中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040417

有限三角形拼磚問題

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 廖俊維	林佩君

關鍵詞：lap k　相似　結點多邊形

壹、摘要

我們定義「lap k 三角形」如下：

如果用 k 個全等的小三角形以「邊併邊」的方式拼合成一個大三角形；而且大三角形仍和小三角形「相似」的話，則稱「大三角形」爲「lap k 三角形」。

本篇報告研究的重點，是想利用「圖形拼合」的性質，建立一個尋找「lap k 三角形」，並證明其個數的方法。利用此方法改良原本用「方程式」證明的方法，並得出下面的結論：

一、簡化「lap 2 三角形」只有 1 種(即等腰直角三角形)的證明。

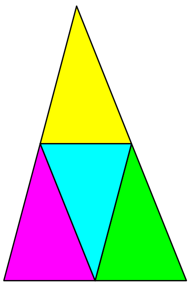
二、簡化「lap 3 三角形」只有 1 種(即 $30°-60°-90°$ 的直角三角形)的證明。

三、首次證明出「lap 4 三角形」的三角形只有 3 種，但拼法有 4 種。說明如下：

1.任意三角形(如下圖一)。

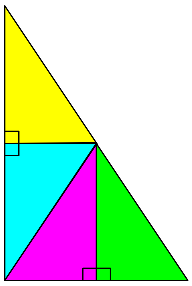
2.任意直角三角形(如下圖二)。

3.內角爲 $30°-60°-90°$ 的直角三角形，有兩種拼法(如下圖三、圖四)。



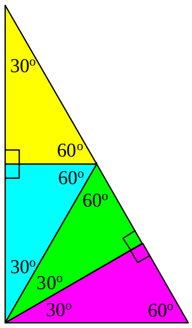
任意三角形

圖一



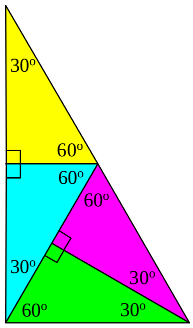
任意直角三角形

圖二



30°-60°-90°直角三角形

圖三



30°-60°-90°直角三角形

圖四

貳、研究動機

自己一直對數學研究感到興趣，一次在科教館網頁瀏覽過去國際科展數學科作品，我對其中一份名爲「重複圖形」[3]的作品所研究的問題感到十分有趣！該問題是說：

如果用 k 個全等的小三角形以「邊拼邊」的方式拼合成一個大三角形；而且大三角形仍和小三角形「相似」的話，則稱「大三角形」爲「lap k 三角形」，譬如說；「等腰直角三角形」是唯一的「lap 2 三角形」。

我發現這其實是一種「有限拼磚」問題，在很多介紹數學遊戲的書籍上，都有這一類「拼磚」問題([2])，只是這些書上討論的「拼磚」問題，都可以在平面上將「磁磚向四周做無限延伸的鋪排」，但此份作品卻要求「磁磚拼完的形狀必須和原來形狀相似」，這很有意思！

仔細閱讀之後，覺得作者使用「方程式」的方法雖然已經非常不錯，但應該還有改進的空間，所以此篇報告依照自己新的想法，給出新的改良證明，同時希望在「lap 4 三角形」上有所突破。

在研究過程中，使用高中第四冊「排列組合」的觀念，透過「圖形的分類」，逐一構造出心目中「較簡潔」的證明方法。在多次嘗試之後，果然發現利用「圖形拼合」的性質，可以給出更好證明，而且首次證明出「lap 4 三角形」的三角形只有 3 種以及「lap5 三角形」的三角形只有 1 種，這些都是在科展作品[3]中尚未證明的。預期若繼續努力，極有機會證出「lap k≧6 三角形」之所有結果。

參、研究目的

找出哪些三角形是 lapk 三角形及其拼法。

一、證明「lap 2 三角形」只有 1 種(即等腰直角三角形)。

二、證明「lap 3 三角形」只有 1 種(即 $30°-60°-90°$ 的直角三角形)。

三、證明出「lap 4 三角形」只有 3 種圖形，但拼法有 4 種。說明如下(可參考摘要)：

1.任意三角形。

2.任意直角三角形。

3.內角為 $30°-60°-90°$ 的直角三角形，有兩種拼法。

肆、研究設備及器材

紙、筆。

伍、研究過程或方法

先說明定義和假設：

定義 1

將結點分成 4 類(可參考下圖 2)

1.「頂結點」：該頂點在邊拼合後，仍是大三角形的頂點，以 V 表示。
2.「邊結點」：該頂點在邊拼合後，會成為大三角形邊上的點，以 S 表示。
3.「內結點」：該頂點在邊拼合後，會成為大三角形內部的點，以 I 表示。
4.「內邊結點」：該頂點在邊拼合後，會成為大三角形內部的點，但此點在某一個小三角形的邊上，以 J 表示。

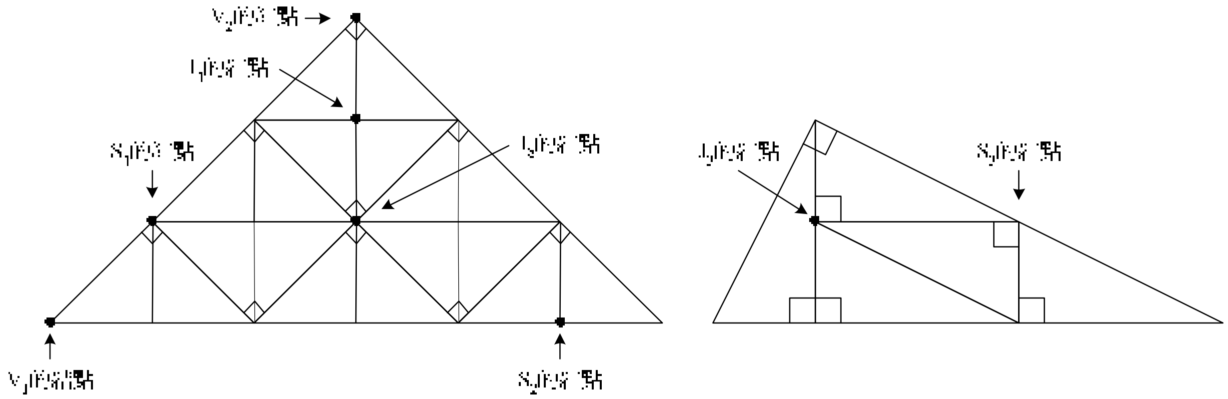


圖 2

定義 2

1.若兩個小三角形以「邊拼邊」的方式拼合時，每次拼合後的重合邊兩端點都是「頂結點」，則稱此拼合方式為「V 結點拼合」。
2.若 k 個小三角形以「V 結點拼合」方式拼合，則「拼合後的大多邊形」的每個頂點都會是「頂結點」，則稱它為「V 結點多邊形」。

例 1：下圖 3 的拼合方式是一種「V 結點拼合」，而 ACBF 是「V 結點四邊形」。
例 2：下圖 4 的拼合方式不是「V 結點拼合」。

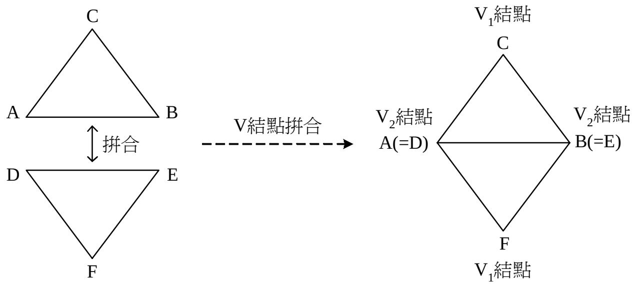


圖 3

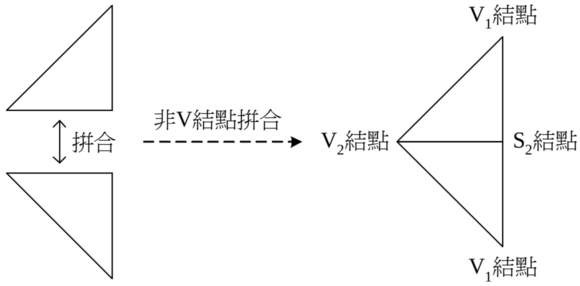


圖 4

定義 3

1.設由三個角組成的「頂結點」有V_3個，其中 3 個$\angle B$組成的有$V_{3,1}$個，2 個$\angle B$和 1 個$\angle C$組成的有$V_{3,2}$個，1 個$\angle B$和 2 個$\angle C$組成的有$V_{3,3}$個，3 個$\angle C$組成的有$V_{3,4}$個，則$V_3 = V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,3} + V_{3,4}$。

註：因 3 個$\angle A$、2 個$\angle A$和 1 個$\angle B$、2 個$\angle A$和 1 個$\angle C$、1 個$\angle A$和 2 個$\angle B$、1 個$\angle A$和 2 個$\angle C$均$> \angle A$，若用這些角組成 lap k 三角形，一定不會和$\triangle ABC$相似。

2.設由三個角組成的「邊結點」有S_3個，其中：

(1) 3 個$\angle A$組成的有$S_{3,1}$個，可得$\angle A = 60°$，又$\angle A$爲最大角，則$\angle B = \angle C = 60°$。

(2) 3 個$\angle B$組成的有$S_{3,2}$個，可得$\angle B = 60°$。

(3)若由 3 個$\angle C$組成，可得$\angle C = 60°$，又$\angle C$爲最小角，則$\angle A = \angle B = 60°$，這和(1)相同。

(4)若由 2 個$\angle A$和 1 個$\angle B$組成，可得$\angle A = \angle C$，又$\angle A$爲最大角且$\angle C$爲最小角，則$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$，這和(1)相同。

(5) 2 個$\angle A$和 1 個$\angle C$組成的有$S_{3,3}$個，可得$\angle A = \angle B$。

(6) 2 個$\angle B$和 1 個$\angle A$組成的有$S_{3,4}$個，可得$\angle B = \angle C$。

(7)若由 2 個$\angle B$和 1 個$\angle C$組成，可得$\angle A = \angle B$，這和(5)相同。

(8)若由 2 個$\angle C$和 1 個$\angle A$組成，可得$\angle B = \angle C$，這和(6)相同。

(9)若由 2 個$\angle C$和 1 個$\angle B$組成，可得$\angle A = \angle C$，又$\angle A$爲最大角且$\angle C$爲最小角，則$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$，這和(1)相同。

(10) 1 個$\angle A$、1 個$\angle B$和 1 個$\angle C$組成的有$S_{3,5}$個。

則$S_3 = S_{3,1} + S_{3,2} + S_{3,3} + S_{3,4} + S_{3,5}$。

3.設由三個角組成的「內結點」有I_3個，而且明顯地；此三角必都是等於$120°$的$\angle A$。

4.設由兩個角組成的「內邊結點」有J_2個，而且明顯地；此兩角必都是等於$90°$的$\angle A$。

定義 4

1.設由n $(n \ge 2)$ 個角組成的「頂結點」有V_n個。

$V_{n,1}$: n 個$\angle B$組成

$V_{n,2}$: $n-1$個$\angle B$和 1 個$\angle C$組成

…

$V_{n,n}$: 1個$\angle B$和$n-1$個$\angle C$組成

$V_{n,n+1}$: n 個$\angle C$組成

2.設由四個角組成的「邊結點」有S_4個。
可能情形有：
$S_{4,1}$: 4 個$\angle B$組成，可得$45°$
$S_{4,2}$: 4 個$\angle C$組成，可得$\angle C = 45°$
$S_{4,3}$: 3 個$\angle B$和 1 個$\angle C$組成，可得$2\angle B = \angle A$
$S_{4,4}$: 3 個$\angle C$和 1 個$\angle A$組成，可得$2\angle C = \angle B$
$S_{4,5}$: 3 個$\angle C$和 1 個$\angle B$組成，可得$2\angle C = \angle A$
$S_{4,6}$: 2 個$\angle B$和 2 個$\angle C$組成，可得$\angle B + \angle C = 90°$ ， $\angle A = 90°$
3.設由四個角組成的「內結點」有I_4個。
可能情形有：
$I_{4,1}$: 4 個$\angle A$組成，可得$\angle A = 90°$
$I_{4,2}$: 3 個$\angle A$和 1 個$\angle B$組成，可得$\angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle C$
$I_{4,3}$: 3 個$\angle A$和 1 個$\angle C$組成，可得$\angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle B$
4.設由n個角組成的「內邊結點」有J_n個，情形同S_n。

下面說明證明的步驟：

證明方法的步驟

步驟一：先假設k個三角形以「邊拼邊」的方式拼合後，會得到一個每個頂點都是「頂結點」的$k+2$邊形，稱爲「V 結點$k+2$邊形」。
步驟二：利用當「頂結點 V」分別變成「邊結點 S」、「內結點 I」和「內邊結點 J」時，會造成「邊數減少」的性質，使「V 結點$k+2$邊形」退化成一個「三角形」。
步驟三：利用「退化」過程中產生的「邊長和角度」的方程式，算出用來拼合的「小三角形形狀」。
步驟四：利用推出的「小三角形形狀」和「小三角形邊拼合的方式」，構造 lap k 三角形的圖形與拼和方式。

爲了討論方便，我們給出下面的假設。

假設

1.設小三角形爲$\triangle ABC$，其三邊長爲a、b及c。不失一般性，我們可以假設$a \geq b \geq c$，則$\angle A \geq \angle B \geq \angle C$，$\therefore 180° > \angle A \geq 60°$ 、 $90° > \angle B > 0°$ 、 $60° \geq \angle C > 0°$。
2.第 1 個小三角形在圖上標記爲「I」，接著把第 2 個拼入的小三角形標記爲「II」，依此類推，第 3 個拼入的小三角形標記爲「III」，第 4 個拼入的小三角形標記爲「IV」。

接著列出證明時，要用到的判別條件和引理。

引理 1 (代號 L1)

若k個小三角形以「V 結點拼合」的方式拼合，則「V 結點多邊形」的邊數是$k+2$。

證明：$\because$ k個小三角形每次拼合後兩邊的端點都是 V 結點
$\therefore$每次拼合均會使小三角形的總邊數減少 2
又k個小三角形需拼合$k-1$次
$\therefore$最後剩下的小三角形的總邊數$= 3k - 2(k-1) = k+2$
所以，會得到一個$k+2$邊的「V 結點多邊形」。證畢□

引理 2 (代號 L2)

當「V 結點多邊形」的一個頂點由「頂結點 V」變成「邊結點 S」時，其邊數會減少 1。

證明：設 $n+2$ 邊「V 結點多邊形」的一個頂點 A_k $(1 \le k \le n+2)$ 是 V_i 結點 $(i \ge 2)$。如圖 5 所示，若 A_k 由 V_i 結點變成 S_i 結點，則 $n+2$ 邊形的兩個邊 $\overline{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k}$ 、$\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ 會變成同一個邊 $\overline{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_{k+1}}$。故 $n+2$ 邊形的邊數會減少 1，得證。□

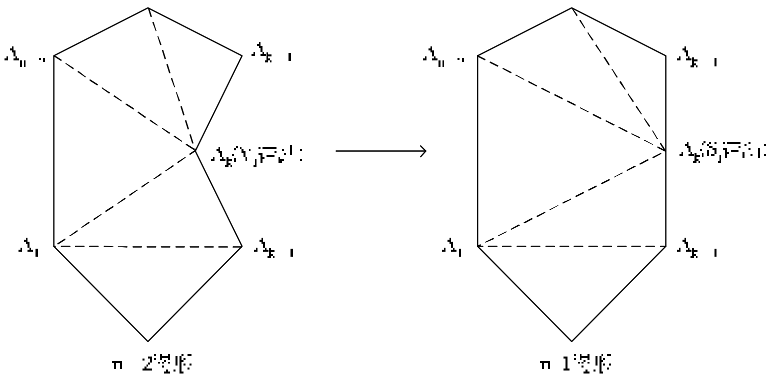


圖 5

引理 3 (代號 L3)

當「V 結點多邊形」的一個頂點由「頂結點 V」變成「內結點 I」時，其邊數會減少 2。

證明：

設 $n+2$ 邊「V 結點多邊形」的一個頂點 A_k $(1 \le k \le n+2)$ 是 V_i 結點 $(3 \le i \le n)$。如圖 10，若 A_k 由 V_i 結點變成 I_i 結點，則 A_{k-1} 和 A_{k+1} 要重疊；也就是 $\overline{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k}$ 、$\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ 在多邊形內部拼合。故 $n+2$ 邊形的邊數會減少 2，得證。□

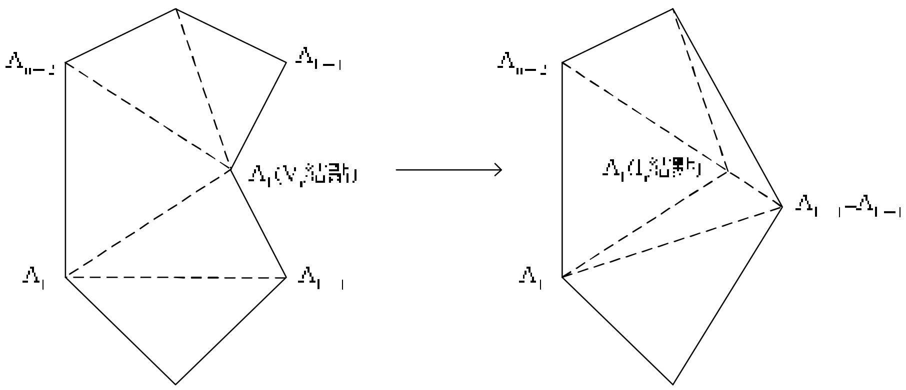


圖 6

引理 4 (代號 L4)

若 k 個小三角形拼合產生「頂結點 V」、「邊結點 S」和「內結點 I」時，則小三角形邊長只有「不改變」和「等腰」兩種情形。

證明：

因爲 V 結點、S 結點、I 結點都只有一邊拼一邊的情形，可分成兩種情形討論：

1.同邊拼合：即 a 拼 a 或 b 拼 b 或 c 拼 c (如圖 7)，邊長不會增加限制。

2.異邊拼合：即 a 拼 c 或 a 拼 b 或 b 拼 c

(2.1)若 a 拼 c：可得 $a=c$ ，又 $a \ge b \ge c$ ，所以小三角形是正三角形(如圖 8 左)。

(2.2)若 b 拼 c：可得 $b=c$ ，則小三角形是等腰三角形(如圖 8 中)。

(2.3)若 a 拼 b：可得 $a=b$ ，則小三角形是等腰三角形(如圖 8 右)。

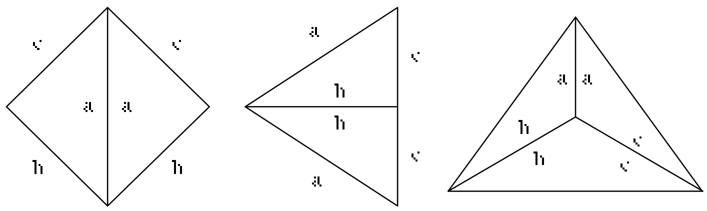


圖 7

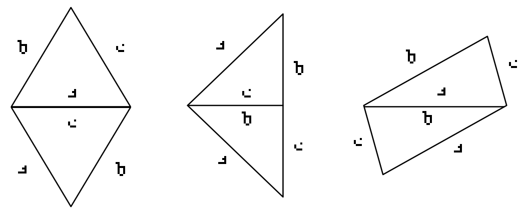


圖 8

故 k 個小三角形拼合產生「頂結點 V」、「邊結點 S」和「內結點 I」時，則小三角形邊長只有「不改變」和「等腰」兩種情形，得證。□

引理 5 (代號 L5) 若 lap k 三角形的某一內邊上，只有 J_2 一個內邊結點，則符合此條件小三角形只有 2 種，分別是「邊長比 $1:\sqrt{3}:2$ 的直角三角形」和「邊長比 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形」。

證明：

$\because a \ge b \ge c$

$\therefore$拼合的邊中較大者爲 a 或 b。

可分別討論如下：

1.拼合的邊中較大者爲 a：分三種情形討論

(1.1)較小邊爲兩個 b：可得 $a=2b$ ，由三角不等式 $b+c>a$ —①，可知不合。

(1.2)較小邊爲兩個 c：可得 $a=2c$ —②(如圖 9)，可知 $b^2+c^2=a^2$ —③

②代入③得 $b=\sqrt{3}c$ ，

$\therefore$可知 $a:b:c=2:\sqrt{3}:1$ ，即 $\angle A=90°$、$\angle B=60°$、$\angle C=30°$ 。

(1.3)較小邊爲一個 b 和一個 c：由①，可知不合。

2.拼合的邊中較大者爲 b：

較小邊爲兩個 c (如圖 14)，又 $a \ge b \ge c$ ，可得 $b=2c$ —④、 $b^2+c^2=a^2$ —⑤，

④代入⑤得 $a=\sqrt{5}c$

$\therefore a:b:c=\sqrt{5}:2:1$ 。

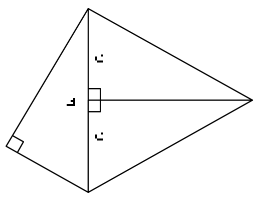


圖 9

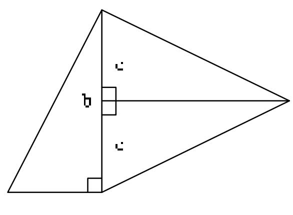


圖 10

故符合此條件小三角形只有「邊長比 $1:\sqrt{3}:2$ 的直角三角形」和「邊長比 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形」，得證。□

引理 6 (代號 L6)

若 lap k 三角形的某一內邊上，只有 J_3 一個內邊結點，則符合此條件小三角形有 4 種，分別是「$30°-60°-90°$ 的直角三角形」、「邊長比 $a:c=2:1 \quad (c<b\le 2c)$ 的三角形」、「邊長比 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}:2:1$ 的三角形」和「邊長比 $b:c=2:1 \quad (2c\le a<3c)$ 的三角形」。

證明：

$\because a\ge b\ge c \quad \therefore$ 拼合的邊中較大者爲 a 或 b

由 L5 的證明知較小邊不爲兩個 b 或一個 b 和一個 c

1.拼合的邊中較大者爲 a，較小邊爲兩個 c（圖 11），分五種情形討論：

(1.1) $J_3=J_{3,1}$ 則 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$，但 $a=2c$，不合。

(1.2) $J_3=J_{3,2}$ 則 $\angle B=60°$ 又 $a=2c$，可得 $30°-60°-90°$ 的直角三角形

(1.3) $J_3=J_{3,3}$ 則 $\angle A=\angle B$ 又 $a=2c$，可得邊長比 $2:2:1$ 的三角形

(1.4) $J_3=J_{3,4}$ 則 $\angle B=\angle C$ 又 $a=2c$，不是三角形，不合。

(1.5) $J_3=J_{3,5}$ 則可得邊長比 $a:c=2:1 \quad (c<b\le 2c)$ 的三角形

$\rightarrow$ 此情形包含 (1.3) $b=2c$ 時。

2.拼合的邊中較大者爲 b，較小邊爲兩個 c（圖 12），分五種情形討論：

(2.1) $J_3=J_{3,1}$ 則 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$，但 $b=2c$，不合。

(2.2) $J_3=J_{3,2}$ 則 $\angle B=60°$ 又 $b=2c$，可得邊長比 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}:2:1$ 的三角形

(2.3) $J_3=J_{3,3}$ 則 $\angle A=\angle B$ 又 $b=2c$，可得邊長比 $2:2:1$ 的三角形

(2.4) $J_3=J_{3,4}$ 則 $\angle B=\angle C$ 但 $b=2c$，不合。

(2.5) $J_3=J_{3,5}$ 則可得邊長比 $b:c=2:1 \quad (2c\le a<3c)$ 的三角形

$\rightarrow$ 此情形包含 (2.3) $a=2c$ 時。

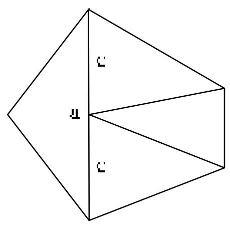


圖 11

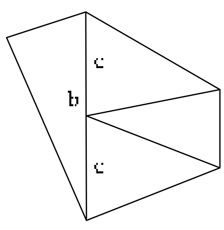


圖 12

故符合此條件小三角形有「$30°-60°-90°$ 的直角三角形」、「邊長比 $a:c=2:1\ (c<b\le 2c)$ 的三角形」、「邊長比 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}:2:1$ 的三角形」和「邊長比 $b:c=2:1 \quad (2c\le a<3c)$ 的三角形」，得證。□

引理 7 (代號 L7)

若 lap k 三角形的某一內邊上，只有 J_4 一個內邊結點，則符合此條件小三角形有 6 種，分別是「$30°-60°-90°$ 的直角三角形」、「邊長比 $2:\sqrt{2}-1:1$ 的三角形」、「邊長比 $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}:2:1$ 的三角形」、「邊長比 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形」、「$\angle A=2\angle B$ 且 $a=2c$ 的三角形」和「$\angle A=2\angle B$ 且 $b=2c$ 的三角形」。

證明：

$\because a\ge b\ge c$ $\therefore$ 拼合的邊中較大者爲 a 或 b

由 L5 的證明知較小邊不爲兩個 b 或一個 b 和一個 c

1.拼合的邊中較大者爲 a，較小邊爲兩個 c（圖 13），分六種情形討論：

(1.1) $J_4=J_{4,1}$ 則 $\angle B=45°$ 又 $a=2c$，可得邊長比 $2:\sqrt{2}-1:1$ 的三角形。

(1.2) $J_4=J_{4,2}$ 不合，$\because$ 拼合的較小邊爲兩個 c。

(1.3) $J_4=J_{4,3}$ 則，可得符合此條件之三角形。

(1.4) $J_4=J_{4,4}$ 不合，$\because$ 拼合的較小邊爲兩個 c。

(1.5) $J_4=J_{4,5}$ 不合，$\because$ 拼合的較小邊爲兩個 c。

(1.6) $J_4=J_{4,6}$ 則 $\angle A=90°$ 又 $a=2c$，可得 $30°-60°-90°$ 的直角三角形

2.拼合的邊中較大者爲 b，較小邊爲兩個 c（圖 14），分六種情形討論：

(2.1) $J_4=J_{4,1}$ 則 $\angle B=45°$ 又 $b=2c$，可得邊長比 $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}:2:1$

(2.2) $J_4=J_{4,2}$ 不合，$\because$ 拼合的較小邊爲兩個 c。

(2.3) $J_4=J_{4,3}$ 則 $\angle A=2\angle B$ 又 $b=2c$，可得符合此條件之三角形。

(2.4) $J_4=J_{4,4}$ 不合，$\because$ 拼合的較小邊爲兩個 c。

(2.5) $J_4=J_{4,5}$ 不合，$\because$ 拼合的較小邊爲兩個 c。

(2.6) $J_4=J_{4,6}$ 則 $\angle A=90°$ 又 $b=2c$，可得邊長比 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形

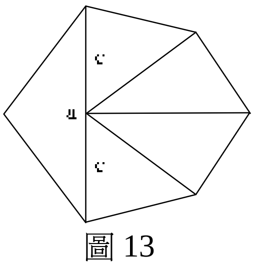


圖 13

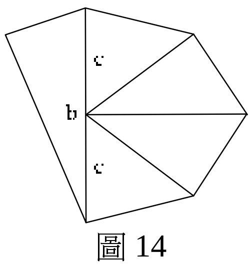


圖 14

故符合此條件小三角形有「$30°-60°-90°$ 的直角三角形」、「邊長比 $2:\sqrt{2}-1:1$ 的三角形」、「邊長比 $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}:2:1$ 的三角形」、「邊長比 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形」、「$\angle A=2\angle B$ 且 $a=2c$ 的三角形」和「$\angle A=2\angle B$ 且 $b=2c$ 的三角形」，得證。□

引理 8 (代號 L8)

有 J 結點組成的圖形，在拼合後不產生其他 J 節點的情況下，在其周圍拼上一個三角形後若要是三角形，則原圖形之邊數$=2+$拼合後產生 S 結點個數+2×拼合後產生 I 結點個數，且拼合後產生 S 結點個數≤ 2。

證明：∵原圖形邊數＋拼上的三角形的邊數－V 結點拼法（L1）減少的邊數－拼合後產生 S 結點的個數($L2$) − 2×拼合後產生 I 結點的個數($L3$) = 3（拼上三角形後仍是三角形）

∴原圖形邊數 +3 − 2 − 拼合後產生 S 結點個數 −2×拼合後產生 I 結點個數＝3

故原圖形邊數＝2 + 拼合後產生 S 結點個數 +2×拼合後產生 I 結點個數。

拼合後產生 S 結點個數最多為 2，如圖，得證。□

判別條件 1 (代號 D1)
1.結點數 S_2 和 I_3 不同時大於 0。 2.結點數 I_3 和 J_2 不同時大於 0。 3.結點數 I_3 和 I_4 不同時大於 0。

證明：當 S_2 和 J_2 > 0 時，∠A=90^o，而 I_3 > 0 時，∠A=120^o，因產生的角度不同，所以不合。

當 I_3> 0 時，∠A=120^o，而 I_4 > 0 時，∠A=90^o（矛盾）或 90^o＋1/2∠B（∠C＝0^o）或 90^o＋1/2∠C（∠B＝0^o），故不合。得證。□

判別條件 2 (代號 D2)
若 $V_1 \geq 1$，則 $V_{1,3} \geq 1$。 註：特別地，若 $V_1 = 1$，則 $V_{1,3} = 1$。

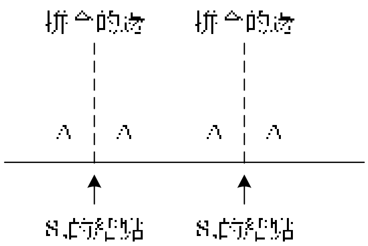
證明：若 V_1≧1，假設 $V_{1.3}$=0。則 V_1=$V_{1,1}$+$V_{1,2}$≧1，又構成 V_2 和 V_3 的角均≧2 個∠C，表示 lap k 三角形的 3 頂角皆由∠A 或∠B 或≧2 個∠C 的角構成，這和 lap k 三角形中，有一個頂角為∠C 矛盾。得證□

判別條件 3 (代號 D3)
不存在結點數是 $V_1 = 0$ 的情形。

證明：若 V_1=0，由定義 1 和定義 2 知 V_2+V_3=3，而 lap k 三角形中，有一個頂角為∠C，這表示∠C 至少由兩個角拼成，但是這和∠C 是最小角矛盾。得證□

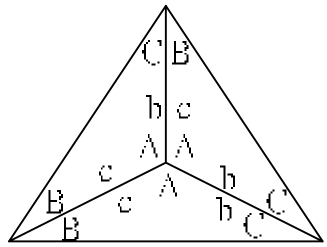
判別條件 4 (代號 D4)
兩個 S_2 必不相鄰。

證明：若兩個 S_2 相鄰，則兩個拼合的邊會平行，得證□



判別條件 5 (代號 D5)
若 $I_3 = 1$，則此三角形必爲 $120° - 30° - 30°$ 的三角形。

證明：若兩個 S_2 相鄰，則兩個拼合的邊會平行，得證□



伍、研究結果

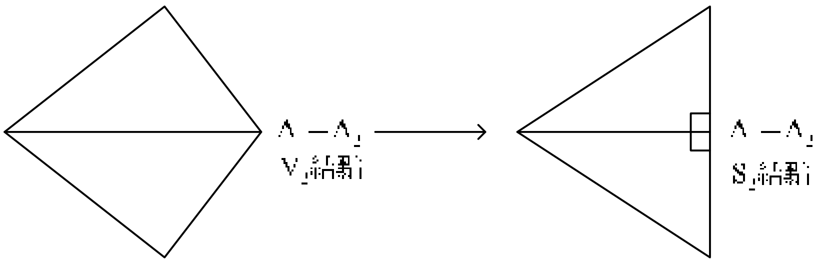
我們給出 lap 2 三角形、lap 3 三角形和 lap 4 三角形的證明。

定理 1
lap 2 三角形只有 1 種，即等腰直角三角形。

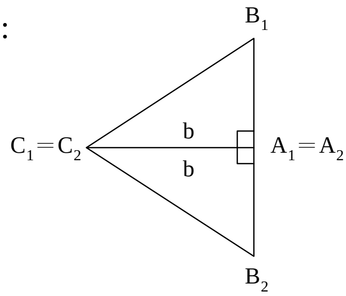
證明：

由 L1、L2 知 $n + 2 - S_2 = 3$ 又 $n = 2$　$\therefore S_2 = 1$　$\therefore \angle A = 90°$

故 V 結點四邊形變成三角形的方式如下：



接著考慮拼合的兩邊是小三角形的哪一邊，分成三種：



（1）拼合兩邊都是 b

$\because$ 大三角形～小三角形

$\therefore \triangle C_1B_1B_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$

又 $\triangle C_1B_1B_2$ 三內角是 $2\angle C$、$\angle B$、$\angle B$

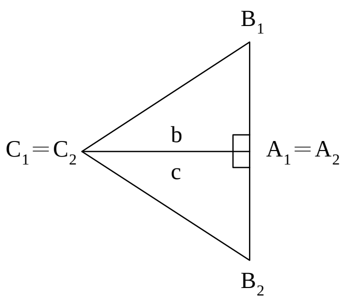
$\triangle A_1B_1C_1$ 三內角是 $\angle A = 90°$、$\angle B$、$\angle C$

$\therefore 90° = \angle A = 2\angle C$

$\therefore \angle C = 45°$、$\angle B = 45°$

故 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $90° - 45° - 45°$ 的三角形 (邊長比 $\sqrt{2}:1:1$)

（2）拼合兩邊是 b、c



可得 $b = c$、$\angle B = \angle C$

又 $\angle A = 90°$

$\therefore \angle B = \angle C = 45°$

故 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $90° - 45° - 45°$ 的三角形

解同（1）

（3）拼合兩邊都是 c

∵大三角形～小三角形

∴$\triangle B_1C_1C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$

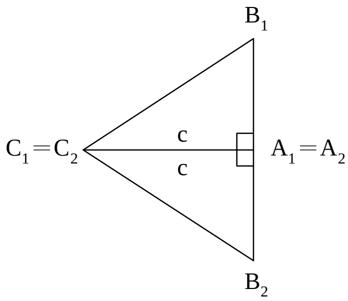
又$\triangle B_1C_1C_2$三內角是$2\angle B$、$\angle C$、$\angle C$

$\triangle A_1B_1C_1$三內角是$\angle A = 90°$、$\angle B$、$\angle C$

$\therefore 90° = \angle A = 2\angle B$ ∴90°＝∠A＝2∠B

$\therefore \angle B = \angle C = 45°$

同（1）



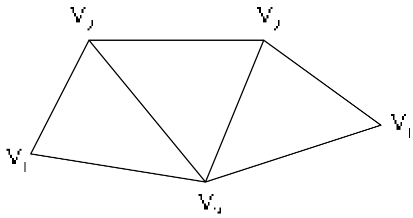
故 lap 2 三角形只有 1 種，即等腰直角三角形。

證畢□

定理 2
lap 3 三角形只有 1 種，即內角爲$30° - 60° - 90°$的直角三角形。

證明：

V 結點五邊形拼合方式只有一種



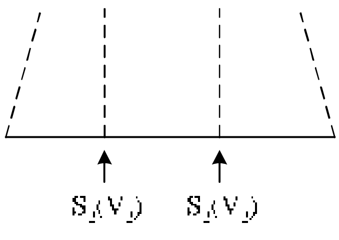
由 L1、L2、L3 知$n + 2 - S_2 - S_3 - I_3 = 3$　(J_2另外討論)又$n = 3$，可分四種情形

（兩個$V_2 \to S_2$、一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$、一個$V_3 \to I_3$、有一個J_2）

（1）兩個$V_2 \to S_2$

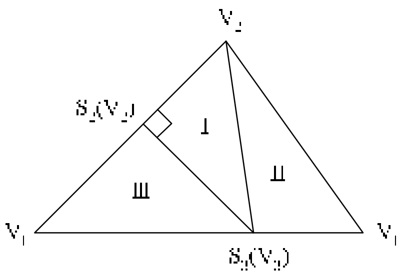
兩個S_2所延伸的邊平行不相交，如圖

∴不會出現V_3結點（不合）



（2）一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$

圖形變成：



$\because S_2 = 1 \quad \therefore \angle A = 90°$

S_3的情形共有五種$S_{3,1} \sim S_{3,5}$

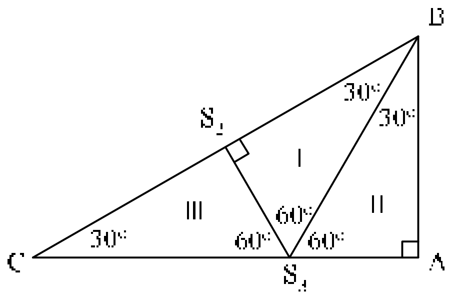
(2.1) $S_{3,1}$

$\because S_{3,1} = 1 \quad \therefore \angle A = 60°$，不合$(\angle A = 90°)$

(2.2) $S_{3,2}$

$\because S_{3,2} = 1 \quad \therefore \angle B = 60°$又$\angle A = 90° \quad \therefore \angle C = 30°$

圖形：



∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ～大△

∴此解爲$30° - 60° - 90°$的直角三角形

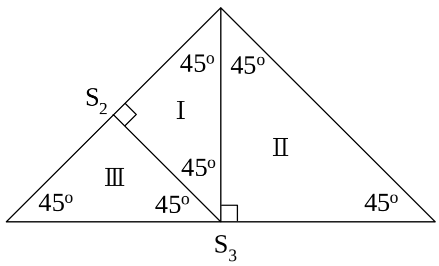
(2.3) $S_{3,3}$

$\because S_{3,3} = 1 \quad \therefore 2\angle A + \angle C = 180°$，不合$(\angle A = 90°)$

(2.4) $S_{3,4}$

$\because S_{3,4} = 1 \quad \therefore \angle B = \angle C = 45°$

圖形：

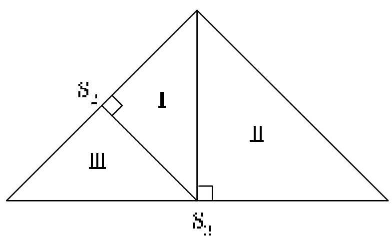


很明顯△Ⅰ必不全等於△Ⅱ

故不合

(2.5) $S_{3,5}$(由一個$\angle A$、一個$\angle B$、一個$\angle C$組成)

圖形：

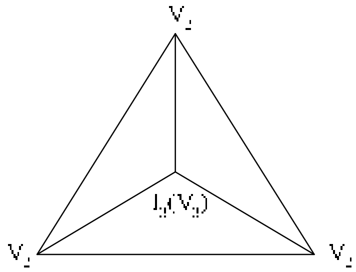


很明顯△Ⅰ必不全等於△Ⅱ

故不合

（3）一個$V_3 \to I_3$

圖形變成：



此圖形中無V_1結點，由 D3 知不合

（4）有一個J_2

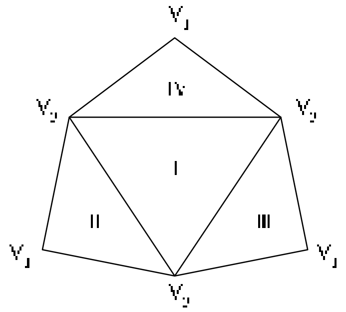
由 L5 知只有「邊長比$1:\sqrt{3}:2$的直角三角形」和「邊長比$1:2:\sqrt{5}$的直角三角形」但此二圖形皆是四邊形（不合）

故 lap3 三角形只有一解即內角爲$30°-60°-90°$的直角三角形。證畢□

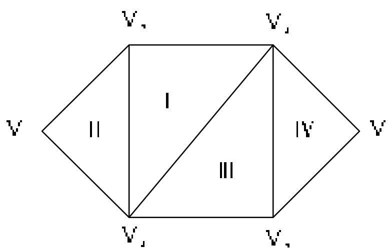
> 定理 3
>
> lap 4 三角形共有 3 種，即「任意三角形」、「內角爲$30°-60°-90°$的直角三角形（有兩種拼合方式）」和「任意直角三角形」。

證明：

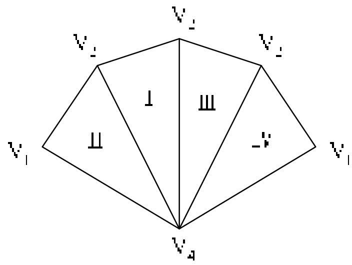
V 結點六邊形拼合方式有三種



六邊形 1



六邊形 2



六邊形 3

由結點的退化情形共分成 10 種：

（1）六邊形 1，三個$V_3 \to S_3$

（2）六邊形 1，一個$V_3 \to S_3$和一個$V_3 \to I_3$

（3）六邊形 2，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$

（4）六邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和兩個$V_3 \to S_3$

（5）六邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to I_3$

（6）六邊形 2，一個$V_3 \to S_3$和一個$V_3 \to I_3$

（7）六邊形 3，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_4 \to S_4$

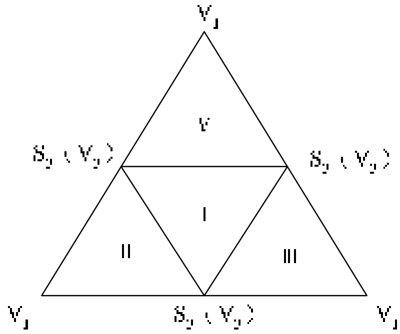
（8）六邊形 3，一個$V_4 \to I_4$和一個$V_2 \to S_2$

（9）有一個J_2

（10）有一個J_3

(1) 六邊形 1，三個$V_3 \to S_3$

圖形：



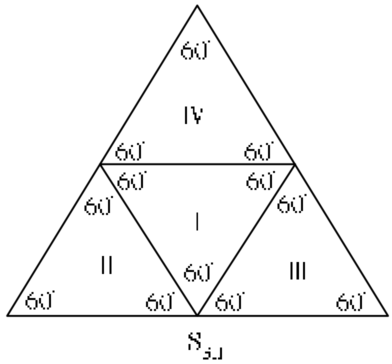
S_3 共有五種情形 $S_{3,1}$ 到 $S_{3,5}$

(1.1) 其中一個 S_3 爲 $S_{3,1}$

Q $S_{3,1}=1 \quad \therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$

∴另兩個 S_3 結點也必是 $S_{3,1}$ 結點

圖形：



∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ～大△

∴此解爲正三角形

(1.2) 其中一個 S_3 爲 $S_{3,2}$

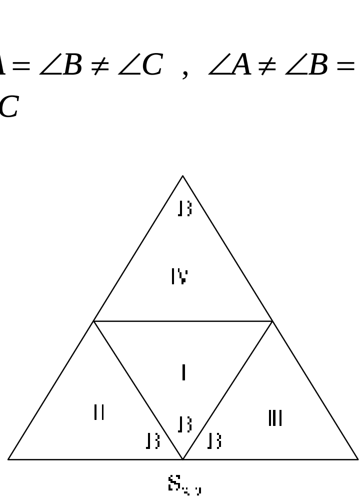
Q $S_{3,2}=1 \quad \therefore \angle B=60°$

分四種情形

$(\angle A\neq\angle B\neq\angle C$ ， $\angle A=\angle B\neq\angle C$ ， $\angle A\neq\angle B=\angle C$ ， $\angle A=\angle B=\angle C)$

(1.2.1) $\angle A\neq\angle B\neq\angle C$

圖形：



∵四個三角形中∠B 的位置已確定

∴剩下的 S_3 結點只可爲 $S_{3,1}$ 或 $S_{3,3}$ 但 $S_{3,1}$ 或 $S_{3,3}$ 皆可得出∠A＝∠B＝60°

故不合

(1.2.2) $\angle A=\angle B\neq\angle C$

Q $\angle B=\angle A=60°$

$\therefore \angle C = 60^\circ \quad \therefore \angle A = \angle B = \angle C$ ，不合

(1.2.3) $\angle A \neq \angle B = \angle C$

$\mathbf{Q}\, \angle B = \angle C = 60^\circ$

$\therefore \angle A = 60^\circ \quad \therefore \angle A = \angle B = \angle C$ ，不合

(1.2.4) $\angle A = \angle B = \angle C$

同(1.1)

(1.3) 其中一個 S_3 爲 $S_{3,3}$

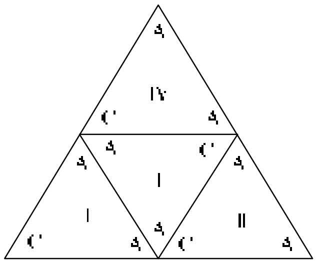
$S_{3,3}$＝1∴∠A＝∠B

分成兩種（∠A＝∠B≠∠C、∠A＝∠B＝∠C）

（1.3.1）∠A＝∠B≠∠C

圖形可分兩種：

（1.3.1.1）

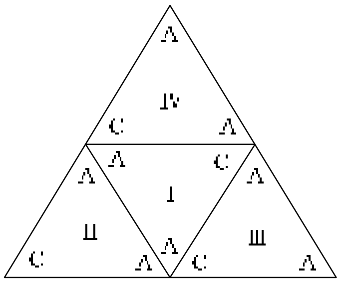


$S_{3,3}$

∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ～大△

∴此解爲∠C＜60°且∠A＝∠B 的等腰三角形

（1.3.1.2）



$S_{3,3}$

同（1.3.1.1）

（1.3.2）∠A＝∠B＝∠C

同（1.1）

（1.4）其中一個 S_3 爲 $S_{3,4}$

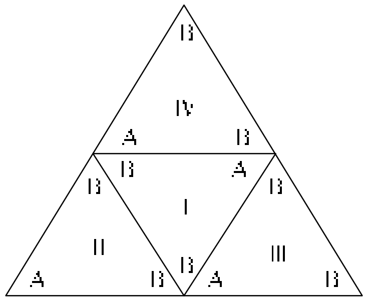
∵$S_{3,4}$＝1∴∠B＝∠C

分成兩種（∠A＝∠B≠∠C、∠A＝∠B＝∠C）

（1.4.1）∠A≠∠B＝∠C

圖形可分兩種：

（1.4.1.1）

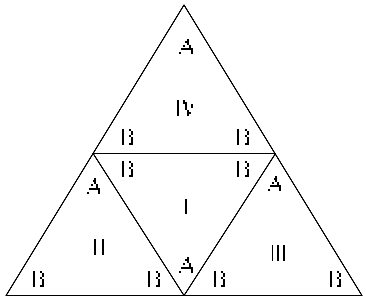


$S_{3,4}$

∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ～大△

此解為∠A＞60°且∠C＝∠B 的等腰三角形

（1.4.1.2）



$S_{3,4}$

同（1.4.1.1）

（1.4.2）∠A＝∠B＝∠C

同（1.1）

（1.5）其中一個 S_3 為 $S_{3,5}$

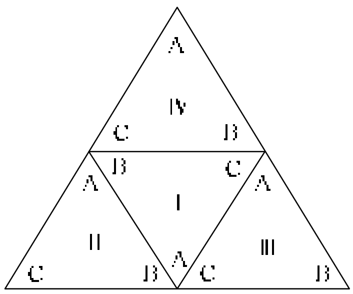
分四種情形（∠A≠∠B≠∠C、∠A＝∠B≠∠C、∠A≠∠B＝∠C、∠A＝∠B＝∠C）

（1.5.1）∠A≠∠B≠∠C

∵∠A≠∠B≠∠C∴另兩個 S_3 必為 $S_{3,5}$

圖形可分三種：

（1.5.1.1）

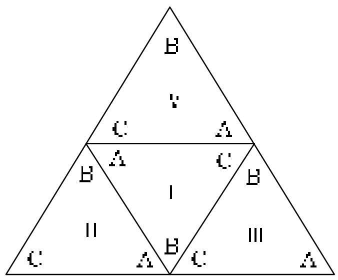


∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ～大△

且角度無限制

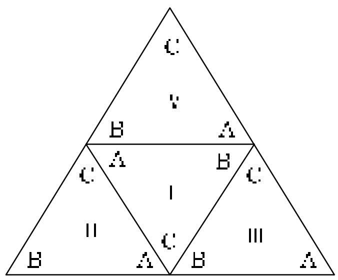
∴此解為任意三角形【此解包含（1）、（1.3.1.1）、（1.4.1.1）】

（1.5.1.2）



同（1.5.1.1）

（1.5.1.3）



同（1.5.1.1）

（1.5.2）$\angle A = \angle B \neq \angle C$

同（1.3）

（1.5.3）$\angle A \neq \angle B = \angle C$

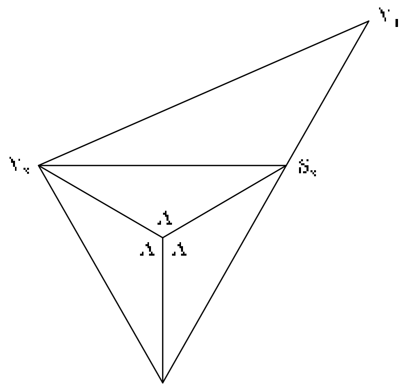
同（1.4）

（1.5.4）$\angle A = \angle B = \angle C$

同（1.1）

（2）六邊形 1，一個 $V_3 \rightarrow S_3$ 和一個 $V_3 \rightarrow I_3$

圖形：



$\because I_3 = 1 \therefore \angle A = 120°$

由 D4 知 $V_1 = V_{1,3} \therefore c = \overline{V_3S_3} = a$

又$\angle A = 120°$

故$\angle A = \angle C = 120°$，不合

（3）六邊形 2，兩個 $V_2 \rightarrow S_2$ 和一個 $V_3 \rightarrow S_3$

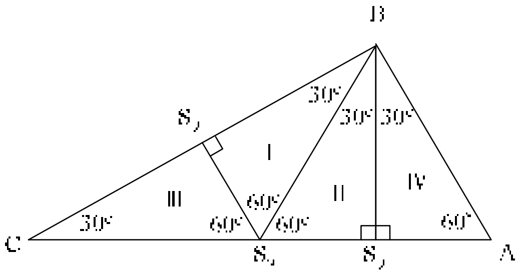
$\because S_2 = 2 \therefore \angle A = 90° \therefore \angle A$ 必不等於$\angle B$ 或$\angle C$

$\because$四個$\angle A$ 已用盡

故 $S_3 = S_{3,2}$

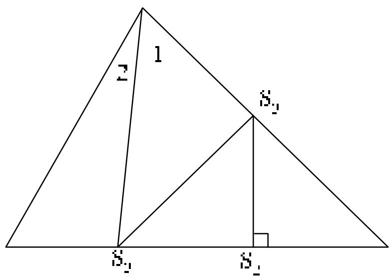
$\because S_{3,2} = 1 \therefore \angle B = 60° \therefore \angle C = 30°$

圖形：



此解爲 30°–60°–90°的直角三角形

（4）六邊形 2，一個 $V_2 \rightarrow S_2$ 和兩個 $V_3 \rightarrow S_3$
圖形：

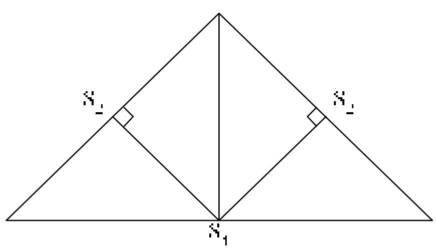


$\because S_2 = 2 \therefore \angle A = 90° \therefore \angle A$ 必不等於$\angle B$ 或$\angle C$
$\therefore \angle 1 = \angle A$
又$\angle 1 + \angle 2 \leqq \angle A$
$\therefore \angle 2 = 0°$，不合

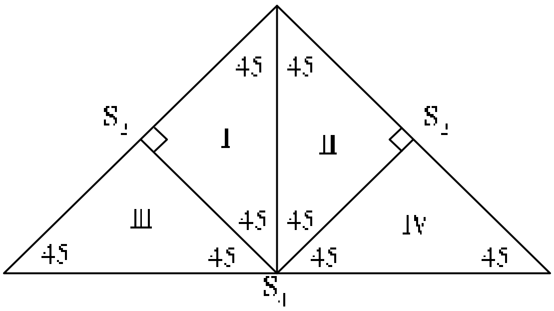
（5）六邊形 2，一個 $V_2 \rightarrow S_2$ 和一個 $V_3 \rightarrow I_3$
$\because S_2 = 1 \therefore \angle A = 90°$
$\because I_3 = 1 \therefore \angle A = 120°$
不合

（6）六邊形 2，一個 $V_3 \rightarrow S_3$ 和一個 $V_3 \rightarrow I_3$
同（2）

（7）六邊形 3，兩個 $V_2 \rightarrow S_2$ 和一個 $V_4 \rightarrow S_4$
$\because S_2 = 2 \therefore \angle A = 90°$
圖形：

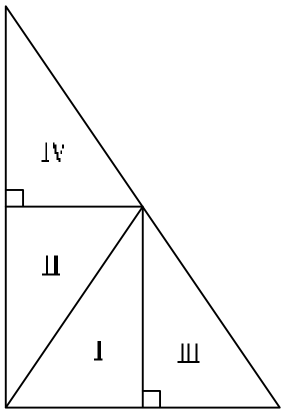


$\because \angle B + \angle B$ 或$\angle B + \angle C$ 或$\angle C + \angle C$ 皆不等於$\angle B$ 或$\angle C$
$\therefore$可分三種情形（$\angle B + \angle B = \angle A$、$\angle B + \angle C = \angle A$、$\angle C + \angle C = \angle A$）
（7.1）$\angle B + \angle B = \angle A$
$\because 2\angle B = \angle A = 90°$
$\therefore \angle B = \angle C = 45°$
圖形：



∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ～大△
∴此解為等腰直角三角形

（7.2）∠B＋∠C＝∠A
分為兩種（∠A＝∠B、∠A≠∠B）
（7.2.1）∠A＝∠B
同（7.1）
（7.2.2）∠A≠∠B
圖形：

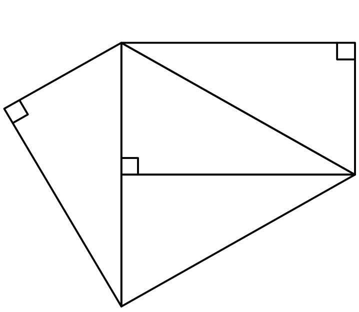


∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ～大△
∴此解為任意直角三角形【此解包含（7.1）】

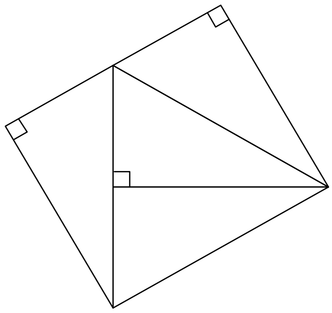
（7.3）∠＋∠C＝∠A
∵2∠C＝∠A＝90°
∴∠B＝∠C＝45°
同（7.1）

（8）六邊形 3，一個 $V_4 \to I_4$ 和一個 $V_2 \to S_2$
∵S_2＝1∴∠A＝90°
∴∠A 必不等於∠B 或∠C
又 S_2 用了兩個，用了四個 I_4，但∠A 只有四個，不合

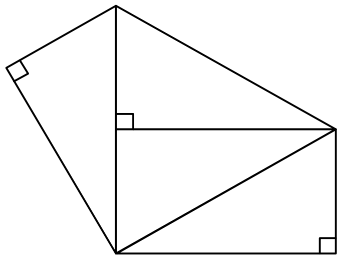
（9）有一個 J_2
由 L5 知有「邊長比 1：$\sqrt{3}$：2 的直角三角形」和「邊長比 1：2：$\sqrt{5}$ 的直角三角形」
（9.1）邊長比 1：$\sqrt{3}$：2 的直角三角形
第四個三角形有八種拼合方式：



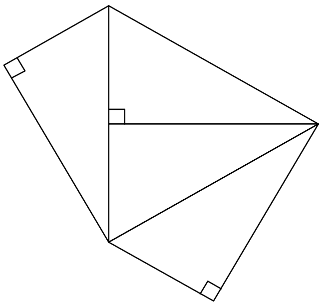
（9.1.1）



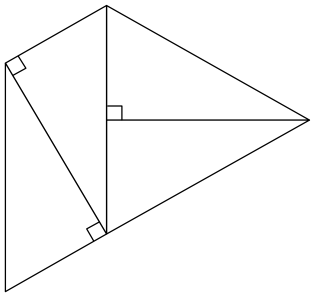
（9.1.2）



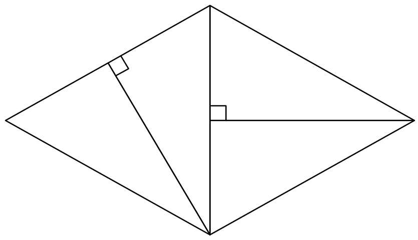
（9.1.3）



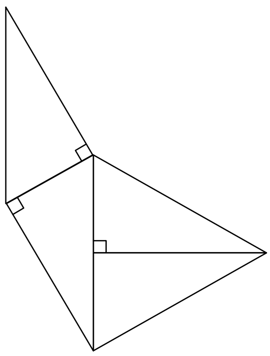
（9.1.4）



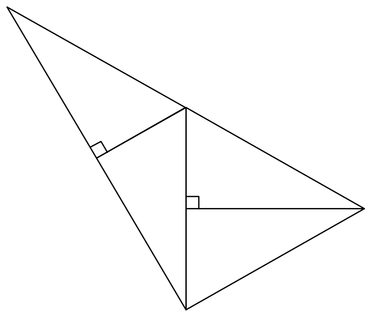
（9.1.5）



（9.1.6）

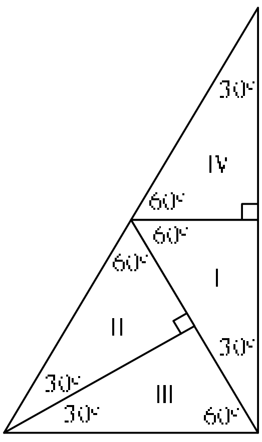


（9.1.7）



（9.1.8）

只有（9.1.8）爲三角形

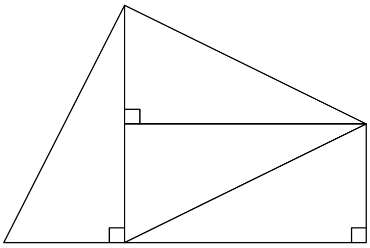


∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ～大△

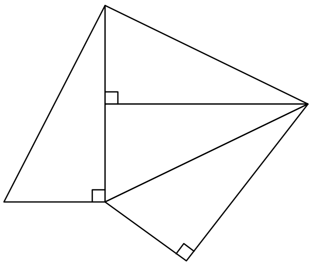
∴此解爲 30^o–60^o–90^o 的直角三角形

（9.2）邊長比 1：2：$\sqrt{5}$的直角三角形

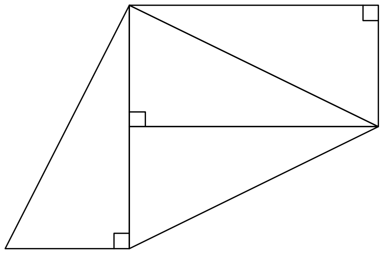
第四個三角形有八種拼何方式：



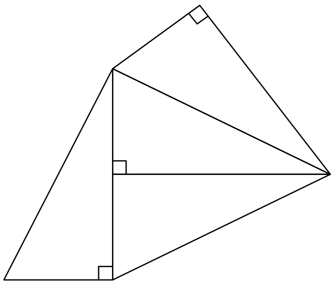
（9.2.1）



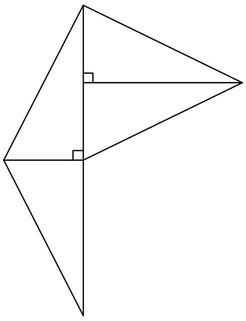
（9.2.2）



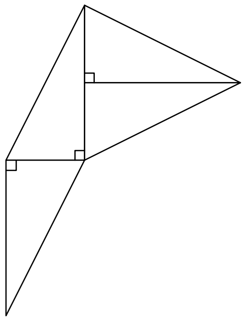
（9.2.3）



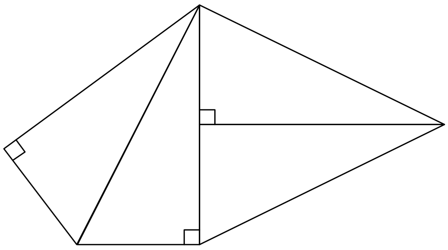
（9.2.4）



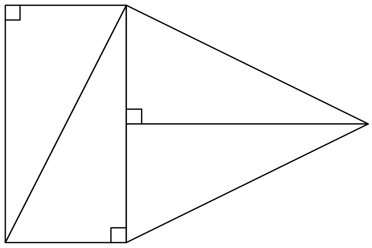
（9.2.5）



（9.2.6）



（9.2.7）



（9.2.8）

皆不爲三角形，不合

（10）有一個 J_3

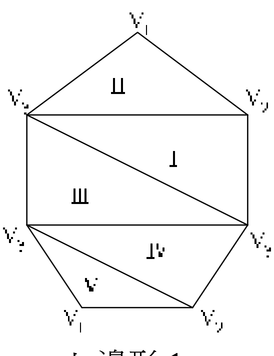
由 L6 知圖形皆爲五邊形，不合

故 lap 4 三角形共有 3 種，即「任意三角形」、「內角爲 $30° - 60° - 90°$ 的直角三角形（有兩種拼法）」和「任意直角三角形」。證畢□

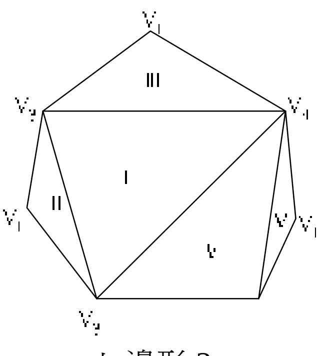
定理 4
lap 5 三角形只有 1 種，即「邊長比 $2:2:1$ 的直角三角形（有兩種拼合方式）」。

證明：

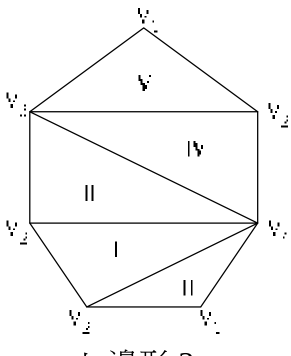
V 結點七邊形拼合方式有四種



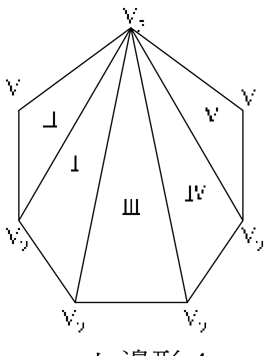
七邊形 1



七邊形 2



七邊形 3

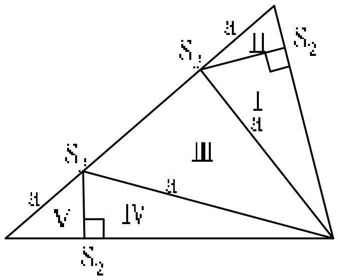


七邊形 4

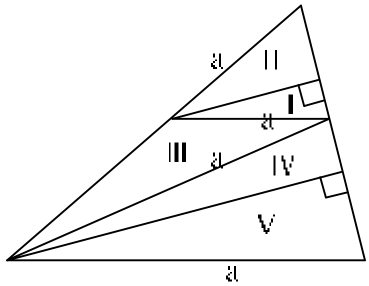
由結點的退化情形共分成 31 種：

（1）七邊形 1，兩個$V_2 \to S_2$和兩個$V_3 \to S_3$
（2）七邊形 1，一個$V_2 \to S_2$和三個$V_3 \to S_3$
（3）七邊形 1，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to I_3$（不合，∵D1）
（4）七邊形 1，兩個$V_3 \to S_3$和一個$V_3 \to I_3$
（5）七邊形 1，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_3 \to I_3$（不合，∵D1）
（6）七邊形 1，兩個$V_3 \to I_3$
（7）七邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和兩個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to S_4$
（8）七邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_3 \to I_3$（不合，∵D1）
（9）七邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to I_4$
（10）七邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_4 \to S_4$和一個$V_3 \to I_3$（不合，∵D1）
（11）七邊形 2，兩個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to I_4$
（12）七邊形 2，一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to S_4$和一個$V_3 \to I_3$
（13）七邊形 2，兩個$V_3 \to I_3$
（14）七邊形 2，一個$V_3 \to I_3$和一個$V_4 \to I_4$（不合，∵D1）
（15）七邊形 3，三個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$（不合，∵D4）
（16）七邊形 3，三個$V_2 \to S_2$和一個$V_4 \to S_4$（不合，∵D4）
（17）七邊形 3，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to S_4$
（18）七邊形 3，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to I_3$（不合，∵D1）
（19）七邊形 3，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_4 \to S_4$和一個$V_3 \to I_3$（不合，∵D1）
（21）七邊形 3，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_4 \to I_4$
（22）七邊形 3，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to I_4$
（23）七邊形 3，一個$V_3 \to I_3$和一個$V_4 \to I_4$（不合，∵D1）
（24）七邊形 4，四個$V_2 \to S_2$（不合，∵D4）
（25）七邊形 4，三個$V_2 \to S_2$和一個$V_5 \to S_5$（不合，∵D4）
（26）七邊形 4，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_5 \to I_5$
（27）一個J_2
（28）一個J_3
（29）一個J_4
（30）兩個J_2
（31）一個J_2和一個J_3

（1）七邊形 1，兩個$V_2 \to S_2$和兩個$V_3 \to S_3$
圖形有兩種：



(1.1)



(1.2)

(1.1)

$\because S_2 = 1 \quad \therefore \angle A = 90°$

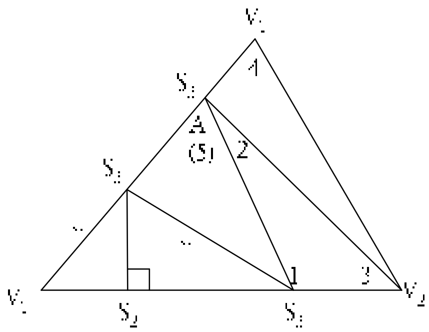
又△Ⅲ中有兩個邊爲 a，故不合

(1.2)

同(1.1)不合

（2）七邊形 1，一個$V_2 \to S_2$和三個$V_3 \to S_3$

圖形：



$\because \angle A$爲最大角且$\because S_2 = 1 \quad \therefore \angle A = 90°$

$\therefore \angle 2 \neq \angle A$ ，$\angle 3 \neq \angle A$

$\therefore \angle 1 = \angle A \to \angle 4 = \angle A$

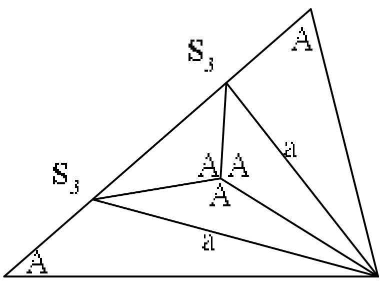
$\because \angle 1 = \angle A$ ，$\angle 5 = \angle A$

$\therefore \overline{V_1V_2} \,//\, \overline{V_1S_2S_3V_2}$

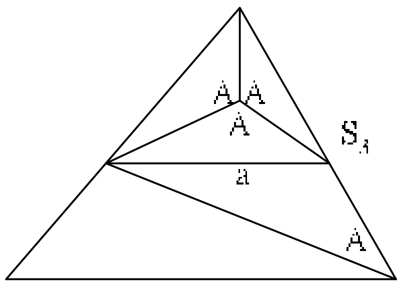
故不合

（4）七邊形 1，兩個$V_3 \to S_3$和一個$V_3 \to I_3$

圖形有兩種：



(4.1)



(4.2)

(4.1)

∵I_3＝1∴可得 120°–30°–30°的三角形（D5）

∴此二S_2結點不爲180°

故不合

(4.2)

同(4.1)此S_2結點不爲180°

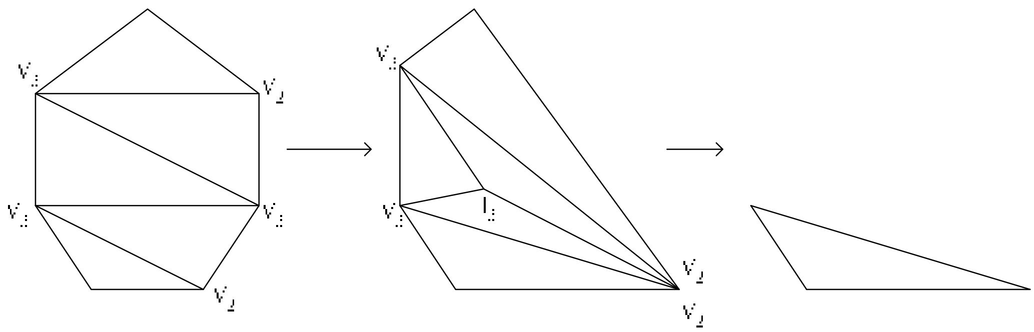
故不合

（6）七邊形 1，兩個$V_3 \to I_3$

有兩種情形：

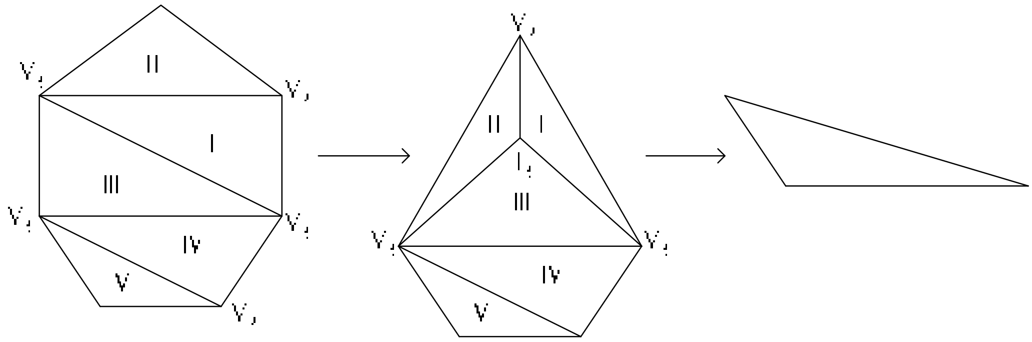
(6.1)

圖形：



其它三角形會縮成一線
故不合

(6.2)
圖形：

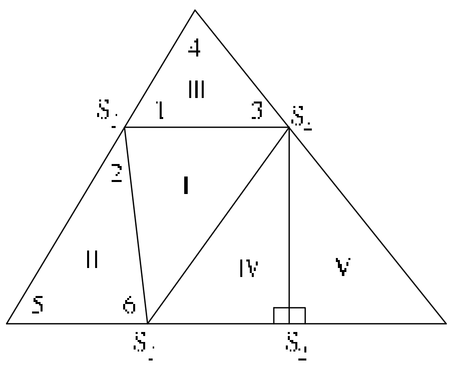


同(6.1)
不合

（7）七邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和兩個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to S_4$

Q $S_2 = 1 \quad \therefore \angle A = 90^\circ$

圖形：



Q $\angle A + \angle A = 180^\circ$

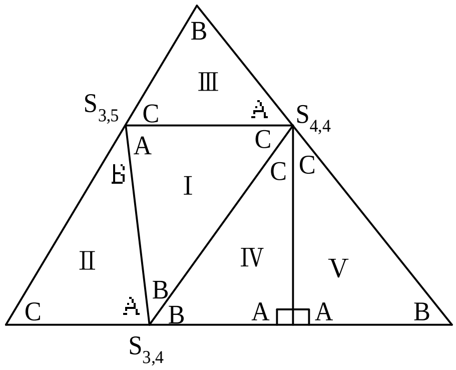
$\therefore \angle 1 \neq \angle A$、$\angle 2 \neq \angle A$

由△Ⅰ、△Ⅲ可得$\angle 4 \neq \angle A$

故$\angle 3 = \angle A$

同理$\angle 6 = \angle A$

圖形變成：



Q $S_{4,4}=1$ $\therefore 2\angle C=\angle B$

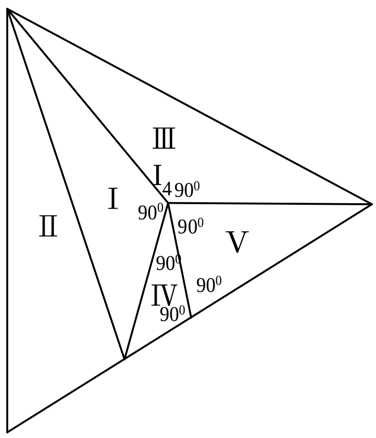
Q $S_{3,4}=1$ $\therefore \angle B=\angle C$

故不合

（9）七邊形 2，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to I_4$

Q $S_2=1$ $\therefore \angle A=90°$ $\therefore I_4=I_{4,1}$

圖形：



在△Ⅳ、△Ⅴ中

各有兩個的$90°$角

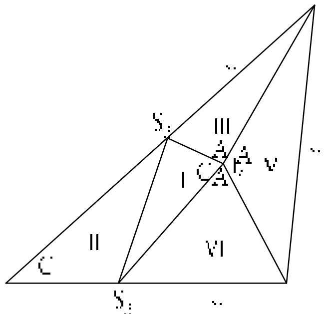
故不合

（11）七邊形 2，兩個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to I_4$

由 D2 知$V_{1,3}=1$

I_4中有$\angle C$組成者爲$I_{4,3}$ $\therefore \angle A=90°+\frac{1}{2}\angle B$

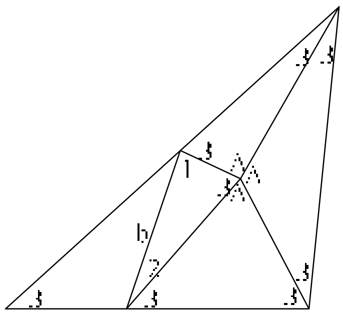
圖形：



分兩種（正三角形、$a=b$不合，**Q** $\angle A=90°+\frac{1}{2}\angle B$)：

(11.1) 等腰$(b = c \neq a)$

圖形：



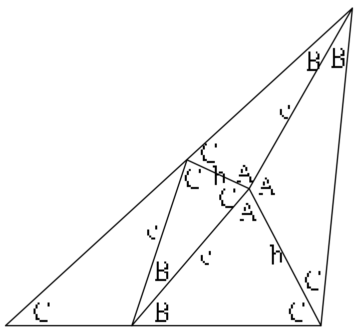
不論$\angle 1$或$\angle 2 = \angle A$

皆使$\angle A = \angle B$

故不合

(11.2) $a \neq b \neq c$

圖形：

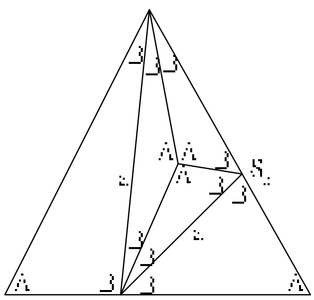


∵△ I 中有兩個$\angle C$

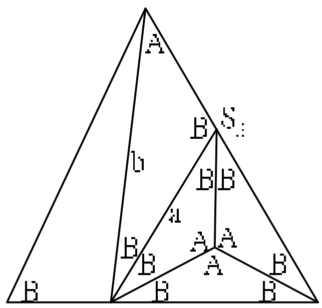
故不合

（12）七邊形 2，一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to S_4$和一個$V_3 \to I_3$

有兩種圖形：



(12.1)



(12.2)

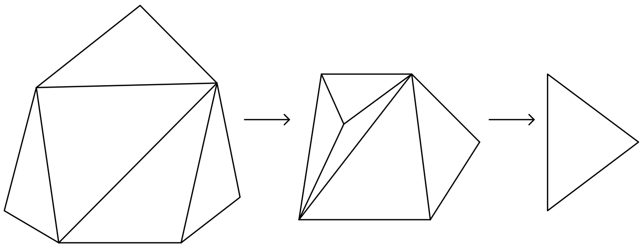
Q $I_3 = 1$ ，可得$120° - 30° - 30°$的三角形

(12.1)、(12.2)之S_3皆不為$180°$

故不合

（13）七邊形 2，兩個$V_3 \to I_3$

圖形：



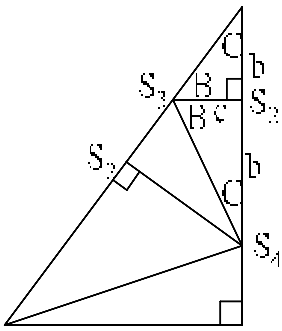
同(6)不合

（17）七邊形 3，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to S_4$

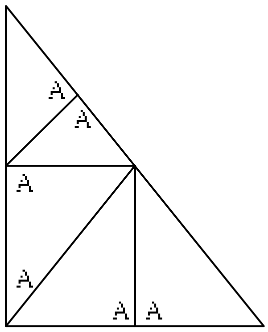
Q $S_2 = 1 \quad \therefore \angle A = 90°$

由 D2 知$V_1 \geq 1$則$V_{1,3} \geq 1$

圖形有兩種：



(17.1)



(17.2)

(17.1)

S_3中有兩個組成者爲$S_{3,2}$、$S_{3,4}$

此S_3必爲$S_{3,2}$　$(\angle B = 60°)$

故此解爲$30° - 60° - 90°$的直角三角形

但S_4必不爲$180°$

故不合

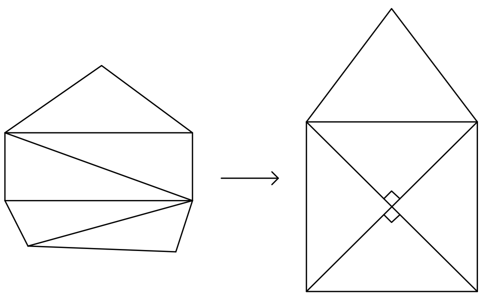
(17.2)

三角形中有兩邊平行

故不合

（21）七邊形 3，兩個$V_2 \to S_2$和一個$V_4 \to I_4$

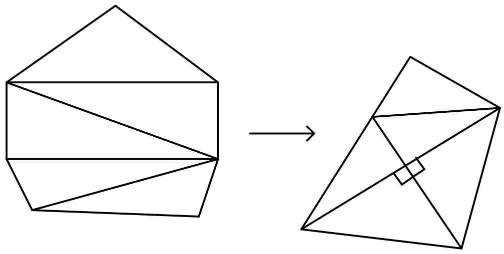
圖形：



不論S_2在何處皆不合

（22）七邊形 3，一個$V_2 \to S_2$和一個$V_3 \to S_3$和一個$V_4 \to I_4$

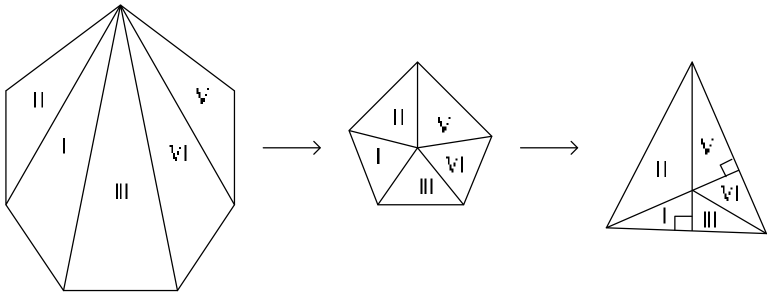
圖形：



不論 S_2 在何處皆不合

（26）七邊形 4，兩個 $V_2 \to S_2$ 和一個 $V_5 \to I_5$

圖形：



$\because S_2 = 1 \quad \therefore \angle A = 90°$

$\because$ △Ⅰ、△Ⅲ、△Ⅳ、△Ⅴ中已有 $\angle A$

$\therefore$ 組成 I_5 之 $\angle A$ 只能有一個

無符合之 I_5 結點

故不合

（27）一個 J_2

由 lap4 之證明，情形 (9) 的圖形周圍拼上第五塊三角形即成情形 (27)

由 L8 知原圖形之邊數 $= 2 + S$ 結點個數 $+2 \times I$ 結點個數

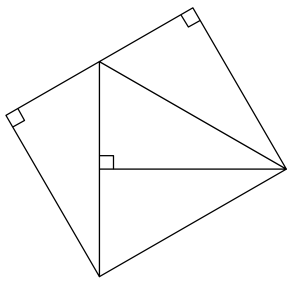
又拼合後不會有 I 結點（∵角度和邊長不合）

∴原圖形之邊數 $= 2 + S$ 結點個數

∴原圖形之邊數＝3 或 4

可能的原圖形有五種：

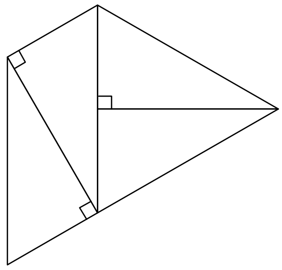
(27.1) lap4 的情形 (9.1.2)



拼上第五塊三角後，皆不爲三角形

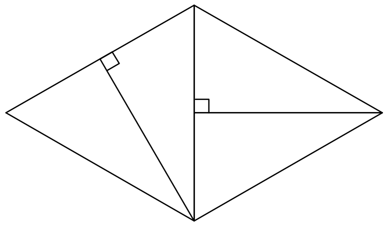
故不合

(27.2) lap4 的情形 (9.1.5)



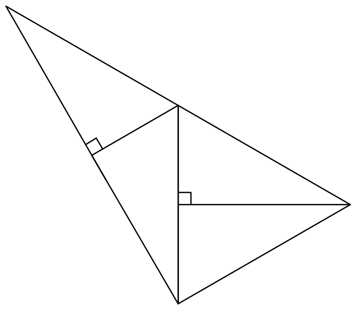
拼上第五塊三角後，皆不爲三角形
故不合

(27.3) lap4 的情形 (9.1.6)



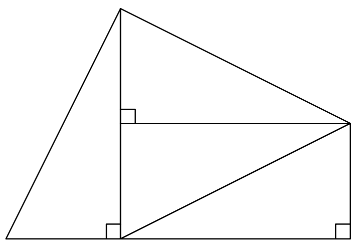
拼上第五塊三角後，皆不爲三角形
故不合

(27.4) lap4 的情形 (9.1.8)

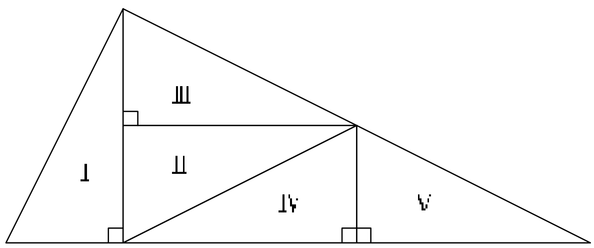


拼上第五塊三角後，皆不爲三角形
故不合

(27.5) lap4 的情形 (9.2.1)



拼上第五塊三角後
只有一種情形爲三角形



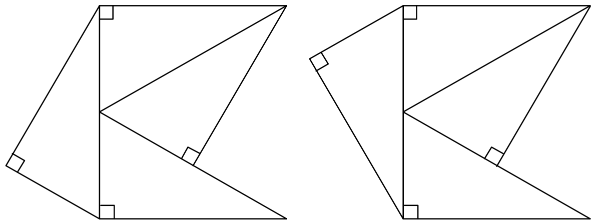
∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ全等於△Ⅴ～大△
∴此解爲邊長比 $1:2:\sqrt{5}$ 的直角三角形

（28）一個 J_3

由 L8 知原圖形之邊數$=2+S$結點個數$+2\times I$結點個數
又拼合後不會有 I 結點（∵角度和邊長不合）
∴原圖形之邊數$=2+S$結點個數
∴原圖形之邊數＝3 或 4——①
由 L6 知有四種三角形「$30°-60°-90°$的直角三角形」、「邊長比$a:c=2:1(c<b\le 2c)$的三角形」、「邊長比$\frac{1+\sqrt{13}}{2}:2:1$的三角形」和「邊長比$b:c=2:1(2c\le a<3c)$的三角形」

(28.1)　$30°-60°-90°$的直角三角形

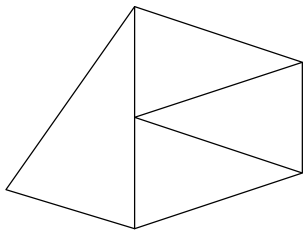
圖形有兩種：



由①知不合

(28.2) 邊長比$a:c=2:1\quad(c<b\le 2c)$的三角形

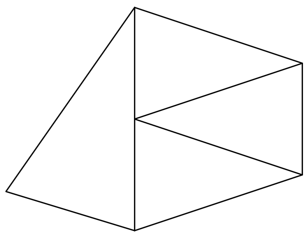
圖形：



∵圖形的邊無法減少（無法產生 S 或 I 節點）
∴由①知不合

(28.3) 邊長比$\frac{1+\sqrt{13}}{2}:2:1$的三角形

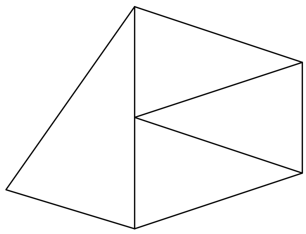
圖形：



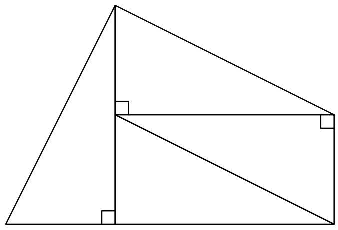
∵圖形的邊無法減少（無法產生 S 或 I 節點）
∴由①知不合

(28.4) 邊長比$b:c=2:1\quad(2c\le a<3c)$的三角形

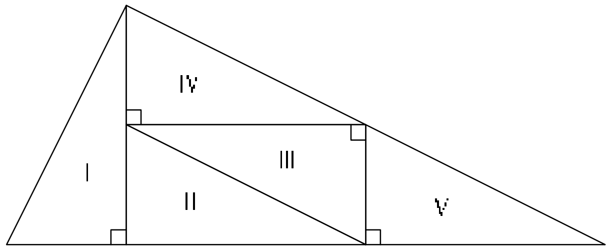
圖形：



無法產生 I 節點，但可產生 S 節點使邊減少
圖形變成：



∴由①知，若第五個三角形拼合後產生兩個 S 節點則可變成三角形只有一種拼法：



∵△Ⅰ全等於△Ⅱ全等於△Ⅲ全等於△Ⅳ全等於△Ⅴ～大△

∴此解爲邊長比$1:2:\sqrt{5}$的直角三角形

（29）一個J_4

由 L7 知皆不爲三角形

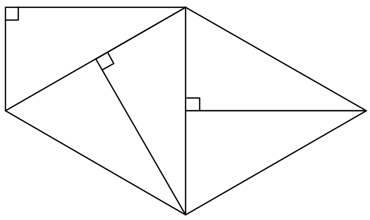
故不合

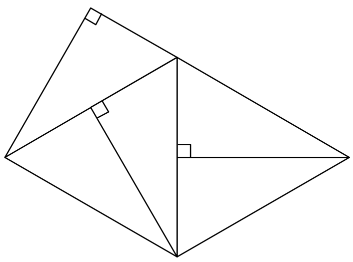
（30）兩個J_2

由 L5 知有兩種三角形「邊長比$1:\sqrt{3}:2$的直角三角形」和「邊長比$1:2:\sqrt{5}$的直角三角形」

(30.1) 邊長比$1:\sqrt{3}:2$的直角三角形

有兩種圖形：

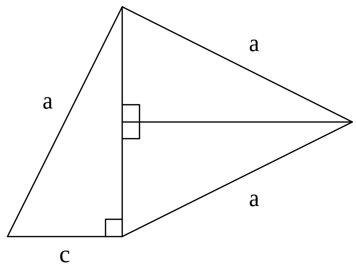




皆不爲三角形，故不合

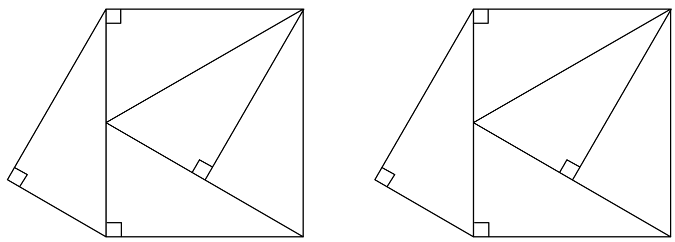
(30.2) 邊長比$1:2:\sqrt{5}$的直角三角形

由 L5 的證明知拼合邊必爲一個 b 拼兩個 c，但一個J_2的圖形周圍沒有 b，如圖。故無解



（31）一個J_2和一個J_3

有兩種圖形：



皆不爲三角形，故不合

lap 5 三角形只有 1 種，即「邊長比$2:2:1$的直角三角形（有兩種拼合方式）」。證畢□

陸、討論

一、「重複圖形」原本是使用「設未知數列方程組」證明 lap 2 三角形及 lap 3 三角形的結果，可是在處理 k≧4 的 lap k 圖形，這個方法的威力還是不夠。

二、我找到「考慮邊的拼合」，由定理 2 已經知道：在證明 lap 3 三角形的結果時，「考慮邊的拼合」比「設未知數列方程組」簡潔許多！此方法可以大大的簡化證明過程。

柒、結論

一、我在這個研究上期待以 lap 2、lap 3、lap4 及 lap5 爲基礎，並往 lap6 以上發展。

二、其實，只要是關於「圖形拼合」的問題都可以使用上我的技巧。

捌、參考資料及其他

1.藤村幸三郎、田村三郎著；張昭譯。數學歷史之謎。第一版。台北市。牛頓出版。重覆圖形（201 頁）。1996[民 85]。

2.葛登能(Martin Gardner)；葉偉文譯。詭論、鋪瓷磚、波羅米歐環。第一版。台北市。天下遠見出版。鋪瓷磚 239-253 頁。2003[民 92]。

3.廖俊維、張仁馨(民 95)。「重複圖形」。台灣 2006 年國際科展數學科作品。2006[民 95]。

【評　語】　　040417　有限三角形拼磚問題

(1) 就一現有問題出發，改進其作法，並加以推廣，頗具研究精神。

(2) 討論詳細完整，作法簡潔明瞭。

(3) 仍一些後續的發展，未來應找出較一般的作法。

(4) 作者不論寫或講，表達能力均屬上乘。