中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

040422

渡河問題

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 蔡佩伶	黃哲男
高二 王逸璇	

關鍵詞：物件　渡河問題之走法　食性距離

渡河問題

River-crossing Problem

摘要

有一農夫帶著一隻狼、一隻羊及一個高麗菜渡河，而農夫划著小舟，一次只能載一物件。當農夫不在場時，狼會吃掉羊，羊會吃掉菜。只有農夫在場時，才不會發生上述情形。討論其最小移動次數及方法總數。

將菜、羊、狼編號爲 1、2、3，規定 2 能吃掉 1，3 能吃掉 2，食性距離爲一。其移動次數爲 7，方法總數爲 2。再將物件總數增加至 n，利用合法狀態、連線數得到移動次數爲 7，方法總數爲 $\sum_{q=1}^{k} C_q^k \times \left\{ \sum_{i=m-q}^{k} \left[C_i^m \times \sum_{j=i}^{k} C_j^k \right] \right\}$。另外討論平均移動次數，以了解物件編號爲奇數與偶數不同的移動情形。

當了解距離爲一時的移動情況後，延伸至距離大於等於二時，最後分成三個種類來討論。分別爲：

（一）物件總數 $n \le d+1$：

走法總數：$n^2 - n$ 種走法

次數：3 次

（二）物件總數 $n = (\beta\ (d+1)+1)$：

走法總數：$\begin{pmatrix} \beta d + \sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i + \sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d} (1+2+\cdots+j) \\ +\cdots+ \sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d} (1+2+\cdots+j) \end{pmatrix}^2 - Y$ 種走法

次數：5 次

（三）物件總數 $n = (\beta\ (d+1)+R)$，其中($R \in \{2 \sim d\}$：

走法總數：$\begin{pmatrix} [(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1]+ \\ [(1+2+\cdots+(X-1))+\cdots+(1+2)+1] \\ +\cdots+(2+1)+1 \end{pmatrix}^2 - Z$ 種走法

次數：3 次

渡河問題

River-crossing Problem

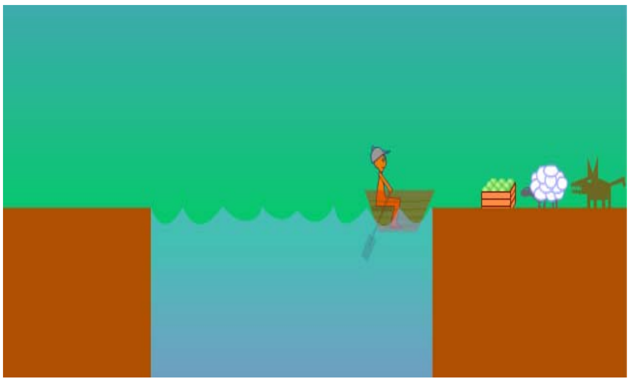
壹、研究動機

渡河問題是個流傳已久的遊戲。有趣的是，在 1982 年的*科學月刊*中，對於各種不同類型的渡河問題有列出數種解決之方法，即試探法、圖解法和矩陣法；又矩陣法類似於圖解法。內容偏向對各種不同題型的簡易解法，於是我們將其中最感興趣的一個狼、羊、菜之渡河問題提出，原始題目如下：

有一農夫帶著一隻狼、一隻羊及一個高麗菜渡河，而小舟一次只能載一人和狼（或羊或高麗菜）。假如農夫先帶高麗菜上船，則狼會吃掉羊；如果農夫先帶狼上船，則羊會吃掉高麗菜，只有農夫在場時，才不會發生上述情形，要如何安全渡河？

對於此一渡河問題，前人只將題目以各種不同表示法解出，並未有更深一步的討論。於是我們很好奇，若岸上不只有狼、羊、菜，而是有 n 個具有相同食性關係的動植物時，是否仍可以安全渡河？若可以安全渡河，又會出現什麼規律？

此外，我們也很好奇，若是人數或是食性條件的改變，會有什麼樣的結果，而在這些改變下又會出現什麼規律？能否以很快的速度解決？



貳、研究目的

將問題中之岸上動植物的種類數量由 3 個增加至 n 個物件，且之間依然存在食性關係，從中發現移動的規律，並且推導出一個通則。接著探討在不影響移動次數的前題下，可能的移動方法數、平均移動次數、以及移動物件個數等等的問題。最後探討食性距離與物件數之間的的關係，統整得一適用上述問題之通則。

參、研究問題

一、定義數個名詞如下：

1. 物件：岸上所有的東西皆稱之，以編號 $1,2,3,\ldots,n$ 表示。
2. 食物鏈：三個物件中，編號 3 能吃 2，編號 2 能吃 1，但 1 不可吃 3 時，所成立的關係。
3. 食性關係：當一個物件會把另一個物件消除時稱之。
4. m ：奇數物件之個數，k ：偶數物件之個數。故物件總數 $n=m+k$ 。
5. 食性距離(d)：當物件編號 j 可將 i 消除時，定義 j 與 i 之食性距離稱為 $d=j-i$ 。
6. 合法狀態：當兩岸上的物件之間，無食性關係的狀態稱之。
7. 最大上限數：第一個合法狀態成立時，船所需承載物件的最小值稱之。
8. 移動次數：以船移動的次數稱之。
9. P ：此符號代表農夫，不列入物件總數之計算。
10. β ：第二部分食性距離大於等於 2 時，所假設的變數，其中 $\beta\in N$ 。
11. X ：第二部份食性距離大於等於 2 時，表格之橫列數。
12. Y,Z ：第二部份食性距離大於等於 2 時，以演算法求出之值。
13. Q ：第二部份食性距離大於等於 2 時，簡示圖之對角線總數。

二、根據上述之研究目的及名詞，我們的研究問題如下：

1. 當食性距離為 1 時物件的移動次數及走法總數。
2. 當食性距離為 d (d 不小於 2)時物件的移動次數及走法總數。

肆、研究過程

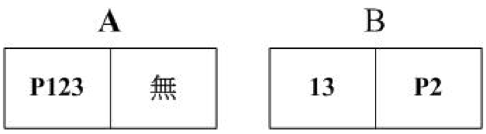
由原始問題，從最基本的三個物件：狼、羊、高麗菜開始，再推導至 n 個物件。

表格中以一行代表船移動至對岸一次時，船上所乘載之物件。經過計算後，得到以下結果，表中以最少移動次數及最少移動之物件個數呈現：

表 1：規律

物件總數		2		3	4		5	6		7	8	
移動次數	1	P1	P2	P2	P13	P24	P24	P135	P246	P246	P1357	P2468
	2	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
	3	P2	P1	P1	P24	P13	P13	P246	P135	P157	P2468	P1357
	4			P2			P24			P246		
	5			P3			P5			P3		
	6			P			P			P		
	7			P2			P24			P246		

由表中之規律，依物件總數分為偶數組與奇數組兩部份。為了方便表示，將過程改為流程圖表示之：



註：圖表示由集合 A 可變成集合 B，且兩岸之物件互相沒有食性關係，為合法狀態。

一、食性距離為一

（一）物件總數偶數組

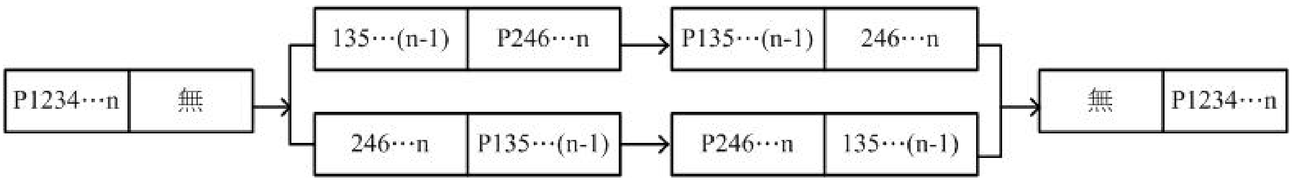


圖 1：偶數組移動流程圖

當物件總數為偶數，且不小於 2 時，將物件分為物件編號為連續奇數與連續偶數兩組，在最大上限數以內皆能 3 次完成，且有兩種移動方法。

以下表示出物件總數為 3、5、7 時的移動方式流程圖。關於圖表的規律及探討將在下一個小節討論。

（二）奇數組

物件總數爲奇數的情況較偶數複雜許多。以下分別爲物件總數爲 3, 5, 7 之移動流程圖。

1. 當物件總數 n=3 時

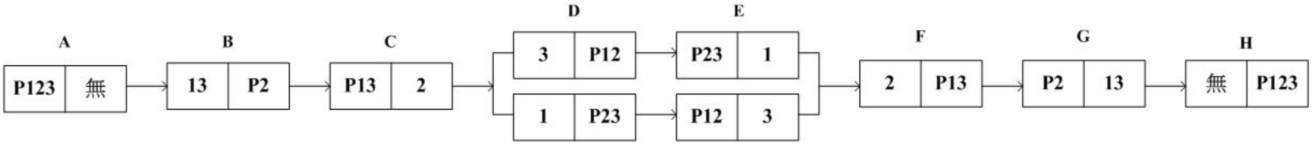


圖 2： $n=3$移動流程圖

2. 當物件總數 n=5 時

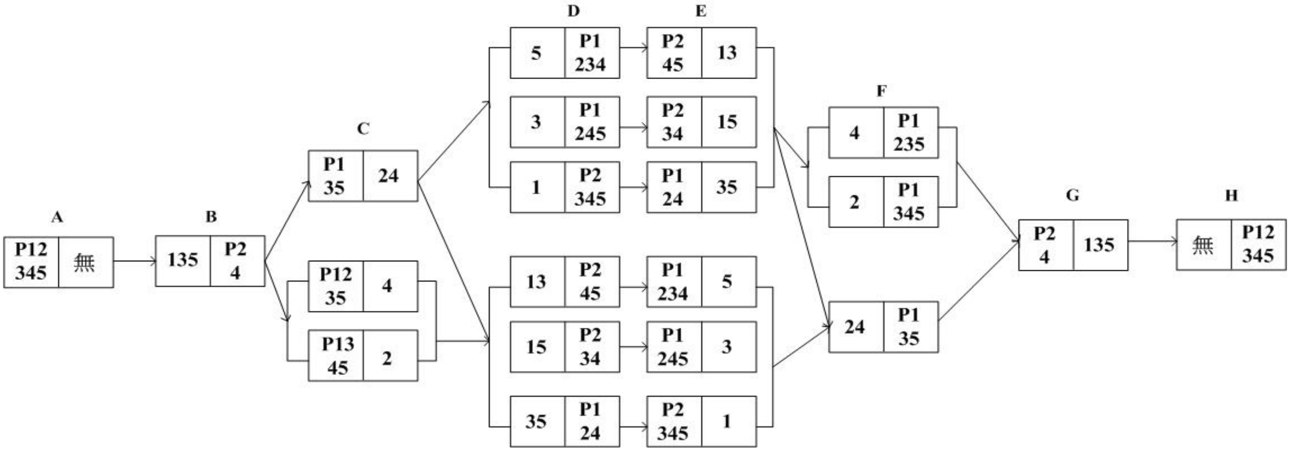


圖 3： $n=5$移動流程圖

3. 當物件總數 n=7 時

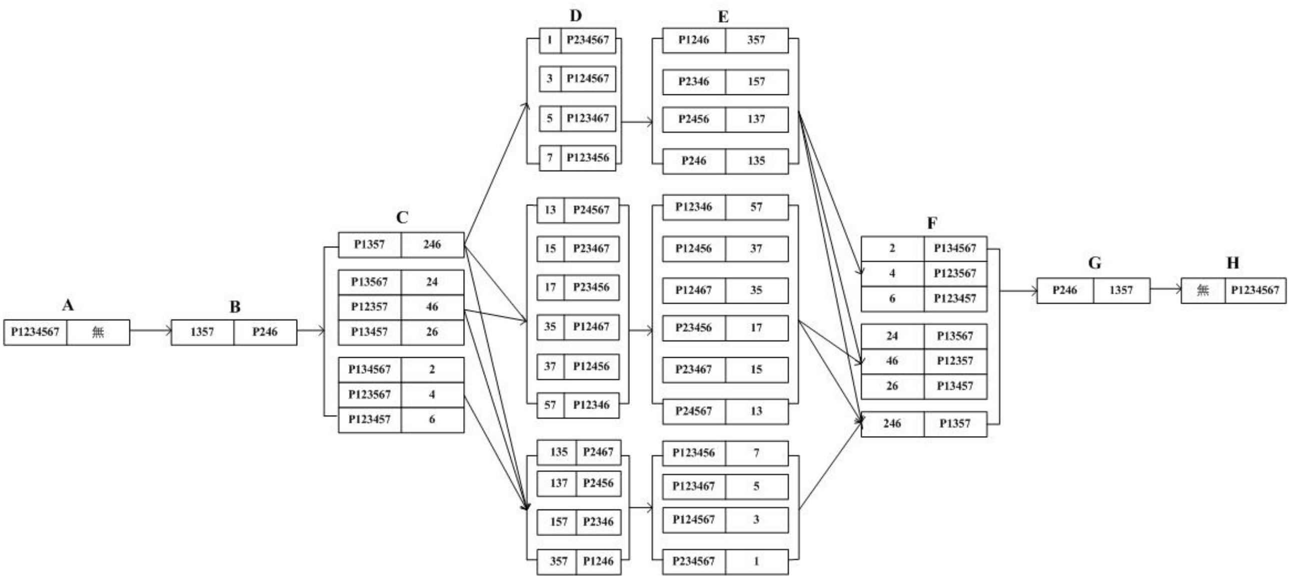


圖 4： $n=7$ 移動流程圖

根據圖表的歸納結果，在此將問題分成七個部份，包括：(1)合法狀態、(2)連線數、(3)走法總數、(4)移動次數、(5)移動物件總次數、(6)某物件所移動之最多和最少次的方法、(7)某物件在所有方法中被移動的平均次數。

（三）討論

1. 合法狀態

$\boxed{2^{m+1}+2^{k+1}-2}$個合法狀態

推導過程：

(1) A→B 時，將偶數物件移到右方。

(2) B→C 時，P 到左岸，並可載一些偶數物件過去。故有$C_1^k+C_2^k+\cdots+C_k^k$個合法狀態。

(3) C→D 時，P 載物件過去，因而左岸可能剩下 $1\sim(m-1)$ 個奇數物件，故有

$C_1^m+C_2^m+\cdots+C_{m-1}^m$個合法狀態。

(4) D→E 時，將右岸的偶數物件移到左方，故有$C_1^m+C_2^m+\cdots+C_{m-1}^m$個合法狀態。

(5) E→F 時，將所有奇數號碼的物件和一些偶數號碼物件移到右岸。故有$C_1^k+C_2^k+\cdots+C_k^k$個合法狀態。

(6) F→G 時，P 和偶數物件移至左方。

(7) G→H 時，所有物件皆移至右方。

故得合法狀態總數爲：

$$\boxed{2^{m+1}+2^{k+1}-2}$$

2. 連線數

$$\boxed{2^{k+1}-2+2^m+2\sum_{i=1}^{k}\left[C_i^m\times\sum_{j=i}^{k}C_j^k\right]}\text{條連線}$$

推導過程：

(1) A→B 中，只有一種情形，故有一條連線。

(2) B→C 中，有 $C_1^k+C_2^k+\cdots+C_k^k$ 個合法狀態，故有 $C_1^k+C_2^k+\cdots+C_k^k$ 連線。

(3) C→D 中，此時 P 需將奇數物件移動過去，整理後如表 2：

表 2：集合 C→D 連接的線段數

C 集合右方剩下之偶數號碼之物件	1	2	…	k
連接的線段數	C_k^m	$C_1^m+C_2^m$		$C_1^m+C_2^m+\cdots+C_k^m$

$$\text{因此共有}\left\{\begin{array}{l}(C_1^m)(C_1^k+C_2^k+C_3^k+\cdots+C_k^k)+\\(C_2^m)(C_2^k+C_3^k+\cdots+C_k^k)+\\(C_3^m)(C_3^k+\cdots+)+\cdots+(C_k^m)(C_k^k)\end{array}\right\}\text{條連線。}$$

(4) D→E 中，為 $C_1^m+C_2^m+\cdots+C_{m-1}^m$ 個合法狀態，故有 $C_1^m+C_2^m+\cdots+C_{m-1}^m$ 條連線。

(5) E→F 中，把左邊剩下的編號奇數之物件移動至右方，且在狀態合法的情況下，尚可載某些偶數號碼物件至右方。整理後如表 3：

表 3：集合 E→F 連接的線段數

F 集合左方偶數號碼之物件	1	2	…	k
連接的線段數	C_k^m	$C_1^m+C_2^m$		$C_1^m+C_2^m+\cdots+C_k^m$

$$\text{因此共有}\left\{\begin{array}{l}(C_1^m)(C_1^k+C_2^k+C_3^k+\cdots+C_k^k)+\\(C_2^m)(C_2^k+C_3^k+\cdots+C_k^k)+\\(C_3^m)(C_3^k+\cdots+)+\cdots+(C_k^m)(C_k^k)\end{array}\right\}\text{條連線。}$$

(6) F→G 中，F 集合中有 $C_1^k+C_2^k+\cdots+C_k^k$ 個合法狀態，故有 $C_1^k+C_2^k+\cdots+C_k^k$ 條線段。

(7) G→H 中，全部的物件移至右方，故有一條連線。

故得連線總數為：$\boxed{2^{k+1}-2+2^m+2\sum_{i=1}^{k}\left[C_i^m\times\sum_{j=i}^{k}C_j^k\right]}$

3. 走法總數

$$\boxed{\sum_{q=1}^{k} C_q^k \times \left\{ \sum_{i=m-q}^{k} \left[C_i^m \times \sum_{j=i}^{k} C_j^k \right] \right\}}\text{種走法}$$

(1) 整體之方法總數

由流程圖可知，方法總數爲：

$$\sum_{q=1}^{k} C_q^k \times \left\{ \sum_{i=m-q}^{k} \left[C_i^m \times \sum_{j=i}^{k} C_j^k \right] \right\}$$

(2) 物件各別移動方法總數：

A. 偶數號碼之物件：

固定編號 R 之物件($R \in$ 偶數)，當 R 移動次數最多時，計算後發現，最多需移動 5 次才會由左邊移到右邊，最少爲 3 次。

a. 五次的走法總數

由圖可知，在合法狀態仍成立的情況下，固定編號爲 R 之物件，可得到如下之結果：(令固定物件 R，且 R 在 F 中位於右岸)

表 4： 移動情形

除 R 外，同時在右岸的偶數物件之個數	1	2	$\cdots$	$k-1$
情況數	C_1^{k-1}	C_2^{k-1}	$\cdots$	C_{k-1}^{k-1}

又因爲在 E 中左岸的奇數物件個數影響 F 中在左岸之可能的偶數物件個數(因爲可承載上限爲 k)，整理後如下：

表 5：E、F 集合中左岸之物件關係

E 中左岸之奇數物件個數	F 中左岸可能之偶數物件個數
k	$1 \sim (k-1)$
$(k-1)$	$1 \sim (k-2)$
$\cdots$	$\cdots$
1	0

由表 5 可得方法數：

$$\sum_{q=1}^{k-1} C_q^{k-1} \times \left[\sum_{i=m-q}^{m-1} C_i^m \times \sum_{j=k-q}^{k\text{-}1} C_j^{k\text{-}1} \right]$$

b. 三次的走法總數

用全部的方法數減去上面的方法數即可得，公式如下：

$$\sum_{q=0}^{k-1} C_q^{k-1} \times \left[\sum_{i=k-q}^{k} (C_i^m \times \sum_{j=(k-1)-q}^{k\text{-}1} C_j^{k\text{-}1}) \right]$$

B. 奇數號碼之物件：由圖表之規律可知，無論怎麼走都只需移動一次。所以走法總數即爲整體之走法總數。(如上敘述(1))

(3) 由(2)中，奇數號碼之物件移動方法總數，等於整體之移動方法總數；而偶數號碼之物件，三次與五次移動方法總數和，亦等於整體之移動方法總數。藉此可以檢驗(1)之整體方法總數。

4. 移動次數

(1) 皆爲七次。

(2) 步驟說明

A. A→B 時，偶數號碼先移至右邊。(除此之外的方法皆會產生食性關係)

B. B→C 時，P 移至左邊。

C. C→D 時，奇數號碼移至右邊，並可多移動 1~(m-1)個奇數編號之物件。

D. D→E 時，偶數號碼移到左邊。

E. E→F 時，P 和剩下的奇數號碼都移至右邊。

F. F→G 時，P 移至左邊。

G. G→H 時，偶數號碼全部移至右邊。

5. 移動物件總次數

推導過程：

(1) A→B 時，移動偶數號碼的物件，共 k 個物件。

(2) B→C 時，P 回來左邊，並可多移 $0\sim(k-1)$ 個偶數物件至左岸。

(3) C→D 時，如下表：

表 6：集合 C 至 D 的偶數物件數

C 集合右岸的偶數物件數	1	2	…	k
可移至 D 集合的物件數	k	$k,(k-1)$	…	k~1

(4) D→E 時，將左邊的偶數物件移動到右邊，故移動 k 個物件。

(5) E→F 時，須把剩下的奇數號碼的物件全部移至右邊，但在狀態合法的條件下，也可以移動偶數號碼的物件。整理後如下：

表 7：集合 E 至 F 的偶數物件數

E 集合中右岸的奇數物件數	1	2	…	k
可移至 F 集合的物件數	k	$k,(k-1)$	…	k~1

(6) F→G 時，將上一步驟(E→F)載至右邊的偶數全數載回來。整理後如下：

表 8：集合 F 至 G 的奇數物件數

F 集合中左岸的偶數物件數	1	2	…	k
移至 G 集合中的物件數	$k-1$	$k-2$	…	0

(7) G→H 時，將偶數物件全部載過去，k 個物件。

把這些步驟的移動物件相加後可得：

A. 最多：$(k)+(k-1)+(k)+(k)+(k)+(0)+(k)=6k-1$

B. 最少：$(k)+(0)+(1)+(k)+(k)+(0)+(k)=4k+1$

6. 某物件其所移動之最多與最少次數之方法

(1) 編號爲 R 且 R 爲偶數之物件

A. 使 R 移動次數最少的方法

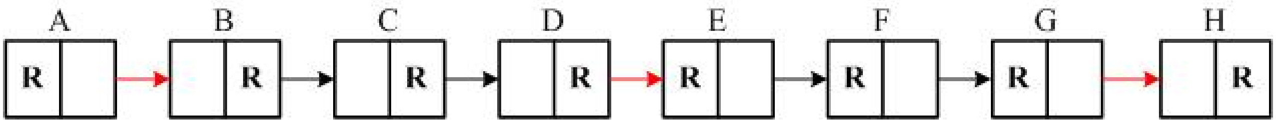


圖 5：使 R 移動次數最少的方法示意圖

B. 使 R 移動次數最多的方法

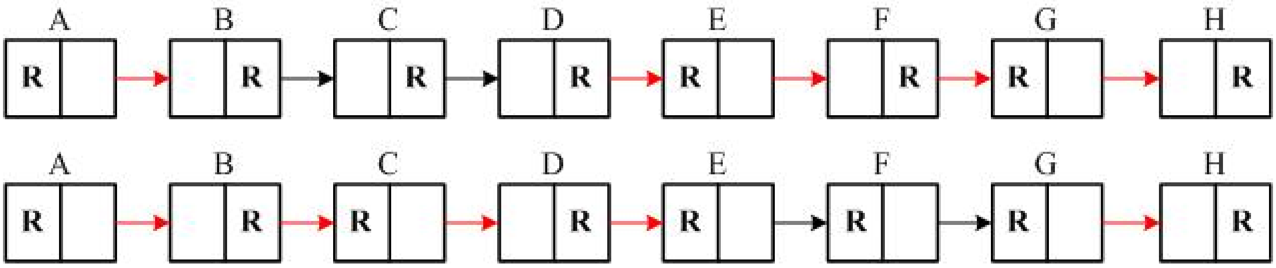


圖 6：使 R 移動次數最多的方法示意圖

(2) 編號爲 R 且 R 爲奇數之物件

A. 第一種情形

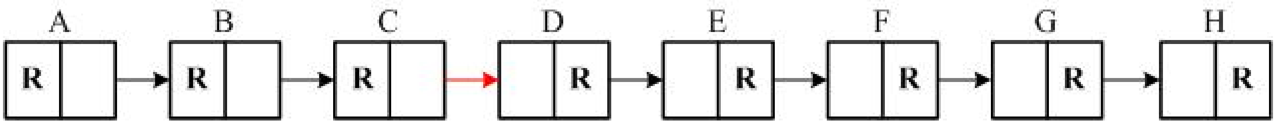


圖 7：第一種情形方法示意圖

B. 第二種情形

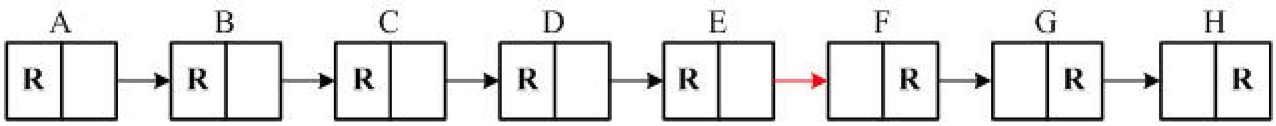


圖 8：第二種情形方法示意圖

7. 某物件在所有方法中被移動的平均次數

因爲平均數爲物件之走法總數除以總方法數，因此分奇數物件和偶數物件來討論：

(1) 物件編號爲偶數者

將物件中走三次者的走法數乘以三，再加上走五次者的走法數乘以五後，其所得即爲所求。

所以平均移動物件爲：

$$\boxed{\dfrac{5\sum_{q=1}^{k-1} C_q^{k-1}\times\left[\sum_{i=m-q}^{m-1} C_i^m \times \sum_{j=k-q}^{k\text{-}1} C_j^{k\text{-}1}\right]+3\sum_{q=0}^{k-1} C_q^{k-1}\times\left[\sum_{i=k-q}^{k}\left(C_i^m\times\sum_{j=(k-1)-q}^{k\text{-}1} C_j^{k\text{-}1}\right)\right]}{\sum_{q=1}^{k} C_q^k\times\left\{\sum_{i=m-q}^{k}\left[C_i^m\times\sum_{j=i}^{k} C_j^k\right]\right\}}}$$

(2) 物件編號爲奇數者

皆只移動 1 次。因此平均數皆是 1。

二、食性距離爲二以上

將食物鏈由原本的食性距離 $d=1$，延伸至 $d(d\geq 2)$ 之討論。

先前當食性距離爲一時，將物件依其編號分爲奇數組和偶數組，可以輔助表示移動之想法。而當物件與食性關係皆增加時，則分組方法較複雜。以下舉例說明：

當 $n=16$ ，$d=3$ 時，和物件編號爲 1 無食性關係的，爲編號大於等於 5 之物件。而和物件編號 5 無食性關係的，爲編號大於等於 9 之物件，以此類推，將 16 個物件依序排列：

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

圖中，每一直排物件之間皆有食性關係，而每一橫列物件之間則無食性關係，亦即可形成合法狀態。

當 $d=r$ 時，皆可以將物件排列成下列圖型：

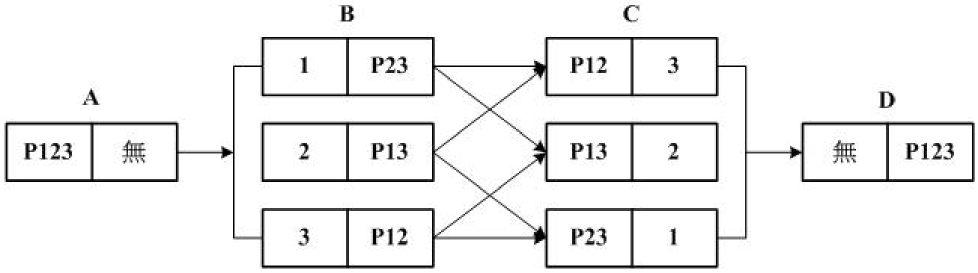
1	(d+1)+1	2(d+1)+1	3(d+1)+1	⋯	β(d+1)+1
2	(d+1)+2	2(d+1)+2	3(d+1)+2	⋯	β(d+1)+2
3	(d+1)+3	2(d+1)+3	3(d+1)+3	⋯	β(d+1)+3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮
d+1	2(d+1)	3(d+1)	4(d+1)	⋯	n

最後一直排不一定恰有 $d+1$ 個物件，視其 n 值而定。故依據最後一直排物件之個數關係，由物件總數與移動規律性，分爲三類，即(1)只有第一直排 $(n\leq d+1)$ 、(2)最後一直排只有一個物件 $(n=(\beta\ (d+1)+1))$ 、(3)最後一直排有大於一個物件 $(n=(\beta\ (d+1)+R))$ 其中**(** $R\in 1\sim d$ **)**。

（一）物件總數$n \le d+1$，即所有物件間皆有食性關係：

範例圖示如下：

(當$d=2$、$n=3$時)



(當$d=3$、$n=4$時)

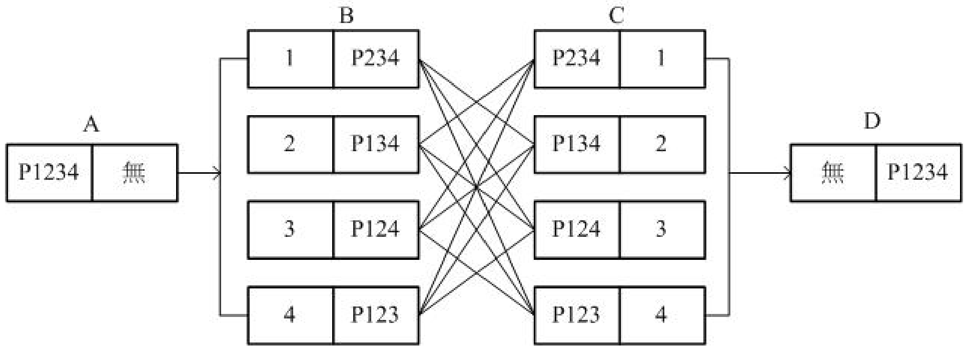


圖 9：$n \le d+1$時之範例圖示

1. 合法狀態：$2n+2$個合法狀態。

(1) A→B 時，合法狀態的左邊留下一個物件，故有n個合法狀態。

(2) B→C 時，合法狀態的右邊留下一個物件，故有n個合法狀態。

(3) C→D 時，全部移過去，故有 1 個合法狀態。

(4) 共有$2n+2$個合法狀態。

2. 連線數：n^2+n條連線。

(1) A→B 時，由合法狀態的個數可知，有n條線。

(2) B→C 時，每個物件皆有$n-1$個可能，故有n^2-n條線。

(3) C→D 時，由 C 中的合法狀態可知，有n條連線。

(4) 共有n^2+n條連線。

3. 走法總數：n^2-n種走法。

由 B→C 的連線數可知，有n^2-n種走法。

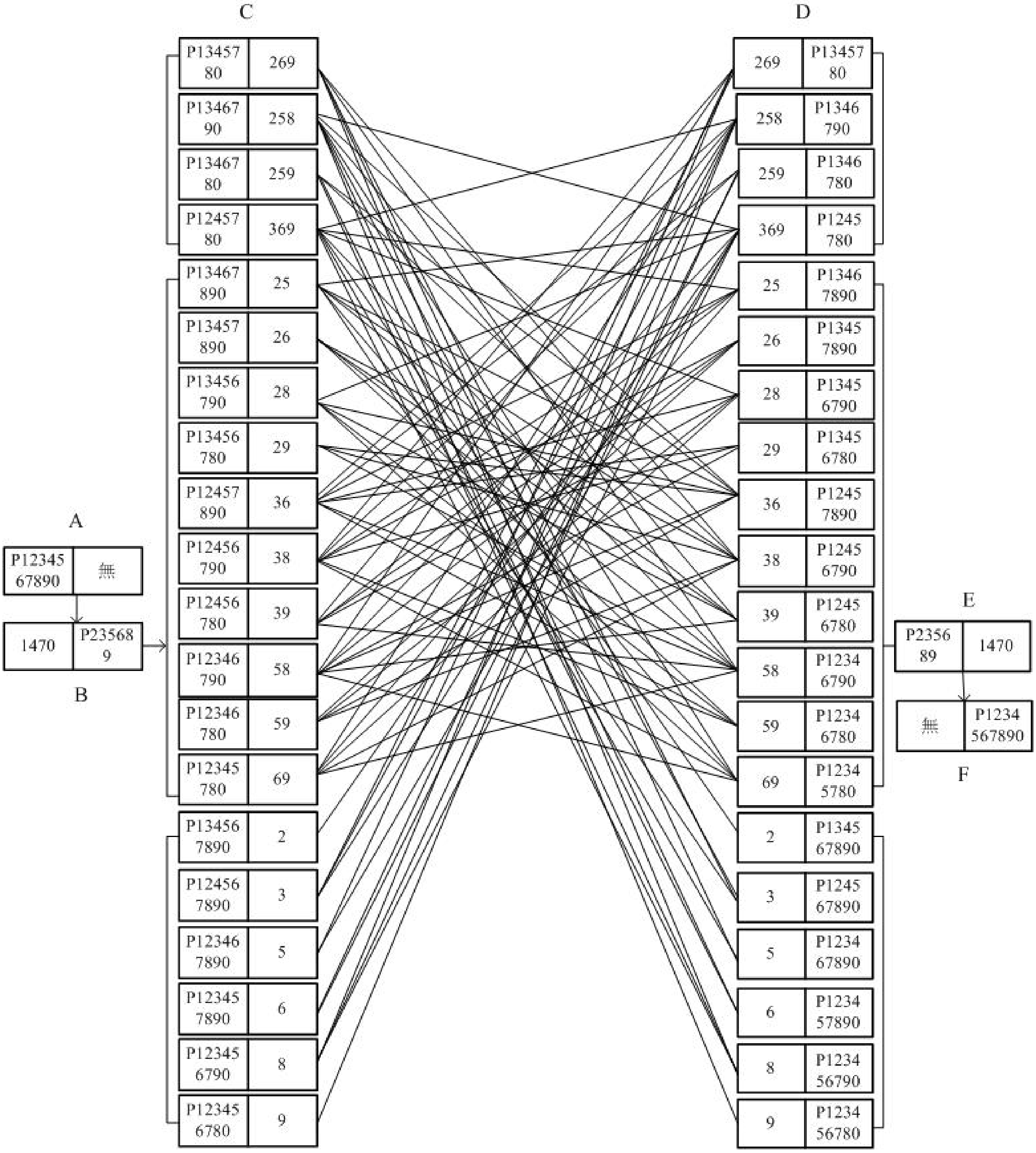
4. 次數：3 次。

由 A→B、B→C、C→D 可知，共需 3 次。

（二）物件總數$n=(\beta\ (d+1)+1)$，即第一橫列有$(\beta+1)$個物件：

範例圖示如下：

(當$d=2$、$n=10$時)



(當 $d=2$ 、 $n=7$ 時)

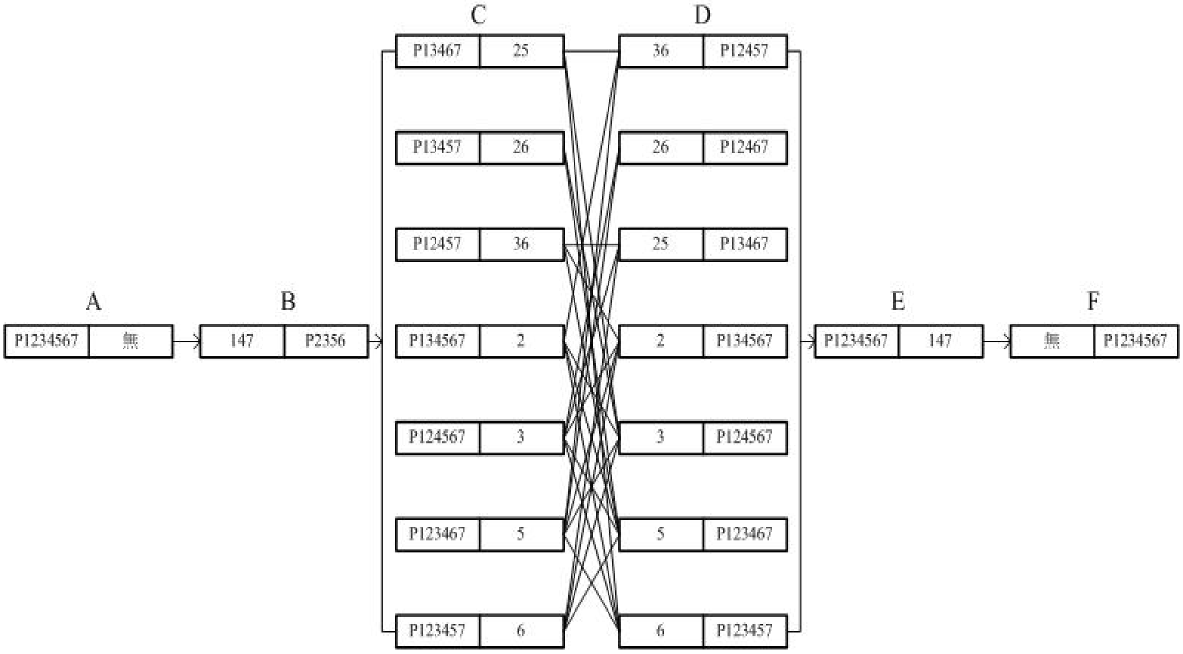


圖 10： $n=(\beta(d+1)+1)$ 時之範例圖示

1. 合法狀態： $\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)+\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)+4$ 個合法狀態。

(1) A→B 時，合法狀態的左方只能為第一橫列的物件，即為物件編號為 $[1,(d+1)+1,2(d+1)+1,\cdots,\beta(d+1)+1]$，故有 1 個合法狀態。

(2) B→C 時，B 集合中只剩下 βd 個物件，號碼分別為 $2\sim(d+1)$ 、 $2+(d+1)\sim 2(d+1)$ 、 $(\beta-1)(d+1)+2\sim\beta(d+1)$ ，因此 C 集合中的右邊可以剩下 $1\sim\beta$ 個物件，合法狀態整理後如下：

表 9： $n=(\beta(d+1)+1)$ 之 C 集合中合法狀態數

C 集合中右岸之物件數	物件總數 $n=(\beta(d+1)+1)$
1	βd
2	$1+2+\cdots+(\beta-1)d$
3	$1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+(\beta-2)d)$
…	…
β	$1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+(\beta-(\beta-1)d)$

(3) C→D 時，因為 D 集合中合法狀態左岸的物件可為上表之情形，所以總個數為：

$\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)+\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)$ 。

(4) D→E 時，E 集合中 $(\beta+1)$ 個互相沒有食性關係的物件在右岸，故有 1 個合法狀態。

(5) E→F 時，所有物件移到右岸，故有 1 個合法狀態。

(6) 共有 $\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)+\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)+4$ 個合法狀態。

2. 連線數： $\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)+\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)$ 條連線。

(1) A→B 時，連到一個合法狀態，有 1 條連線。

(2) B→C 時，由合法狀態可知，共有 $\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)+\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)$ 條連線。

(3) C→D 時，因爲 C 集合右岸的物件不會同時出現在 D 集合的左岸上，因此須把所有的可能減去不符合者。

演算法：將全部的連線減去物件重複出現在 C 和 D 集合之合法狀態，結果如下：

$$\begin{pmatrix}\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)\\ +\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)\end{pmatrix}^2-Y$$

(4) 當 D→E 時，由合法狀態可知，共有

$\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)+\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)$ 條連線。

(5) 當 E→F 時，有一條連線。

(6) 共有 $\begin{bmatrix}\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)\\ +\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)\end{bmatrix}\times 2+\begin{pmatrix}\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)\\ +\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)\end{pmatrix}^2-Y+2$ 條連線。

3. 走法總數： $\begin{pmatrix}\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)\\ +\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)\end{pmatrix}^2-Y$ 種走法。

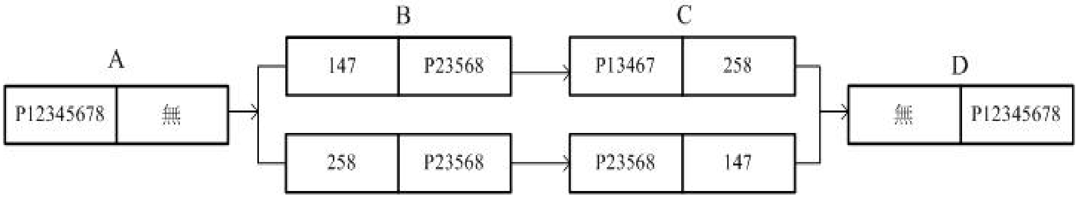
即爲 C→D 中的連線數：$\begin{pmatrix}\beta d+\sum_{i=1}^{(\beta\text{-}1)d} i+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}2)d}(1+2+\cdots+j)\\ +\cdots+\sum_{j=1}^{(\beta\text{-}(\beta-1))d}(1+2+\cdots+j)\end{pmatrix}^2-Y$ 。

4. 次數： 5 次。

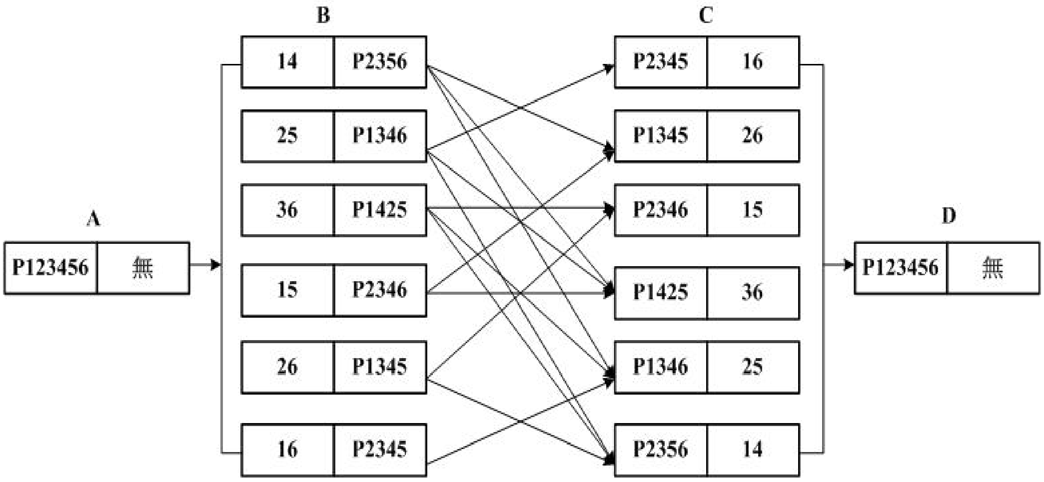
由 A→B，B→C，C→D，D→E，E→F 的過程可知，共要走 5 次。

（三）物件總數$n=(\beta\ (d+1)+R)$，其中**(**$R\in\{2\sim d\}$**)**：

(當$d=2$ 、 $n=8$時)



(當$d=3$ 、 $n=6$時)



(當$d=2$ 、 $n=9$時)

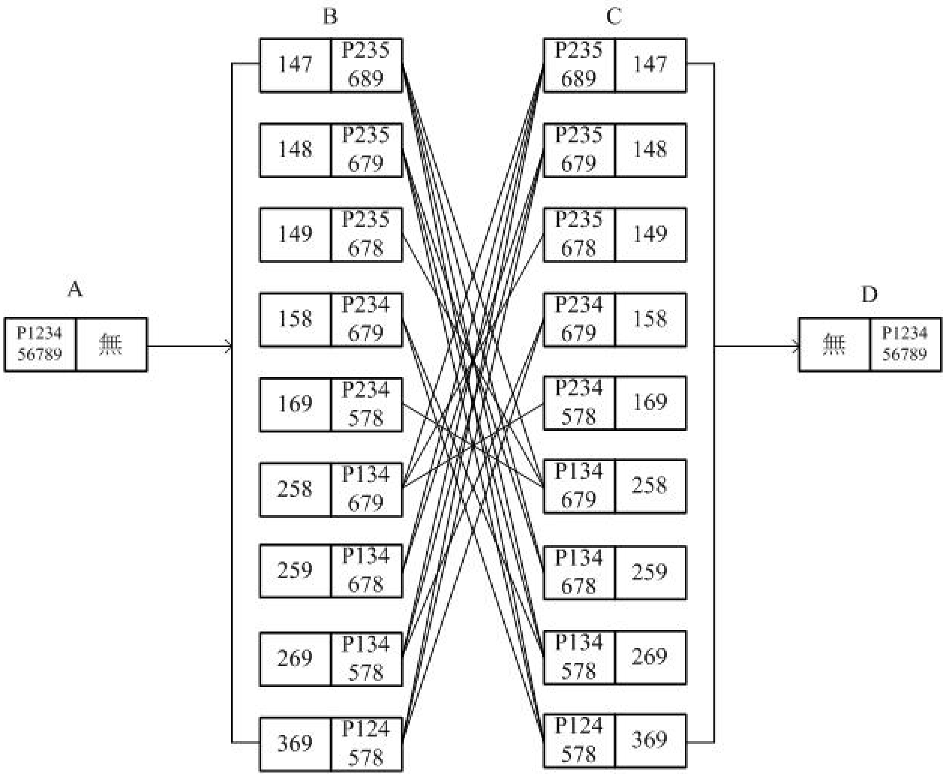
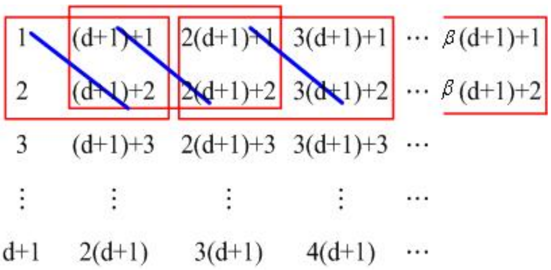
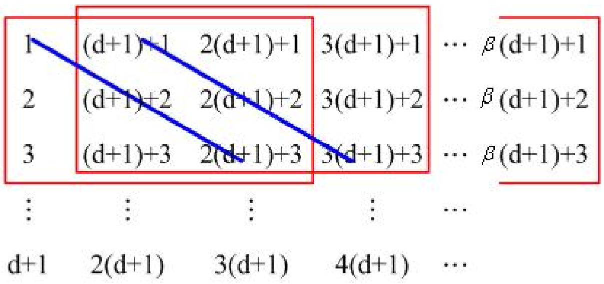


圖 11：$n=(\beta(d+1)+R)$時之範例圖示

(當物件總數 $n=(\beta(d+1)+2)$)



(當物件總數 $n=(\beta(d+1)+3)$)



(當物件總數 $n=(\beta+1)(d+1)$)

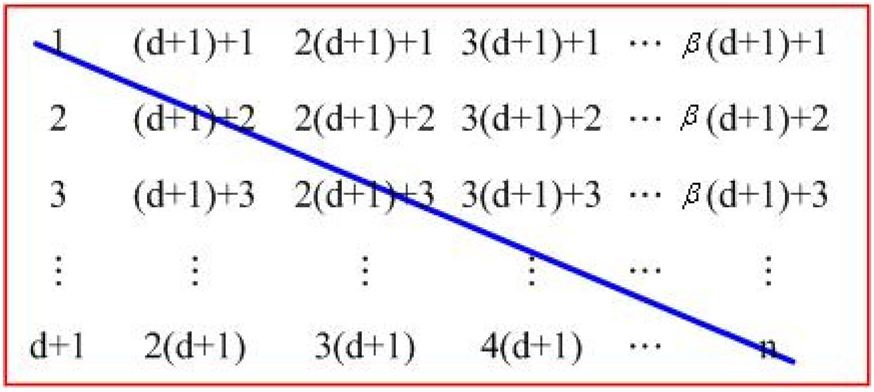


圖 12：物件排列簡示圖

1. 合法狀態：

(1) A→B 時，令 X 爲列數，則由圖 12 可知：

A. 當物件數爲 $X\times X$ ：有 $(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1-Q$ 個合法狀態。

B. 當物件數爲 $X\times X-\delta(1\le\delta\le X-2)$ ：有 $(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1+1+\cdots+1-Q$ 。

(2) B→C 時，爲了要過程成立，因此 B 的集合需要能對應到 C，因此法狀態數和 B 集合相同。

(3) C→D 時，所有物件接移到右岸，有一個合法狀態。

(4) 共有 $\left[(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1-Q\right]\times 2+2$ 或

$\left[(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1+1\cdots+1-Q\right]\times 2+2$ 個合法狀態。

2. 連線數：

(1) A→B 時，令 X 爲列數，則由圖 12 可知：

A. 當物件數爲 $X\times X$ ：有 $(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1-Q$ 個合法狀態。

B. 當物件數爲 $X\times X-\delta(1\le\delta\le X-2)$ ：有 $(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1+1+\cdots+1-Q$ 。

(2) B→C 時，當經過第 X 列所得到的方法數爲 $\left(\begin{array}{l}\left[(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1\right]+\\ \left[(1+2+\cdots+(X-1))+\cdots+(1+2)+1\right]\\ +\cdots+(2+1)+1\end{array}\right)^2$ 。

演算法：上表所得之方法數爲全部的方法數，但因爲 B 集合右岸的物件不可能同時出現

在 C 集合左岸因此需要減去一些不符合的情形，以 Z 來表示。因此有

$$\begin{pmatrix} [(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1]+ \\ [(1+2+\cdots+(X-1))+\cdots+(1+2)+1] \\ +\cdots+(2+1)+1 \end{pmatrix}^2 - Z \text{ 條連線。}$$

(3) C→D 時，C 集合中的每個合法狀態接連到 D 集合，因爲 C 集合的合法狀態數和 B 相同，所以連線數和 A→B 相同。

(4) 由上述可知，共有

$$[(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1-Q]\times 2+ \begin{pmatrix} [(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1]+ \\ [(1+2+\cdots+(X-1))+\cdots+(1+2)+1] \\ +\cdots+(2+1)+1-Z \end{pmatrix}^2 - Z$$

或是

$$[(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1+1+\cdots+1-Q]\times 2+ \begin{pmatrix} [(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1]+ \\ [(1+2+\cdots+(X-1))+\cdots+(1+2)+1] \\ +\cdots+(2+1)+1-Z \end{pmatrix}^2 - Z$$

條連線。

3. 走法：

由 B→C 的連線數可知，共有

$$\begin{pmatrix} [(1+2+\cdots+X)+\cdots+(1+2)+1]+ \\ [(1+2+\cdots+(X-1))+\cdots+(1+2)+1] \\ +\cdots+(2+1)+1 \end{pmatrix}^2 - Z \text{ 種走法。}$$

4. **次數**：3 次。

過程爲 A→B、B→C、C→D，所以共走 3 次。

伍、結論

(一) 食性距離爲一時，無論物件總數爲多寡，移動次數七次是有唯一性的。
(二) 食性距離爲一時，不管物件總數爲合，移動的過程具有對稱性。
(三) 食性距離爲一時，物件總數爲奇數，偶數號碼之物件其來回的次數會影響奇數物件的走法和方法數。
(四) 走法總數的產生是由於合法狀態和連線數所構成。
(五) 食性距離大於等於二時，除部分需由演算法求得，皆能得知移動次數及方法總數。

陸、未來展望

希望未來能夠在食性距離大於等於二的部分推出一個通式，使其可以套用於任意距離，任意物件個數中。同時也希望能計算出，相同物件，但每件物件之數量不同時的通式，並了解其性質。

柒、參考文獻

1. 林炳炎 (1982)。渡河問題。**科學月刊，0152**，48-52。

2. Charles F. S. (1999). River Crossing Problems. Retrieved April 14, 2006, from the World Wide Web: http://www.rci.rutgers.edu/~cfs/305_html/ProblemSolving_Planning/RiverCrossingProblems.html

3. Maurici C. J., Boni C., & Wendy P. (2005). Math Cat: Crossing the River with a Wolf, a Goat, and a Cabbage. Retrieved April 12, 2006, from the World Wide Web: http://www.mathcats.com/explore/river/crossing.html

4. Plastelina Logic Games. Retrieved March 24, 2006, from the World Wide Web: http://www.plastelina.net/examples/games/index.html

5. Robin J.W., & John J.W. (Eds.). (1990). *Graphs: an introductory approach.* New York: John Wiley& Sons, Inc.

【評　語】　　040422　渡河問題

1) 文獻探討是科學研究的重要一環，它能夠引發創新的靈感。本作品之說明書中所列的參考資料卻比看板上所展示的更爲豐富，另人懷疑兩者製作的先後次序是否顛倒。

2) 渡河問題是程序問題的一種，最理想的展示辦法乃是透過動畫來說明。本研究應朝向這方面努力之。

3) 渡河問題原本是個單純的數學遊戲。若將該活動做推廣時，應維持原問題的趣味性及挑戰性。