中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第二名

040423

圓錐曲線的推廣

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 舒瑞盈	黃哲男

關鍵詞：圓錐曲線　擬離心率 e　自我相交

摘要

從圓錐曲線作圖出發，放寬條件產生新圖形並研究其性質。設圓O的半徑爲a，點F坐標爲$(k,0)$，Q在圓O上，R在$\overleftrightarrow{FQ}$上滿足$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$）〈其中 **FR** 及 **FQ** 表有向線段〉，若直線L過點R與$\overleftrightarrow{FQ}$垂直並與$\overleftrightarrow{OQ}$交於點P，當Q在圓O上移動時，用極座標推導動點P方程式$\rho=a\left[1-\dfrac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta}\right]$，$F$點在圓內，$t=\dfrac{1}{2}$時爲橢圓；$F$點在圓外，$t=\dfrac{1}{2}$時爲雙曲線。稱$F$點在圓內爲 E 型曲線爲封閉曲線；稱$F$點在圓外爲 H 型曲線爲開放曲線。仿圓錐曲線令擬離心率 e 爲$\dfrac{k}{a}$。兩曲線e值相同時有相似性，以$y=f(\theta)=\rho(\theta)=1-\dfrac{(1-t)\left(1+e^2-2e\cos\theta\right)}{1-e\cos\theta}$討論圖形。

旋轉直線 L，使過點R與$\overleftrightarrow{OQ}$交於 P，用極座標推導動點P方程式$\rho=a\left[1-\dfrac{(1-t)(1+e^2-2e\theta c}{1-e\cos\theta+e\theta\sin\phi}\right]$，當$\csc\phi\geq\dfrac{1}{e}$時可爲開放圖形，稱 F 點在圓內爲$E'$型曲線，在圓外爲$H'$型曲線。

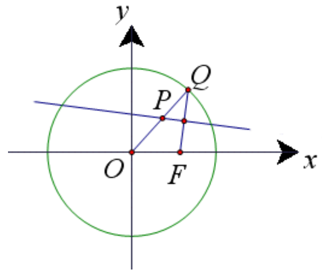
拋物線仿橢圓作法，將中垂線作圖改爲 t 比值，改變後圖形仍爲拋物線，方程式爲$(1-t)y^2-kx+(1-t)k^2=0$。旋轉後，拋物線變爲雙曲線，方程式爲$(1-t)y^2+\cot\phi xy-kx+(1-t)k^2=0$。

圓錐曲線的推廣

壹、研究動機

在一次上課中，老師講授了一題 87 學年度大學甄試入學考試的試題，原題如下：

如右圖，圓O的半徑為 6，F 的坐標為$(4,0)$，Q在圓O上，P為$\overline{FQ}$的中垂線與$\overline{OQ}$的交點。當Q在圓O上移動時，動點P的軌跡方程式為______________。



老師利用 GSP 展示動點P之軌跡為一橢圓，並依題目之條件求得其軌跡方程式為$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$。之後，用 GSP 作圖，將垂線作在任意比例之處，發現有新的圖形產生，當改變比例時，發現圖形會有自我相交之性質，又與原來橢圓有相似之處。覺得新的曲線很有趣，便想研究其與原來曲線之關連。後又進一步推廣，研究如果是放寬雙曲線與拋物線之同樣作圖條件時，所變出圖形之性質以及與原圓錐曲線之差異。

貳、研究目的

一、放寬橢圓之條件，使$\overline{FQ}$不為$\overline{OQ}$的中垂線。設圓O的半徑為a，F 的坐標為$(k,0)$且在圓內，Q在圓O上，R在$\overleftrightarrow{FQ}$上且滿足$\frac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$）〈其中 **FR** 及 **FQ** 表有向線段〉，若直線L過點R與$\overleftrightarrow{FQ}$垂直並與$\overleftrightarrow{OQ}$交於點P，則當Q在圓O上移動時，動點P的軌跡圖形及方程式為何？並且該軌跡曲線有何性質？

二、同樣放寬條件，但使F在圓外，使圖形類似雙曲線型式，同樣探討當Q在圓O上移動時，動點P的軌跡圖形及方程式為何？並且該軌跡曲線有何性質？

三、再放寬條件，使直線 L 不垂直而與$\overleftrightarrow{FQ}$夾一ϕ角，同樣研究F在圓內與圓外得圖形性質

四、探討所畫出之圖形與正常橢圓及雙曲線之間的差異性

五、仿照橢圓，放寬拋物線之做圖條件。設直線S與極軸相交，點F為極軸上一點，點R在$\overleftrightarrow{FQ}$上且滿足$\frac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$）〈其中 **FR** 及 **FQ** 表有向線段〉，設直線T過點Q與直線S垂直，直線L過點R與$\overleftrightarrow{FQ}$垂直，令直線T與直線S相交於點P，則動點P之軌跡方程式與圖形為何？

六、同樣再放寬條件，使直線L不垂直而與$\overleftrightarrow{FQ}$夾一ϕ角，同樣研究動點P之軌跡方程式與圖形爲何？

參、名詞解釋

一、E型曲線

放寬橢圓之條件，使$\overline{FQ}$不爲$\overline{OQ}$的中垂線。F的坐標爲$(k,0)$且在圓內，Q在圓O上，R在$\overleftrightarrow{FQ}$上且滿足$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$）〈其中**FR**及**FQ**表有向線段〉，若直線L過點R與$\overleftrightarrow{FQ}$垂直並與$\overleftrightarrow{OQ}$交於點P，則當Q在圓O上移動時所產生的新圖形稱之，爲原本橢圓的推廣。

二、H型曲線

放寬雙曲線之條件，使$\overline{FQ}$不爲$\overline{OQ}$的中垂線。F的坐標爲$(k,0)$且在圓外，Q在圓O上，R在$\overleftrightarrow{FQ}$上且滿足$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$）〈其中**FR**及**FQ**表有向線段〉，若直線L過點R與$\overleftrightarrow{FQ}$垂直並與$\overleftrightarrow{OQ}$交於點P，則當Q在圓O上移動時所產生的新圖形稱之，爲原本雙曲線的推廣。

三、E'型曲線

再放寬E型曲線的條件，使直線L不垂直$\overleftrightarrow{FQ}$而與$\overleftrightarrow{FQ}$夾一ϕ角，所產生的新圖形，爲原本橢圓的推廣。

四、H'型曲線

再放寬H型曲線的條件，使直線L不垂直$\overleftrightarrow{FQ}$而與$\overleftrightarrow{FQ}$夾一ϕ角，所產生的新圖形，爲原本雙曲線的推廣。

五、擬離心率e

$|\mathbf{OF}|$與圓半徑的比値，即$\dfrac{k}{a}$，與原圓錐曲線的性質相仿，可用於分類E型曲線與H型曲線。

六、擬準線

仿照圓錐曲線準線的作圖方式所做出來的一條直線。

七、P型曲線

放寬拋物線之做圖條件。設直線 S 與極軸相交，點 F 爲極軸上一點，點 R 在 $\overleftrightarrow{FQ}$ 上且滿足 $\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$）〈其中 **FR** 及 **FQ** 表有向線段〉，設直線 T 過點 Q 與直線 S 垂直，直線 L 過點 R 與 $\overleftrightarrow{FQ}$ 垂直，令直線 T 與直線 S 相交於點 P，則動點 P 所產生的新圖形稱之，爲原本拋物線的推廣。

八、P' 型曲線

再放寬 P 型曲線的條件，使直線 L 不垂直 $\overleftrightarrow{FQ}$ 而與 $\overleftrightarrow{FQ}$ 夾一 ϕ 角，所產生的新圖形，爲原本拋物線的推廣。

肆、研究工具

紙、筆、電腦、GSP 動態幾何繪圖板(The Geometer's Sketchpad)。

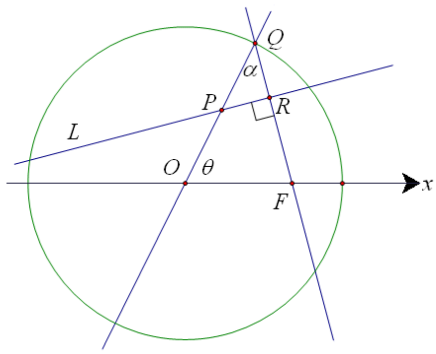
伍、研究過程

一、E 型曲線與 H 型曲線

【研究目的一之問題一】:

圓 O 的半徑爲 a，F 的坐標爲 $(k,0)$ 且在圓內，Q 在圓 O 上，R 在 $\overleftrightarrow{FQ}$ 上且滿足 $\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$）〈其中 **FR** 及 **FQ** 表有向線段〉，若直線 L 過點 R 與 $\overleftrightarrow{FQ}$ 垂直並與 $\overleftrightarrow{OQ}$ 交於點 P，則當 Q 在圓 O 上移動時，動點 P 的軌跡圖形及方程式爲何？

(一)E 型曲線方程式



設 $\overrightarrow{OF}$ 爲極軸，$\angle FOP=\theta$，$\angle OQF=\alpha$

$\overline{OP}$ 爲極半徑 ρ，$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$

考慮 ΔOFQ

由餘弦定理得 $\overline{FQ}^2=a^2+k^2-2ak\cos\theta$ ....(1.1.1)

由正弦定理得 $\dfrac{k}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{FQ}}{\sin\theta}$ ....(1.1.2)

考慮 ΔPQR

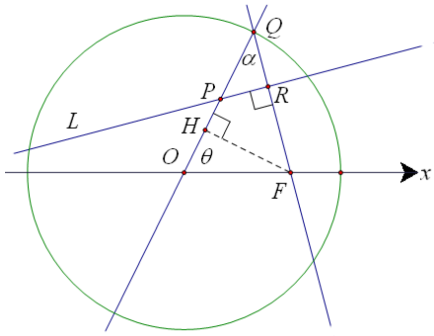
$$\overline{QP}\cos\alpha=(a-\rho)\cos\alpha=|\mathbf{QR}|=|\mathbf{FQ}|-|\mathbf{FR}|=|\mathbf{FQ}|-|t||\mathbf{FQ}|=(1-|t|)|\mathbf{FQ}|=\left(1-t\right)\overline{FQ}$$

$$\Rightarrow\left(a-\rho\right)\cos\alpha=\left(1-t\right)\overline{FQ}\ \text{......}(1.1.3)$$

由(1.1.2)得 $k\sin\theta=\overline{FQ}\sin\alpha$ ....(1.1.4)

(1.1.3)×(1.1.4)得 $(a-\rho)k\sin\theta\cos\alpha=(1-t)\overline{FQ}^{2}\sin\alpha$

$$\Rightarrow\rho=a-\frac{(1-t)\overline{FQ}^{2}\tan\alpha}{k\sin\theta}\ \text{......}(1.1.5)$$



作 $\overline{FH}\perp\overline{OQ}$

則 $k\sin\theta=\overline{FH}=\overline{QH}\tan\alpha$

又 $\overline{QH}=a-\overline{OH}=a-k\cos\theta$

故 $\dfrac{\tan\alpha}{k\sin\theta}=\dfrac{1}{a-k\cos\theta}$ ....(1.1.6)

將(1.1.1)與(1.1.6)代入(1.1.5)得

$$\rho=a-\frac{(1-t)(a^{2}+k^{2}-2ak\cos\theta)}{a-k\cos\theta}\ \text{......}(1.1.7)$$

(1.1.7)即爲所求之極坐標方程式。

(二)H 型曲線方程式

仿照 E 型曲線，發現 H 型曲線之公式與 E 型曲線相同，其不同處只在 k>a

(三)曲線之性質

由橢圓及雙曲線之定義可知，當 F 在圓內時，圖形會類似橢圓，稱之爲 E 型曲線，而 F 在圓外時，圖形類似雙曲線稱之爲 H 型曲線。

1.相似性與擬離心率

若將 a 與 k 同時伸縮 n 倍，亦即 $a'=na$ ， $k'=nk$ ，則

$$\rho' = na - \frac{(1-t)[(na)^2 + (nk)^2 - 2(na)(nk)\cos\theta]}{na - nk\cos\theta}$$
$$= n\left[a - \frac{(1-t)(a^2 + k^2 - 2ak\cos\theta)}{a - k\cos\theta}\right]$$
$$= n\rho$$

由以上可知，若a與k同時伸縮n倍，ρ亦同時伸縮n倍，故當$\frac{k}{a}$之值相同時，可得一族相似之曲線。我們仿照圓錐曲線，將$\frac{k}{a}$之值定義爲「擬離心率e」，則方程式可以改寫成：

$$\rho = a\left[1 - \frac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta}\right] \text{..................(1)}$$

由 E 型曲線及 H 型曲線之定義可知：
當$0<e<1$時，圖形爲 E 型曲線。
當$e>1$時，爲 H 型曲線。

2.分類：

由以上討論可知，若$k=a$（即點F位於圓上），動點P之軌跡圖形爲一圓，故圖形有界。若$k \neq a$，則當$k<a$時，點F位於圓內，此時動點P之軌跡即爲E型曲線；當$k>a$時，點F位於圓外，此時動點P之軌跡即爲H型曲線；特別地，當$t=1$時，E型曲線與H型曲線之圖形皆爲圓（即圓O本身）。考慮擬離心率$e=\frac{k}{a}$，我們將上述分類討論整理得下表：

表 1-1：動點P之軌跡圖形分類

t 值 / 擬離心率	$t \neq 1$	$t=1$
$e<1$	E型曲線	圓
$e=1$	圓	圓
$e>1$	H型曲線	圓

3.範圍：

由表 1-1 可知，當$t=1$時，不論擬離心率e之值爲何，動點P之軌跡圖形爲一圓，故皆有界；當$t\neq1$時，若$e=1$，動點P之軌跡圖形仍爲一圓，故有界；至於$t\neq1$且$e\neq1$時，動點P之軌跡圖形即分屬E型曲線與H型曲線，此兩曲線是否仍然有界？茲討論如下：

E型曲線：

當動點P之軌跡圖形爲E型曲線時，擬離心率$e<1$，故：

$$0<1-e<1-e\cos\theta<1+e \quad \text{且} \quad 1+e^2-2e<1+e^2-2e\cos\theta<1+e^2+2e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e}<\frac{1}{1-e\cos\theta}<\frac{1}{1-e} \quad \text{且} \quad (1-e)^2<1+e^2-2e\cos\theta<(1+e)^2$$

$$\Rightarrow 0<\frac{(1-e)^2}{1+e}<\frac{1+e^2-2e\cos\theta}{1-e\cos\theta}<\frac{(1+e)^2}{1-e}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta}\right|<\frac{|1-t|(1+e)^2}{1-e}$$

由.(1)式及上式可知

$$|\rho|<a\left[1+\frac{|1-t|(1+e)^2}{1-e}\right]$$

故可知E型曲線必有界。

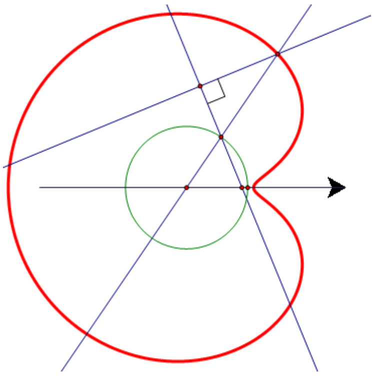
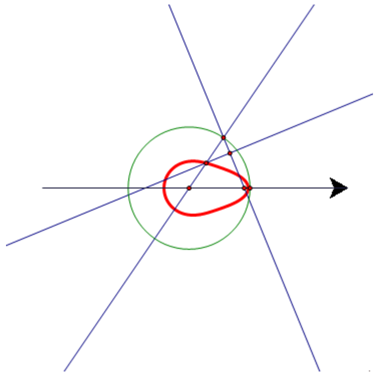
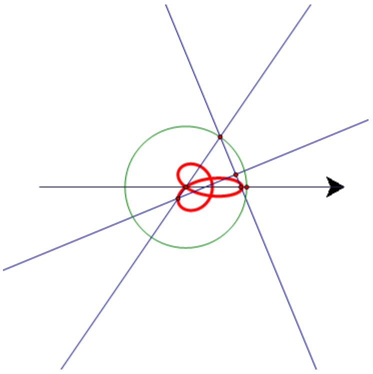
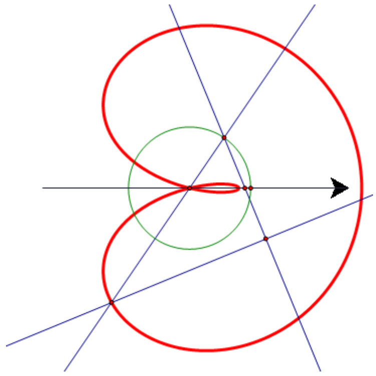
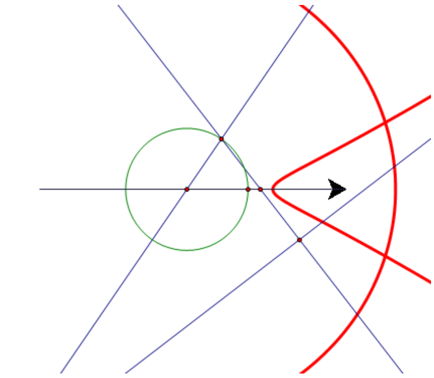
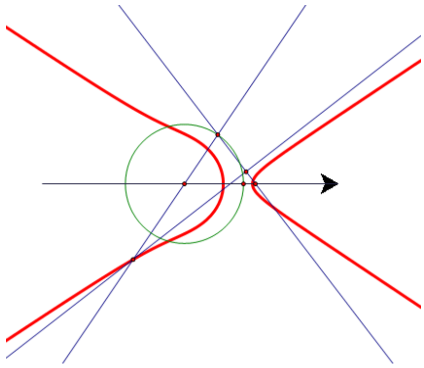
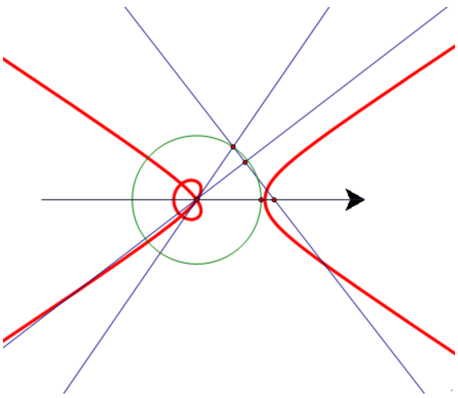
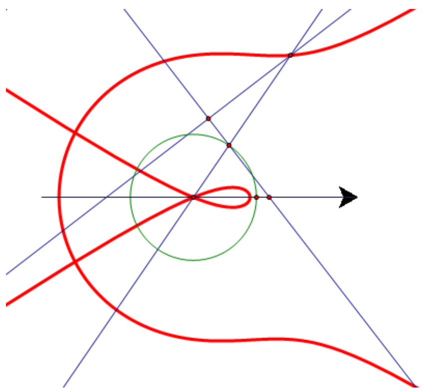
H型曲線：

當動點P之軌跡圖形爲H型曲線時，擬離心率$e>1$，故必存在θ，使得$\cos\theta=\dfrac{1}{e}$，因此當$\cos\theta\to\dfrac{1}{e}$時，$\rho\to\pm\infty$，故$H$型曲線必無界。

將其整理可得，可得：

t值 / 擬離心率	$t\neq1$	$t=1$
$e<1$	E型曲線 有界	圓 有界
$e=1$	圓 有界	圓 有界
$e>1$	H型曲線 無界	圓 有界

表 1-2

$e=0.9$，$t=2$	$e=0.9$，$t=0.7$
	
$e=0.9$，$t=0.25$	$e=0.9$，$t=-1$
	
$e=1.2$，$t=1.5$	$e=1.2$，$t=0.7$
	
$e=1.2$，$t=0.25$	$e=1.2$，$t=-1$
	

GSP 構圖畫出的各種形式。 表 1-3

4. 對稱性：

在(1)中，若將θ代換成$-\theta$，則

$$\rho=a-\left[\frac{(1-t)[a^2+k^2-2ak\cos(-\theta)]}{a-k\cos(-\theta)}\right]=a-\left[\frac{(1-t)(a^2+k^2-2ak\cos\theta)}{a-k\cos\theta}\right]$$

由以上可知，方程式不變，故曲線對稱於極軸。

5. 自我相交性：

我們由 GSP 的構圖過程中知道，固定a與k之值時，某些t值會使得E型曲線與H型曲線的圖形產生「自我相交」的情形，並且由「相似性」知，若擬離心率$e=\dfrac{k}{a}$相同，則圖形相似，因此底下我們討論當$a=1$並且給定擬離心率e時，r值與圖形自我相交之關連性。

為方便討論，令$y=f(\theta)=\rho(\theta)$，考慮函數：

$$y=f(\theta)=\rho(\theta)=1-\frac{(1-t)\left(1+e^2-2e\cos\theta\right)}{1-e\cos\theta}$$

函數$y=f(\theta)$具有底下之性質：

(1)週期性

$f(\theta+2\pi)=f(\theta)$，故其為週期函數，且週期為2π。

(2)對稱性

因為

$$f(2\pi-\theta)=1-\frac{(1-t)[1+e^2-2e\cos(2\pi-\theta)]}{1-e\cos(2\pi-\theta)}=1-\frac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta}=f(\theta)$$

所以$y=f(\theta)$之函數圖形對稱於$\theta=\pi$。

(3)極值

$$f(\theta)=1-\frac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta}=1-(1-t)\left[2+\frac{e^2-1}{1-e\cos\theta}\right]$$

$$=1-2(1-t)+\frac{(1-r)(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$$

因為$1-2(1-t)$與$(1-t)(1-e^2)$皆為定值。

表 1-4

t 的範圍	e 的範圍	最小值　θ	最大值θ
$0<1-t$	$0<e<1$	π	0或2π
$0<1-t$	$1<e$	0或2π	π
$1-t<0$	$0<e<1$	0或2π	π
$0<1-t$	$1<e$	0或2π	π

(4)自我相交 t 值範圍

由於 E 及 H 型曲線的公式相同，故由 $\cos\theta$ 的範圍可求出其相交條件皆爲 $\frac{-e}{1-e} \le t \le \frac{e}{1+e}$ 。

證明：

$$|\rho| = 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{(1-t)\left(1+e^2-2e\cos\theta\right)}{1-e\cos\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{e^2-t-te^2}{(1-2t)e}$$

又 $|\cos\theta| \le 1$ ，可得 $\frac{-e}{1-e} \le t \le \frac{e}{1+e}$ 。

(5)自我相交的點數

由廣義極坐標知，即當 $G(\rho,\theta)=0$ 時，若 (ρ_0,θ_0) 爲方程式的解，則 (ρ_0,θ_0) 和 $(-\rho_0,\theta_0+(2n+1)\pi)$ 皆可表示爲與此點相同的無數個坐標，故由此通式可知，當圖形自我相交時，必可以一個以上的表示法來表示此點。但是當相交的點爲極點時除外，所以極點是否爲自我相交的點須另行分析。

由以上結論可知，我們考慮 $(\rho,\theta)=(-\rho,\pi+\theta)$ 的個數(因其爲週期函數故只需考慮一種情形) 加上極點是否爲自我相交點的條件即可知其自我相交的個數。

所以我們將 $f(\theta)$ 與 $f(\pi+\theta)$ 畫成函數，若兩函數相交則表其對映之 (ρ,θ) 爲自我相交點。又若 $f(\theta)$ 之極點對映位置與 X 軸相交則代表極軸爲自我相交點。縱合以上條件便可從函數圖形知其自我相交點數。

從函數圖形上看出完整一週期有 2n 個交點，則圖形上只有 n 個交點。因爲 $\pi+\theta$ 與 θ 表同一交點。

因爲 E 型曲線及 H 型曲線之 e 值不同因此先慮 E 型曲線，及 $e<1$ 時

令 $f(\pi+\theta)=g(\theta)$ 來討論

① $y=f(\theta)$ 與 $y=g(\theta)$ 相交於 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{3\pi}{2}$

此時， $f(\frac{\pi}{2})=g(\frac{\pi}{2})=0$ ，因此 $1-\frac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\frac{\pi}{2})}{1-e\cos\frac{\pi}{2}}=0$ ，得 $t=\frac{e^2}{1+e^2}$ 。

② $y=f(\theta)$ 與 $y=g(\theta)$ 相交於 $\theta=0$ 及 π

此時， $f(\pi)=g(\pi)=-f(2\pi)$ ，因此

$$1-\frac{(1-t)(1+e^{2}-2e\cos\pi)}{1-e\cos\pi}=-\left[1-\frac{(1-t)(1+e^{2}-2e\cos2\pi)}{1-e\cos2\pi}\right]$$，得 $r=0$ 。

由圖型中可判斷其區間內相交之點數得：

E 型曲線：

t 的範圍	相交個數
$\frac{-e}{1-e}\le t<0$	1(相交在極點)
$0\le t\le\frac{e^{2}}{1+e^{2}}$	3
$\frac{e^{2}}{1+e^{2}}<t\le\frac{e}{1+e}$	1(相交在極點)

表 1-5

再考慮 H 型曲線，由圖形的變化中得知，H 型曲線以圓(即 t=1)為分界點分為兩種形況得：

H 型曲線：

t 的範圍	相交個數
$\frac{-e}{1-e}\le t<1$	3
$1<t\le\frac{e}{1+e}$	1(相交在極點)

表 1-6

表 1-7： E 型曲線之函數 $y=f(\theta)$ 與 $y=g(\theta)$ 相交情形與方程式圖形自我相交點數之關係(圖中紅色函數爲 $y=f(\theta)$ ，藍色函數爲 $y=g(\theta)$)

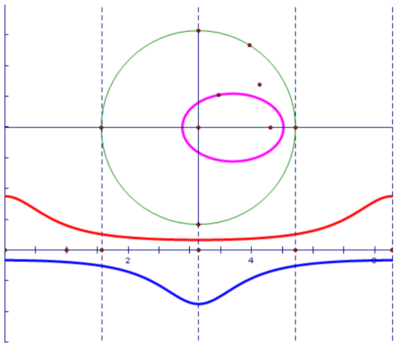
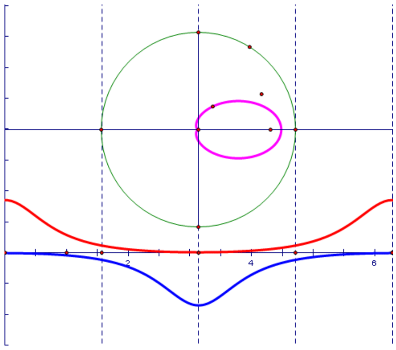
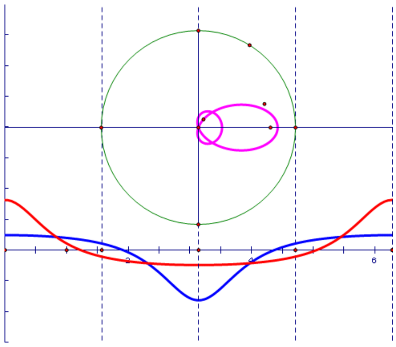
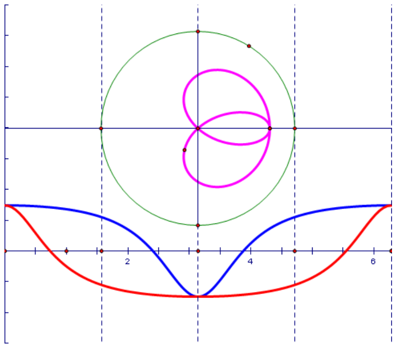
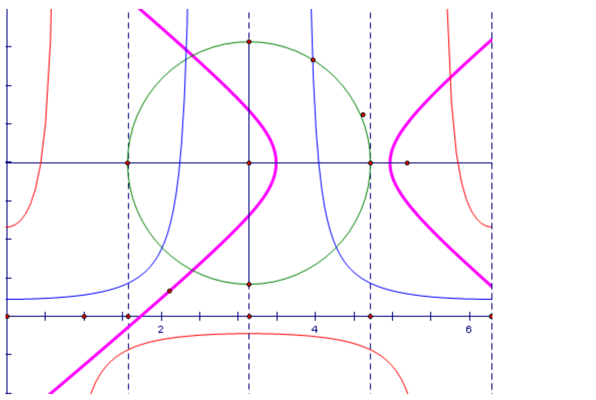
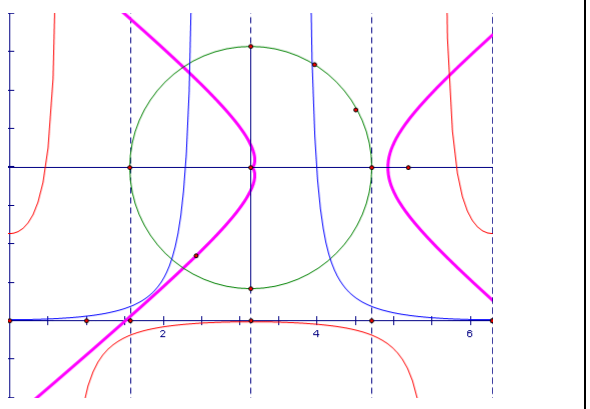
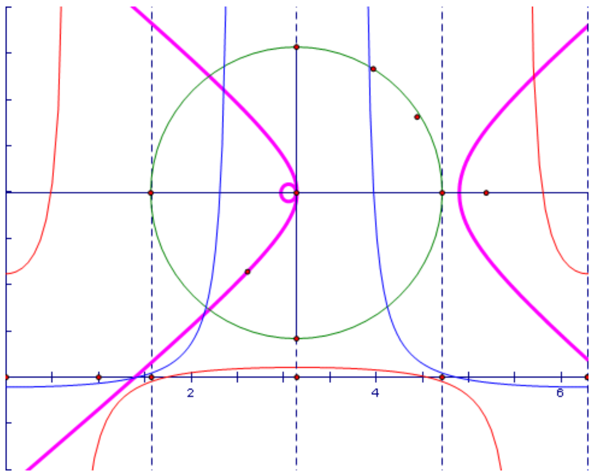
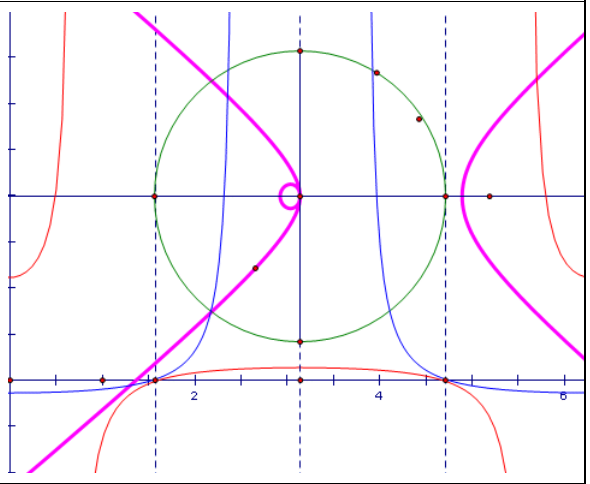
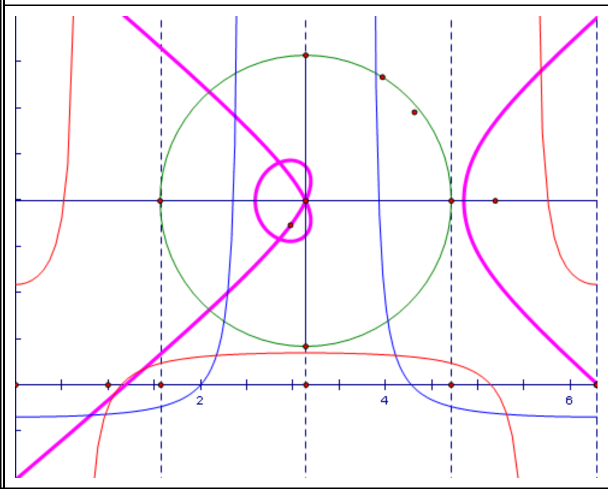
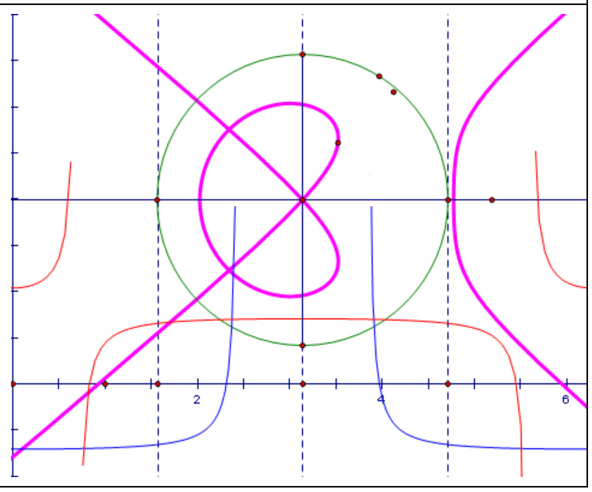
自我相交點數 =0	自我相交點數 =1
	
自我相交點數 =3	自我相交點數 =3
	

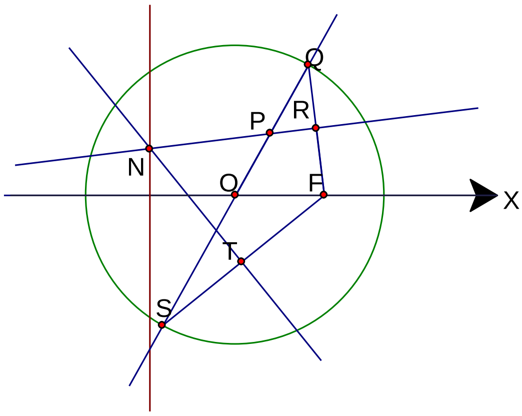
表 1-8：H 型曲線之函數 $y=f(\theta)$ 與 $y=g(\theta)$ 相交情形與方程式圖形自我相交點數之關係(圖中紅色函數為 $y=f(\theta)$ ，藍色函數為 $y=g(\theta)$)

自我相交點數 $=0$	自我相交點數 $=1$
	
自我相交點數 $=1$	自我相交點數 $=3$
	
自我相交點數 $=3$	自我相交點數 $=3$
	

6.擬準線問題：

由圓錐曲線之性質知，任一焦弦與橢圓上的交點所作切線之交點必通過準線。仿造此作法，想知道 E 型與 H 型曲線是否有準線存在。

先探討 E 型曲線之準線問題。



延伸 $\overleftrightarrow{OQ}$ 交圓 O 於 S，連接 $\overline{FS}$，取 $\frac{\mathbf{FT}}{\mathbf{FS}}=t(t\in)$，做 $\overline{FS}$ 之中垂線，交 $\overleftrightarrow{PR}$ 於 N，則由比例線段之性質，導出 N 點坐標，發現 N 之軌跡如同準線般，是一條直線。

證明：

條件取與之前相同，但另圓半徑為 1

設 Q 點坐標 $(\cos\theta,\sin\theta)$，S 點坐標 $(-\cos\theta,-\sin\theta)$

則 $\overleftrightarrow{QF}$ ：$\sin\theta x+(k-\cos\theta)y-\sin\theta k=0$

R 點坐標 $(t\cos\theta+(1-t)k,t\sin\theta)$

設 $\overleftrightarrow{RN}$ ：$(k-\cos\theta)x-\sin\theta y+m=0$，R 點坐標代入

得 $\overleftrightarrow{RN}$ ：$(k-\cos\theta)x-\sin\theta y+k^2(t-1)+k\cos\theta(1-2t)+t=0$

同理，$\overleftrightarrow{SF}$ ：$\sin\theta x-(k+\cos\theta)y-\sin\theta k=0$

T 點坐標 $(-t\cos\theta+k(1-t),-t\sin\theta)$

設 $\overleftrightarrow{TN}$ ：$(k+\cos\theta)x+\sin\theta y+n=0$，T 點坐標代入

得 $\overleftrightarrow{TN}$ ：$(k+\cos\theta)x+\sin\theta y+k^2(t-1)+k\cos(2t-1)+t=0$

由 $\overleftrightarrow{RN}$ 與 $\overleftrightarrow{TN}$ 得 N 點坐標為 $\left(-\frac{t}{k}-k(t-1),\cot\theta\left(\frac{t}{k}+kt\right)\right)$

其中，X 坐標為定值，故 N 之軌跡為一直線。

由 GSP 中可知，P 點到此直線與 P 點到焦點之距離比值非定值。故此直線與一般定義之準線不同，稱之為擬準線，但當 t=0.5 時，E 型及 H 型曲線即為橢圓與雙曲線，此時擬準線即為圓錐曲線中的準線。

二、E'型曲線與H'型曲線

【研究目的一之問題二】:

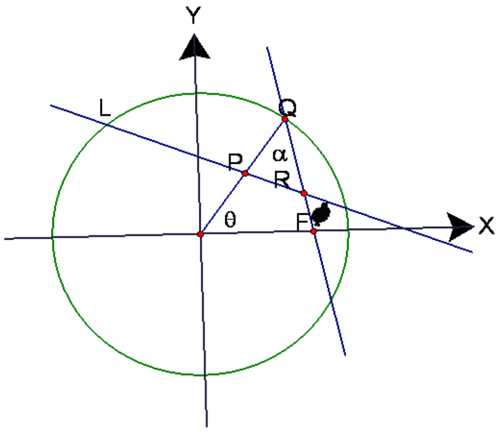
圓O的半徑為a，F的坐標為$(k,0)$且在圓內，Q在圓O上，R在$\overleftrightarrow{FQ}$上且滿足$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$），若直線$L$過點$R$與$\overleftrightarrow{FQ}$夾一$\phi$角$\left(0<\phi<\dfrac{\pi}{2}\right)$並與$\overleftrightarrow{OQ}$交於點$P$，則當$Q$在圓$O$上移動時，動點$P$的軌跡圖形及方程式為何？。

(一)E'型曲線方程式

設$\overrightarrow{OF}$為極軸，$\angle FOP=\theta$，$\angle OQF=\alpha$

$\angle FRG=\phi$ $\overline{OP}$為極半徑ρ，$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$

考慮ΔOFQ



由餘弦定理得$\overline{FQ}^2=a^2+k^2-2ak\cos\theta$ ......(1.2.1)

由正弦定理得$\dfrac{k}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{FQ}}{\sin\theta}$ ......(1.2.2)

考慮ΔPQR

$$\frac{\overline{QR}}{\sin\left[\pi-(\phi+\alpha)\right]}=\frac{\overline{PQ}}{\sin\phi} \quad ......(1.2.3)$$

又$\overline{PQ}=a-\rho$；$\overline{QR}=|\mathbf{QR}|=|\mathbf{FQ}|-|\mathbf{FR}|=(1-|t|)|\mathbf{FQ}|=(1-t)\overline{FQ}$代入

$\Rightarrow \overline{FQ}(1-t)=(a-\rho)\sin(\phi+\alpha)\csc\phi$ ......(1.2.4)

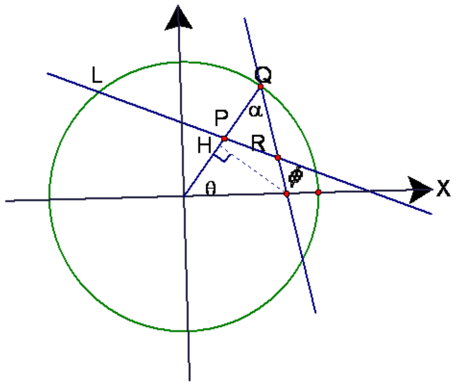
由(1.1.2)得$k\sin\theta=\overline{FQ}\sin\alpha$ ......(1.2.5)

(1.1.4)×(1.1.5)得$(a-\rho)k\sin\theta\sin(\phi+\alpha)\csc\phi=(1-t)\overline{FQ}^2\sin\alpha$

其中$\sin(\phi+\alpha)\csc\phi=(\sin\phi\cos\alpha+\cos\phi\sin\alpha)\csc\phi=\cos\alpha+\cot\phi\sin\alpha$

$\Rightarrow \rho=a-\dfrac{(1-t)\overline{FQ}^2\sin\alpha}{k\sin\theta(\cos\alpha+\cot\phi\sin\alpha)}$同除$\sin\alpha$

$$\Rightarrow \rho = a - \frac{(1-t)\overline{FQ}^2}{k\sin\theta(\cot\alpha + \cot\phi)} \text{ ......(1.2.6)}$$



作 $\overline{FH} \perp \overline{OQ}$

則 $k\sin\theta = \overline{FH} = \overline{QH}\tan\alpha$

又 $\overline{QH} = a - \overline{OH} = a - k\cos\theta$

故 $\cot\alpha = \dfrac{a-k\cos\theta}{k\sin\theta}$ ......(1.2.7)

將(1.2.1)與(1.2.7)代入(1.2.6)得

$$\rho = a - \frac{(1-t)(a^2+k^2-2ak\cos\theta)}{a-k\cos\theta+k\sin\theta\cot\phi} \text{ ......(1.2.8)}$$

(1.2.8)即為所求之極坐標方程式。

(二) H' 型曲線方程式

仿照 E' 型曲線，發現 H' 型曲線之公式與 E' 型曲線相同，其不同處只在 k>a

(三)曲線之性質

此圖為條件再放寬所得之圖形，故同樣的當 F 點位於圓內時，圖形似橢圓，稱此為 E′ 型曲線；同理，稱 F 點位於圓外之圖形為 H′ 型曲線。

1.相似性與擬離心率

與前面使用同樣的方式，發現此類圖形也有所謂的相似性。同樣我們也將 $\dfrac{k}{a}$ 之值定義為「擬離心率 e 」，則 $\rho = 1 - \dfrac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta+e\sin\theta\cot\phi}$

2.分類：

因其分母過於複雜，故圖形之開放與否必需視其旋轉角度而定，暫且同前相同稱 e<1 之圖形為 E' 型曲線，而將 e>1 之圖形稱之為 H' 型曲線。同樣的當 t=1 時圖形皆為圓。不同點為，e=1 時為一開放曲線，而非圓。

3.範圍：

同樣的，探討圖形之開放與否只需探討分母即可，將分母化簡後可得$1-e\csc\phi\cos(\theta+\omega)$其中$(\cos\omega=\sin\phi)$，當分母等於零時即爲開放圖形，可得

$$e\csc\phi\cos(\theta+\omega)=1$$

$\rightarrow \dfrac{1}{e\csc\phi}=\cos(\theta+\omega)\le 1$，故當$\csc\phi\ge\dfrac{1}{e}$時，圖形可爲開放圖形。

由此可知，當$e>1$時定爲開放圖形，及H'同樣定爲開放圖形，而E'型則不一定須視ϕ而定。

4.對稱性：

由 GSP 中發現圖型並無對稱性，由函數中可檢查得知，當將θ換爲$-\theta$時方程式改變。

5.自我相交性：

同樣爲方便討論，令$y=f(\theta)=\rho(\theta)=1-\dfrac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta+e\sin\theta\cot\phi}$，

函數同樣有週期性，但並無對稱性。

(1)自我相交 t 值範圍

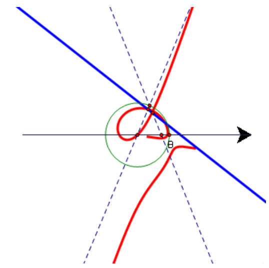
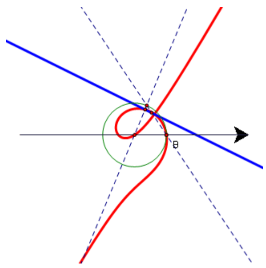
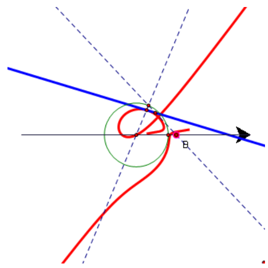
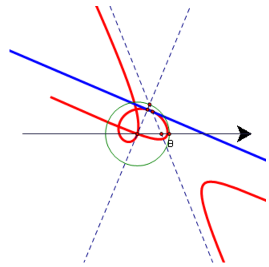
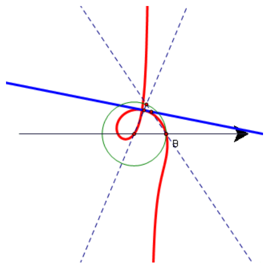
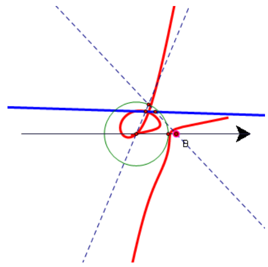
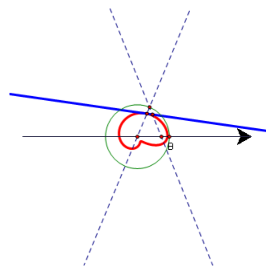
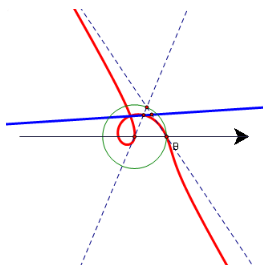
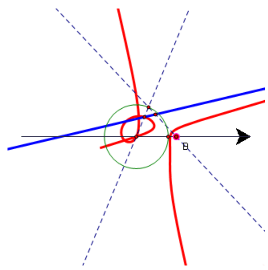
同樣由$\cos\theta$之範圍可算出其自我相交的範圍：

A.若爲E'型曲線則$-\left(\dfrac{e^2+e\sqrt{1+t^2}}{(1-e^2)}\right)\le t\le-\left(\dfrac{e^2-e\sqrt{1+t^2}}{(1-e^2)}\right)$會自我相交

B.若爲H'型曲線則$-\left(\dfrac{e^2-e\sqrt{1+t^2}}{1-e^2}\right)\le t\le-\left(\dfrac{e^2+e\sqrt{1+t^2}}{1-e^2}\right)$且 t$\neq$1時會自我相交

(2)自我相交點數

由於經旋轉一角度後函數變得更爲複雜，需將其旋轉角度考慮進去，故較難算出其相交點數之範圍。因此改用函數圖形去判斷，同樣的運用前面的方法即可知道其相交之點數及範圍。

	$t=0.75$ ， $e=0.75$	$t=0.75$ ， $e=1$	$t=0.75$ ， $e=1.25$
$\phi=30^{\circ}$			
$\phi=45^{\circ}$			
$\phi=60^{\circ}$			

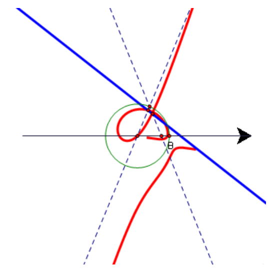
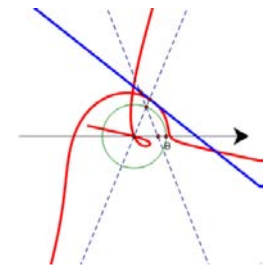
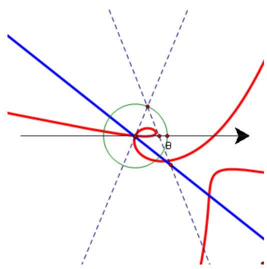
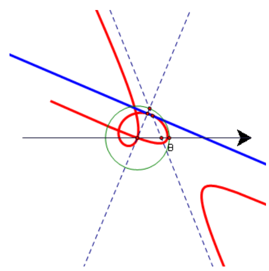
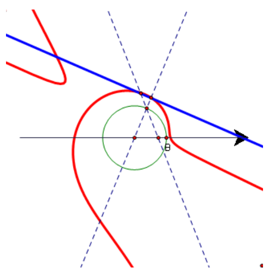
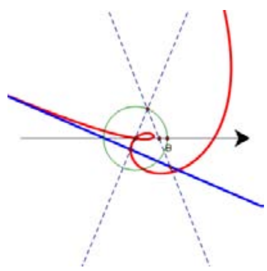
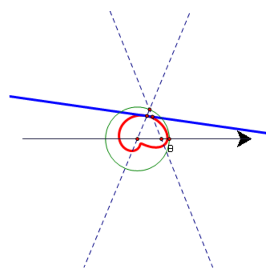
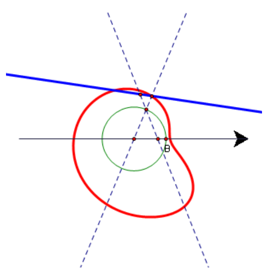
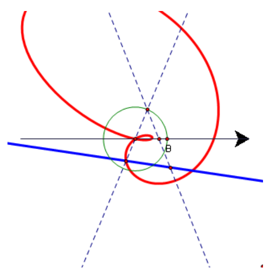
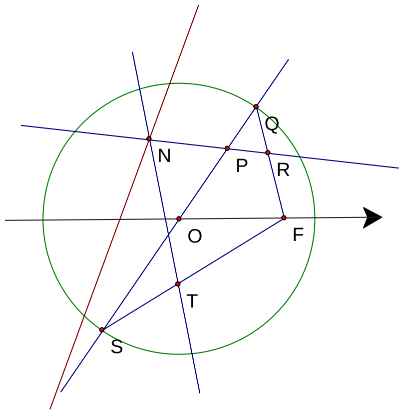
	$t=0.75$ ， $e=0.75$	$t=1.5$ ， $e=0.75$	$t=-1$ ， $e=0.75$
$\phi=30^{\circ}$			
$\phi=45^{\circ}$			
$\phi=60^{\circ}$			

表 1-9：幾個不同的 t、e 、ϕ 所繪製之圖形

6.擬準線問題：

仿照 E 型曲線及 H 型曲線，由圓錐曲線之作圖性質，發現 E' 型曲線及 H' 型曲線同樣有一條類似準線的直線，同樣稱之爲擬準線。



延伸 $\overrightarrow{OQ}$ 交圓 O 於 S，連接 $\overline{\mathrm{FS}}$，取 $\dfrac{\mathbf{FT}}{\mathbf{FS}}=t\left(t\in R\right)$，將 $\overleftrightarrow{\mathrm{FS}}$ 旋轉一 ϕ 角 $\left(0\le\phi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 得 $\overleftrightarrow{\mathrm{TN}}$，交 $\overleftrightarrow{PR}$ 於 N。

與之前相同的作法，由比例線段之性質，導出 N 點坐標，發現 N 之軌跡如同準線般，是一條直線。

其中 N 的 x 坐標爲

$$\frac{t\left(1-k^2\right)\tan\theta\tan\phi}{k\left(1+\tan^2\theta\right)\left(1+\tan^2\phi\right)}-\frac{t\left(1+k^2\right)\tan^2\phi}{k\left(1+\tan^2\phi\right)}+k$$

Y 坐標

$$\frac{t\left(1-k^2\right)\tan^2\phi}{k\left(1+\tan^2\phi\right)\tan\theta}+\frac{t\left(1+k^2\right)\tan\phi}{k\left(1+\tan^2\phi\right)}$$

得擬準線的方程式爲

$$y=\tan\phi x+c\quad(\text{其中}c\text{爲常數})$$

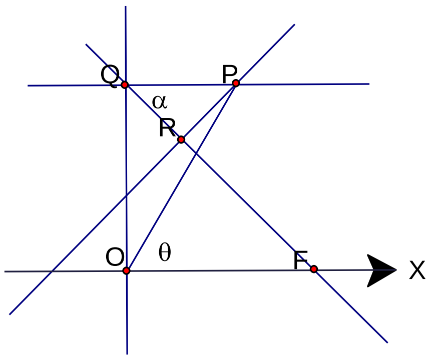
可知擬準線與 x 軸正向的夾角爲 ϕ

三、P 型曲線

【研究目的一之問題三】:

設直線 S 與極軸相交，點 F 爲極軸上一點，F 點坐標爲 $\left(k,0\right)$，點 R 在 $\overleftrightarrow{FQ}$ 上且滿足 $\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$（$t\in R$），設直線 T 過點 Q 與直線 S 垂直，直線 L 過點 R 與 $\overleftrightarrow{FQ}$ 垂直，令直線 T 與直線 L 相交於點 P，則動點 P 之軌跡方程式與圖形爲何？

(一) P 型曲線方程式



設 $\overrightarrow{OF}$ 爲極軸，$\angle FOP=\theta$，$\angle PQF=\alpha$

$\overline{OP}$ 爲極半徑 ρ，$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$

考慮 ΔPQR，

$$\overline{QP}\cos\alpha = |\mathbf{QR}| = |\mathbf{FQ}| - |\mathbf{FR}| = |\mathbf{FQ}| - |t||\mathbf{FQ}| = (1-|t|)|\mathbf{FQ}| = (1-t)\overline{FQ}$$

又 $\overline{PQ} = \rho\cos\theta$

$$\Rightarrow \rho\cos\theta\cos\alpha = (1-t)\overline{FQ} \text{ ....(2.1.1)}$$

考慮 ΔFOQ

$$\frac{\overline{QF}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\overline{OF}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$ ，$\overline{OF} = k$ 代入

$$\Rightarrow \overline{QF}\cos\alpha = k \text{ ....(2.1.2)}$$

(2.1.1)×(2.1.2)得 $\rho\cos\theta k = \overline{QF}^2(1-t)$

又 $\overline{QF}^2 = k^2 + \rho^2\sin^2\theta$ 代入 $\Rightarrow \rho\cos\theta k = \left(k^2 + \rho^2\sin^2\theta\right)(1-t)$

$$\rho = \frac{k\cos\theta \pm k\cos\theta\sqrt{1-4(1-t)^2\tan^2\theta k^2}}{2(1-t)\sin^2\theta} \text{ ....(2.1.3)}$$

(2.1.3)即爲所求之極坐標方程式。

(二)曲線的性質

將極坐標換爲直角坐標後便得到 $(1-t)y^2 - kx + (1-t)k^2 = 0$ 爲一拋物線，便可知不論 t 値爲多少，曲線仍爲拋物線。

1.準線與焦點：

用準線的定義算出 P 型曲線的，準線爲 $x = \dfrac{(4t^2-8t+3)k}{4(1-t)}$

焦點爲 $\left(\dfrac{(5-8t+4t^2)k}{4(1-t)}, 0\right)$

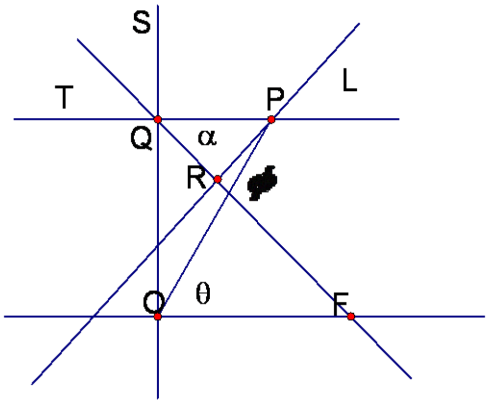
四、P' 型曲線

【研究目的一之問題四】:

設直線 S 與極軸相交，點 F 爲極軸上一點，F 點坐標爲 $(k,0)$，點 R 在 $\overleftrightarrow{FQ}$ 上且滿足 $\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}} = t$ （ $t \in R$ ），設直線 T 過點 Q 與直線 S 垂直，直線 L 過點 R 與 $\overleftrightarrow{FQ}$ 夾一 ϕ 角

$\left(0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$，令直線 T 與直線 L 相交於點 P，則動點 P 之軌跡方程式與圖形爲何？

(一) P' 型曲線方程式



設 $\overrightarrow{OF}$ 爲極軸，$\angle FOP=\theta$，$\angle PQF=\alpha$

$\angle FRP=\phi$，$\overline{OP}$ 爲極半徑 ρ，$\dfrac{\mathbf{FR}}{\mathbf{FQ}}=t$

考慮 ΔPQR，

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\pi-\phi)}=\frac{\overline{QR}}{\sin(\phi-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \overline{PQ}\sin(\phi-\alpha)=\overline{QR}\sin(\pi-\phi) \quad\text{......(2.2.1)}$$

$$|\mathbf{QR}|=|\mathbf{FQ}|-|\mathbf{FR}|=|\mathbf{FQ}|-|t||\mathbf{FQ}|=(1-|t|)|\mathbf{FQ}|=(1-t)\overline{FQ} \quad\text{......(2.2.2)}$$

$$\overline{PQ}=\rho\cos\theta \quad\text{......(2.2.3)}$$

將(2.2.2)與(2.2.3)代入(2.2.1)$\Rightarrow \rho\cos\theta\sin(\phi-\alpha)\csc\phi=(1-t)\overline{FQ}$ ......(2.2.4)

考慮 ΔFOQ

$\dfrac{\overline{FQ}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\overline{OF}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$，$\overline{OF}=k$ 代入

$$\Rightarrow \overline{FQ}\cos\alpha=k \quad\text{......(2.2.5)}$$

(2.2.4)×(2.2.5)得 $\rho k\cos\theta\sin(\phi-\alpha)\csc\phi=(1-t)\cos\overline{FQ}^2$

又 $\overline{FQ}^2=k^2+\rho^2\sin^2\theta$ 代入

$$\Rightarrow \rho k\cos\theta\sin(\phi-\alpha)\csc\phi=(1-t)\cos\alpha\left(k^2+\rho^2\sin^2\theta\right) \quad\text{......(2.2.6)}$$

其中，$\sin(\phi-\alpha)\csc\phi=(\sin\phi\cos\alpha-\cos\phi\sin\alpha)\csc\phi=\cos\alpha-\cot\phi\sin\alpha$ 代入

$$\Rightarrow \rho k\cos\theta(\cos\alpha-\cot\phi\sin\alpha)=(1-t)\cos\alpha\left(k^2+\rho^2\sin^2\theta\right)$$

同除 $\cos\alpha$ $\Rightarrow \rho k\cos\theta(1-\cot\phi\tan\alpha)=(1-t)\left(k^2+\rho^2\sin^2\right)$ ......(2.2.7)

考慮 ΔFOQ

可知 $\tan\alpha = \dfrac{\rho\sin\theta}{k}$ 代入(2.2.7)

$$\Rightarrow 2\rho k\cos\theta - \rho^2\cot\phi\sin 2\theta = 2(1-t)\left(k^2+\rho^2\sin^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow \rho^2\left(2\sin^2\theta - 2t\sin^2\theta + \cot\phi\sin 2\theta\right) - 2\rho k\cos\theta + 2(1-t)k^2 = 0$$

$$\rho = \frac{k\cos\theta \pm k\sqrt{\cos^2 - 2\left[2(1-t)\sin^2\theta + \cot\phi\sin 2\theta\right](1-t)}}{2(1-t)\sin^2\theta + \cot\phi\sin 2\theta} \text{............(2.2.8)}$$

(2.2.8)即為所求之極坐標方程式。

(二)曲線之性質

同樣的，因為由極坐標不好討論，故將極坐標改為直角坐標，得到

$$(1-t)y^2 + \cot\phi xy - kx + (1-t)k^2 = 0$$

由二次曲線的分類定義，算出 $\delta = \cot^2\phi \geq 0$，故當 $\cot\phi = 0$ 時，為拋物線，即為 P 型曲線。而其餘之情形即為雙曲線。

陸、討論

本研究藉由放寬條件，得到類似圓錐曲線之圖形，運用極坐標，算出其軌跡方程，並加以分析其性質，再藉由 $y = f(\theta) = \rho(\theta)$ 與 $y = g(\theta)$ 兩個函數去分析 E 型曲線與 H 型曲線的自我相交情形。再者，可知利用此變換，可將拋物線變為另一拋物線，而旋轉則可使之變為雙曲線。由 GSP 作圖即可知其圖形與原圖形之不同之處。未來，可從此角度出發，找出彼此間的變換函數，即此類圖型與原圓錐曲線的關係，或者，可從密切圓的角度出發，藉由角度變化與離心率之關係求出與原圓錐曲線的差異性。

柒、結論

一、E 型曲線與 H 型曲線

(一) 利用極坐標推導得動點 P 之方程式為 $\rho = a\left[1-\dfrac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta}\right]$。

(二) 分類及界性：

t 值 / 擬離心率	$t \neq 1$	$t = 1$
$e<1$	E 型曲線	圓

	有界	有界
$e=1$	圓	圓
	有界	有界
$e>1$	H 型曲線	圓
	無界	有界

(三) 動點 P 之方程式圖形對稱於 x 軸。

(四) 當兩曲線之擬離心率 e 值相同時，此兩曲線具有相似性。

(五) 由於部份圖形會自我相交，我們進一步推導出 E 型曲線圖形與 H 型曲線圖形自我相交時，t 值的範圍

E 型曲線：

t 的範圍	相交個數
$\frac{-e}{1-e}\le t<0$	1(相交在極點)
$0\le t\le\frac{e^2}{1+e^2}$	3
$\frac{e^2}{1+e^2}<t\le\frac{e}{1+e}$	1(相交在極點)

H 型曲線：

t 的範圍	相交個數
$\frac{-e}{1-e}\le t<1$	3
$1<t\le\frac{e}{1+e}$	1(相交在極點)

(六) 仿照橢圓求其準線，發現 E 型曲線無橢圓存在，但根據橢圓準線的作圖方法，發現 E 型曲線亦有一條類似準線之直線。

二、E' 型曲線與 H' 型曲線

(一) 利用極坐標推導得動點 P 之方程式為 $\rho=a\left[1-\frac{(1-t)(1+e^2-2e\cos\theta)}{1-e\cos\theta+e\sin\theta\cot\phi}\right]$。

(二) 分類及界性：當 $\csc\phi\ge\frac{1}{e}$ 時，圖形可為開放圖形，同樣以焦點之位置來區分曲線。

(三) 當兩曲線之擬離心率 e 值相同時，此兩曲線具有相似性。

(四) 由於部份圖形會自我相交，我們進一步推導出 E' 型曲線圖形與 H' 型曲線圖形自我相交時，t 值的範圍

若為 E' 型曲線則 $-\left(\frac{e^2+e\sqrt{1+t^2}}{(1-e^2)}\right)\le t\le-\left(\frac{e^2-e\sqrt{1+t^2}}{(1-e^2)}\right)$ 會自我相交

若為 H' 型曲線則 $-\left(\frac{e^2-e\sqrt{1+t^2}}{1-e^2}\right)\le t\le-\left(\frac{e^2+e\sqrt{1+t^2}}{1-e^2}\right)$ 且 $t\neq1$ 時會自我相交

(五)仿照 E 型曲線及 H 型曲線，發現 E′型曲線及H′型曲線也有擬準線存在，且準線與 X 軸正向的夾角為 ϕ 。

三、 P 型曲線

(一) 利用極坐標推導得動點 P 之方程式為 $\rho=\frac{k\cos\theta\pm k\cos\theta\sqrt{1-4(1-t)^2\tan^2\theta k^2}}{2(1-t)\sin^2\theta}$ ，

直角坐標之動點 P 之方程式為 $(1-t)y^2-kx+(1-t)k^2=0$ 。

(二) 為一拋物線，準線為 $x=\frac{(4t^2-8t+3)k}{4(1-t)}$ ，

焦點為 $\left(\frac{(5-8t+4t^2)k}{4(1-t)},0\right)$ 。

四、 P' 型曲線

(一) 利用極坐標推導得動點 P 之方程式為

$$\rho=\frac{k\cos\theta\pm k\sqrt{\cos^2-2\left[2(1-t)\sin^2\theta+\cot\phi\sin2\theta\right](1-t)}}{2(1-t)\sin^2\theta+\cot\phi\sin2\theta}\ ,$$

直角坐標之動點 P 之方程式為 $(1-t)y^2+\cot\phi xy-kx+(1-t)k^2=0$ 。

(二) $\cot\phi=0$ 不為 0 時為雙曲線。

捌、參考文獻

1. 世部真市郎原著，九章編輯部譯。**解析幾何學辭典**(1996)。1996 年 2 月三版。台北市，九章出版社，頁 705-727。
2. 左銓如。**初等解析幾何研究**(2003)。2003 年 10 月一版。台北市，九章出版社，頁 26-56，256-268。
3. 陳志芳、薛銘傑（民 94）。圓錐曲線的推廣。

【評　語】　040423　圓錐曲線的推廣

1) 優點：口頭報告的臨場表現極佳，展示出樂觀肯定的數學信心。

2) 優點：主題融會幾何、分析及代數概念，是一道優秀的科展研究方案。

3) 建議：文獻探討是科學研究的重要一環，它能夠引發創新的靈感。本研究可以朝向此方向繼續努力。