中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040414

<u>圖窮幣現</u>

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 廖冠傑 高二 石智凱 高二 呂建宏 高二 李泓靖	陳錦源

關鍵詞：三一律　硬幣對　三臂天平

圖 窮 幣 現

摘 要

在這個研究中，我們討論如何使用一個僅能秤出輕、重、等於的天平，來秤出假幣的問題。首先，我們研究了「在 n 枚硬幣中，有一枚假幣，不知道輕重，用最少次數秤出來，並判別輕重」這個問題，我們給出了最小次數，並且證明了。之後更進一步的討論如何在 n 枚硬幣中找出兩枚假幣(兩枚同重)，提出了「三臂天平」這個概念，順利地解決了這個問題。最後，我們研究了如何在 n 枚硬幣中找出 k 枚假幣，並給出一個秤量的方法。

壹、 研究動機

有一次上課，導師告訴我們一個有趣的智力測驗題目：有 12 枚硬幣，其中有 11 枚真幣，1 枚假幣，真幣的重量都一樣，假幣與真幣的重量不一樣，用一架無砝碼的天平秤 3 次，找出那枚假幣，並判斷它比真幣輕還是重。這個問題很快的就引起我們很大的興趣，最後我們當然也找到答案，但如果硬幣有 13 枚呢？14 枚呢？更多呢？或者是假幣不只 1 枚，是不是有一般解？

貳、 研究目的

嘗試在 t 枚硬幣中

一、用最少的次數找出 1 枚假幣，並判斷它比真幣是輕還是重

二、用最少的次數找出 2 枚已知相對真幣同重或同輕的假幣

三、用最少的次數找出 k 枚已知相對真幣同重或同輕的假幣

參、 研究設備與器材

筆、 計算紙、電腦

肆、 研究過程

一、 原本的題目

原本的題目：

有 12 枚硬幣，其中有 11 枚真幣、1 枚假幣。真幣的重量都一樣，假幣與真幣的重量不一樣，用一架無砝碼的天平秤 3 次，找出那枚假幣，並判斷它比真幣輕還是重。

二、 延伸

嘗試在 t 枚硬幣中用最少的次數找出 1 枚假幣，並判斷它比真幣是輕還是重

題目先從假幣只有一個來討論：

首先先來考慮假幣只有一個的情況，這個題目我們用另一個角度來看，即為「n 次最多秤幾枚？」經過仔細思考過後，我們對這個問題做了如下的分析：將硬幣分成三堆，取其中兩堆放在天平上秤，若有大小關係，則知留下的那一堆為真幣（即為以下所言情況 A），若兩堆一樣重，則就剩下的那一堆作分析（即為以下所言情況 B），則兩邊的情況可以分開討論，再做整合。

舉例說明：有 2k+m 枚硬幣我們將它分為三堆，先取兩堆（各為 k 枚）秤，且此兩堆有大小關係，此為情況 A（另一堆閒置的可知為真幣）；兩堆一樣重時，另一堆閒置為情況 B (但有真幣輔助，因為已知 2k 枚皆為真幣)，如果 A 需作 x 次，B 需秤 y 次，若 x>y，則在 2k+m 枚硬幣中找出一枚假幣，需要 x+1 次。

在處理以下情況之前，我們先來證明硬幣數增加時，所需秤量的的最小次數是遞增的，有了這個條件之後，我們可以簡化以後的證明，可用反證法以及極端原則證明。

情況 A

情況 A 的原敘述爲將硬幣分成三堆，取其中兩堆放在天平上秤，而這兩堆有大小關係，則知留下的那一堆爲真幣。我們推導出**假幣小定理**，而這個小定理的想法如下：

想法：

如果一枚硬幣曾經放在天平較輕(重)的一邊，則它再度被放到天平上時，只會在較輕、較重、等重三種情況的其中一種下(在此假設時在較輕（重）的那邊)，無法判定是否爲假幣，也就是恰有 1/3 的機會無法判定，推廣這個想法，我們可以使 3n 枚曾經被放在天平較輕(重)的未知硬幣經過一次秤重後僅剩 n 枚未知硬幣。

據此，作出以下結論：

假幣小定理：當有 3^r枚未知真假的硬幣，且每一枚均曾經放在天平較輕或較重的一邊，則需要且僅需秤r次即可將假幣找出。

舉例說明：經過秤重後仍有 9 個未知真假的硬幣，設爲①②③④⑤⑥⑦⑧⑨，①②③④⑤放在左盤，⑥⑦⑧⑨和一枚真幣放在右盤，而且其中一邊比較重。則此情況下，只要再秤 2 次，就能把假幣找出，且知道它的輕重。

證明：

以下以Ⓣ代表真幣，未知幣以數字代替

以數學歸納法證之

(i)m=1 時，只有 3 枚未知幣，設爲①②③，則此時的情況可分成

Case1: ①②③＞ⓉⓉⓉ(大於或小於是等價的，可以同理證之)

把①放在左邊，②放在右邊，若①＞②，顯然①爲假幣且較真幣重，若①＜②，顯然②爲假幣且較真幣重，若①=②，則③爲假幣且較真幣重。所以只需再秤一次。得證。

Case2:①②＞③Ⓣ(大於或小於是等價的，可以同理證之)

把①放在左邊，②放在右邊，若①＞②，顯然①爲假幣且較真幣重，若①＜②，

顯然②爲假幣且較真幣重，若①=②，則③爲假幣且較真幣輕。所以只需再秤一次。

得證。

(ii)設 m=k 時，只需再 k 次就可以把假幣找出，且知道它的輕重

(iii)當 m=k+1 時

有 3^{k+1}個未知幣，且已知①②③………ⓝ＞(n+1)、(n+2)、………(3^{k+1})ⓉⓉ……Ⓣ

則我們必須將①②③………ⓝ、(n+1)、(n+2)、………(3^{k+1})重新分配使得在秤完一次後大於、小於、等於的情況都恰有 3^k個硬幣仍無法確定使否爲假幣，則根據歸納假設只要再k次即可把假幣找出，以下證明這樣的分配方法是可以做到的，首先將放在同樣在較重或較輕的一邊的任兩個未知是否爲假幣的硬幣作爲一個硬幣組，例如分成：

{①,②}，{③,④}，{⑤,⑥}，………、{(n+1)、(n+2)}、………，則該 3^{k+1}枚硬幣可分爲 $\dfrac{3^{k+1}-1}{2}$ 個硬幣組及一枚剩下的硬幣，則每個硬幣組的兩枚硬幣分別放到天平兩端秤時，在大於和小於時都必然有一個硬幣無法判定是否爲假幣，所以只要任取 3^k個硬幣組，任取一枚放到左盤及右盤秤一次，無論是大於小於，或是等於都恰有 3^k枚硬幣無法判定是否爲假幣。(證畢)

假幣小定理的擴充：

前面已證明有 3^r枚滿足條件的未知幣時可以用r次將假幣找出，事實上，r次最多可從 3^r枚未知硬幣中將假幣找出，也就是 3^r+1 枚未知硬幣至少需要r+1 次才能將假幣找出，想法是說因爲每枚硬幣無論放在哪裡都會在大於、小於、等於的一種情況下無法判別，所以一次秤完後至少會有全部 1/3 以上的硬幣仍未知，以下給出嚴謹的証明。

證明：

(i) r=0 時，3^0+1=2 枚硬幣顯然至少要再秤一次。

(ii) 若r=k時，3^k+1 枚硬幣，由於每枚硬幣均會在大於、小於、等於的一種情況下無法判別是否爲假幣，所以根據鴿籠原理，在秤完一次後至少會有一種情況仍有 3^{k-1}+1 枚硬幣未知是否爲假幣，根據歸納假設，需再k次才能秤出，故至少需k+1 次

由(i)、(ii) $\forall r=0,1,2,......$ 、數學歸納法，得證

情況 B

在情況 B 中，和原題的差別是情況 B 中多了一些「確定是真幣的硬幣」，在某些情況下，有真幣輔助可以使結果做得更好，以下我們先做出情況 B 下的結果。

在情況 B 中，我們希望能將 n 次最多能秤多少枚硬幣的一般式做出來，情況 B 的原敘述爲「有 m 枚硬幣不知道輕重，有 2k 枚真幣輔助，則須再秤幾次可以秤出來」以下我們展開論證：

將此 m 枚硬幣分爲三堆，取兩堆硬幣和一些真幣個數和爲 2p（情況 A’），而另一堆個數爲 q（情況 B’），我們希望再秤 n-1 次能做出來，以下我們先從 m=1 開始嘗試，

當 m=1 時，顯然需再秤 1 次。

當 m=2 時，顯然不管是將這兩枚放在天平的同一側，或是放在兩側或是只秤其中一枚都需再秤 2 次才能秤出此枚假幣並且知道他的輕重。

現在有了這些基礎之後，我們反向思考來求秤 2 次最多可以從幾枚硬幣中把假幣找出來，首先第一次當然是把這些硬幣分成三堆，同樣地有情況A'與B'兩種，所以只剩秤 1 次的機會便需分辨出假幣，而情況A'中 1 次最多能秤 3^1個，而情況B'中 1 次最多能秤 1 個，所以秤 2 次，最多能把 3+1 枚硬幣找出來。而當要從 5 個以上的硬幣中把假幣找出來時，第一次當然是分三堆有情況A'與B'，則不是情況A'的硬幣比 3 個多就是情況B'中的硬幣比 1 個多，所以需要秤多於 2 次才能從這 5 個以上的硬幣中找出假幣來。

有了如上基礎後，我們來討論一般化的情形，「情況 B 中，n=x 次時，最多可以從幾枚硬幣中找出假幣。」

經過多方嘗試，我們列出了表格，猜測情況 B 時，n 次最多能秤 $\sum_{i=0}^{n-1} 3^i = \dfrac{3^n - 1}{2}$ 枚硬幣，以下我們作出證明：

總幣數	需秤重次數	總幣數	需秤重次數	總幣數	需秤重次數
1	1	5~13	3	41~121	5
2~4	2	14~40	4	122~364	6

命題：欲證，經過 n 次秤重，在有真幣輔助的情況下最多可以從 $\sum_{i=0}^{n-1} 3^i$ 枚未知輕重的硬幣中，把假幣找出來並分出輕重。

證明：

(i) n=1 時，需 1=$\sum_{i=0}^{1-1} 3^i$ 次，原命題成立

(ii) 設 n=k 時，需 $\sum_{i=0}^{k-1} 3^i$ 次

(iii) 當n=k+1 時，當然秤第一次分三堆，有情況A與B，而此時情況A只能再秤k次，所以最多可以秤 3^k枚，情況B只能再秤k次，最多能秤 $\sum_{i=0}^{k-1} 3^i$ 枚，所以n=k+1 時，最多能從 $\sum_{i=0}^{k-1} 3^i + 3^k = \sum_{i=0}^{k+1-1} 3^i$ 個硬幣中找出假幣。(合)

綜合(i)(ii)(iii)得證！

分析：

情況 B 到底和原題差在哪裡？

由於我們知道情況A(或情況A')下，n-1 次最多可從 3^{n-1}枚硬幣中將假幣找出，所以我們要做n次最多可秤幾枚硬幣的時候，就期望能在天平放上 3^{n-1}枚硬幣，但在沒有真幣的情況下，3^{n-1}是奇數而無法做到，所以情況B中就可以用未知硬幣 3^{n-1}枚和一些真幣放到天平上秤，再根據歸納假設知道沒放上去秤的最多可以有 $\sum_{i=0}^{n-2} 3^i$ 枚，就可以得情況B的結果，而沒有真幣輔助只有在第一次秤的情況下發生，所以我們只要再整合情況A及情況B即可得原題結論。

註：在上面的推論中我們可以知道真幣只要至少有一枚以上就足夠了。

統合

現在回到原來的題目「n 次最多秤幾枚？」，我們要運用情況 A 和情況 B 來得出結論。

要知道 n 次最多可以從幾枚硬幣中把假幣找出來，並判斷它比真幣輕還是重，我們就要知道在情況 A 和情況 B 中，最多共可由幾枚硬幣中秤出來。

情況A中在n-1 次的秤重次數中，最多可秤出 $3^{n-1}-1$ 枚；情況B在n-1 次的秤重次數中可秤出 $\sum_{i=0}^{n-1}3^i$ 枚，共 $3^{n-1}-1+\sum_{i=0}^{n-2}3^i$ 枚，加上最初爲了要區分出情況A和情況B時，所秤的那一次，可知在n次的秤重中最多可秤出 $3^{n-1}-1+\sum_{i=0}^{n-2}3^i=\sum_{i=0}^{n-1}3^i-1=\frac{3^n-3}{2}$ 枚硬幣。

三、 再度延伸

嘗試在 t 枚硬幣中用最少的次數找出 2 枚假幣，並判斷它比真幣是輕還是重

而兩枚假幣的輕重若是不同，或是一枚較輕而另一枚較重，則情況變得複雜許多，所以我們不妨先從已知兩枚硬幣皆爲較重且同重的情況下展開研究。

首先我們先引進「假幣對」這個概念，爲何引進假幣對觀念？有什麼好處？
我們先定義：

硬幣對：任意兩個可能爲假幣的硬幣稱爲一個「硬幣對」，如 n 個硬幣中共有 C_2^n 個硬幣對。

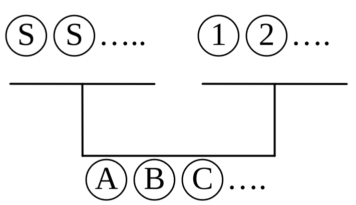
假幣對：在所有硬幣對中，兩個均爲假幣的那個特別的硬幣對定義爲假幣對。

※硬幣對原理：一個硬幣對無論如何放置，都恰會在＞,＝,＜的一種情況下無法判定是否爲假幣對。

說明如下：

ⓈⓈ表示該硬幣放置位置

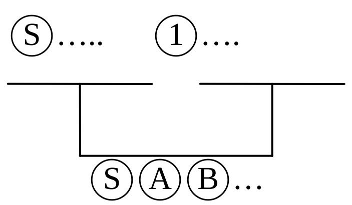
(1)



當秤出「＞」，也就是左比右重時，

我們無法斷定ⓈⓈ是否爲假幣對

(2)



當秤出「＞」，也就是左比右重時，

我們無法斷定ⓈⓈ是否爲假幣對

而「=」、「<」時同理可證。

由以上推論知每次天平秤重，**最多都只能將硬幣對減少到 1/3 的個數**，所以我們要找到一個方法，使得每次秤重都可以減少硬幣對到 1/3 的個數。

由硬幣對原理及如上假設，我們作出如下猜想：

※ 假幣猜想：若硬幣對個數T，滿足 $3^{k-1}+1 \le T \le 3^{k}$，$k \in N$，則需且僅需k次必能找出假幣對

假幣猜想是比我們原來的題目更強的結論，原來的題目中從 n 個硬幣中找出兩個假幣即爲假幣猜想的特例，從 C_2^n 個硬幣對中找出假幣對，則只要取$k \in N$，滿足 $3^{k-1}+1 \le T \le 3^{k}$即爲所求。因爲我們認爲假幣猜想很可能是對的，所以我們切入各種觀點來看假幣猜想。

觀點(一)

以下先以數學歸納法證明假幣猜想的下界，也就是假幣對數$T \ge 3^{k-1}+1$ 時無法以k-1 次秤出。

<1>k=1 時，$T \ge 2$，顯然不能以 0 次將假幣對找出。

<2>$T \ge 3^{m-1}+1$ 時無法以m-1 次將假幣對找出

則k=m+1 時$T \ge 3^{m}+1$，則根據硬幣對性質知道每個硬幣對均會在大於、等於、小於的一種情況下無法確定是假幣對，再根據鴿籠原理知道第一次秤量時無論硬幣如何放置至少有一種情況下仍有 $3^{m-1}+1$ 個硬幣對無法確定是假幣對，根據歸納假設無法以m-1 次就把假幣對找出，綜合以上推論，無法以m次將假幣對找出。

綜合<1>,<2>由數學歸納法得證

觀點(二)

首先我們將硬幣的個數 n 分成 3k,3k+1,3k+2 三種情況，假設在三種情況中經過每一次的秤重，都可以將硬幣對的個數縮減爲 1/3。

先從第一次秤重的分堆方法討論起

Case 1 --- n=3k 枚

先將硬幣分爲 k 個 ,k 個 ,k 個 三堆硬幣，分別稱爲 堆 1,堆 2,堆 3

case 1-(i)堆 1>堆 2，即堆 1 比堆 2 重

①②③……>ⒶⒷⒸ……. 甲乙丙……(以上每堆都共爲 k 個)

在這個情況下，假幣有可能皆在堆 1 中 或 一在堆 1 一在堆 3

所以硬幣對剩下 $C_2^k+k^2=\frac{k(k-1)}{2\times 1}+k^2=\frac{3k^2-k}{2}$ 個，而原本希望硬幣對剩下 1/3 的個數 $C_2^{3k}/3$。

如果 $\frac{3k^2-k}{2}=C_2^{3k}/3$，則符合我們的要求，而此顯然成立，$C_2^{3k}/3=\frac{3k(3k-1)}{3\times 2\times 1}=\frac{3k^2-k}{2}$(合)

case 1-(ii) 堆 1<堆 2

由 case 1-(i)同理可證

case 1-(iii)堆 1=堆 2，即堆 1 與堆 2 同重

①②③……=ⒶⒷⒸ…….　　　　　㊎㊇㊆……(以上每堆都共爲 k 個)

在這個情況下，假幣有可能皆在堆 3 中 或 一在堆 1 一在堆 2

所以硬幣對數剩下 C_2^k +k^2恰等於 $C_2^{3k}/3$，在case1-(i)中已證明。

Case 2 ---n=3k+1 個 同理可證

Case3 ---n=3k+2 個 同理可證

綜合 Case 1,2,3，可知第一次秤重時，可以達到將硬幣對數剩下 1/3 的期望。

觀點(三)

在假幣猜想中，我們猜測若 $3^{k-1}+1 \le C_2^n \le 3^k$則需且僅需k次能將假幣對找出，因爲n=13 時 $C_2^{13}=78<81=3^4$，理論上需要 4 次才能找出，所以以下我們先做出n=13 時的情形。

作 n=13 前先給出一個簡單的引理。

引理：若硬幣對數在 3 以下則僅需秤一次即可找出該硬幣對

引理證明：

若只有兩個硬幣對則把該硬幣對的兩個硬幣放上天平秤即可

若有三個硬幣對則分爲以下五種情形

(1)有硬幣對①-②，②-③，①-③，此時只要天平兩邊放①和②即可

(2)有硬幣對①-②，②-③，③-④，此時只要天平兩邊放①和④即可

(3)有硬幣對①-②，②-③，②-④，此時只要天平兩邊放①和④即可

(4)有硬幣對①-②，②-③，④-⑤，此時只要天平兩邊放①和③即可

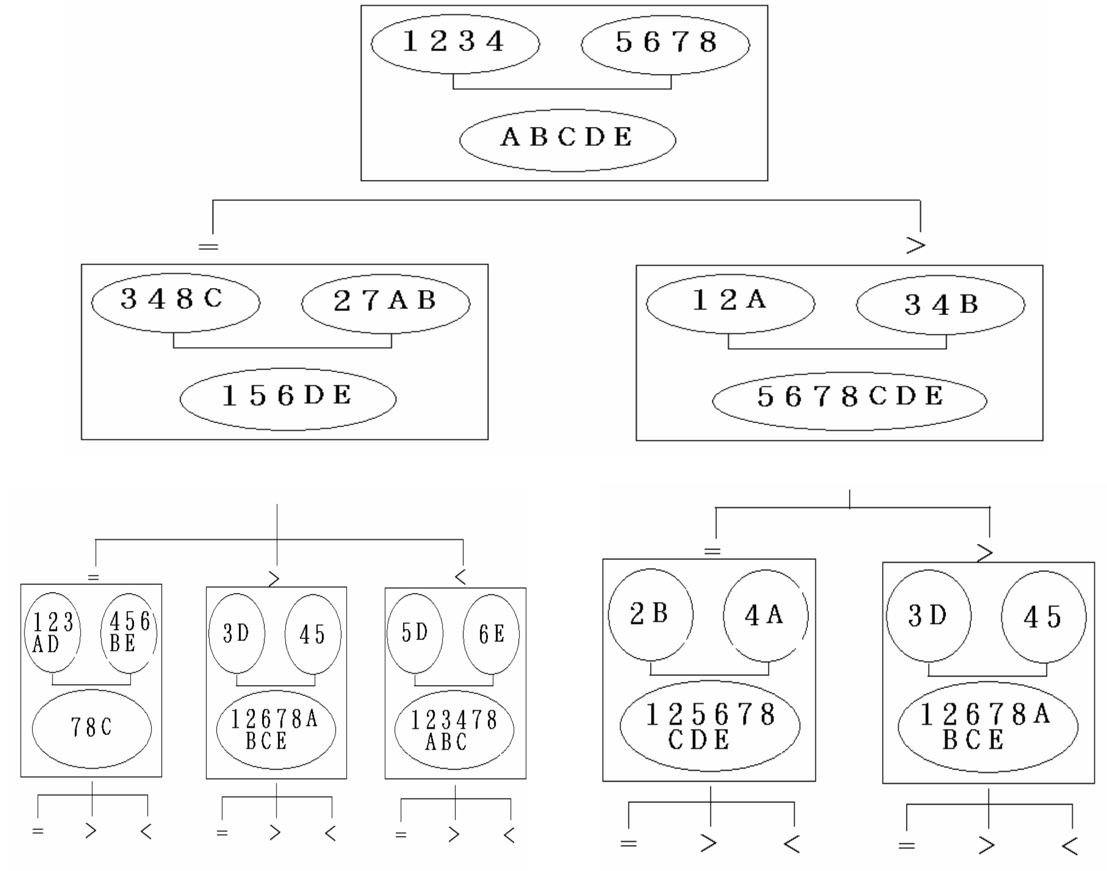
(5)有硬幣對①-②，②-③，⑤-⑥，此時只要天平兩邊放①和③即可

綜合以上討論之所有情形，即得引理之證明

以下給出 13 枚硬幣的秤法

現在有 13 枚硬幣，我們先將它們編號爲①~⑧及ⒶⒷⒸⒹⒺ

示意圖



註：由示意圖顯然知道 4 次就可秤出這兩枚假幣。

雖然分段討論所得出的結果確實需要 4 次，我們也發現，〝不可能用一種簡單的方式以 4 次做出來〞，所以我們需要一種次數盡量少的秤假幣策略將假幣找出。

觀點(四)

以下我們引進「三臂天平」的概念

定義：並非真正使用三臂天平，而是一種秤硬幣的策略

想法：先當硬幣數為 3 的倍數，若將硬幣分為三堆{A}、{B}、{C}，兩兩放上天平秤一次，可能有以下兩種結果：

Case 1 有兩堆較重{A}>{C}、{B}>{C}，於是知道{A}與{B}中各有一枚假幣

Case 2 有一堆較重{A}>{B}、{A}>{C}，則知道兩枚假幣都在{A}之中。

註 1：事實上，要知道{A}、{B}、{C}三堆硬幣的輕重只要秤兩次即可，例如只秤{A}{B}及{A}{C}。

註 2：若出現三堆硬幣{A}{B}{C}均等重的情況，表示三堆內均無假幣，這是不可能的情況。

融合比較假幣猜想與三臂天平

由假幣猜想知道，我們做到最好的情況是每次秤完後使〝硬幣對〞的個數減為三分之一左右，比較於三臂天平策略，先假定有 3n 枚硬幣，共 $C_2^{3n}=\dfrac{3n(3n-1)}{2}\cong\dfrac{9}{2}n^2$ 個硬幣對，以三臂天平操作一次後，事實上是以一般天平秤二次，故以假幣猜想最好的情形是將硬幣對數降為約 $\dfrac{1}{9}$

(即約$\frac{1}{2}n^2$個) ，此時比較於假幣猜想的兩種結論：

Case 1：一堆重、兩堆輕，此時硬幣對數爲$C_2^n \cong \frac{1}{2}n^2$，符合假幣猜想。

Case 2：兩堆重、一堆輕，此時硬幣對數爲$n \times n = n^2$，與預期的狀況有所誤差，但此時已確定兩枚假幣分別在兩堆硬幣中，所以不會導致誤差累積的狀況，此時可在分別從兩堆硬幣中找出假幣。

三臂天平的好處：

(1)唯一確定假幣所在位置的狀況

(2)幾乎符合假幣猜想的結果

以三臂天平操作較爲簡單的情況，如$n=3^k$

$n=3^k$時 $3^{2k-1}+1 \le C_2^{3^k} = \frac{3^k(3^k-1)}{2} \le 3^{2k}$

故由假幣猜想知道至少要秤 2k 次才能將兩枚假幣找出。

由三臂天平的秤量下分爲以下兩種情況：

Case1

一堆重兩堆輕的情況，如此可知兩枚假幣都在較重的一堆中，即秤完後剩下3^{k-1}枚硬幣，再對這些硬幣繼續以三臂天平操作下去

Case2

兩堆重一堆輕的情況，可知兩枚假幣分別位於兩堆個數爲3^{k-1}枚的硬幣堆中，而要從3^{k-1}枚硬幣找出一枚較重的硬幣需要k-1 次，故共需要 2(k-1)+2=2k次，由假幣猜想知道已經是最佳結果。

綜合以上兩種可能

在$n=3^k$枚的硬幣堆秤量中，設出現了m-1 次的case1，則可知已經測量 2(m-1)次，且剩下一堆3^{k-m+1}枚的硬幣待測。在第m次的秤重中出現case2，則必須在兩堆3^{k-m}枚的硬幣中，分別找出假幣，需要 2(k-m)次，總共需 2(m-1)+2+2(k-m)=2k次。綜上所述$n=3^k$時需且僅需 2k次才能將兩枚假幣找出。

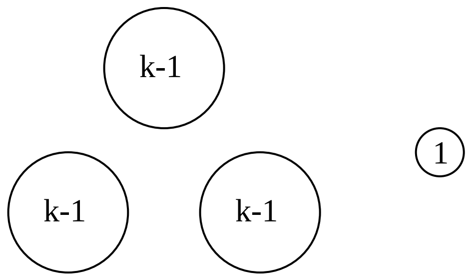
＊3k 枚硬幣

第一次必須以三臂天秤各秤 k 枚，則有 case1(k 枚中有兩枚假幣)、case2(兩堆 k 枚中各有一枚假幣)兩種情況。

＊3k-2 枚硬幣

第一次必須以三臂天秤各秤 k-1 枚，留下 1 枚硬幣。若秤的結果爲 case2，則可知假幣分別在較重的兩堆中。若是 case1 3k-2 可以降至(k-1)+1=k 枚中有 2 枚假幣。

示意圖



＊3k-1 枚硬幣

若沿用上個手法若是則降至 k+1 枚，這並不是一個好結論，於是當遇到 3k-1 枚時，我們嘗試用另一種秤法。我們先將一個硬幣標記爲 S，然後將硬幣分爲 k 枚(堆 1)、k-1 枚+S(堆 2)、k-1 枚+S(堆 3)三堆下去操作。

當堆 2=堆 3 時

(1)若堆 1=堆 2，則可知 S 爲假幣，且在堆 1 中仍有 1 枚假幣

(2)若堆 1>堆 2，則可知兩個假幣都在堆 1 中(k 枚)

(3)若堆 1<堆 2，則可知兩枚假幣分別在堆 2 及堆 3 中(k-1 枚)

當堆 2>堆 3 時(小於同理可證)

(1) 堆 1<堆 2，兩枚假幣皆在堆 2 中(k 枚)

(2) 堆 1=堆 2，在堆 1 及堆 2 中各有一枚(k 及 k-1 枚)

綜合以上結論可知，3k-2,3k-1,3k 枚硬幣可視爲等價(最糟的情況相同)

以下給出嚴謹的證明：

設以三臂操作r-1 次後餘 3m-2～3m枚，且在第r次操作中出現case2。令f(x)=3x-2，前一次至少有f(3m-2)=9m-8 枚，而這個函數迭代可以直接以數學歸納法解出，所以原本至少有 $f^{(r-1)}(3m-2)=3^{r}(m-1)+1$ 枚，然後出現case2 也就是說剩下兩組m枚硬幣，設 $3^{a}+1\leq m\leq 3^{a+1}$，則共需 2(a+1)+2+2(r-1)=2a+2r+2 次，又 $n\geq 3^{r}(3^{a})+1>3^{a+r}$，又 $\because 3^{2(a+r)-1}<C_2^n<3^{2(a+r)}$，由假幣猜想至少要 2r+2a次，誤差在兩次之內。

結果統整

二枚假幣：我們猜測在 $3^{a-1}+1\leq C_2^n\leq 3^{a}$時需秤a次才能找出來，由以上研究結果，可以確定無法以a-1 次將二枚假幣找出，且必定存在一種秤法最多只要秤a+2 次就能將二枚假幣找出。

註：當 $3^{r-1}+1\leq C_2^n\leq 3^{r}$時，若n較爲接近 3^{r}時會達到秤法與猜想沒有誤差的情況(如$n=3^{r}$)，而n較接近 $3^{r-1}+1$ 時則會造成誤差兩次的情況。

在假幣數(同重且較重)k≥3 的情況我們給出了更進一步的推廣：

(i)假幣最後定理(假幣猜想的推廣)

從n枚硬幣找k枚假幣(同組較重)，若 $3^{m-1}+1\leq C_k^n\leq 3^{m}$，則不可能僅秤m-1 次就能保證找出所有k枚假幣，即保證找出所有k枚假幣的方法必須秤m次以上。

以下給出證明：

將任一種k枚硬幣的可能視爲一個”k元硬幣組”，則共有 C_k^n 個”k元硬幣組”，考察每個k元

硬幣組，在秤量一次的情況下，無論該k元硬幣組的分布狀況如何，都必會在一種狀況下無法判定是否爲該k元硬幣組，如：有r枚在左盤，s枚在右盤，k-r-s枚未秤，且r＞s，則若結果爲”＞”，則無法判定是否爲該k元硬幣組，又如有t枚在左盤，t枚在右盤，k-2t枚未放上去秤，則在”=”的狀況下無法判定是否爲該k元硬幣組。於是因爲 $3^{m-1}+1\le C_k^n$ ，所以秤一次後必然在”＞、”=”、”＜”，的一種情況下至少仍有 $3^{m-2}+1$ 枚未知的k元硬幣組，秤二次後必有一情況至少有 $3^{m-3}+1$ 枚未知的k元硬幣組，依此類推，秤m-1 次後必有某種情況下至少仍有兩個以上未知的k元硬幣組，即無法僅以m-1 次找出該所求的k元硬幣組。

(ii)三臂天平推廣→k+1 臂天平

因爲全部有 k 枚假幣，所以至少要有 k+1 臂才能確定假幣的位置，但是隨著 k 值增加而多了以下兩個問題：

①需秤幾次才能確定其 k+1 堆硬幣的大小關係？

②可能無法確定一堆內有幾枚假幣？(例如 k=5 時若兩堆較重就不知道假幣 3-2 或 4-1 分配)

問題①的解決方式：先取兩堆來秤，每次秤完後將較輕的一堆與另一堆秤，如此秤完 k 次後則可將最輕的數堆硬幣找出，再以同樣方法確定其他堆的大小關係。

問題②的解決方式：將每一堆中的假幣數視爲其可能值的最大值t來進行t+1 臂天平操作。其實k+1 臂天平和三臂天平的想法大致上是相同的，依照以上的想法所秤出來的結果與假幣最後定理比較，可以得到類似的k=3 時，誤差在 7 次以內，k=4 時誤差 12 次以內，k=5，誤差在a+19 次以內(n=6m, $3^{a-1}+1\le m\le 3^a$)等等的結論。

伍、 結論

一、假幣小定理：當有 3^r枚未知真假的硬幣，且每一枚均曾經放在天平較輕或較重的一邊，則需且僅需r次即可將假幣找出。

二、T 枚硬幣中，若只有 1 枚假幣，但不知道輕重，則只需且最少需要 k 次，便能找出此枚假幣，而且判斷他的輕重，其中 $k\in N$, $\dfrac{3^{k-1}-1}{2}\le T\le \dfrac{3^k-3}{2}$ 。

三、T枚硬幣中，若有 2 枚假幣，知道此兩枚假幣相對於真幣同重或同輕，則最少需要k次，最多需要k+2 次便一定能找出此兩枚假幣，其中$k\in N$, $3^{k-1}+1\le T<3^k$。

四、從n枚硬幣找k枚假幣(同組較重)，若 $3^{m-1}+1\le C_k^n\le 3^m$，則不可能僅秤m-1 次就能保證找出所有k枚假幣，即保證找出所有k枚假幣的方法必須秤m次以上。

陸、 討論

用天平從一堆硬幣中找出一枚假幣的最少次數，我們已給出確定的答案，且已經證明完畢了。若硬幣數增爲二枚，一開始我們毫無頭緒，只能多次嘗試，以不同的觀點來審視這個問題。經過了多方研究，我們提出了一個新的想法-三臂天平，而後經過證明，終於把秤兩枚假幣所需的最少次數這個問題完成了。之後我們更進一步的想解決從 n 枚硬幣找 k 枚假幣(同

組較重)這個問題，我們已經證明了最小次數的下界，也就是假幣最後定理所敘述的，而確切所需的次數還沒有一個準確的答案，目前我們可以採取 k 臂天平的策略盡量壓低誤差，而且也因爲當假幣數愈多時，情況也隨之複雜，我們做到的誤差已經取得很小，接下來我們的研究將會繼續再往這個問題更進一步的邁進。

柒、 參考資料

黃國勳。**奧林匹克數學方法選講**。143~144，初版。凡異出版社

【評　語】　　040414　圖窮幣現

(1) 此問題能和生活結合在一起甚具生活化。

(2) 所用方法不是最理想方法，尚有誤差，是美中不足之處，方法尚需再加以改良。