

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040416

圓錐曲線與作圖

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳紘翎	李吉彬
高二 魏翊書	連世和
高二 吳泰毅	

關鍵詞：圓錐曲線 共軛直徑 配極變換

摘要

尺規作圖定義可作出直線、圓及其互相的交點，而無法完整作出一個圓錐曲線，但在已知決定圓錐曲線的要素時，仍可利用尺規作出圓錐曲線上的點和切線。在圓錐曲線中，給焦點和給五點的初始條件其實是等價的，在參考資料3中已找到了給橢圓上五點求出兩焦點以及給拋物線上四點作出焦點頂點的尺規作圖方法；但是其中的證明程度稍高且過於繁雜，我們發現一種簡單的證明方法，並將類似方法延伸至雙曲線。後半部分討論作出圓錐曲線和直線、圓、圓錐曲線的交點的可行性，將尺規作圖應用在圓錐曲線上的情形作一個概括性論述。

壹、研究動機：

在高中第四冊數學課本中，有很多關於圓錐曲線的介紹，這部分都是從代數觀點入手，藉由它們的方程式特徵，延伸到一般的定義、性質等等，由於圓錐曲線的高度對稱之美，使我對相關的數學知識相當有興趣，同時不禁懷疑，可不可以把課本中的代數敘述轉換成幾何的語言，因此展開了一系列的研究，希望以尺規為工具，探討圓錐曲線的幾何性質。

貳、研究目的：

- 一、 給定決定圓錐曲線的最簡要素—五點，找出其後續作圖的可能性
- 二、 給定圓錐曲線和一直線，探討尺規作圖作出交點的可能性
- 三、 給定圓錐曲線和一圓，探討尺規作圖作出交點的可能性
- 四、 給定兩個圓錐曲線，探討尺規作圖作出交點的可能性

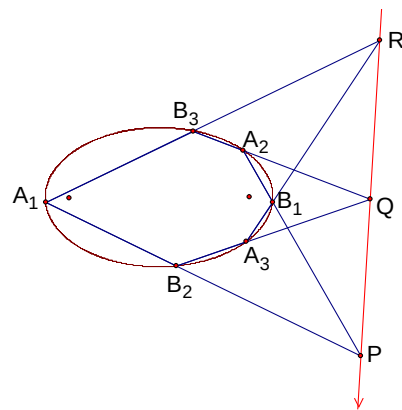
參、研究設備及器材：

- 一、 電腦
- 二、 *Geometry Sketchpad*、*Maple*

肆、研究原理

一、帕斯卡(Pascal)定理 (見[參考資料3](#))

圓錐曲線的內接六邊形，其三雙對邊的交點共線。逆定理亦成立。



二、圓錐曲線的直徑 (見[參考資料1](#))

除了高中課本介紹的圓錐曲線性質，我們找到有關圓錐曲線的直徑與共軛直徑的定義與性質，條列如下：

(一)定義 1：直徑

圓錐曲線中一組平行弦的中點都共線，這條直線稱為這組平行弦所決定的**直徑**。橢圓和雙曲線的直徑會通過中心，拋物線的直徑平行主軸。直徑和圓錐曲線的交點(雙曲線可能是其和共軛雙曲線的交點)，稱為直徑的**端點**。

1.性質 1-1-1

過圓錐曲線的直徑端點所作的切線，平行於決定這條直徑的諸平行弦。若為橢圓和雙曲線，過直徑的兩端點所作的切線互相平行。

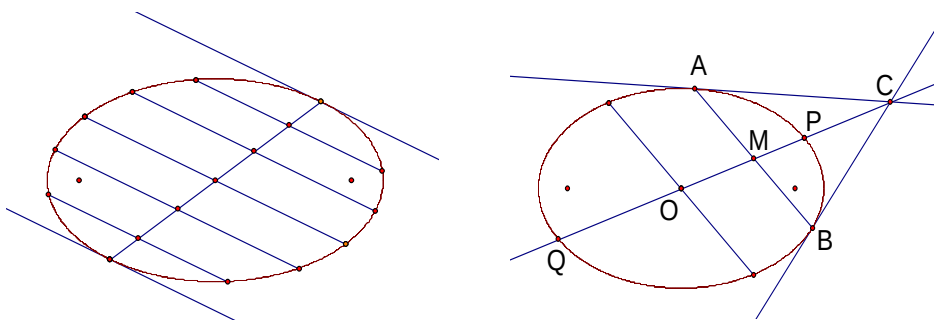
2.性質 1-1-2

從圓錐曲線上任意一弦的兩端點 A 、 B 所作的兩切線，其交點 C ，在平行 $\overline{AB}$ 的諸弦所確定的直徑上。

3.性質 1-1-3

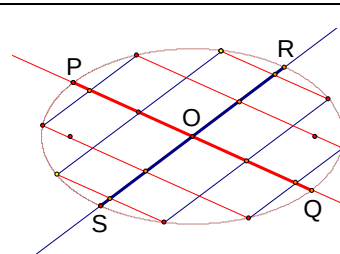
O 為橢圓或雙曲線中心， M 為 $\overline{AB}$ 中點，則 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \sqrt{\overline{OM} \cdot \overline{OC}}$

(幾何平均)



(二)定義 2：共軛直徑

設 $\overline{PQ}$ 是橢圓或雙曲線的一條直徑，作平行於這條直徑的諸弦，此平行弦確定的直徑 $\overline{RS}$ 稱為 $\overline{PQ}$ 的共軛直徑。拋物線的直徑則沒有相應的共軛直徑。



1.性質 1-2-1

如果橢圓或雙曲線的兩條直徑，其中第一條直徑是第二條直徑的共軛直徑，則第二條直徑也是第一條直徑的共軛直徑。

2.性質 1-2-2

橢圓或雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其直徑 $y = kx$ 和 $y = k'x$ (k 和 k' 均為非零實數)

互為共軛直徑的充要條件是 $k \cdot k' = \mp \frac{b^2}{a^2}$ 。(橢圓取負，雙曲線取正)

3.性質 1-2-3

雙曲線的一對共軛直徑之端點分別在互相共軛的雙曲線上。

三、配極變換 (見[參考資料2](#))

我們把有關的配極變換作成一系列 GSP 的工具，對簡化及統一圓錐曲線的相關作圖有相當大的幫助。

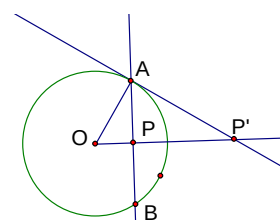
(一)反演變換

給定平面上一點 P 及一圓 O ，其圓心 O ，半徑 k ，

在 $\overline{OP}$ 上存在一點 P' 使 $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k^2$ ，則 $P \rightarrow P'$

的對應關係我們稱作反演，點 P' 稱為點 P 關於圓 O 的反演點。

註：反演變換可用尺規作出(見附錄一之一)



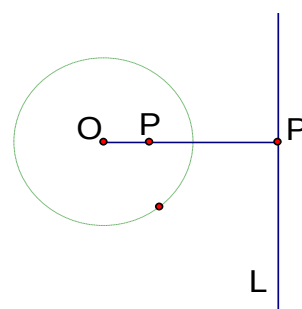
(二)配極變換

定義一：點的配極

給定平面上一點 P 及一圓 O ，其圓心 O ，半徑 k (稱點 O 為配極中心，圓 O 為配極圓)，點 P' 為點 P 關於圓 O 的反演點，直線 L 過 P' 且垂直

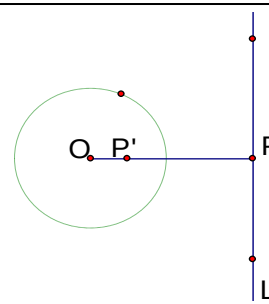
$\overline{OP}$ ，則稱直線 L 為點 P 關於圓 O 的極線，點

$P \rightarrow$ 線 L 稱為點的配極。



定義二：線的配極

給定平面上一直線 L 及一圓 O ，其圓心 O ，半徑 k ， $\overline{OP}$ 垂直直線 L 於點 P ，點 P 關於圓 O 的反演點為點 P' ，則稱點 P' 為直線 L 關於圓 O 的極點，線 $L \rightarrow$ 點 P 稱為線的配極。



1.性質 2-2-1：

點 P 在直線 L 上，兩者對同一圓配極後， L 的極點在 P 極線上；故共線的若干個點，經配極變換後形成若干條共點的線，反之亦然。

定義三：圓的配極(詳見附錄一之二-1)

作圓 A 關於圓 O 的配極像可得到不同的圓錐曲線。當我們把圓錐曲線描述為圓 A 的配極像時，可看作圓 A 的切線關於圓 O 的極點構成的軌跡，也可看作圓 A 上的點關於圓 O 的極線的包絡圖形，因為 GSP 不能作直線的包絡圖形，故此部分我們一律以圓 A 的切線關於圓 O 的極點構成的軌跡來討論。

2.性質 2-3-1：

(1)圓錐曲線的形狀決定於圓 A 半徑 r 及 $\overline{OA}$ 長度，而其離心率 $e = \frac{\overline{OA}}{r}$ 。

- (i) 配極中心 O 在圓 A 內 $\Leftrightarrow$ 配極像為橢圓
- (ii) 配極中心 O 在圓 A 上 $\Leftrightarrow$ 配極像為拋物線
- (iii) 配極中心 O 在圓 A 外 $\Leftrightarrow$ 配極像為雙曲線

(2)配極圓的半徑 k 不影響圓錐曲線的形狀，只影響圓錐曲線的大小。

(3)配極中心 O 即為圓錐曲線(配極像)的一個焦點。

(4)點 A 關於圓 O 的極線是圓錐曲線的一條準線

定義四：圓錐曲線的配極(詳見附錄一之二-2)

在圓的配極中，圓配極成圓錐曲線，反過來圓錐曲線也可配極成圓，但條件限制在配極中心必須是圓錐曲線的焦點。我們嘗試把配極中心移到別的地方，得到圓錐曲線的配極像，利用電腦的輔助，進一步發現下列的性質。

3.性質 2-4-1：

- (1)配極中心在焦點上 $\Leftrightarrow$ 配極像為圓
- (2)配極中心在圓錐曲線內 $\Leftrightarrow$ 配極像為橢圓
- (3)配極中心在圓錐曲線上 $\Leftrightarrow$ 配極像為拋物線
- (4)配極中心在圓錐曲線外 $\Leftrightarrow$ 配極像為雙曲線

註一：這裡我們定義：一圓錐曲線將所在平面分成若干個部分，包含焦點的部分稱為圓錐曲線內；不包含焦點的部分稱為圓錐曲線外。

註二：點、線的配極像可用尺規作出，配極像若是圓錐曲線則無法用尺規作出，我們是利用 GSP 作出其軌跡。

伍、研究過程及方法

定義：

已知一 橢圓 $\equiv$ 已知雙焦點及橢圓上一點
已知一 雙曲線 $\equiv$ 已知雙焦點及雙曲線上一點
已知一 拋物線 $\equiv$ 已知焦點及頂點(或焦點及準線)
(以上作圖參見附錄一之三)

註：已知一圓錐曲線並非代表能描出所有的點，而是足夠多點，且可於曲線取點(自由點)，但不可取兩曲線的交點(特定點)

一、過給定五點的圓錐曲線

圓錐曲線在直角座標裡的一般式： $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，若曲線過原點，則 $F=0$ ，否則令 $F=1$ ，在一平面上給定五個相異點，將五點的座標代入一般式，可解得一組 (A, B, C, D, E) ，所以五點可決定一個圓錐曲線。

其中 $\Delta = B^2 - 4AC$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 雙曲線類 (包括雙曲線、兩相交直線)

$\Delta = 0 \Rightarrow$ 拋物線類 (包括拋物線、兩平行直線、兩重合直線、無圖形)

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 橢圓類 (包括橢圓、圓、一點、無圖形)

以下五點決定的圓錐曲線只討論橢圓、拋物線、雙曲線而不考慮退化情形。

註：給定五點，由帕斯卡定理可作出曲線上的第六個點(參見附錄一)，為確定給定五點的條件是否能和初始定義的條件等價，以下研究「給定五點，如何找出圓錐曲線的焦點」。

(一)利用帕斯卡定理，作出圓錐曲線的切線

給定平面上五點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 B_1 、 B_2 ，此五點決定一圓錐曲線，過 A_1 作此圓錐曲線的切線。

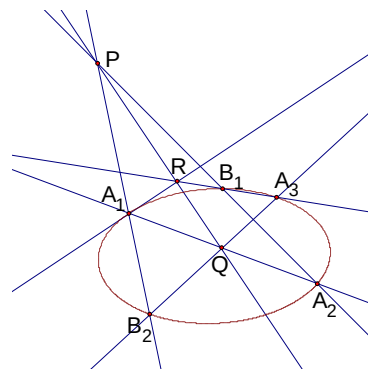
想法：

由帕斯卡定理，當 A_1 趨近於 B_3 ，則 $\overline{A_1B_3}$ 相當於過點 A_1 的切線。

作法：

1. 連 $\overline{A_1B_2}$ 交 $\overline{A_2B_1}$ 於 P ，連 $\overline{A_3B_2}$ 交 $\overline{A_2A_1}$ 於 Q 。

2. 連 $\overline{A_3B_1}$ 交 $\overline{PQ}$ 於 R ，則 $\overline{A_1R}$ 即為切線。



(二)作圓錐曲線的直徑

給定平面上五點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 ，此五點決定一圓錐曲線，作此圓錐曲線的一條直徑。

想法：

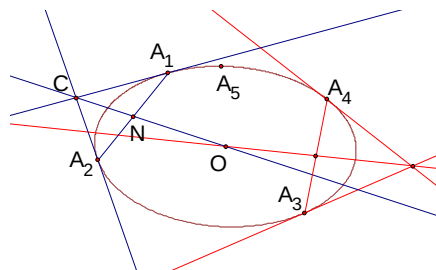
我們可以根據直徑的性質，利用兩條切線作出一條直徑。

作法：

1. 由步驟一，作過 A_1 、 A_2 的兩條切線交於 C 。

2. 取 $\overline{A_1A_2}$ 中點 N 。

3. 連 $\overrightarrow{CN}$ ，則 $\overrightarrow{CN}$ 即為橢圓的一條直徑。



(三)判別圓錐曲線的類型

先由步驟二作出圓錐曲線的兩條不重合的直徑，然後依照以下方法便可判定經過 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 之圓錐曲線的類型。

1. 若這兩條直徑平行，此圓錐曲線為無心圓錐曲線，即拋物線。
2. 若這兩條直徑相交，其交點 O 即為此圓錐曲線的中心，當五點構成凸五邊形且 O 在五邊形內，或五點和 O 構成凸六邊形，則此圓錐曲線為橢圓。
3. 其他情況為雙曲線。

1.拋物線的情況：

已知五點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 在一拋物線上，求作：此拋物線的焦點。

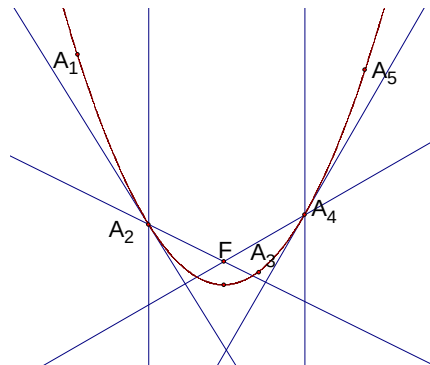
想法：

因為在步驟一、二中已作出拋物線的切線及直徑，我們可以應用拋物線的光學性質，「沿直徑入射的光線反射後通過焦點」，來求出其焦點。

作法：

(1) 過 A_2 、 A_4 分別作拋物線的切線、直徑(過 A_2 、 A_4 且平行其他直徑的直線)。

(2) 作過 A_2 的直徑關於切線的對稱線、過 A_4 的直徑關於切線的對稱線，兩線交於 F ， F 即為所求。



2.非拋物線的情況：請參見以下討論

(四)作出有心圓錐的一對共軛直徑

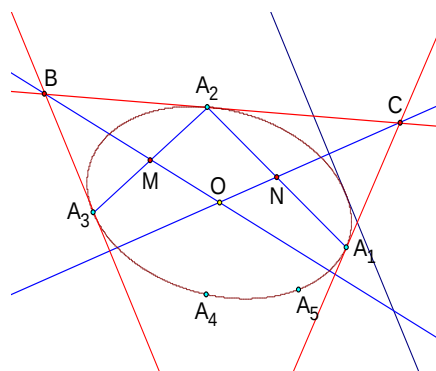
已知一橢圓或雙曲線上五點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 ，作此橢圓或雙曲線的一對共軛直徑與其端點。

想法：

我們可以根據共軛直徑的性質，作出一對共軛直徑。

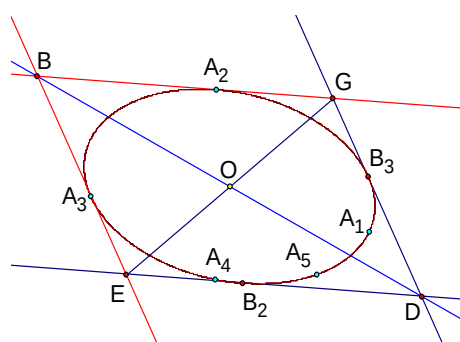
作法：

1. 由步驟二，作兩條直徑 $\overline{BM}$ 、 $\overline{CN}$ 交於圓錐曲線的中心 O 。



2. 以 O 為中心作 A_2 的對稱點 B_2 、 A_3 的對稱點 B_3 。

3. 過 B_2 、 B_3 分別作 $\overline{BA_2}$ 、 $\overline{BA_3}$ 的平行線交於 D ，設 $\overline{B_2D}$ 交 $\overline{BA_3}$ 於 E ， $\overline{B_3D}$ 交 $\overline{BA_2}$ 於 G 。



4. 連 $\overline{BD}$ 、 $\overline{EG}$ 即為此橢圓或雙曲線的一對共軛直徑，設 $\overline{EG}$ 交 $\overline{A_2B_3}$ 於 Q 。

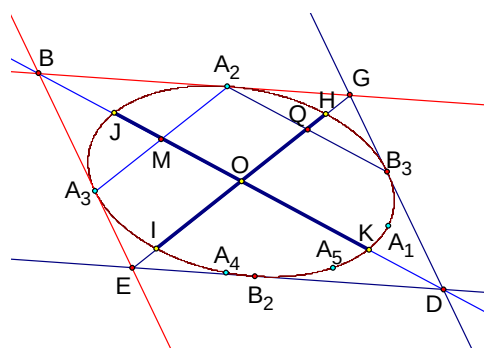
5. 在 $\overline{BD}$ 上取 J 、 K 使

$$\overline{OJ} = \overline{OK} = \sqrt{\overline{OM} \cdot \overline{OB}},$$

在 $\overline{EG}$ 上取 H 、 I 使

$$\overline{OH} = \overline{OI} = \sqrt{\overline{OQ} \cdot \overline{OF}},$$

則 J 、 K 與 H 、 I 即為共軛直徑 $\overline{BD}$ 、 $\overline{EG}$ 的端點。



(五)找出有心錐線的兩對稱軸，求得其焦點

1. 橢圓

已知橢圓及一對共軛直徑長 $\overline{PR}$ 、 $\overline{QS}$ ，求作橢圓的焦點。

說明：

此步驟為給定五點，繼續討論此五點決定的圓錐曲線的進一步作圖的關鍵，若知道焦點，許多作圖便可輕易解決。我們嘗試許久，最後在[參考資料3](#)找到相關資料。

作法：

(1) 將 Q 繞中心 O 順時針旋轉 90° 至 Q_1 。

(2) 連 $\overline{PQ_1}$ ，取 $\overline{PQ_1}$ 中點 M 。

(3) 以 M 為圓心， $\overline{MO}$ 長為半徑作圓交

$\overline{PQ_1}$ 於 A 、 B ，則 $\overline{OA}$ 為橢圓的長軸，

$\overline{OB}$ 為其短軸。

(4) 以 O 為圓心，分別以 $\overline{PA}$ 長為半徑畫

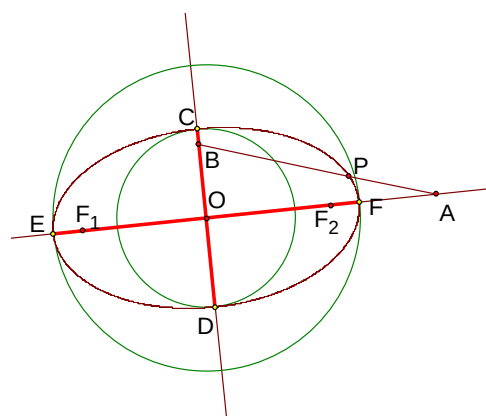
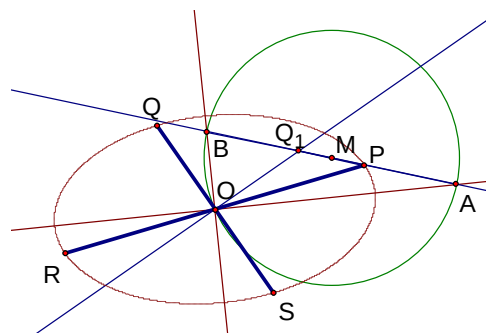
圓交 $\overline{OB}$ 於 C 、 D ， $\overline{PB}$ 長為半徑畫圓

交 $\overline{OA}$ 於 E 、 F ，則 E 、 F 、 C 、 D 為橢

圓長短軸端點。

(5) 以 C 為圓心， $\overline{OE}$ 為半徑，交 $\overline{EF}$ 於

點 F_1 、 F_2 ，則 F_1 、 F_2 即為焦點。



證明：

不失一般性，假設橢圓中心為座標系原點，長短軸長為 a 、 b 且分別在 X 、 Y 軸上，如此一來相當於證明 $\overline{PQ_1}$ 和兩軸的交點 A 、 B 滿足： $\overline{PQ_1}$ 中點 M 亦為 $\overline{AB}$ 中

點，且 $\overline{AP}=b$ ， $\overline{BP}=a$ ，以下就是其證明。

(1) 假設 P 點座標 (x_1, y_1) 我們將用 a, b, x_1, y_1 來表示 Q 、 Q_1 、 A 、 B 等點座標。

$$\text{由共軛直徑的性質 1-2-2, } m_{\overline{OP}} \cdot m_{\overline{OQ}} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow m_{\overline{OQ}} = -\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{假設 } Q \text{ 點座標 } (-t, \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} t), \text{ 代入橢圓方程式得 } \frac{(-t)^2}{a^2} + \frac{\frac{b^4 x_1^2}{a^4 y_1^2} \cdot t^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow t^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2 x_1^2}{a^4 y_1^2} \right) = 1 \Rightarrow t^2 = \frac{a^4 y_1^2}{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2} = \frac{a^4 y_1^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 y_1^2}{b^2}$$

$$\text{如圖：} \because -x_2 \text{ 和 } y_1 \text{ 同號，} \therefore t \text{ 和 } y_1 \text{ 同號，由上式得 } t = \frac{ay_1}{b},$$

$$\text{故得知 } Q \text{ 點座標 } \left(-\frac{ay_1}{b}, \frac{bx_1}{a}\right) \text{ 及其旋轉 } 90^\circ \text{ 之 } Q_1 \text{ 座標 } \left(\frac{bx_1}{a}, \frac{ay_1}{b}\right),$$

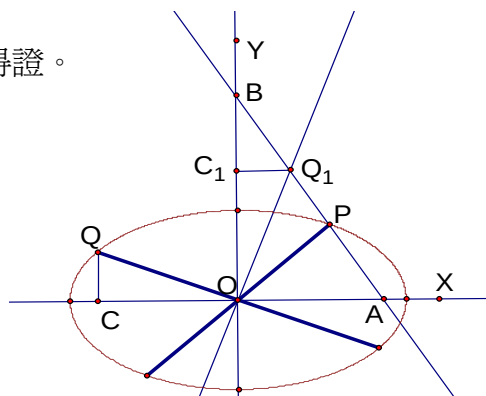
$$\therefore \overline{PQ_1} \text{ 直線方程式：} y - y_1 = \frac{y_1 - \frac{a}{b} y_1}{x_1 - \frac{a}{b} x_1} (x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = -\frac{a}{b} \frac{y_1}{x_1} (x - x_1)$$

$$\text{令 } x=0, y=0 \text{ 代入直線方程式可得 } B(0, \frac{a+b}{b} y_1), A(\frac{a+b}{a} x_1, 0),$$

$$\text{因此 } \overline{PQ_1} \text{ 中點 } M \text{ 座標 } \left(\frac{a+b}{2a} x_1, \frac{a+b}{2b} y_1\right), M \text{ 亦為 } \overline{AB} \text{ 中點。}$$

$$(2) \text{ 利用橢圓方程式化簡，得 } \overline{BP} = \sqrt{x_1^2 + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}} = \sqrt{a^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right)} = a,$$

$$\overline{AP} = \sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^2} + y_1^2} = \sqrt{b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right)} = b \text{ 得證。}$$



2. 雙曲線

已知雙曲線及一對共軛直徑長 $\overline{PR}$ 、 $\overline{QS}$ ，求作雙曲線的焦點。

說明：

在[參考資料3](#)中並沒有提到雙曲線的相關作圖，經驗證後我們發現橢圓的作圖方法並不適用於雙曲線，以下是我們用在雙曲線的方法。

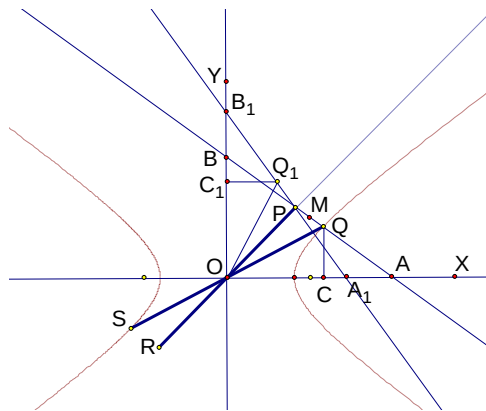
想法：

- (1) 不失一般性，假設雙曲線中心為座標系原點，實虛軸長為 a 、 b 且分別在 X 、 Y 軸上，我們需要類似橢圓中的 M 點及 a 、 b 長以作出其兩軸。
- (2) 假設 Q 點座標 (x_1, y_1) ，類似橢圓的證明方法，得 P 點座標 $(\frac{ay_1}{b}, \frac{bx_1}{a})$ ，經過一系列的推導，我們證明 $\overline{PQ}$ 和兩軸的交點 A 、 B 滿足： $\overline{PQ}$ 中點 M 亦為 $\overline{AB}$ 中點，所以我們可以作出兩軸，但是與在這裡 $\overline{AP}$ 、 $\overline{BP}$ 都不等於 a 或 b ，只知道 $a:b = \overline{OA}:\overline{OB}$ 因此需要更多步驟來確定實虛軸端點。
- (3) 作 Q 關於 $\angle AOB$ 的角平分線的對稱點 Q_1 ，其座標 $(\frac{bx_1}{a}, \frac{ay_1}{b})$ ，

$$\overline{PQ_1} \text{ 直線方程式：} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_1 - \frac{a}{b}y_1}{x_1 - \frac{a}{b}x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = -\frac{a}{b} \frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

令 $x=0$ 、 $y=0$ 代入上式可得 $\overline{PQ_1}$ 與兩軸交點： $B_1(0, \frac{a+b}{b}y_1)$ 、 $A_1(\frac{a+b}{a}x_1, 0)$

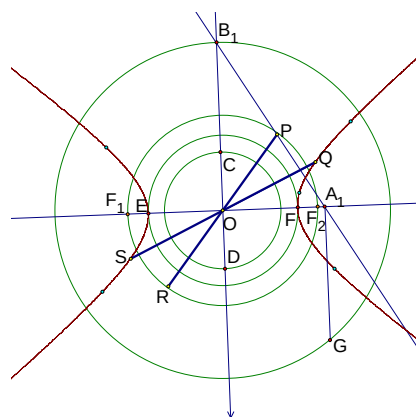
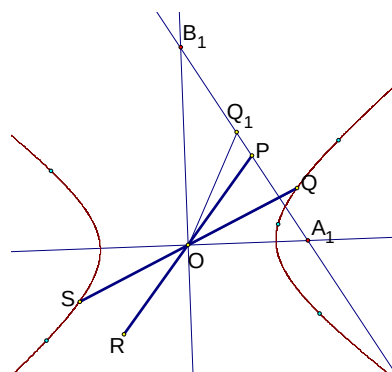
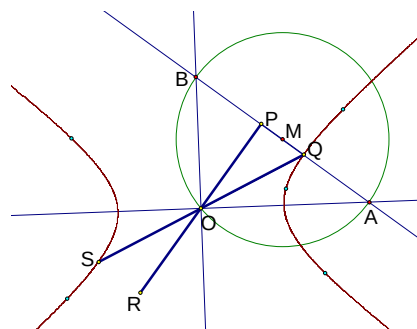
$$\Rightarrow \sqrt{|\overline{OA_1}^2 - \overline{OB_1}^2|} = \sqrt{(a+b)^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right)} = a+b, \text{ 再配合比例可作出 } a、b。$$



作法：

- (1) 連 $\overline{PQ}$ ，取 $\overline{PQ}$ 中點 M 。
- (2) 以 M 為圓心， $\overline{MO}$ 長為半徑作圓交 $\overline{PQ}$ 於 $A、B$ ，則 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 為雙曲線的兩軸，取 $\overrightarrow{OA}$ 實軸， $\overrightarrow{OB}$ 為虛軸。
- (3) 作 $\angle AOB$ 的角平分線，作 Q 關於此角平分線的對稱點 Q_1 。
- (4) 連 $\overline{PQ_1}$ 交 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 於 $A_1、B_1$ 。
- (5) 作一線段 $\overline{AG}$ 使 $\overline{AG}^2 = \left| \overline{OA_1}^2 - \overline{OB_1}^2 \right|$ 。
- (6) 將 $\overline{AG}$ 分成兩部分，長度分別為 $a、b$ ，
使 $a : b = \overline{OA} : \overline{OB}$
- (7) 以 O 為圓心，分別以 b 為半徑畫圓交 $\overrightarrow{OB}$ 於 $C、D$ ， a 為半徑畫圓交 $\overrightarrow{OA}$ 於 $E、F$ ，則 $\overline{CD}$ 為雙曲線共軛軸、 $\overline{EF}$ 為雙曲線實軸。
- (8) 在 $\overline{EF}$ 上取點 $F_1、F_2$ 使

$$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = \sqrt{a^2 + b^2}，則 F_1、F_2 即為焦點。$$



小結論：

由以上研究結果可知：給定五點的初始條件和定義中的初始條件是等價的，兩者皆可完整的描述一個圓錐曲線。

二、過給定四點的拋物線

從代數的觀點，拋物線方程式 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ， $F = 0 \vee 1$ 滿足 $B^2 - 4AC = 0$ ，只要再加上四點決定的四個一次方程式，就可以確定此拋物線 (有兩個解)，我們也可以用尺規作圖確定通過四點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 的拋物線。在作圖之前，我們會用到兩個引理(證明參見附錄)。

引理 1

設一拋物線焦點為 F ，準線為 L ，主軸為 N ， N 與 L 的交點 O 。令拋物線的一弦 $\overline{PQ}$ ，其中點為 M ，作 $\overline{PQ}$ 的中垂線交 N 於 A ，作 $\overline{MB} \perp N$ ， B 為垂足，過 P 作法線交 N 於 C ，作 $\overline{PD} \perp N$ ， D 為垂足。則 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{FO}$ 。

引理 2

設 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 為拋物線上的四點， $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 G ，並分別交拋物線主軸於 H 、 H' ，則 $\frac{\overline{GA_1} \cdot \overline{GA_3}}{\overline{GA_2} \cdot \overline{GA_4}} = \frac{\overline{GH}^2}{\overline{GH'}^2}$ 。

作法：

(1) 連四邊形的對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 交於 G 。

(2) 在 $\overline{A_1A_3}$ 取兩點 P_1 、 P_2 使 $\overline{GP_1} = \overline{GP_2} = \sqrt{\overline{GA_1} \times \overline{GA_3}}$ ；

在 $\overline{A_2A_4}$ 取兩點 Q_1 、 Q_2 使 $\overline{GQ_1} = \overline{GQ_2} = \sqrt{\overline{GA_2} \times \overline{GA_4}}$ ；

則 $P_1Q_1P_2Q_2$ 構成一平行四邊形，而通過 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 的兩拋物線之主軸分別平行於 $P_1Q_1P_2Q_2$ 的一邊。

(3) 這裡先以主軸平行 $\overline{P_1Q_1}$ 的拋物線為例。

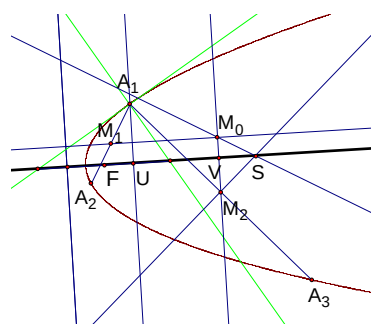
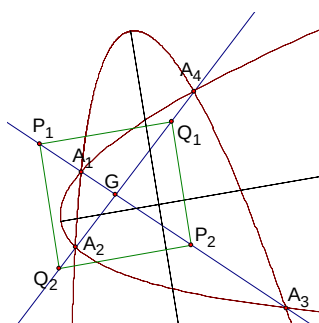
作 $\overline{A_1A_2}$ 的中點 M_1 、 $\overline{A_1A_3}$ 的中點 M_2 。

(4) 過 M_1 作一直線平行 $\overline{P_1Q_1}$ ，過 M_2 作一直線垂直

$\overline{P_1Q_1}$ ，兩者交於 M_0 。

(5) 過 M_0 作一直線垂直 $\overline{A_1A_2}$ ，

過 M_2 作一直線垂直 $\overline{A_1A_3}$ ，兩者交於 S 。



(6) 過 S 作一直線平行 $\overline{P_1Q_1}$ ，即是拋物線主軸。

(7) 過 A_1 作 $\overline{AU}$ 垂直主軸， U 為垂足，

過 M_2 作 $\overline{M_2V}$ 垂直主軸， V 為垂足。

由引理 1 即可得過 A_1 的法線、切線，焦點即為法線、切線與主軸交點的中點，準線再由引理 1 得到，因此，主軸平行 $\overline{P_1Q_1}$ 的拋物線已可作出。同理

重複步驟(3)至(7)亦可作出主軸平行 $\overline{P_1Q_2}$ 的拋物線。

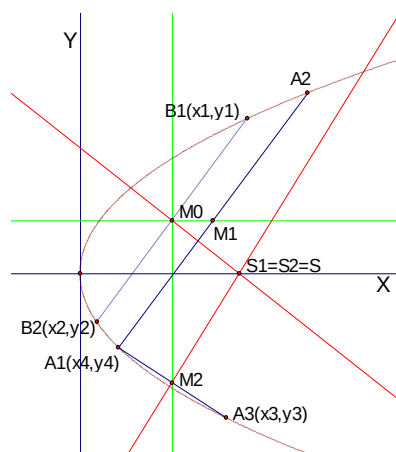
證明：

(1) 假設 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 分別交拋物線主軸於 H 、

$$H'，由引理二得 \frac{\overline{GP_i}}{\overline{GQ_j}} = \frac{\sqrt{\overline{GA_1} \cdot \overline{GA_3}}}{\sqrt{\overline{GA_2} \cdot \overline{GA_4}}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{GH'}}$$

($i, j=1$ 或 2)，根據相似形原理， $\overline{P_iQ_j} \parallel \overline{HH'}$ ，

即 $\overline{P_iQ_j}$ 平行主軸。



(2) M_1 為弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點，且 $\overline{M_1M_0}$ 平行主軸，即 $\overline{M_1M_0}$ 為拋物線的一條直徑，

故 M_0 為另一弦(假設為 $\overline{B_1B_2}$)的中點。又因為 $\overline{M_2M_0}$ 垂直主軸，因此假設此

拋物線為 $y^2 = 4cx$ 時， M_2 與 M_0 的 x 座標相等。

設 $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_1(x_4, y_4)$ ，則 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$ 。因為

$\overline{B_1B_2} \parallel \overline{A_1A_2}$ ， $\overline{M_0S} \perp \overline{A_1A_2}$ ，所以 $\overline{M_0S}$ 是 $\overline{B_1B_2}$ 的中垂線，

從以上引理 1 的證明過程可推得 $\overline{M_0S}$ 與主軸的交點(假設 S_1)為

$(\frac{x_1 + x_2}{2} + 2c, 0)$ ；另外 $\overline{M_2S}$ 則是 $\overline{A_1A_3}$ 的中垂線，也可推得 $\overline{M_2S}$ 與主軸的交

點(假設 S_2)為 $(\frac{x_3 + x_4}{2} + 2c, 0)$ 。

但因為 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2}$ ，所以 $S_1 = S_2$ ，即 $\overline{M_0S}$ 、 $\overline{M_2S}$ 、主軸三線共點，

故主軸即為通過 S 且平行 $\overline{P_1Q_1}$ 的直線。

(3) 假設拋物線焦點 F ，

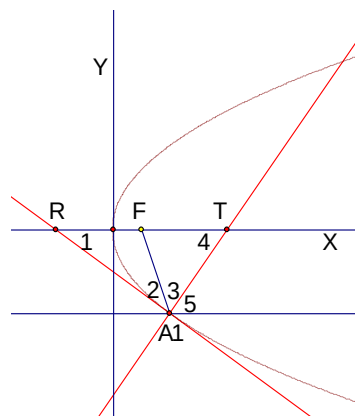
過 A_1 的切線、法線分別交主軸於 R 、 T 兩點，

由拋物線的光學性質知，

$$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 5 = \angle 4,$$

因此 $\overline{FR} = \overline{FA_1} = \overline{FT}$ ，

即 F 為 $\overline{RT}$ 中點。



三、圓錐曲線與直線的交點

已知一圓錐曲線，一直線 $\overline{AB}$ 和此圓錐曲線相交，求作交點。

(一)作法一：

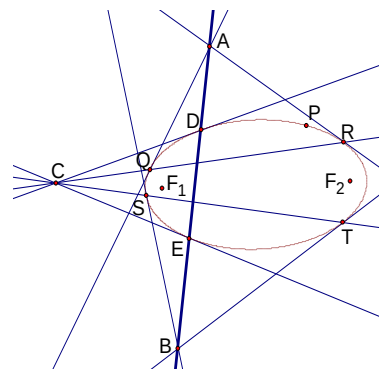
1. 由作圖 1-3、1-6、1-9(參見附錄)，作 $\overline{AQ}$ 、 $\overline{AR}$ 切圓錐曲線

2. 於 Q 、 R ， $\overline{BS}$ 、 $\overline{BT}$ 切圓錐曲線於 S 、 T 。

連 $\overline{QR}$ 、 $\overline{ST}$ ，兩線交於 C 。

3. 過 C 作 $\overline{CD}$ 、 $\overline{CE}$ 切圓錐曲線於 D 、 E ，則 D 、 E

即為所求。



證明：

(1) 設此圓錐曲線 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ， $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 。

(2) $\overline{QR}$ 是點 A 關於此圓錐曲線的極線，其方程式為：

$$f_1(x, y) = Ax_1x + B \cdot \frac{x_1y + y_1x}{2} + Cy_1y + D \cdot \frac{x + x_1}{2} + E \cdot \frac{y + y_1}{2} + F = 0$$

(3) $\overline{ST}$ 是點 B 關於此圓錐曲線的極線，其方程式為：

$$f_2(x, y) = Ax_2x + B \cdot \frac{x_2y + y_2x}{2} + Cy_2y + D \cdot \frac{x + x_2}{2} + E \cdot \frac{y + y_2}{2} + F = 0$$

(4) $\overline{QR}$ 、 $\overline{ST}$ 交於 $C(x_3, y_3)$ ，則 $f_1(x_3, y_3) = 0$ ， $f_2(x_3, y_3) = 0$ 。

(5) $\overline{DE}$ 是點 C 關於此圓錐曲線的極線，其方程式為：

$$f_3(x, y) = Ax_3x + B \cdot \frac{x_3y + y_3x}{2} + Cy_3y + D \cdot \frac{x + x_3}{2} + E \cdot \frac{y + y_3}{2} + F = 0，$$

由(3)知 $f_3(x_1, y_1) = 0$ ， $f_3(x_2, y_2) = 0$ ， $\therefore A、B$ 在 $\overline{DE}$ 上，即 $D、E$ 在 $\overline{AB}$ ，又 $D、E$ 在圓錐曲線上， $\therefore D、E$ 即為所求。

(二)作法二：

想法：

我們嘗試把此圓錐曲線和直線 $\overline{AB}$ 配極，配極中心若選擇在圓錐曲線任一焦點上，則配極後圓錐曲線變換成圓 O ，直線 $\overline{AB}$ 變換成一點 X ，圓錐曲線和 $\overline{AB}$ 的交點 $D、E$ 既在圓錐曲線上，也在 $\overline{AB}$ 上，所以點 $D、E$ 配極後的直線既切圓 O ，又過點 X ，經過此變換，可以把作圓錐曲線和直線的交點，轉化為過點作圓的切線，然而後者是相當容易。

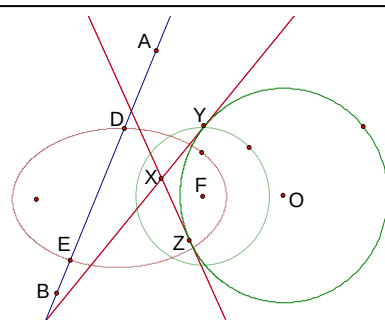
作法：

1. 以 F 為圓心任作一圓。

2. 作給定的圓錐曲線和直線 $\overline{AB}$ 的關於圓 F 的配極像，分別得到圓 O 和點 X 。

3. 過 X 作圓 O 的切線 $\overline{XY}$ 、 $\overline{XZ}$

4. 作 $\overline{XY}$ 、 $\overline{XZ}$ 關於圓 F 的配極像，分別得到點 $D、E$ ，則 $D、E$ 即為所求。



說明：

作法一中，當 $\overline{AB}$ 通過圓錐曲線中心(在拋物線時為平行主軸)時， $\overline{AB}$ 是圓錐曲線的直徑， $\overline{QR}$ 、 $\overline{ST}$ 為確定此直徑的兩條平行弦，所以 $\overline{QR}$ 、 $\overline{ST}$ 的交點 C 不存在，因此作不出圓錐曲線和 $\overline{AB}$ 的交點。作法二沒有作法一的瑕疵，並且對後來的推廣有相當大的幫助。

四、圓錐曲線與圓的交點

接下來我們想研究的，就是作出圓錐曲線和圓、甚至圓錐曲線的交點，即能不能用尺規作圖找出兩個二次曲線的交點，不過我們發現，在很多情況下，是無法用尺規作圖是無法完成的。舉一個簡單的例子，直角座標系中拋物線

$y = x^2$ 和雙曲線 $xy = 2$ 的交點是 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ，是個無法由尺規求得的無理數點。

從代數的觀點看來，令平面上兩個二次曲線在座標系中的方程式是

$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ 及 $a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$ ，則

它們的四個交點就是將兩式聯立的解，我們可以將這四個點化成一個四次方程式的解如下：

$x=t$ where

$$\begin{aligned} & (-b_1b_2c_2a_1 - 2c_1a_2c_2a_1 + c_2^2a_1^2 + a_1c_1b_2^2 + c_1^2a_2^2 - b_1c_1b_2a_2 + b_1^2c_2a_2)t^4 + (-2c_1d_2c_2a_1 \\ & + d_2c_2b_1^2 - d_1c_2b_2b_1 - a_2e_2c_1b_1 - d_2b_2c_1b_1 - a_1c_2e_2b_1 + b_2^2c_1d_1 - a_1c_2b_2e_1 - 2c_1a_2c_2d_1 \\ & + 2a_2e_1c_2b_1 + 2d_2a_2c_1^2 - a_2b_2c_1e_1 + 2d_1a_1c_2^2 + 2e_2b_2c_1a_1)t^3 + (2f_2a_2c_1^2 + d_2^2c_1^2 \\ & - 2c_1a_2c_2f_1 + e_2^2c_1a_1 + 2f_1a_1c_2^2 + a_2e_1^2c_2 + d_1^2c_2^2 - d_1c_2b_2e_1 + f_2c_2b_1^2 - a_2e_2c_1e_1 - f_1c_2b_2b_1 \\ & - 2c_1d_2c_2d_1 - d_2e_2c_1b_1 - 2c_1f_2c_2a_1 - d_2b_2c_1e_1 + 2d_2e_1c_2b_1 - d_1c_2e_2b_1 - f_2b_2c_1b_1 \\ & + 2e_2b_2c_1d_1 + b_2^2c_1f_1 - a_1c_2e_2e_1)t^2 + (-d_2e_2c_1e_1 - f_2b_2c_1e_1 + 2f_2d_2c_1^2 - f_1c_2b_2e_1 - f_2e_2c_1b_1 \\ & - 2c_1d_2c_2f_1 - f_1c_2e_2b_1 + d_2e_1^2c_2 - d_1c_2e_2e_1 + 2e_2b_2c_1f_1 + e_2^2c_1d_1 + 2f_2e_1c_2b_1 + 2f_1d_1c_2^2 \\ & - 2c_1f_2c_2d_1)t + f_1c_1e_2^2 - 2c_1f_2c_2f_1 - e_1c_1e_2f_2 + c_2e_1^2f_2 + c_2^2f_1^2 + c_1^2f_2^2 - e_1e_2c_2f_1 = 0 \end{aligned}$$

$y=t$ where

$$\begin{aligned} & (-b_1b_2a_2c_1 + a_1^2c_2^2 - 2a_1c_2a_2c_1 + a_2^2c_1^2 + c_1a_1b_2^2 - b_1a_1b_2c_2 + b_1^2a_2c_2)t^4 + (-2a_1c_2a_2e_1 \\ & - e_2b_2a_1b_1 - c_2b_2a_1d_1 - c_2d_2a_1b_1 + b_2^2a_1e_1 + 2e_2c_2a_1^2 - 2a_1e_2a_2c_1 + e_2a_2b_1^2 + 2e_1c_1a_2^2 \\ & - c_1a_2b_2d_1 - e_1a_2b_2b_1 - c_1a_2d_2b_1 + 2c_2d_1a_2b_1 + 2d_2b_2a_1c_1)t^3 + (2f_2c_2a_1^2 + e_1^2a_2^2 \\ & - e_2d_2a_1b_1 + c_2d_1^2a_2 - f_1a_2b_2b_1 + d_2^2a_1c_1 + f_2a_2b_1^2 - e_1a_2b_2d_1 + 2d_2b_2a_1e_1 - c_1a_2d_2d_1 \\ & + b_2^2a_1f_1 - 2a_1e_2a_2e_1 - e_1a_2d_2b_1 + e_2^2a_1^2 - 2a_1c_2a_2f_1 + 2e_2d_1a_2b_1 - 2a_1f_2a_2c_1 - e_2b_2a_1d_1 \\ & - c_2d_2a_1d_1 - f_2b_2a_1b_1 + 2f_1c_1a_2^2)t^2 + (-f_1a_2b_2d_1 - f_2b_2a_1d_1 - e_2d_2a_1d_1 + 2f_2d_1a_2b_1 \\ & - e_1a_2d_2d_1 + 2f_2e_2a_1^2 + e_2d_1^2a_2 + 2d_2b_2a_1f_1 - 2a_1f_2a_2e_1 + d_2^2a_1e_1 - 2a_1e_2a_2f_1 - f_2d_2a_1b_1 \\ & + 2f_1e_1a_2^2 - f_1a_2d_2b_1)t + f_1a_1d_2^2 + a_1^2f_2^2 - 2a_1f_2a_2f_1 + a_2^2f_1^2 + a_2d_1^2f_2 - d_1d_2a_2f_1 - d_1a_1d_2f_2 \\ & = 0 \end{aligned}$$

當我們簡化條件成作圓錐曲線和圓的交點時，令上述式子中 $b_2 = 0$ 、 $a_2 = c_2$ ，得到的交點座標依然是關於四次方程式的根，其解(交點)無法完全用尺規作出。於是我們改變方向，探討那些情形下是尺規可作的。

(一)圓心和圓錐曲線焦點重合

仿造圓錐曲線和直線的作法二，對此圓錐線和圓作配極，其兩圖形的交點對同一配極圓的極線同時和兩圖形的配極像相切，故作交點便可轉化成作公切線。若圓心和圓錐曲線焦點重合，以此點為配極中心，則兩配極像皆為圓，其公切線可作，所以原圖形的交點可作。

(二)圓心在圓錐曲線的對稱軸上

1.橢圓或雙曲線

令橢圓或雙曲線方程式： $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

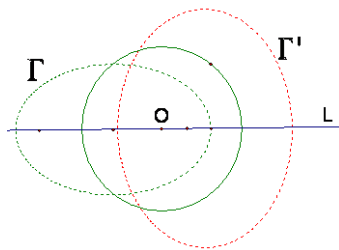
圓方程式： $(x-k)^2 + y^2 = r^2$ 或 $x^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，其中 a 、 b 、 k 、 r 均為已知，兩者聯立可直接消去 y^2 或 x^2 ，故交點座標是關於二次方程的根，其交點是尺規可作的。

2.拋物線

令拋物線方程式： $y^2 = 4cx$ ，圓方程式： $(x-k)^2 + y^2 = r^2$ ，其中 c 、 k 、 r 為已知，兩者聯立可直接消去 y^2 ，得到交點亦是尺規可解的。

註：圓錐曲線和圓的公切線

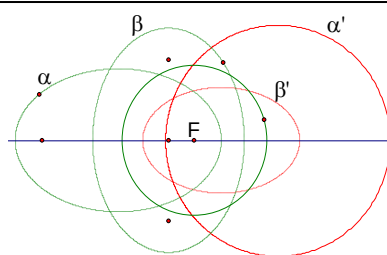
如圖，圓心 O 在圓錐曲線 Γ 一條對稱軸 L 上，以圓 O 為配極圓對兩圖形作配極，圓 O 的配極像還是圓 O ， Γ 的配極像為圓錐曲線 Γ' ，因為配極中心在 Γ 對稱軸上，所以 Γ' 關於 L 對稱。作 Γ 和圓 O 的公切線即作 Γ' 和圓 O 的交點，然而後者是可作的。所以圓心在圓錐曲線對稱軸上的圓和圓錐曲線，其交點、公切線皆為尺規可作的。



五、圓錐曲線與圓錐曲線的交點

(一)兩圓錐曲線有公共的焦點

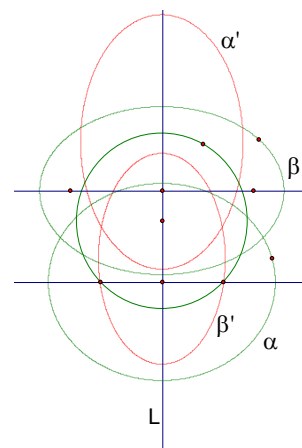
將兩圓錐曲線對以共同焦點為圓心的圓配極，兩者配極像都是圓，因此兩配極像的公切線可用尺規作出，故交點可作。



(二)兩圓錐曲線有公共軸

兩圓錐曲線 α 、 β 有公共軸，若有一交點 F 在軸上，以此點為配極中心作配極，得到圓 α' 及圓錐曲線 β' ，由之前的討論知 α 、 β 的公共軸亦為 α' 及 β' 的公共軸， α' 及 β' 的公切線可作，所以 α 及 β 的交點可作。

若 α 、 β 的焦點皆不在公共軸 L 上，在 L 上選取適當一點當配極中心作配極，使配極像(圓錐曲線)有焦點落在 L 上，再同上述的作法。



(三)其他

除了以上幾種例子，如果將尺規能作公切線的圓和圓錐曲線作配極，便可得到多種能作交點的兩圓錐曲線的特例。

陸、討論

古代即有數學家利用兩圓錐曲線的交點來解決倍立方的幾何作圖問題，然而此問題已被證實是尺規不可解的。我們明確的作出給定已知條件(交點或五點)的圓錐曲線和其切線，且不同的已知條件可互相作出。在引入配極變換後解決了部分關於兩圖形的交點問題，當然尺規可作交點的例子應該不只這些，同時我們還發現另一個等價問題：作公切線。利用配極變換前，我們也嘗試對圓錐曲線作反演，其反演像是不規則圖形，我們很難對反演和配極作代數分析，這也是未來可以繼續努力的。

我們發現許多以前的作品中均有提及連動桿，利用這一個裝置，可以完整描繪出一個圓錐曲線。我們可考慮以相反方向思考：如果使尺規作圖適度擴充，讓其能完整描繪出一個圓錐曲線，根據之前的說明，有理數的立方根應可作出，那麼還有哪些尺規無法完成的問題可解決？哪些仍不能？這是一個延伸的主題，可作為之後陸續的研究。

柒、結論

- 一、我們可以利用尺規作圖作出圓錐曲線上有限多個點，其中已知的條件可以是給定兩焦點和曲線上一點(拋物線是給定焦點和頂點或焦點和準線)，或者是給定曲線上五點，亦可由已知圓配極出圓錐曲線。這三種作法其實是等價的，我們可以由其中一種已知條件出發得到另外兩種作法中的已知元素。
- 二、從以上作法可以得到過圓錐曲線形外或形上一點求切線的方法。
- 三、在給定五點的條件中，其實只要給定四點便可決定兩個拋物線，我們可以作出拋物線上有限多個點，並作出此拋物線的焦點、頂點。
- 四、利用類似配極的方法可以用尺規作圖求得到圓錐曲線與一直線的兩交點。
- 五、曲線與曲線的交點是四次方程式的解，因此未必能用尺規作圖作出該交點和公切線，但是若兩曲線有共焦點或共軸則可以作出交點與公切線。

捌、參考資料

- 一、二次曲線 張澤湘 上海教育出版社
- 二、幾何學的新探索 *H.S.M.Coxeter & S.L.Greitzer* 著 陳維恒譯 凡異出版社
- 三、100 個著名初等數學問題歷史和解答 *Heinrich Dorrie* 著 凡異出版社
- 四、尺規作圖不能問題 邱賢忠、沈宗華 凡異出版社

玖、附錄

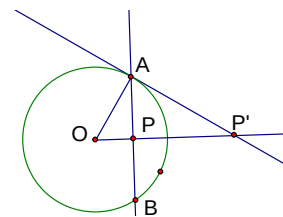
一、尺規作圖：

(一)反演的尺規作圖

1.當 P 在圓 O 內

連 $\overline{OP}$ ，過 P 作 $\overline{AB} \perp \overline{OP}$ 交圓 O 於 A 、 B ，過 A 作 $\overline{OA}$

的垂直線交 $\overline{OP}$ 於 P' ， P' 即為 P 關於圓 O 的反演點。



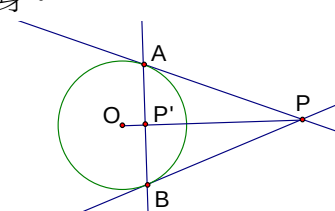
2.當 P 在圓 O 上

由定義易知 $P'=P$ ，即 P 關於圓 O 的反演點是 P 點本身。

3.當 P 在圓 O 外

連 $\overline{OP}$ ，過 P 作圓 O 的切線，切點為 A 、 B ，連 $\overline{AB}$ 交

$\overline{OP}$ 於 P' ， P' 即為 P 關於圓 O 的反演點。



(二)配極的作圖

1.圓的配極(見[參考資料2](#))

作法：

點 P 為圓 A 上一點，過 P 作直線 L 切圓 A 於 P ，作直線 L 關於圓 O 的極點 P' ，則 P' 的軌跡即為圓 A 關於圓 O 的配極像，其圖形為圓錐曲線。

配極中心 O 在圓 A 內	配極中心 O 在圓 A 上	配極中心 O 在圓 A 外

2.圓錐曲線的配極

作法：

點 P 為圓錐曲線上一點，過 P 作圓錐曲線的切線 p ，作直線 p 關於圓 O 的極點 P' ，則 P' 的軌跡構成此圓錐曲線的配極像。

配極中心 O 在橢圓內	配極中心 O 在拋物線內	配極中心 O 在雙曲線內
配極中心 O 在橢圓上	配極中心 O 在拋物線上	配極中心 O 在雙曲線上
配極中心 O 在橢圓外	配極中心 O 在拋物線外	配極中心 O 在雙曲線外

(三)畫圓錐曲線及切線的方法

1.給兩焦點(由高中課程之定義)

橢圓

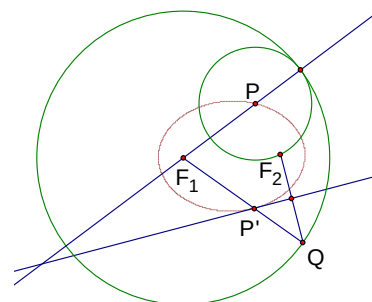
作圖 1-1

給定兩焦點 F_1 及 F_2 ，且已知橢圓上一點 P ，求作此橢圓。

作法：

(1) 作一圓以 F_1 為圓心，半徑等於 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$

(2) 在圓上任取一點 Q ，連 $\overline{QF_1}$ 、 $\overline{QF_2}$



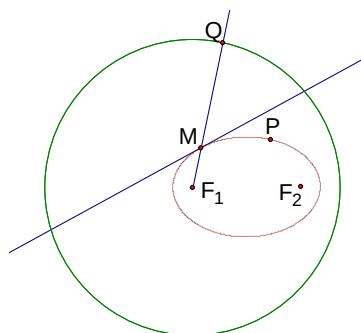
- (3) 作 $\overline{QF_2}$ 的中垂線交 $\overline{QF_1}$ 於 P' ，則 P' 亦為橢圓上的點。故改變 Q 的位置， P' 所成的軌跡就是此橢圓。

作圖 1-2

過橢圓上一點 M ，作橢圓的切線。

作法：

- (1) 作一圓以 F_1 為圓心，半徑等於 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ 。
- (2) 連 $\overline{F_1M}$ 交圓 F_1 於 Q 。
- (3) 作 $\overline{F_2Q}$ 之中垂線即為以 M 為切點的切線。

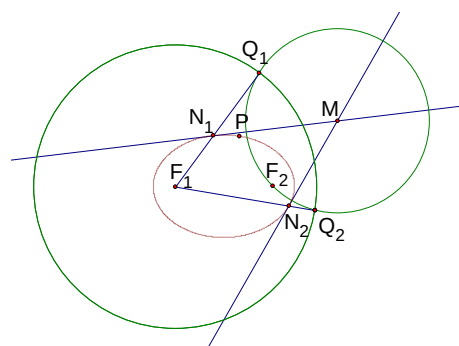


作圖 1-3

過橢圓外一點 M ，作橢圓的切線。

作法：

- (1) 作一圓以 F_1 為圓心，半徑等於 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ 。
- (2) 以 M 為圓心， $\overline{MF_2}$ 為半徑作一圓，交圓 F_1 於 Q_1 、 Q_2 。
- (3) 作 $\overline{F_2Q_1}$ 、 $\overline{F_2Q_2}$ 之中垂線即為通過 M 點的兩切線，其中切點 N_1 、 N_2 分別為 $\overline{F_2Q_1}$ 之中垂線和 $\overline{F_1Q_1}$ 交點、 $\overline{F_2Q_2}$ 之中垂線和 $\overline{F_1Q_2}$ 交點。



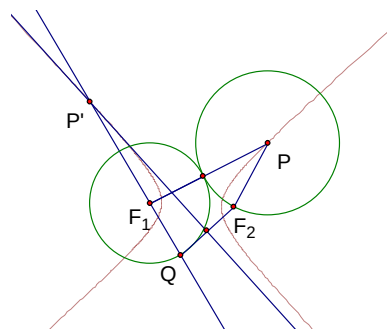
雙曲線

作圖 1-4

給定兩焦點 F_1 及 F_2 ，且已知雙曲線上一點 P ，求作此雙曲線。

作法：

- (1) 作一圓以 F_1 為圓心，半徑等於 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$ 。
- (2) 在圓上任取一點 Q ，連 $\overline{QF_1}$ 、 $\overline{QF_2}$ 。
- (3) 作 $\overline{QF_2}$ 的中垂線交 $\overline{QF_1}$ 於 P' ，則 P' 亦為雙曲



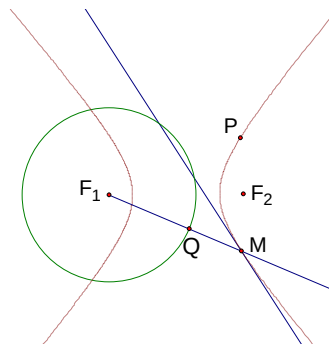
線上的點。故改變 Q 的位置， P' 所成的軌跡就是此雙曲線。

作圖 1-5

過雙曲線上一點 M ，作雙曲線的切線。

作法：

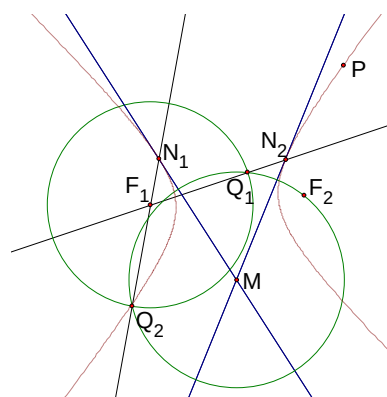
- (1) 作一圓以 F_1 為圓心，半徑等於 $\overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ 。
- (2) 連 $\overline{F_1M}$ 交圓 F_1 於 Q ，連 $\overline{F_2Q}$ 。
- (3) 作 $\overline{F_2Q}$ 之中垂線即為以 P 為切點的切線。



作圖 1-6

過雙曲線外一點 M ，作雙曲線的切線。

- (1) 作一圓以 F_1 為圓心，半徑等於 $\overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ 。
- (2) 以 M 為圓心， $\overline{MF_2}$ 為半徑作一圓，交圓 F_1 於 Q_1 、 Q_2 。
- (3) 作 $\overline{F_2Q_1}$ 、 $\overline{F_2Q_2}$ 之中垂線即為通過 M 點的兩



切線，其中切點 N_1 、 N_2 分別為 $\overline{F_2Q_1}$ 之中垂線和 $\overline{F_1Q_1}$ 交點、 $\overline{F_2Q_2}$ 之中垂線和

$\overline{F_1Q_2}$ 交點。

拋物線

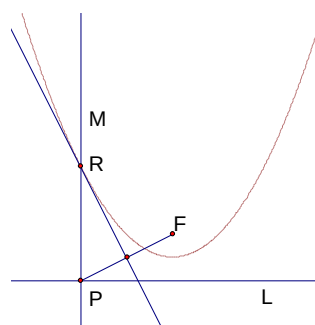
作圖 1-7

給定焦點 F 及準線 L ，求作此拋物線。

作法：

- (1) 任作一直線 M 垂直 L ，垂足為 P 。
- (2) 作 $\overline{FP}$ 的中垂線交直線 M 於 R ，則 R 為拋物線上的點。

故改變 P 的位置， R 所成的軌跡就是此拋物線。

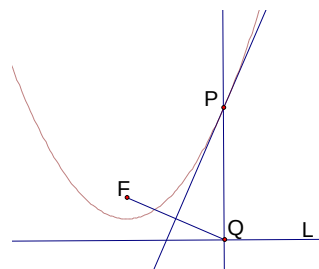


作圖 1-8

過拋物線上一點 P ，作拋物線的切線。

作法：

過 P 向 $\overline{PQ} \perp L$ ， Q 為垂足，作 $\overline{FQ}$ 之中垂線即為以 P 為切點的切線。



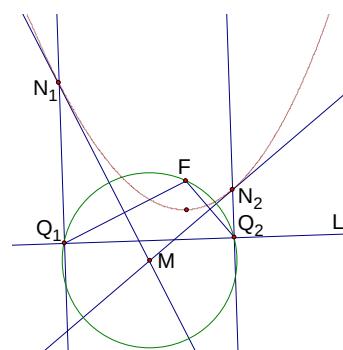
作圖 1-9

過拋物線外一點 M ，作拋物線的切線。

作法：

(1) 以 M 為圓心， $\overline{MF}$ 長為半徑作一圓，交 L 於 Q_1 、 Q_2 ，連 $\overline{FQ_1}$ 、 $\overline{FQ_2}$ 。

(2) 作 $\overline{FQ_1}$ 、 $\overline{FQ_2}$ 之中垂線即為通過 M 點的兩切線，過 Q_1 、 Q_2 作 L 的垂線，兩垂線分別交 $\overline{FQ_1}$ 之中垂線、 $\overline{FQ_2}$ 之中垂線於 N_1 、 N_2 ， N_1 、 N_2 為切點。



2.給五點

作圖 2-1

給定平面上五點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 B_1 、 B_2 ，作一過此五點的圓錐曲線。

作法：

(1) 連 $\overrightarrow{A_1B_2}$ 、 $\overrightarrow{A_2B_1}$ ，兩線交於 P 。

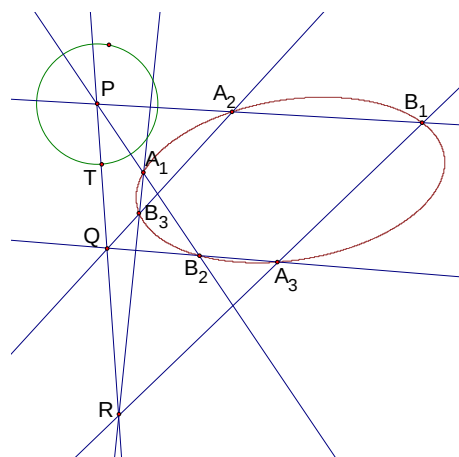
(2) 以 P 為圓心任作一圓，在圓上任取一點 T ，連 $\overrightarrow{PT}$ 。

(3) 連 $\overrightarrow{A_3B_2}$ 交 $\overrightarrow{PT}$ 於 Q ，連 $\overrightarrow{A_2Q}$ 。

(4) 連 $\overrightarrow{A_3B_1}$ 交 $\overrightarrow{PT}$ 於 R ，連 $\overrightarrow{A_1R}$ 。

(5) $\overrightarrow{A_2Q}$ 交 $\overrightarrow{A_1R}$ 於 B_3 ，於是 B_3 在 A_1 、 A_2 、

A_3 、 B_1 、 B_2 決定的圓錐曲線上。當 T 點繞圓周一圈 $B_3 \Rightarrow$ 的軌跡構成一圓錐曲線。



二、過四點的拋物線中引理證明：

引理 1 證明：

(1) 設拋物線 $y^2 = 4cx$ ，可知 $\overline{FO} = 2c$ ，

其中一弦兩端點 $P(4ct_1^2, 4ct_1), Q(4ct_2^2, 4ct_2)$ ，

$\overline{PQ}$ 的中點 $M(4c \frac{t_1^2 + t_2^2}{2}, 4c \frac{t_1 + t_2}{2})$ ，

因此 $\overline{MB} : x = 2c(t_1^2 + t_2^2)$

交 $N : y = 0$ 於 $B(2c(t_1^2 + t_2^2), 0)$ ，

另外 $\overline{PQ}$ 之中垂線 $y = -(t_1 + t_2)x + 2c(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2 + 1)$

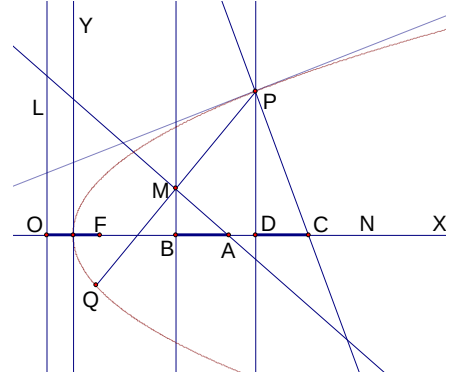
交 $N : y = 0$ 於 $A(2c(t_1^2 + t_2^2 + 1), 0)$ ，故 $\overline{AB} = 2c(t_1^2 + t_2^2 + 1) - 2c(t_1^2 + t_2^2) = 2c$ 。

(2) $P(4ct_1^2, 4ct_1)$ ，因此 $\overline{PD} : x = 4ct_1^2$ ，交 $N : y = 0$ 於 $D(4ct_1^2, 0)$ ，

另外過 P 之法線為 $y = -2t_1x + 4ct_1(2t_1^2 + 1)$ ，交 $N : y = 0$ 於 $C(2c(2t_1^2 + 1), 0)$ ，

故 $\overline{CD} = 2c(2t_1^2 + 1) - 4ct_1^2 = 2c$ 。

(3) 綜合以上過程即 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{FO} = 2c$ 得證。



引理 2 證明：

(1) 為了方便與簡潔，這個證明中，我們令此四邊形對角線的交點 G 為座標系原點， x 軸平行拋物線主軸，在這樣的前提下，假設拋物線的頂點為 (x_0, y_0) ，

則拋物線方程式即 $(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$ 。

假設 $\overline{A_1A_3}$ 的斜率為 m ， $\overline{A_2A_4}$ 的斜率為 m' ，

四點座標表為 $A_1(x_1, mx_1), A_2(x_2, m'x_2), A_3(x_3, mx_3), A_4(x_4, m'x_4)$ ，

則 A_1, A_3 顯然為拋物線 $(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$ 與 $y = mx$ 聯立的解，

$$(mx - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$$

$$\Rightarrow m^2x^2 - 2(2c + my_0)x + y_0^2 + 4cx_0 = 0，$$

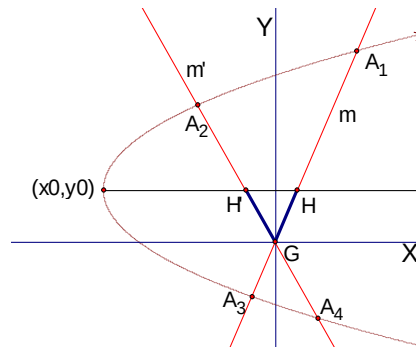
$$\text{得 } x_1 \cdot x_3 = \frac{y_0^2 + 4cx_0}{m^2},$$

同理， A_2, A_4 滿足方程式

$$m'^2 x^2 - 2(2c + m'y_0)x + y_0^2 + 4cx_0 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 \cdot x_4 = \frac{y_0^2 + 4cx_0}{m'^2}, \text{ 比較兩式可知}$$

$$\frac{x_1 x_3}{x_2 x_4} = \frac{m'^2}{m^2}.$$



(2) H 及 H' 分別為拋物線主軸 $y = y_0$ 與 $y = mx$ 及 $y = m'x$ 的交點，即

$$H\left(\frac{y_0}{m}, y_0\right), H'\left(\frac{y_0}{m'}, y_0\right), \text{ 故 } \frac{\overline{GH}^2}{\overline{GH'}^2} = \frac{\left(\frac{y_0}{m}\right)^2 + y_0^2}{\left(\frac{y_0}{m'}\right)^2 + y_0^2} = \frac{m'^2(m^2 + 1)}{m^2(m'^2 + 1)}.$$

$$(3) \frac{\overline{GA_1} \cdot \overline{GA_3}}{\overline{GA_2} \cdot \overline{GA_4}} = \frac{\sqrt{(x_1^2 + m^2 x_1^2)} \cdot \sqrt{(x_3^2 + m^2 x_3^2)}}{\sqrt{(x_2^2 + m'^2 x_2^2)} \cdot \sqrt{(x_4^2 + m'^2 x_4^2)}} = \frac{(-x_1 x_3)(m^2 + 1)}{(-x_2 x_4)(m'^2 + 1)}$$

(因為 x_1 及 x_3 為一正一負，所以分子須乘上負號，分母亦然)，

由(1)知此值與 $\frac{m'^2(m^2 + 1)}{m^2(m'^2 + 1)}$ 相等，因此 $\frac{\overline{GA_1} \cdot \overline{GA_3}}{\overline{GA_2} \cdot \overline{GA_4}} = \frac{\overline{GH}^2}{\overline{GH'}^2}$ 得證。

【評 語】 040416 圓錐曲線與作圖

- (1) 圓錐曲線為高中數學一主要題材，利用所學，找出可探討的題材，值得鼓勵。
- (2) 能善用現代電腦工具，對了解圖形之幾何性質助益極大。
- (3) 尺規作圖有其固定意義，將本問題連結尺規作圖並不恰當。