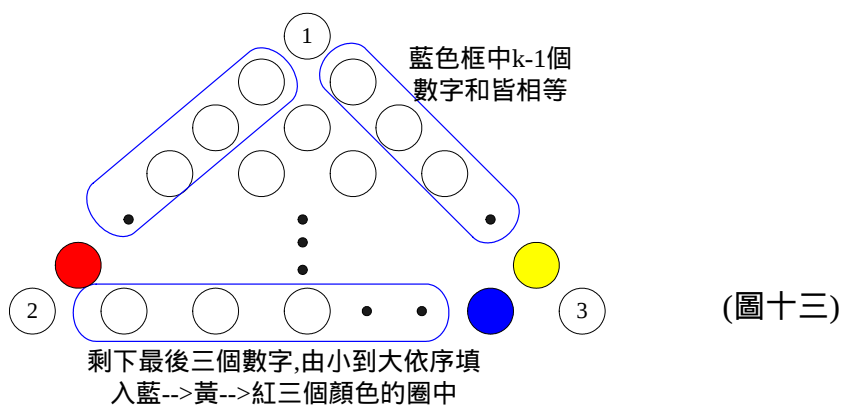


(圖十二)

3.綜合方法一和方法二，我們可使不同區塊內兩個或三個數字和相等，又 3 和 2 差 1，所以經由改變使用兩種方法的次數，即可搭配出任意個數字和相等。將 n 以奇偶性區分討論如下：

(1) n 是奇數：

$n=1$ 無解。 $n=3$ 試誤法求解。 $n \geq 5$ 時用方法一操作 $\frac{n-3}{2}$ 次，再將最後三個數字由小到大由最下方區塊開始逆時針依序填入三區塊中，即可得到一解。



(2) n 是偶數：

$n = 2$ 無解。 $n = 4$ 用方法一操作 $\frac{n-6}{2}$ 次。 $n \geq 6$ 時用方法一操作 $\frac{n-6}{2}$ 次，方法二操作 1 次，再將最後三個數字由小到大由最下方區塊開始逆時針依序填入三區塊中，即可得到一解。

結論：經由此種方法，給定任意 n 階魔方陣，我們皆可以寫出其中一解。

(七)、 S_n 、 A_n 、每邊和及 n 之間的關係：

對任意 n 階魔方陣而言，不同解所得出的 S_n 、 A_n 及每邊和均相等，我們可得出其一般式如下：

1. 邊上共有 $3(n-1)$ 個數

$$2. S_n = \sum_{k=1}^{n(n+1)} k = \frac{\left[1 + \frac{(n+1)n}{2}\right] \frac{(n+1)n}{2}}{2} = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{8}$$

$$3. \text{邊長和} = \frac{\sum_{k=1}^{3(n-1)} k + (1+2+3)}{3} = \frac{\left[1 + \frac{(3n-3)}{2}\right] \frac{(3n-3)}{2} + 6}{3} = \frac{3n^2 - 5n + 6}{2}$$

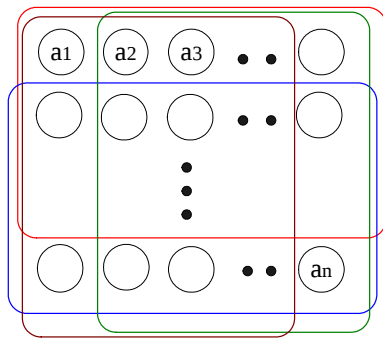
$$4. A_n = S_n - \text{邊長和} = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{8} - \frac{3n^2 - 5n + 6}{2} = \frac{n^4 + 2n^3 - 9n^2 + 22n - 24}{8}$$

二、平面任意 m 邊形魔方陣

(一)遊戲規則：

稱每邊含 n 個數字的魔方陣為 n 階 m 邊形魔方陣

1.四邊形



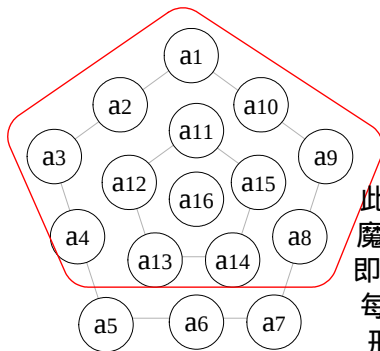
$$\forall a_i \in \square$$

不重複地填入 $1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots n^2$

四邊形魔方陣中拿掉任一邊 n 個數，其餘數分別相等，即框起來的四個部分數字和相等。

(圖十四)

2.五邊形



$$\forall a_i \in \square$$

不重複地填入 $1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$

此圖為3階五邊形
魔方陣,4階魔方陣
即最外圈再加一層
每邊4個數的五邊
形,n階以此類推.

(圖十五)

五邊形魔方陣中拿掉任一邊 n 個數，其餘數字和分別相等，五邊形魔方陣有 5 組數字和相等。

以此規則推至 n 階任意邊形魔方陣。

(二)、遊戲限制：

- 1.經由旋轉、鏡射可重疊，視為同組。
- 2.最中間一區不影響數字和，擺入最大的幾個數。
- 3.頂點擺入最小的 m 個數。
4. n 階魔方陣中，稱邊上最中間的 $(n-2)$ 個數為同一區塊，同一區塊內的數互換不影響數字和。

(三)、如何任意填出一個 n 階魔方陣：

一律先將 $1 \sim m$ 逆時針填入魔方陣中，剩下的數由小到大填入，一個區塊一次填入一個數，以下用 (h, k) 表示 h, k 同在的那一邊，分奇偶邊形進行討論。

奇數邊形

1.方法一

(1)填法：從 $(m, m-1)$ 區塊開始順時針填入 m 個數字，再從 $(1, m)$ 區塊開始順時針填入 m 個數字即為所求。

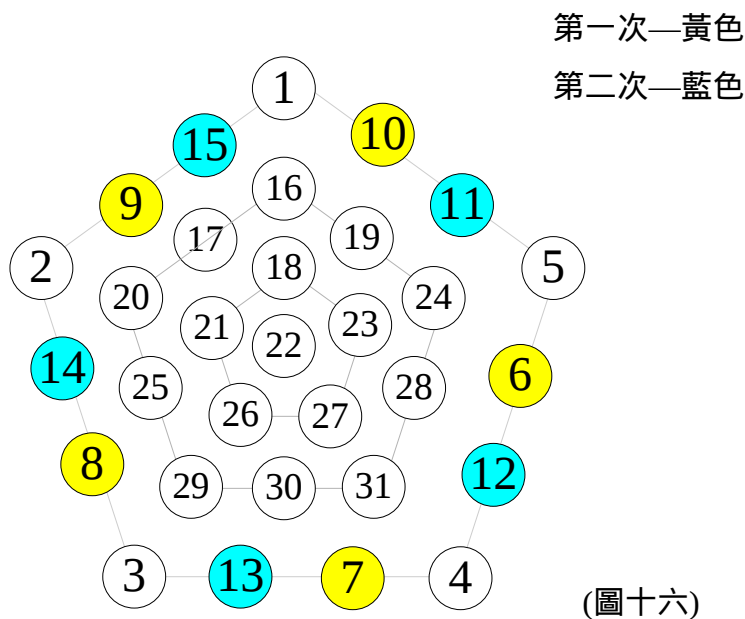
(2)證明：填入 $1 \sim m$ 後，除了 $(1, m)$ 外，其他 $m-1$ 個區塊的數字和是一個公差為 2 的等差數列，故兩次順時針填入能使其和相等。而填完 $1 \sim m$ 後， $(1, m)$ 的數字和會比 $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} + 1\right)$ 的數字和少 1，而第一次順時針填時是先填入 $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} + 1\right)$ 區塊再

填入 $(1, m)$ 區塊，此時後者會比前者大 $\frac{m+1}{2}$ ，而第二次的則相反，且前者比後者大

$\frac{m-1}{2}$ ，所以填完第二次後 $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2} + 1\right)$ 區塊中數字和會與 $(1, m)$ 區塊的數字和相等，也就是每一邊的數字和會相等。

(3) 說明：用此方法，我們使不同區塊內任意偶數個數字和相等。

(4) 以五邊形，4 階為例如下圖：



2.方法二

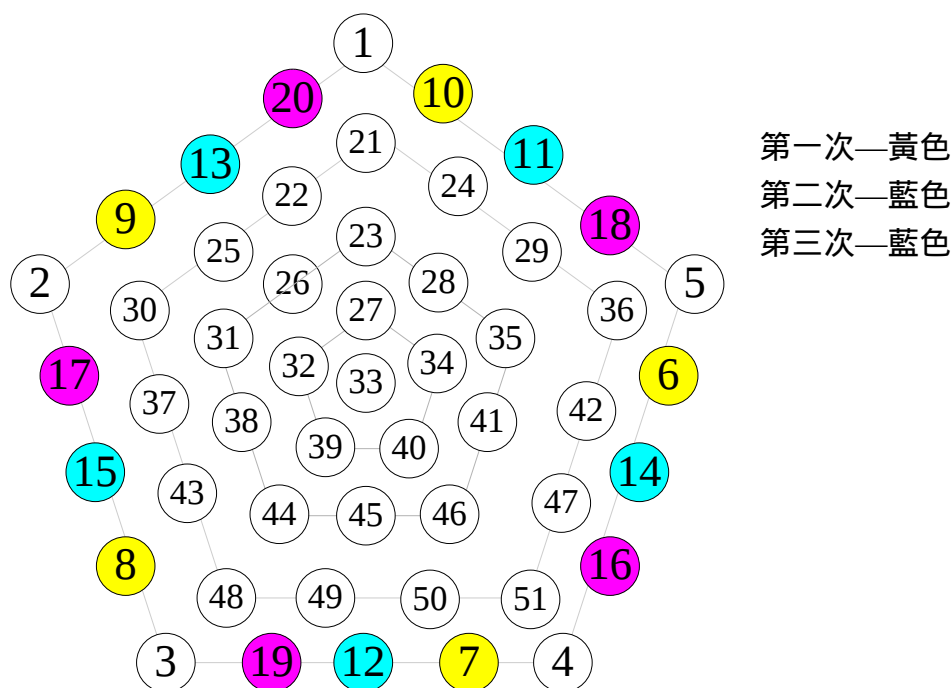
(1) 填法：從 $(m, m-1)$ 開始順時針填入 m 個數字，接著從 $(1, m)$ 開始順時針填入 m 個數字，但每區塊填完一個數字後要跳過一個區塊再填下一個數字，最後從 $(m, m-1)$

開始順時針填，和方才一樣要跳過一個區塊，如此便可求出其中一組解。

(2)證明：填完第一次時每邊呈一公差為1的等差數列，從 $(1, m)$ 開始遞減，此時 $(1, m)$ 比 $(m-1, m-2)$ 大2，跳過一區塊填可使兩者間的差距縮小為1，即 $(1, m)(m-1, m-2)(m-3, m-4) \dots (2, 1)$ 呈現一公差為1的A.P， $(1, m)$ 最大，同理， $(m, m-1)(m-2, m-3) \dots (3, 2)$ 亦為一公差為1的A.P， $(3, 2)$ 最小，而第一次填完時 $(2, 3)$ 的數字和會比 $(1, m)$ 的小 $m-2$ ，但第二次填入 $(2, 3)$ 區塊的數則會比填入 $(1, m)$ 的數大 $m-1$ ，所以填完第二次時， $(2, 3)$ 的數字和會比 $(1, m)$ 的大1，各邊和再次呈現一公差為1的等差數列，此時從 $(m, m-1)$ 開始順時針跳區塊填入數字可使各邊和相等。

(3) 說明：用此方法，我們使不同區塊內任意 $3p$ 個數字和相等。

(4).以五邊形，5 階為例如下圖：



(圖十七)

結論：利用三角形魔方陣填法中的方法一，我們可使 n 階魔方陣化簡成邊長只剩下2個或3個空格的情況，此時運用上述兩種方法可使得任意奇數邊形平面魔方陣都有解。

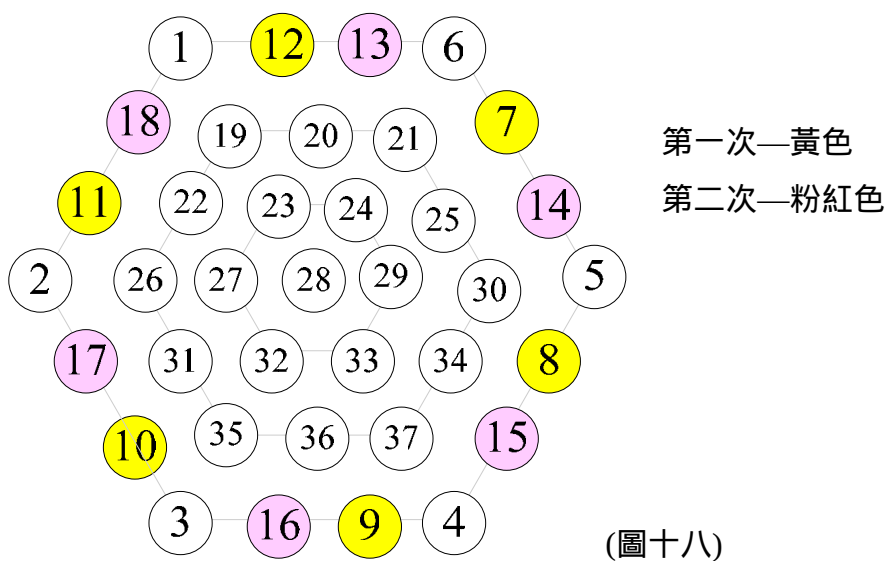
偶數邊形

1.易知邊上填入的數字為 $1 \sim m(n-1)$ ，考慮邊長和

$$\left[\frac{(1+mn-m)m(n+1)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} \right] \frac{1}{m} = \frac{mn^2 - (2m-1)n + 2m}{2}, \text{ 可知當 } n \text{ 是奇數時無解。}$$

而 n 是偶數時的填法則同於奇數邊形的方法。

2.以六邊形，4階為例如下圖：

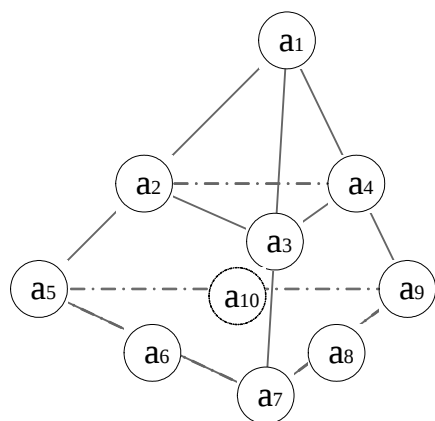


結論：我們可使得任意偶數邊形偶數階平面魔方陣都有解。

三、立體魔方陣

(一)、遊戲規則：數字和相等

1.以 3 階為例



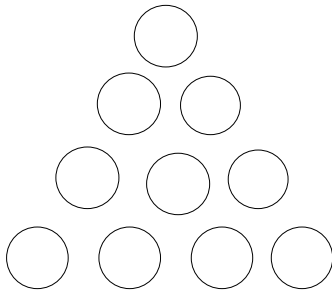
$$\forall a_i \in \square$$

不重複地填入1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

滿足 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_9 + a_4 + a_8 + a_{10} = a_5 + a_2 + a_6 + a_{10} = a_7 + a_6 + a_8 + a_3$
 $\Rightarrow$ 即截掉一面後的小正四面體上數字和相等。

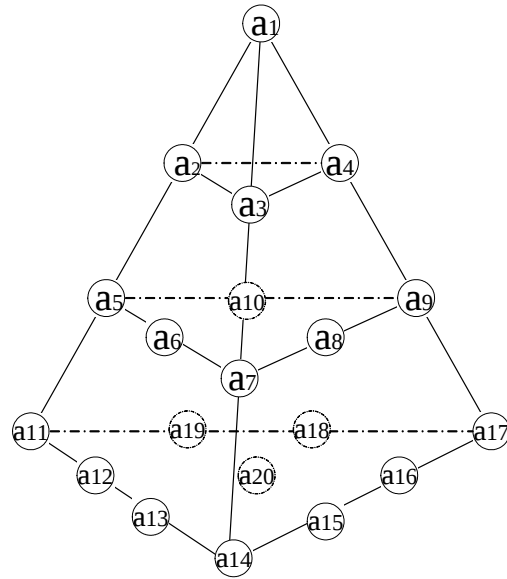
2.以 4 階為例

一面圖形如下：



(圖二十)

整體圖形如下：



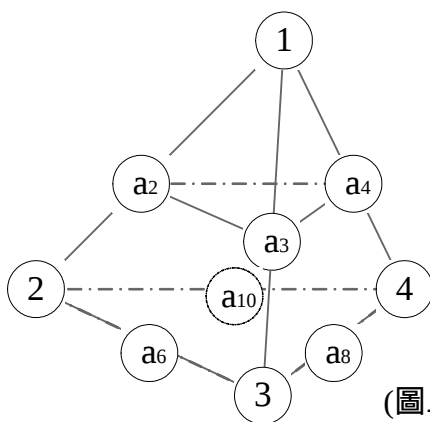
3. n 階規則依此類推。

4. 稱立體魔方陣中所有數字和為 T_n ，所求相等的數字和為 B_n 。

(二)、遊戲限制：

1. 若兩組魔方陣經由旋轉、鏡射可重疊，視為同組。
2. 頂點填入 $1, 2, 3, 4$ 。
3. n 階魔方陣中，同一稜上最中間的 $(n-2)$ 個數為同一區塊，同一區塊內的數互換不影響數字和。

(三)、3 階立體魔方陣



(圖二十一)

1. 首先四個頂點分別填入

$$a_1 = 1, a_5 = 2, a_7 = 3, a_9 = 4$$

2. 依規則可得下列等式

$$\begin{aligned} 1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 2 + a_2 + a_6 + a_{10} \\ &= 3 + a_3 + a_6 + a_8 = 4 + a_4 + a_8 + a_{10} \end{aligned}$$

3. 求出每個小四面體的和 = $\frac{(1+10)10 - (1+2+3+4)}{4} = 25$

=>將數字分成四組，以 $(a_2, a_3, a_4) \rightarrow 24$ 表示 a_1, a_2, a_3 三數字和為 24。

$$(a_2, a_3, a_4) \rightarrow 24 \quad \text{--- (a)} \quad (a_2, a_6, a_{10}) \rightarrow 23 \quad \text{--- (b)}$$

$$(a_3, a_6, a_8) \rightarrow 22 \quad \text{--- (c)} \quad (a_4, a_8, a_{10}) \rightarrow 21 \quad \text{--- (d)}$$

=>由(a)(b)可得 $a_{10} + a_6 + 1 = a_3 + a_4$ --- (e)

由(c)(d)可得 $a_3 + a_6 + 1 = a_{10} + a_4$ --- (f)

將(e)代入(f)得 $a_3 = a_{10}$ 矛盾，與規則不符合

=>以上討論可得，3 階立體魔方陣，頂點 1, 2, 3, 4 無解。

4. 試著找出 3 階魔方陣頂點在什麼情況下有解

令頂點為 r , $1 \leq r \leq 7$ 四頂點為 $r, r+1, r+2, r+3$

=>此時一小四面體的和為 $\frac{2[55 - (4r + 6)] + (4r + 6)}{4} = 26 - r$

下列每式中四個數字和須相等

$$(r, a_2, a_6, a_{10}) \quad \text{--- (g)} \quad (r+1, a_2, a_3, a_4) \quad \text{--- (h)}$$

$$(r+2, a_3, a_6, a_8) \quad \text{--- (i)} \quad (r+3, a_4, a_8, a_{10}) \quad \text{--- (j)}$$

=>由(g)(h)可得 $a_{10} + a_6 = 1 + a_3 + a_4$ --- (k)

由(i)(j)可得 $a_3 + a_6 = 1 + a_{10} + a_4$ --- (l)

將(l)代入(k)得 $a_3 = a_{10}$ 矛盾

=>因此 3 階立體魔方陣頂點為連續正整數時無解。

5. 當頂點為 $r, r+2, r+4, r+6$..討論，亦會矛盾，故 3 階立體魔方陣頂點等差數列時無解。

6. 討論當頂點無限制的情況，試求解

求出小四面體所有可能的數字和 B_n ，利用 4. 所求得公式 $B_n = 26 - r$

， $1 \leq r \leq 7$ ，得 $19 \leq B_n \leq 25$ ，已知頂點為等差數列時皆無解，所以 $20 \leq B_n \leq 24$ ；

以下為幾個已知限制：

(1) 每個數字必須都出現

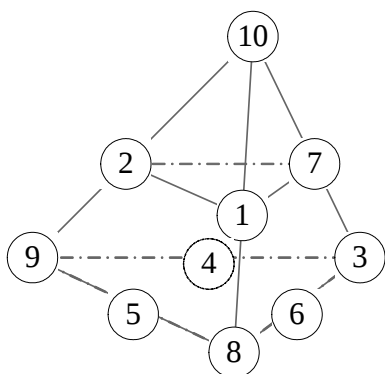
(2) 頂點數對中的數字只在 (a_1, a_2, a_3, a_4) 、 (a_2, a_5, a_6, a_{10}) 、 (a_4, a_8, a_9, a_{10}) 、 (a_3, a_6, a_7, a_8)

中出現一次且四數字位於不同組數對中

(3) 頂點外的其他數字皆出現兩次

由以上幾個限制，我們可以對每一組頂點做討論，求出所有的解。

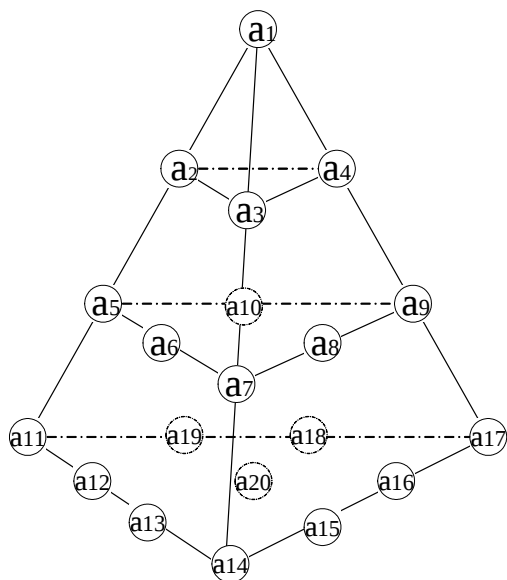
以 $B_n = 20$, 頂點(10,9,8,3)為例：



(圖二十二)

注意，在頂點的討論中，並非所有頂點皆有解，需要刪除不合的情況。

(四)、4 階立體魔方陣



1. 首先四個頂點分別填入

$$a_1 = 1, a_{11} = 2, a_{14} = 3, a_{17} = 4$$

2. 根據規則可得出下式

$$\begin{aligned} &1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \\ &= 2 + a_5 + a_{12} + a_2 + a_{10} + a_6 + a_{19} + a_{20} + a_{18} + a_{13} \\ &= 3 + a_{13} + a_{15} + a_{12} + a_{16} + a_{20} + a_7 + a_6 + a_8 + a_3 \\ &= 4 + a_9 + a_{18} + a_{16} + a_{15} + a_{20} + a_{19} + a_{10} + a_4 + a_8 \end{aligned}$$

---(m)

(圖二十三)

3. 考慮 a_1 在(m)中出現的次數

(1) 1、2、3、4 只出現一次

(2) a_6, a_8, a_{10}, a_{20} 因不位於稜邊上，故出現三次

(3) 其餘都出現 2 次

=> 考慮 a_6, a_8, a_{10}, a_{20} 將填入最大的 4 個數(17、18、19、20)，並使其滿足

$$1 + a_6 + a_8 + a_{10} = 2 + a_{10} + a_6 + a_{20} = 3 + a_{20} + a_6 + a_8 = 4 + a_{20} + a_{10} + a_8$$

=> 經由平面的經驗可以得到其解 $a_6 = 20, a_{10} = 19, a_8 = 18, a_{20} = 17$

4. 經由以上我們可以求出 $B_4 = \frac{(1+20)20 - (1+2+3+4) + (17+18+19+20)}{4} = 121$

5.所以我們可以得到

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_9 &= a_5 + a_{12} + a_2 + a_{19} + a_{18} + a_{13} \\ &= a_{13} + a_{15} + a_{12} + a_{16} + a_7 + a_3 = a_9 + a_{18} + a_{16} + a_{15} + a_{19} + a_4 \\ &= 121 - (1+18+19+20) = 63 \end{aligned}$$

---(o)

6.令 $a_2 + a_5 = c$, $a_{12} + a_{13} = d$, $a_{16} + a_{15} = e$
 $a_4 + a_9 = f$, $a_3 + a_7 = g$, $a_{18} + a_{19} = h$

則 $c + d + g + 6 + 20 = e + f + g + 8 + 18 = c + f + h + 7 + 19 = d + e + h + 9 + 17 = 89$

且 $c + d + e + f + g + h = 126$

=>整理 : $c + d + g = e + f + g = c + f + h = d + e + h = 63$, $c + d + e + f + g + h = 126$

=>可得到 : $c = e$ 且 $d = f$ 且 $g = h$, $c + d + g = 63$

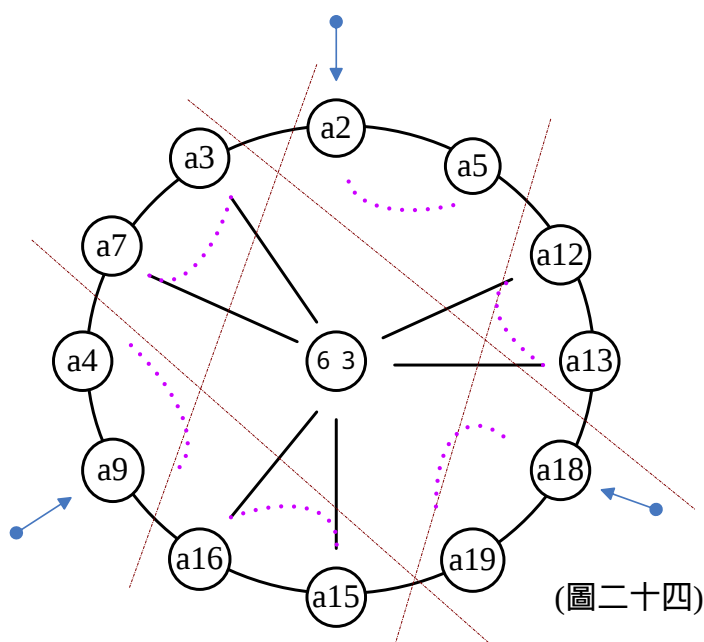
=> $a_2 + a_5 = a_{16} + a_{15}$ 且 $a_{12} + a_{13} = a_4 + a_9$ 且 $a_3 + a_7 = a_{18} + a_{19}$ ---(p)

7.將(o)式中數字和相等的 6 個數寫在同一行(列)

	a_2	a_5	a_{12}	a_{13}	a_{18}	a_{19}
	a_5					
	a_3	a_7	a_{12}	a_{13}	a_{15}	a_{16}
	a_7					
	a_4	a_9	a_{18}	a_{19}	a_{15}	a_{16}
	a_9					

框起來的部分和相等

=>根據以上及(p)可畫出一個圖



(圖二十四)

- (1) 從藍色箭頭開始順時針 6 個數字和相等，其值為 63，圖中央六直線包含的 6 個數字和亦為 63。
- (2) 圖中的紫色虛線包含的相鄰兩數字對調不影響其和，即 a_2 與 a_5 可互換。
- (3) 根據(p)：褐色虛線所圍住的四個數字當中，相鄰兩數和與對面相鄰兩數和相等，即 $a_2 + a_5 = a_{16} + a_{15}$

(4)將 a_2 到 a_{13} 稱為第 a_2 區， a_{18} 到 a_{16} 稱為 a_{18} 區， a_9 到 a_3 稱為 a_9 區

8.仿平面時所運用「順逆時針填法」的概念將5~16填入圖中

(1)因為是要運用順逆時針的方法且有三區，因此將5~16三個數一組將其分類如下：

(5, 6, 7) (8, 9, 10) (11, 12, 13) (14, 15, 16) --- (q)

(2) a_2 a_{18} a_9 區數字間彼此有重複的部份，故將(q)式中四組數先隔離出一組將剩下的三組填入圖中。

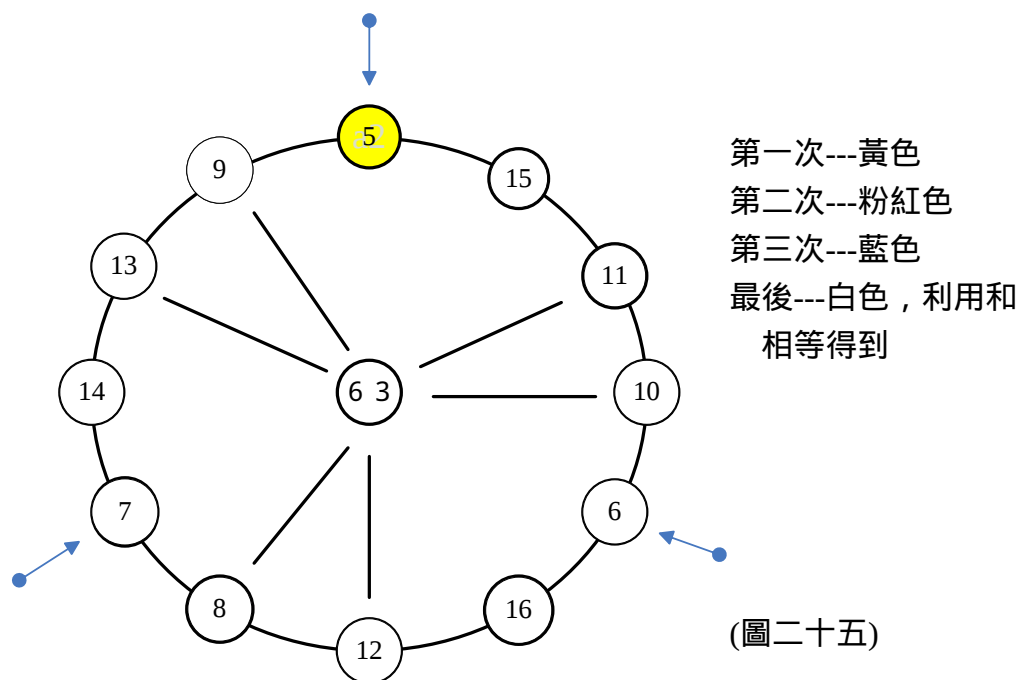
(3)考慮隔離出(11, 12, 13)，從 a_2 開始順時針填，一個區塊填入一個數字後即跳至下一區塊，接著從該區(a_{18} 區)的最後一格開始填下一組數字，第三組數字則從 a_9 區的第一格開始，至每區只各剩一個空格時，利用和為63可求出須填入的數字，此時會剛好把隔離出來的那一組填入，且滿足六直線所包含的數字和亦為63。

=>為了要使數字能夠平均分配，每當輪到填下一組數字時，一次從該區的第一格，另一次從該區的最後一格填入。

$$\Rightarrow \because a_2 + a_5 = a_{16} + a_{15} \text{ 且 } a_{12} + a_{13} = a_4 + a_9 \text{ 且 } a_3 + a_7 = a_{18} + a_{19}$$

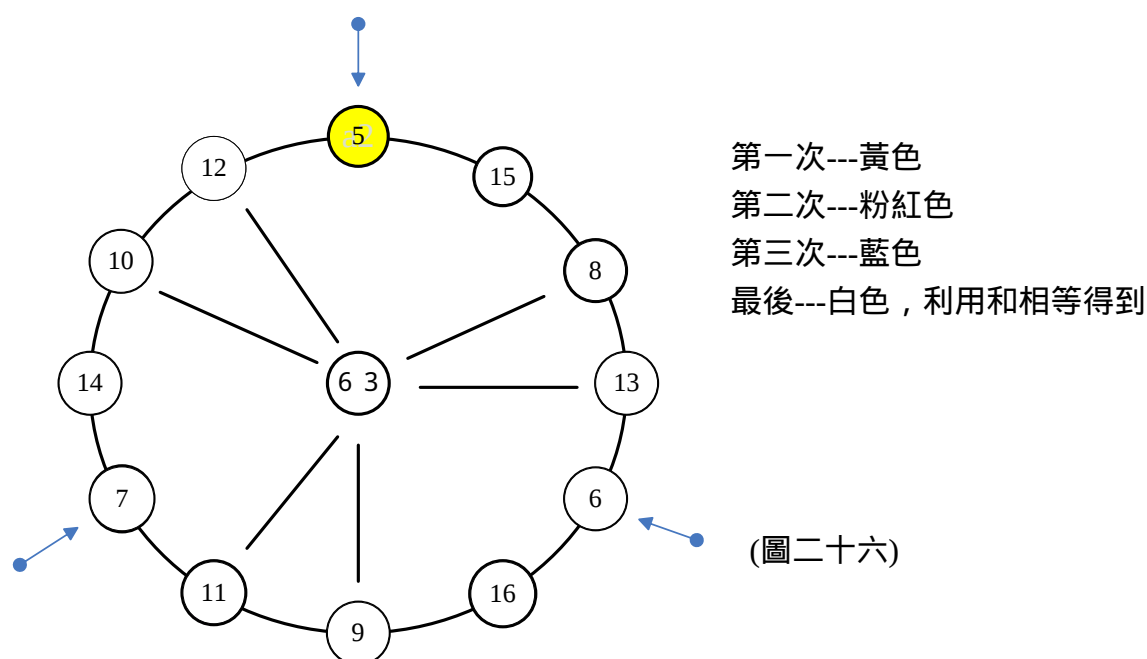
$$\text{又 } \left(\sum_{k=5}^{16} k \right) = 126$$

$$\therefore \text{六直線所包含的6個數字和} = \frac{126}{2} = 63 \text{ 符合條件}$$



=>帶入檢查無誤，得到其中一組解。

(4)考慮隔離出(8, 9, 10), 從 a_2 開始順時針填, 方法同(3), 可得出另一組解, 如圖:



=>檢查無誤, 代入 4 階魔方陣中即為其解。

8.以上兩組解是「從 a_2 開始順時針填」的結果, 觀察兩組解可發現有共通性:

$$a_2 + a_5 = a_{16} + a_{15} = c = e = 20 \text{ 且 } a_{12} + a_{13} = a_4 + a_9 = d = f = 21$$

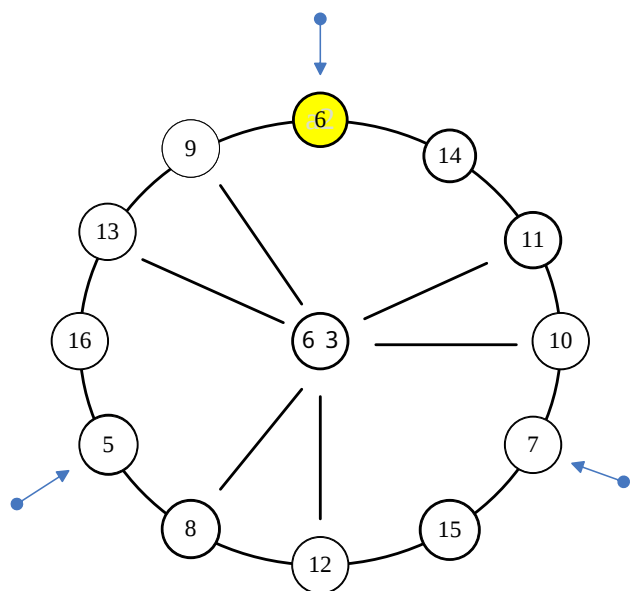
$$\text{且 } a_3 + a_4 = a_{18} + a_{19} = g = h = 22$$

$$\therefore 20 + 21 + 22 = 63 \quad \therefore \text{滿足 (p)}$$

然而滿足 $c=e=20$ 且 $d=f=21$ 且 $g=h=22$ 的解不只以上兩組, 列舉如下:

c	可對調	e	d	可對調	f	g	可對調	h
$(a_2, a_5) = (a_{16}, a_{15})$			$(a_{12}, a_{13}) = (a_4, a_9)$			$(a_3, a_7) = (a_{18}, a_{19})$		
(5,15)		(7,13)	(9,12)		(10,11)	(6,16)		(8,14)
(5,15)		(9,11)	(7,14)		(8,13)	(6,16)		(10,12)
(5,15)		(8,12)	(7,14)		(10,11)	(6,16)		(9,13)
(6,14)		(8,12)	(5,16)		(10,11)	(7,15)		(9,13)
(6,14)		(9,11)	(5,16)		(8,13)	(7,15)		(10,12)
(7,13)		(9,11)	(5,16)		(6,15)	(8,14)		(10,12)

=>事實上, 以上列出的解亦可從圓形圖得到, 以第四組為例, 即是從 a_9 區開始, 逆時針填入的結果, 如下圖:



第一次---黃色
第二次---粉紅色
第三次---藍色
最後---白色，利用合相等得到

(圖二十七)

=>因為沒有規定 c d e f g h 彼此間的大小，故將圖固定，數字旋轉 120 度，可得到新的一組解。

(五)5 階立體魔方陣

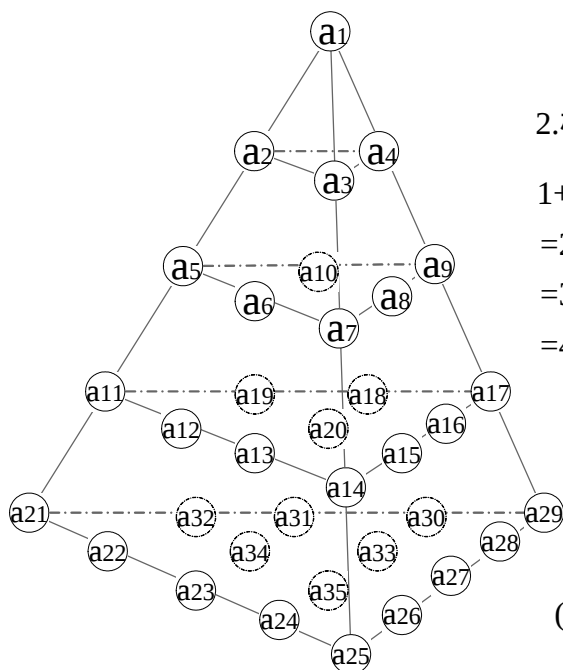
1. 首先四個頂點分別填入

$$a_1=1, a_{21}=2, a_{25}=3, a_{29}=4$$

2. 根據規則可得到下列等式(採用一和相等的觀點)

$$\begin{aligned} &1+a_2+a_3+a_5+a_6+a_7+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{22}+a_{23}+a_{24} \\ &=2+a_2+a_4+a_5+a_{10}+a_9+a_{11}+a_{19}+a_{18}+a_{17}+a_{32}+a_{31}+a_{30} \\ &=3+a_3+a_4+a_7+a_8+a_9+a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}+a_{26}+a_{27}+a_{28} \\ &=4+a_{24}+a_{23}+a_{22}+a_{26}+a_{27}+a_{28}+a_{30}+a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{35} \end{aligned}$$

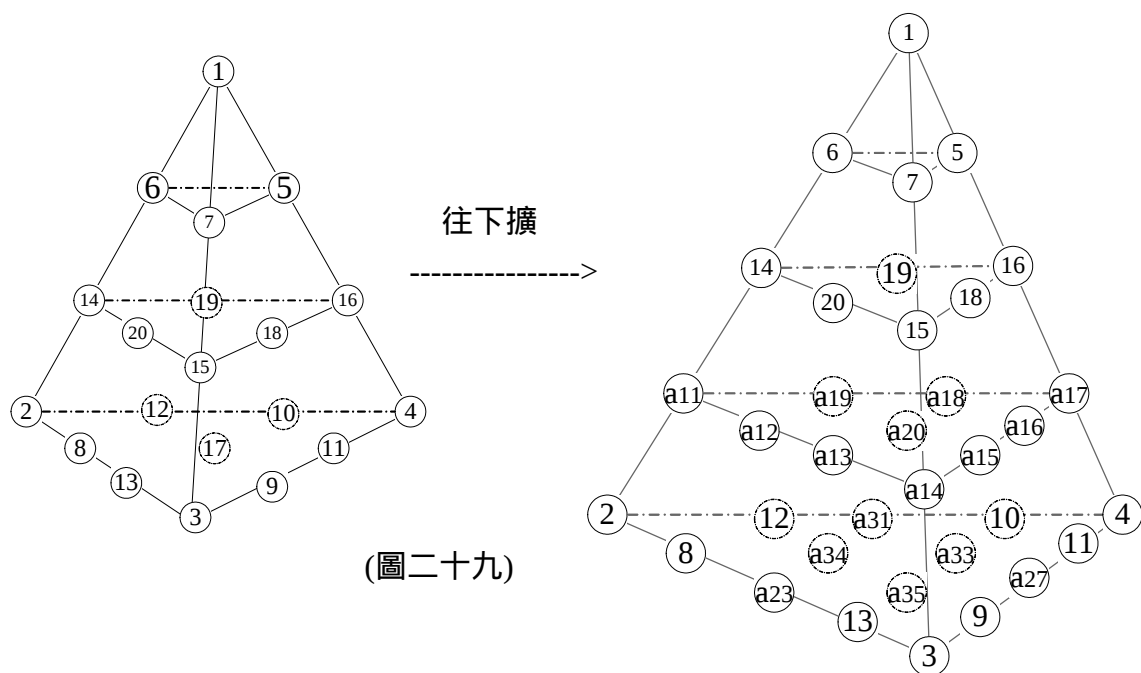
----- (r)



(圖二十八)

3. 觀察(r)式，可以發現 a_{20} 並不包括在其內，此時 a_{20} 的值不會影響最終結果，我們稱它為「無關的點數」。

4. 由於之前提到的圓形圖在此不適用(在後文(七)中會做討論)，我們採用 4 階推 5 階的方法求解，首先跟平面一樣考慮一整面往下擴，如下：



5.可以得到

$$\begin{aligned}
 89 + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{23} &= 89 + a_{11} + a_{19} + a_{18} + a_{17} + a_{31} \\
 &= 89 + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{27} = 72 + a_{23} + a_{27} + a_{31} + a_{33} + a_{34} + a_{35}
 \end{aligned}$$

6. $\because 89 - 72 = 17 \quad \therefore$ 不妨令 $a_{35} = 17$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{原式變成} \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{23} &= a_{11} + a_{19} + a_{18} + a_{17} + a_{31} \\
 &= a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{27} = a_{23} + a_{27} + a_{31} + a_{33} + a_{34} \quad \text{---(s)}
 \end{aligned}$$

7. (s)式中不重複地填入 21-35，且會餘一個數字，即是 a_{20} 的值。

可得到其中一組解 $21 + 34 + 29 + 22 + 26 = 21 + 27 + 35 + 25 + 24$

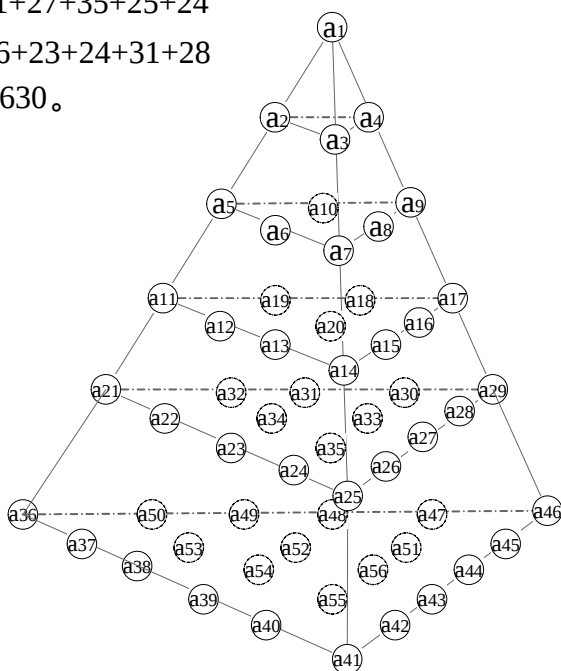
$$= 22 + 32 + 30 + 25 + 23 = 26 + 23 + 24 + 31 + 28$$

代入 5 階魔方陣即為所求。 $B_5 = 409, T_5 = 630$ 。

(六) 6 階立體魔方陣

1. 首先四個頂點分別填入

$$a_1 = 1, a_{36} = 2, a_{41} = 3, a_{46} = 4$$



2.根據規則可得下列等式
(根據一面和相等的觀點)

$$\begin{aligned}
 &6+a_2+a_3+a_5+a_6+a_7+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}+a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40} \\
 &=7+a_2+a_4+a_5+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{21}+a_{29}+a_{30}+a_{31}+a_{32}+a_{47}+a_{48}+a_{49}+a_{50} \\
 &=8+a_3+a_4+a_7+a_8+a_9+a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}+a_{25}+a_{26}+a_{27}+a_{28}+a_{29}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45} \\
 &=9+a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45}+a_{47}+a_{48}+a_{49}+a_{50}+a_{51}+a_{52}+a_{53}+a_{54}+a_{55}+a_{56} \\
 &\quad \text{---(t)}
 \end{aligned}$$

3.考慮 a_i 在(t)中出現的次數

(1).將只出現一次者和常數另外寫，並先設四個式子相等，如下：

$$\begin{aligned}
 &6+a_6+a_{12}+a_{13}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=7+a_{10}+a_{18}+a_{19}+a_{30}+a_{31}+a_{32} \\
 &=8+a_8+a_{15}+a_{16}+a_{26}+a_{27}+a_{28}=9+a_{51}+a_{52}+a_{53}+a_{54}+a_{55}+a_{56} \quad \text{---(u)}
 \end{aligned}$$

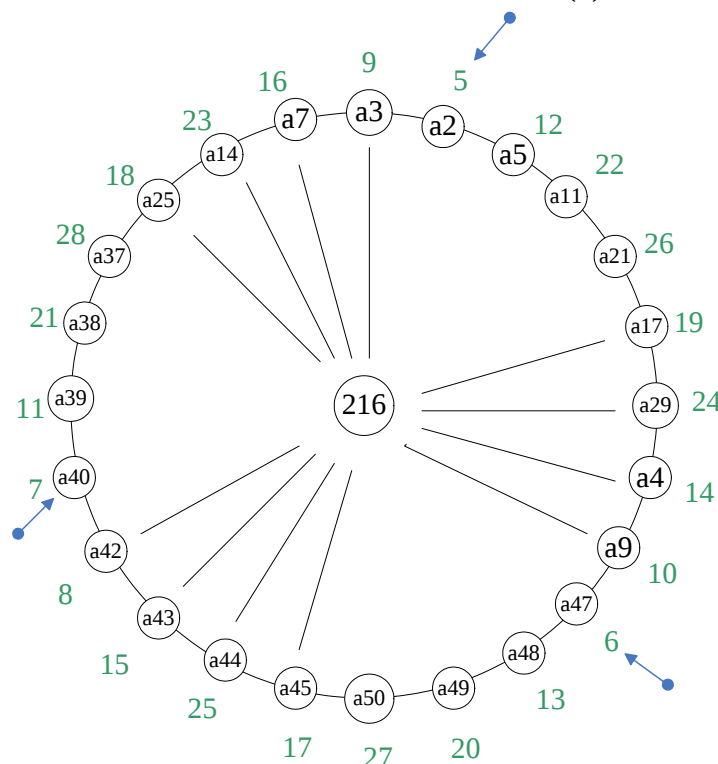
保留最大的幾個數(33-56)等到最後再將其填入。

(2).無關的點數： $a_{20}, a_{33}, a_{34}, a_{35}$ ，共 4 個

4.比較(t)(u)可得

$$\begin{aligned}
 &a_2+a_3+a_5+a_7+a_{11}+a_{14}+a_{21}+a_{25}+a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40} \\
 &=a_2+a_4+a_5+a_9+a_{11}+a_{17}+a_{21}+a_{29}+a_{47}+a_{48}+a_{49}+a_{50} \\
 &=a_3+a_4+a_7+a_9+a_{14}+a_{17}+a_{25}+a_{29}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45} \\
 &=a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45}+a_{47}+a_{48}+a_{49}+a_{50} \quad \text{--- (v)}
 \end{aligned}$$

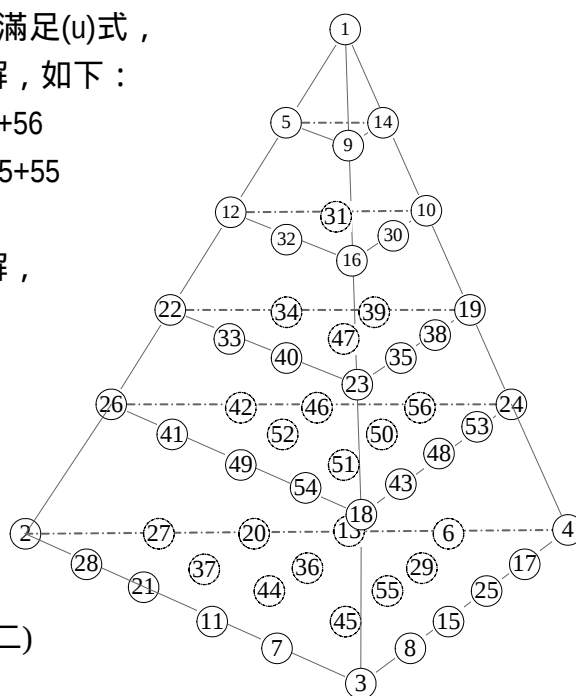
5.根據 4 階的經驗，我們同樣可以畫出一個圖並求出(v)的其中一個解



(圖三十一)

6.回到(u)，將剩下的數字 29-56 填入，使其滿足(u)式，
 利用順逆時針的方法可以得到其中一組解，如下：
 $6+32+33+40+41+49+54=7+31+34+39+42+46+56$
 $=8+30+35+38+43+48+53=9+29+36+37+44+45+55$

檢驗無誤，帶入 6 階立體魔方陣即為一解，
 並可求出 $B_6=1143, T_6=1596$ 。

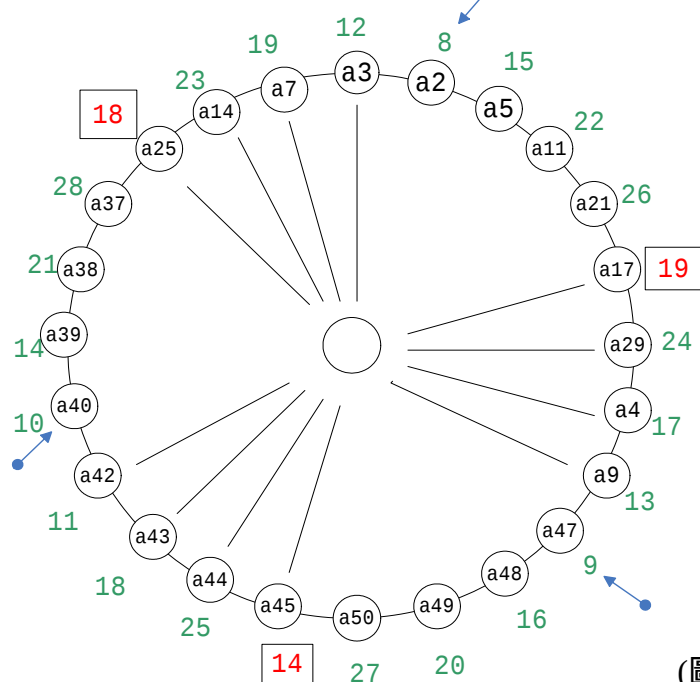


(圖三十二)

(七)立體魔方陣解之討論

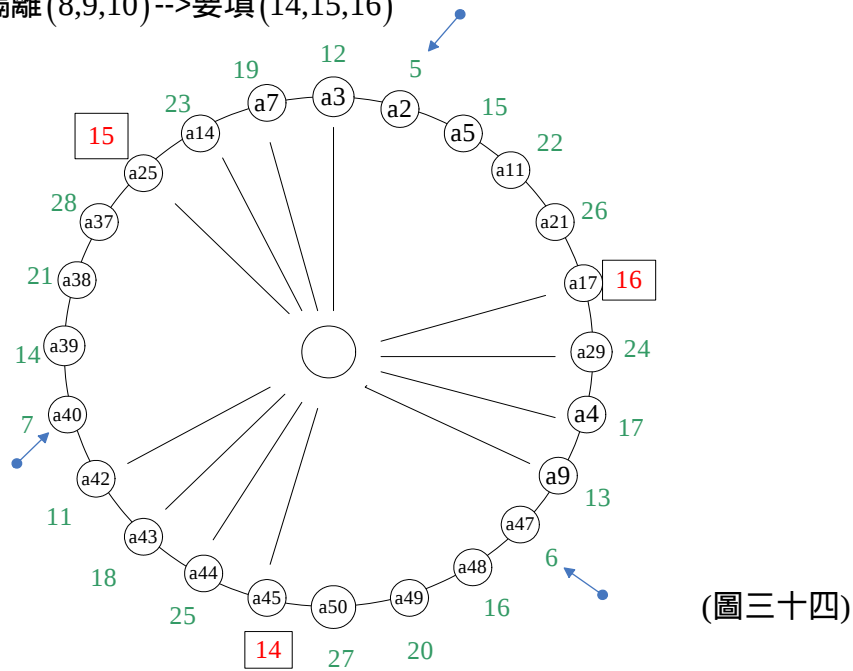
1.以 6 階立體魔方陣為例，在(六).5.中，我們根據 4 階的經驗畫圖求解，圓中的數字分別填入 5 至 28。我們將 5 至 28 由小到大三個數字分為一組，討論隔離出 $(k, k+1, k+2)$ 時，最後須填入的數為 $(m, m+1, m+2)$ 。

(1).隔離 $(5, 6, 7) \rightarrow$ 要填 $(17, 18, 19)$



(圖三十三)

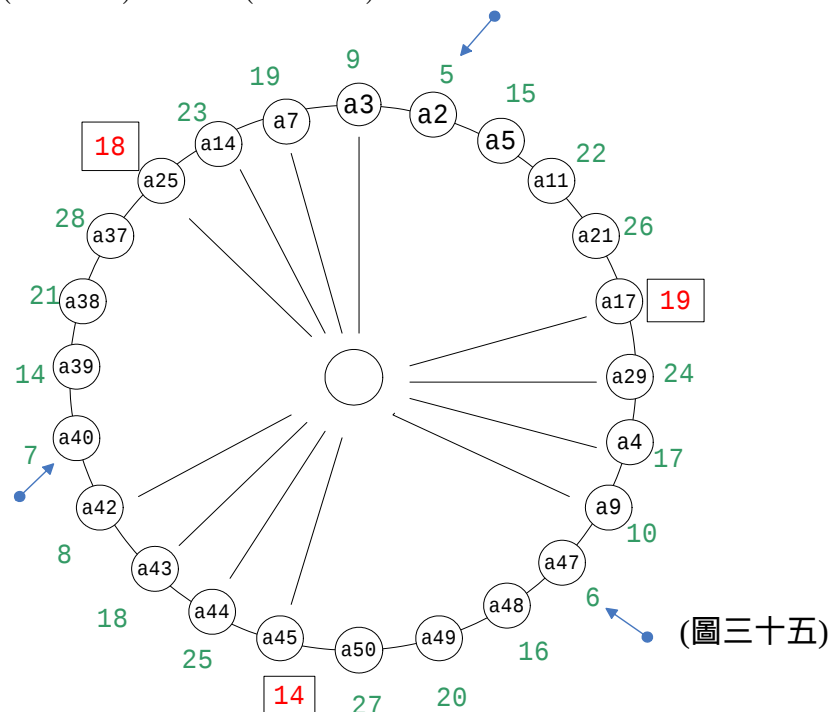
(2).隔離(8,9,10)-->要填(14,15,16)



說明：隔離此組可視為 1. 圖中 (8,9,10) 換成 (5,6,7)，而 (5,6,7) 的位置不在中間

12 條線所包含的圓中，所以最後填入的數比隔離(5,6,7)時少 3。

(3).隔離(11,12,13)-->要填(17,18,19)



說明：隔離此組可視為 2.圖中(11,12,13)換成(8,9,10)，而(8,9,10)的位置在中間 12

條線所包含的圓中，所以最後填入的數比隔離(8,9,10)時多 3。

(4).隔離(14,15,16)-->剛好填入(14,15,16)

(5).隔離(17,18,19)-->剛好填入(17,18,19)

(6).隔離(20,21,22)-->要填(14,15,16)

(7).隔離(23,24,25)-->要填(17,18,19)

(8).隔離(26,27,28)-->要填(14,15,16)

觀察以上可發現每次換掉一組數字時，一次換到中間 12 條線所包含的數，一次換到非中間 12 條線所包含的圓數，故最後填入的數字兩組一循環，且兩組數字間數字差 3。

我們可以得出 6 階立體魔方陣討論隔離出 $(k, k+1, k+2)$ ，最後須填入 $(m, m+1, m+2)$ 時， m

k 的關係 $m = 12 - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil + k$

2.同理，我們可以得到 4 階、8 階魔方陣 m 、 k 的關係。整理如下：

4 階魔方陣 m 、 k 的關係 $m = 6 - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil + k$

6 階魔方陣 m 、 k 的關係 $m = 12 - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil + k$

8 階魔方陣 m 、 k 的關係 $m = 18 - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil + k$

綜合以上結果，可得 n 階立體魔方陣， n 為偶數，隔離出 $(k, k+1, k+2)$ 最後須填入的數為

$(m, m+1, m+2)$ ，則 $m = 6 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil + k$ ，當隔離出的那組數字即為最後填入的那組數字時，此畫圓求解的方法成立，觀察此式，當 $m=k$ 時一定有解，故 n 階立體魔方陣， n 為偶數時，必可用畫圓形圖求解，且是隔離出最中間兩組數時成立。

3.同理，5 階魔方陣 m 、 k 的關係滿足 $m = 9 - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil + k + \frac{a_{20}-k}{|a_{20}-k|}$ ，

若有解則 $m=k$ ，以下分成 k 在 a_{20} 前後做討論如下：

(1) k 在 a_{20} 前： $a_{20} - k \geq 0$

$$9 - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil = 10 \quad \rightarrow \leftarrow$$

(2) k 在 a_{20} 前： $a_{20} - k \leq 0$

$$9 - 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil - 1 = 0 \Rightarrow 6 \left\lceil \frac{k-2}{6} \right\rceil = 8 \rightarrow \leftarrow$$

綜合以上兩點可知圓形圖不適用於 5 階立體魔方陣

(八) 特殊性質

1. 無關的點數：

$n=5$ 開始才有無關的點數，將其列出幾項如下：

$$\left. \begin{array}{l} n=5 \text{ 為 } 1 \\ n=6 \text{ 為 } 1+3 \\ n=7 \text{ 為 } 1+3+6 \\ n=8 \text{ 為 } 1+3+6+10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{易發現其為二階階差數列，求出其值為} \\ \frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{3}n - 4, \quad n \geq 5 \end{array}$$

2. 魔方陣中全部點個數：

任一面點個數 $\times 4$ - 頂點重複 - 稜邊重複 + 無關點數

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) \times 4 - 4 \times 2 - 6(n-2) + \left(\frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{3}n - 4 \right) \\ &= \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n, \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

當 $n=3$ 時為 10， $n=4$ 時為 20

3. 截塊和相等時出現三次的點個數：

$$\text{即不位於稜邊上的點數} = 4 \left(\sum_{k=1}^{n-3} k \right) = 2n^2 - 10n + 12$$

4. 截塊時每塊點數：

$$\text{全部點數} - \text{任一面點數} = \left(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n \right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n, \quad n \geq 5$$

$n=3$ 時為 4， $n=4$ 時為 10

柒、討論

我們一開始的遊戲限制是為了簡化解的情形，以便於討論，但就我們的填法而言，主要的核心概念是利用順逆時針及連續數字的特性進行求解，因此一開始遊戲沒有做那樣的假設依然有解。

而根據我們的填法，其實數字不一定要按照順序填入，只要是連續數字皆可，更進一步，所填入的數字彼此間的差距為定值皆可滿足所求。

捌、結論

本文主要以自訂的遊戲規則探討魔方陣的解，由三角形魔方陣開始，我們可以從 n 階三角形魔方陣推廣至 $(n+1)$ 階三角形魔方陣。另外，任給定一個 n 階三角形魔方陣，文中亦提供快速填出一解的方法；當魔方陣推廣至平面任意 n 階 m 邊形時，除奇數階偶數邊形無解外，其他情況我們皆有提供快速填出一解的方法。

進而，我們由平面魔方陣推廣至立體魔方陣，討論可得三階立體魔方陣頂點為等差數列時無解，偶數階均可藉由自創的圓形圖求解，而五階的部分經由證明可知圓形圖不適用，因此我們採用 4 階推至 5 階的方法得出其中一解。

此外，文中也討論了 S_n 、 A_n 每邊和的一般式，藉以更進一步了解魔方陣之間的相關性。

玖、參考資料及其他

余文卿主編，高中數學課本第一冊(龍騰版)，台北，龍騰文化事業股份有限公司，221 頁，2005 年。

余文卿主編，高中數學課本第四冊(龍騰版)，台北，龍騰文化事業股份有限公司，214 頁，2005 年。

李國偉(1986)，論保其壽的渾圓圖，載於《第一屆科學史研討會彙刊》，67-79 頁，中央研究院，台北。

【評 語】 040424 魔方陣的變形

- 1) 人們著迷於魔方陣已有悠久的歷史。本研究沿用魔方陣一詞，而其定義與傳統的魔方陣沒有任何關係。
- 2) 研究的內容雖然亦附有「証明」、數字等，但是卻看不出與數學有何關係。
- 3) 文獻探討是科學研究的重要一環，它能夠引發創新的靈感。作品應該加強這方面的功夫。