中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040413

<u>別鬧了，巴斯卡!</u>

學校名稱：國立虎尾高級中學

作者：	指導老師：
高二 郭士恩	黃振乾
高二 蘇致軒	
高二 沈于堯	

關鍵詞：二項式定理　同餘　Lucas’ Theorem

摘要

將高中課程所學到的巴斯卡三角形做點變化，原本以「1」為首、「+」為運算符號，現在則改成以「-1」或「ω」為首、「×」為運算符號，新產生的三角形隱藏著某種規律性，為了更全面性的瞭解這種規律，使用電腦軟體套色繪出圖形。圖形本身具有明顯的遞迴關係，我們於是嘗試描述此種具規律性的模式；同時，我們也探討了所指定列中的某數字（如-1、ω或ω^2）的個數，並以通式表示之；我們發現國外的研究報告都採用同餘觀點來看改變後的巴斯卡三角形，他們將巴斯卡三角形以某數為模的餘數記錄下，並探討這些餘數在圖形中的分布情形，這個觀點讓我們重新檢視第一個數放「-1」或「ω」且運算符號為「×」的巴斯卡三角形，發現其實可看作是以「2」為模與以「3」為模的巴斯卡三角形，並探討任一列同類餘數的個數。最後，希望能以一個演算法或通式，算出所指定列與行的該數為何。

壹、 研究動機

學到二項式定理時，接觸到巴斯卡三角形（楊輝三角形），它以「1」為首，而以「+」為運算符號；由於之前學過1的n次方根，讓我們有了一個念頭：若將1改為-1，ω，i等等，其兩數「相加」改為兩數「相乘」後，這種三角形所形成的數列，會不會有什麼規律或性質？為了進一步的探討，因此在電腦老師協助下，將巴斯卡三角形計算的規則輸入電腦，並輸出圖形；圖形的遞迴模式讓我們越發有興趣，因為找出圖形的規律比數列的規律更具意義與挑戰性。我們也想，既然這種三角形中的數字都不大，是否可以不用二項式係數，就找出某列某行是為何數？

探討這些規律的同時，也搜索了一些國內外有關的文獻，發現國內對於這方面的資訊有些缺乏，找到一篇相關的研究報告（許介彥，2004），作者以代數層面去探討巴斯卡三角形中任意數之奇偶性，並設計演算法以得知第 n 列第 k 行的數為奇數或偶數，其實跟本次研究中以「-1」為起首，運算符號為「×」的三角形類似，然而此次研究著重於尋找圖形本身的規律性；國外則有較多相關的文獻，其討論主要是將巴斯卡三角形中的所有數以某數為模的餘數紀錄下，去探討其餘數在新產生的巴斯卡三角形中的分布情形，與本研究的出發點不同，但給予本研究相當大的啓發，特別在使用同餘的觀點上。

貳、 研究目的

將原先巴斯卡三角形做些改變，探討得到的圖形所具有的規律與性質。以下是各種改變後的巴斯卡三角形，圖示如下：

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & -1 & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & 1 & & -1 & & & & & \\
 & & & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & & & \\
 & & & -1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1 & & & \\
 & & -1 & & -1 & & 1 & & 1 & & -1 & & -1 & & \\
 & -1 & & 1 & & -1 & & 1 & & -1 & & 1 & & -1 & \\
-1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1
\end{array}
$$

圖一：手算的以「-1」爲首的巴斯卡三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \omega & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \omega & & \omega & & & & & & & \\
 & & & & & & \omega & & \omega^2 & & \omega & & & & & & \\
 & & & & & \omega & & 1 & & 1 & & \omega & & & & & \\
 & & & & \omega & & \omega & & 1 & & \omega & & \omega & & & & \\
 & & & \omega & & \omega^2 & & \omega & & \omega & & \omega^2 & & \omega & & & \\
 & & \omega & & 1 & & 1 & & \omega^2 & & 1 & & 1 & & \omega & & \\
 & \omega & & \omega & & 1 & & \omega^2 & & \omega^2 & & 1 & & \omega & & \omega & \\
\omega & & \omega^2 & & \omega & & \omega^2 & & \omega & & \omega^2 & & \omega & & \omega^2 & & \omega
\end{array}
$$

圖二：手算的以「ω」爲首的巴斯卡三角形

從手繪的圖形中似乎隱藏著許多奇妙的規律。我們進一步藉助電腦程式「$C++$」畫出更延伸的部份，以便讓我們可以更宏觀地檢視這種圖形所含有的規律。

參、 研究問題

依據研究目的，本研究想要探討的問題如下：

一、以「-1」為首，「×」為運算符號的三角形，其圖形有何規律性？能否證明之？

二、以「-1」為首，「×」為運算符號的三角形，其每一列「-1」個數是否有規律？是否可歸納為通式？

三、能否推算出此三角形第 n 列第 j 行的數是「1」或「-1」？

四、以「ω」為首，「×」為運算符號的三角形，其圖形有何規律性？能否證明之？

五、以「ω」為首，「×」為運算符號的三角形，其每一列「ω」或「ω^2」個數是否有規律？是否可歸納為通式？

六、能否推算出此三角形第 n 列第 j 行的數是「1」或「ω」或「ω^2」？

肆、 研究方法與工具

本研究法屬於「實驗研究法」中的試探性實驗和驗證性實驗。黃光雄、簡茂發（2000）指出如果研究者對於所探討的問題所知有限，則可進行試探性實驗。此時，他至多只能提出一個非正式的假設，等到他在試探性實驗中，得到相關的資料後，他便可以慢慢形成更明確的假設，預測如果改變自變項將有何結果。然後再進行驗證性實驗，以考驗所得結果是否真是如此。在此研究中，我們做出以「-1」為首，「×」為運算符號的三角形，其中發現一些幾何的規律，我們有了一些歸納性的結論，接著我們試著引進同餘觀點再加以驗證，並得到了證明。

一般而言，在試探性實驗裡，研究者的興趣在於尋找足以影響依變相的自變項，例如本研究將變項「1」改為「-1」，運算符號「＋」改為「×」，尋找其規律性，有了一次經驗，我們接著以「ω」為起首，運算符號「＋」改為「×」，再加以探索，並得到一些結論，且加以證明。

接著將本研究的研究工具及預備知識詳述如下：

一、二項式定理與巴斯卡三角形

在巴斯卡（Blaise Pascal, 1654）的算術三角圖論著一書中，記載了所謂的「算術三角圖」，也就是將二項式定理：$(x+y)^n = C_0^n X^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + C_{n-1}^n x y^{n-1} + C_n^n y^n$，即 $\sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r} y^r$ 依 $n=1$，2，3，4，5，……將各項係數逐列記錄，今謂之「巴斯卡三角形（Pascal's Triangle）」。中國在宋理宗景定二年（1261），數學家楊輝所寫的詳解九章算法中已出現此圖，稱為「開方作法本源圖」，書中註明「源出釋鎖算書，賈憲用此術」賈憲是北宋時代的人，也就是說早在公元十一世紀時，我們國就已知道此圖了，因此，此三角形亦稱為賈憲或楊輝三角形。圖三為原始的巴斯卡三角形，在頂端放「1」，其他的數依據其正上方兩數的和決定；空白的部分可視為「0」，因為頂端的「1」跟外面的「0」相加恆為「1」，所以兩旁的數恆為「1」。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

圖三:巴斯卡三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & \\
 & & & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 & & & \\
 & & C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4 & & \\
 & C_0^5 & & C_1^5 & & C_2^5 & & C_3^5 & & C_4^5 & & C_5^5 & \\
C_0^6 & & C_1^6 & & C_2^6 & & C_3^6 & & C_4^6 & & C_5^6 & & C_6^6
\end{array}
$$

圖四:巴斯卡三角形（以二項式係數表示）

二、電腦程式

「$C++$」是一個用來寫程式的工具軟體，也可以利用它來觀察一些事情的演變，這些演變也許不是人所做不到的，只是由電腦來做速度會比較快，效率也比較高。對我們來說，$C++$ 為我們節省了很多機械式運算的時間，讓我們直接看到最後的結果，譬如說是一個圖形；要強調的是，它並不能直接提供我們要研究的問題的解答，只是一個非常有利的觀察工具。

一、 高斯函數

高斯函數(Gauss)定義如下：$f(x)=〔x〕$=小於或等於 x 的最大整數

二、 十進位數表爲二進位與三進位

(一) 十進位：

古時人類尚未有文字及數字時，人類使用唾手可得之物來計算數量，而最接近人類的當然是人類的雙手，一般人的雙手加起來有十隻手指，這就是十進位的起源，這也是人類爲何較常使用十進位的原因，在計量時以 10 爲基數，權值爲10^{n-1}（ n 爲位數）。

(二) 二進位與三進位：

二進位的基數爲 2，權值爲 2^{n-1} ；三進位的基數爲 3，權值爲 3^{n-1} （ n 爲位數）。

(三) 十進位與二進位（或三進位）的互換：

要將十進位轉換爲二進位（或三進位）時我們必須將整數部分與小數部分分開轉換，分別說明如下：

1. 整數部分轉換方式：
   （1） 將該數連續除以二進位制（或三進位制）的基數 2（或 3），直到商數爲 0。
   （2） 由下往上取每次相除所得餘數。
2. 小數部分轉換方式：
   （1） 將小數點後的數字乘以二進位制（或三進位制）的基數 2（或 3），在將所得成績小數點後的數字乘以 2（或 3），如此重複直到小數點後的數字全爲 0 時停止。
   （2） 由上而下取每次相乘所得的整數。

三、 同餘：

定義：若且唯若 $a-b$ 被 m 整除，稱 a 、 b 對模 m 同餘。用同餘式來表示：

$a \equiv b \pmod{m}$

四、 組合：

在 m 個物體中取出 n 個的組合情形有 $C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ 種

五、 Lucas' Theorem：

令 $n,k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le n$，$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots, 0 \le a_i < p$，$k = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 \ldots, 0 \le b_i < p$

則 $\binom{n}{k} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\ldots \pmod{p}$（ p 爲質數）

伍、 文獻探討

研究改變後巴斯卡三角形的同時，開始在國內外網站尋找一些有關的文獻，希望能找到可供參考的報告。

一. 國內文獻

國內其實也有很多人在做巴斯卡三角型的研究，但少有人直接探討這種圖形的規律，雖然資訊不多，但仍然找到一篇相關性高的研究報告（許介彥，2004），作者以代數層面去探討巴斯卡三角形中任意數之奇偶性，並設計演算法以得知第 n 列第 j 行的數爲奇數或偶數，其實與本次研究中以「 -1 」爲首，「×」爲運算符號的三角形類似，然而我們是以「 -1 」的相乘爲出發點，並著重於尋找圖形本身的規律性。

二. 國外文獻

國外有較多與本研究相關的文獻，其討論的重點均是將巴斯卡三角形中的所有數以某個數爲模的餘數紀錄下，再去探討其餘數在新產生的巴斯卡三角形中的分布情形（James G.. Huard, Blair K. Spearman & Kenneth S. Williams, 1998）；雖然與本研究的出發點不同，但卻給予我們在使用同餘觀點上，有相當大的啓發。

另外，在思索如何證明的同時，我們也發現了一個有力的工具——Lucas's Theorem，（Lawrence H. Riddle, 1998）用它來證明以 2 爲模的巴斯卡三角形，在前 2^{n+1} 列中包含了

三個 2^n 列的相同較小三角形。我們感到這個方向有很大的發展潛力，於是接續此結果，開始研究以「 ω 」爲首，「×」爲運算符號（以 3 爲模）的三角形，是否也可以用 Lucas's Theorem 證明，結果是肯定的。

陸、 研究過程

一. 「 -1 」爲首，「×」爲運算符號的三角形

研究開始時，我們思考著首位應該要放「1」還是「 -1 」，是否有影響？而後來發現，原來三角形中的每個數都可化爲「 -1 」的次方數，而其指數則呈現一巴斯卡三角形（如圖五）！於是，我們在首位放上 $(-1)^1$ ，也就是「 -1 」。另外，此三角形外的每個數，也就理所當然的可視爲 $(-1)^0$ ，也就是「1」。

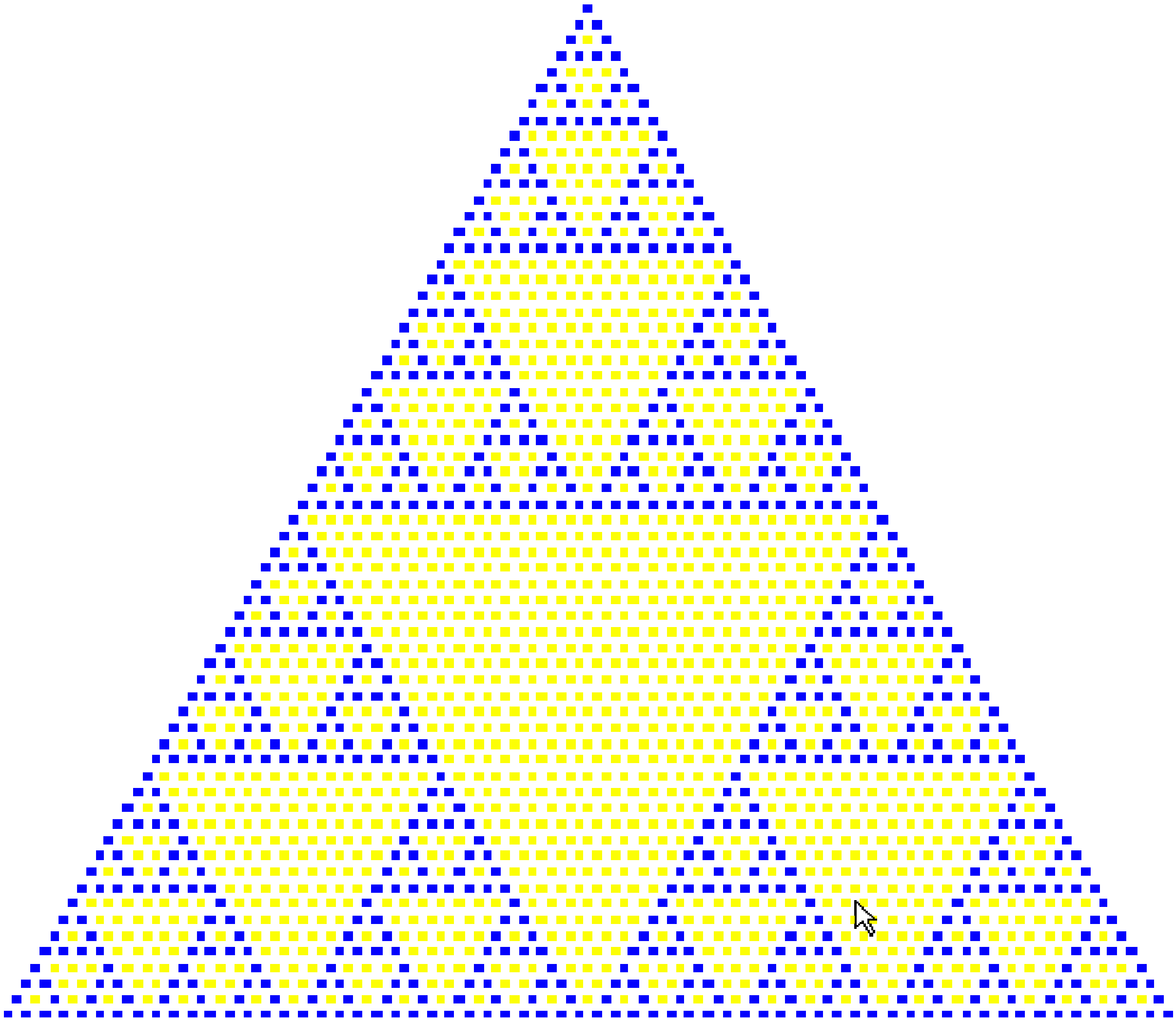
$$(-1)^1$$
$$(-1)^1 \quad (-1)^1$$
$$(-1)^1 \quad (-1)^2 \quad (-1)^1$$
$$(-1)^1 \quad (-1)^3 \quad (-1)^3 \quad (-1)^1$$
$$(-1)^1 \quad (-1)^4 \quad (-1)^6 \quad (-1)^4 \quad (-1)^1$$
$$(-1)^1 \quad (-1)^5 \quad (-1)^{10} \quad (-1)^{10} \quad (-1)^5 \quad (-1)^1$$
$$(-1)^1 \quad (-1)^6 \quad (-1)^{15} \quad (-1)^{20} \quad (-1)^{15} \quad (-1)^6 \quad (-1)^1$$

圖五: 以「 -1 」爲起首的三角形

$$(-1)^{C_0^0}$$
$$(-1)^{C_0^1} \quad (-1)^{C_1^1}$$
$$(-1)^{C_0^2} \quad (-1)^{C_1^2} \quad (-1)^{C_2^2}$$
$$(-1)^{C_0^3} \quad (-1)^{C_1^3} \quad (-1)^{C_2^3} \quad (-1)^{C_3^3}$$
$$(-1)^{C_0^4} \quad (-1)^{C_1^4} \quad (-1)^{C_2^4} \quad (-1)^{C_3^4} \quad (-1)^{C_4^4}$$
$$(-1)C_0^5 \quad (-1)^{C_1^5} \quad (-1)^{C_2^5} \quad (-1)^{C_3^5} \quad (-1)^{C_4^5} \quad (-1)^{C_5^5}$$
$$(-1)^{C_0^6} \quad (-1)^{C_1^6} \quad (-1)^{C_2^6} \quad (-1)^{C_3^6} \quad (-1)^{C_4^6} \quad (-1)^{C_5^6} \quad (-1)^{C_6^6}$$

圖六: 以「 -1 」爲起首的三角形與巴斯卡三角形的關係

為了更仔細觀察未看到的規律，便將此運算規則以電腦 $C++$ 程式輸出圖形。



圖七：程式繪出的以「-1」為首的巴斯卡三角形（藍色表−1，黃色表1）

（Lawrence H. Riddle, 1998）以 Lucas's Theorem 來證明此種圖形的複製模式，與他的精神相同，我們試著用更符合我們目的的方式，重新證明之。

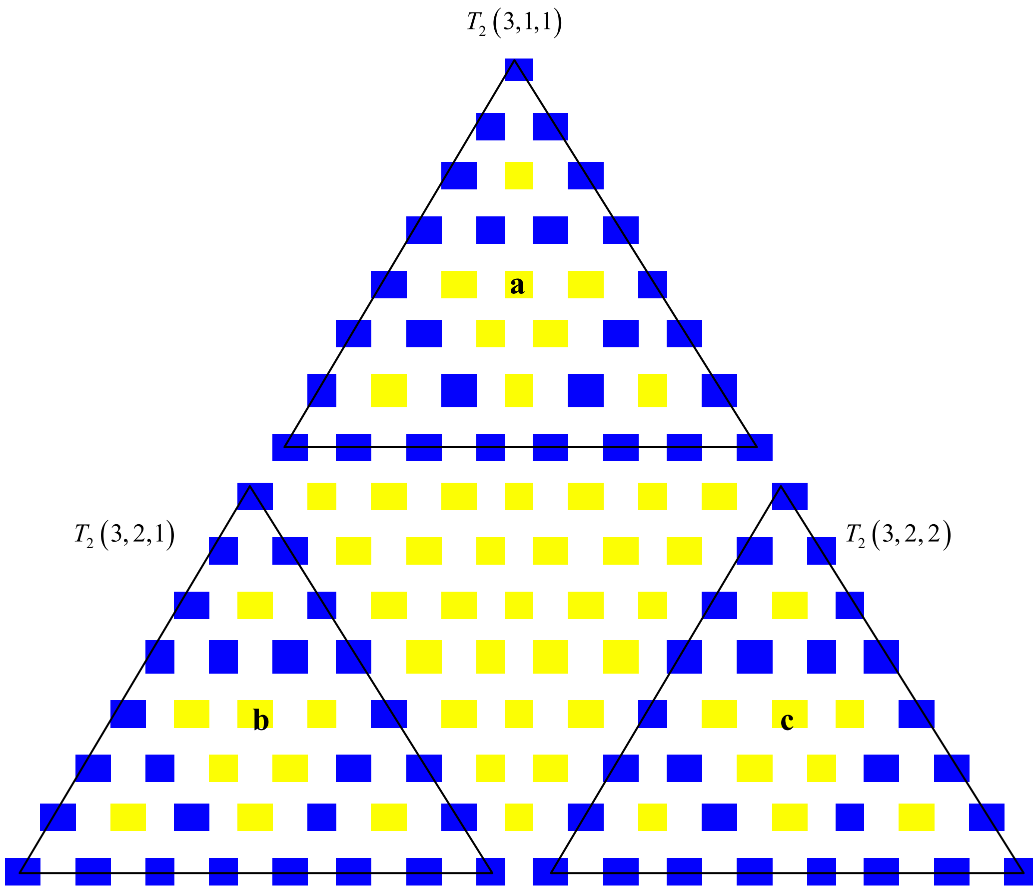
(一) 證明圖形的遞迴關係

在證明以前，先定義一個符號 $T_m(k,s_1,s_2)$，定義如下：

$T_m(k,s_1,s_2)=\{P_m(n,j)\mid n=(s_1-1)\cdot m^k+r,(s_2-1)\cdot m^k<j\le(s_2-1)\cdot m^k+r\}$

$(m^k\ge r,\quad n,r\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}\cup\{0\})$

直觀來說，將此三角型分為兩階，就是第 s_1 階第 s_2 位的 k 單位三角形。



圖八：以 T 集合表徵模 2 之巴斯卡三角形各部份

欲證： $T_2(k,1,1) \equiv T_2(k,2,1) \equiv T_2(k,2,2) \left(k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right)$

證明：設 a,b,c 各為$T_2(k,1,1)$，$T_2(k,2,1)$，$T_2(k,2,2)$同一個相對位置上的數（如圖八）。

即

$$a=\binom{n-1}{j-1}, b=\binom{n-1+2^k}{j-1}, c=\binom{n-1+2^k}{j-1+2^k} \left(n, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right)$$

又令

$$n-1=n_0+n_1 \cdot 2+n_2 \cdot 2^2+\ldots n_c \cdot 2^c=\left(n_0 n_1 n_2 \ldots n_c\right)_2$$
$$j-1=j_0+j_1 \cdot 2+j_2 \cdot 2^2+\ldots j_c \cdot 2^c=\left(j_0 j_1 j_2 \ldots j_c\right)_2$$
$$\left(n_i, j_i \in \{0,1\}\right)$$

根據 Lucas' Theorem，可得：

$$a=\binom{n-1}{j-1} \Rightarrow \binom{n_0 n_1 n_2 \ldots}{j_0 j_1 j_2 \ldots}$$ （三進制，以下同）

$$b=\binom{n-1+2^k}{j-1}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\ldots1}{j_0j_1j_2\ldots0}\equiv\binom{n_0n_1n_2\ldots}{j_0j_1j_2\ldots}\binom{1}{0}\equiv1\cdot\mathrm{a}\pmod 2$$

$$c=\binom{n-1+2^k}{j-1+2^k}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\ldots1}{j_0j_1j_2\ldots1}\equiv\binom{n_0n_1n_2\ldots}{j_0j_1j_2\ldots}\binom{1}{1}\equiv1\cdot\mathrm{a}\pmod 2$$

$$\Rightarrow a\equiv b\equiv c$$

即對任意k，皆有以下結果

$$\Rightarrow T_2(k,1,1)\equiv T_2(k,2,1)\equiv T_2(k,2,2)\left(k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$$

故得證。說明此種模式會反覆遞迴下去。

(二) 對$\omega_2(1,n)$的探討

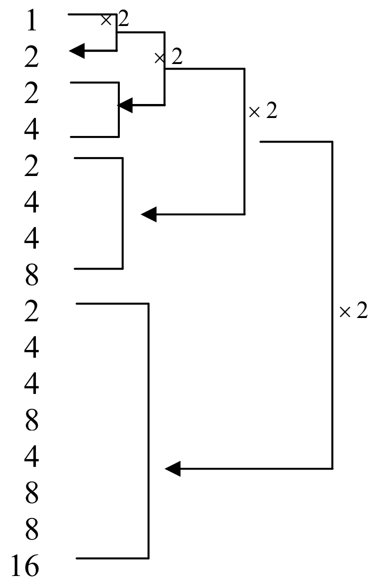
$\omega_2(1,n)$定義爲在以「-1」（$x^2=1$的根）爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第n列「$(-1)^1$」的個數。

1. 數列$\omega_2(1,n)$的複製關係

觀察數列$\omega_2(1,1),\omega_2(1,2),\omega_2(1,3),\omega_2(1,4),\ldots\ldots$

$\Rightarrow 1,2,2,4,2,4,4,8,2,4,4,8,4,8,8,16\ldots$

仔細觀察後，我們發現此數列有某種規律性存在，以下是觀察結果，圖示如下：



圖九：數列$\omega_2(1,n)$的複製關係

2. $\omega_2(1,n)$的特殊遞迴關係

觀察圖八的模式，發現若把整個三角形分爲兩個階層，則第二階每一列中的「-1」個數，都是第一階相對列的兩倍。（$\because T_2(k,1,1)\equiv T_2(k,2,1)\equiv T_2(k,2,2)$）

於是可以得到以下結論：

(1) 遞迴起點

$\omega_2(1,1)=1$

(2) 當 $n>1\in\mathbb{N}$ ，令 $n=2^k+r\left(2^k\geq r,\quad n,r\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$

$\omega_2(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_2(1,\mathrm{r})$

3. $\omega_2(1,n)$ 的一般項

研究者利用數列 $\omega_2(1,n)$ 的遞迴關係 $n=2^k+r,2^k\geq r\left(n,r\in N,k\geq 0\right)$ 則 $\omega_2(1,n)=\omega_2(1,r)$ 來求 $\omega_2(1,n)$ 的一般項。

(1) $\omega_2(1,56)=?$

$56=2^5+24\Rightarrow\omega_2(1,56)=2\omega_2(1,24)$ ； $24=2^4+8\Rightarrow\omega_2(1,24)=2\omega_2(1,8)$

$\Rightarrow\omega_2(1,56)=2\omega_2(1,24)=2\cdot 2\omega_2(1,8)=2\cdot 2\cdot 8=32$

但以上之算法，在 n 值非常大時，將變得極爲繁雜，於是便想利用一個方法，先將 n 化爲二進制，似乎有很大幫助。

(2) $\omega_2(1,1234)=?$

$(1234)_{10}=(10011010010)_2$ ，以下以二進制來運算

很明顯的， $n=10011010010\Rightarrow r=11010010\Rightarrow r_1=1010010\Rightarrow\ldots$

$\Rightarrow\omega_2(1,10011010010)=2\cdot\omega_2(1,11010010)$

$=2^2\cdot\omega_2(1,1010010)=2^3\cdot\omega_2(1,10010)=2^4\cdot\omega_2(1,10)=2^4\cdot 2=32$

於是得到一般情形：

令 $(n)_{10}=(n_0n_1n_2\ldots)_2$ ，且 n_i 中有 k 個1，最小1的權値爲 2^x ，則：

$\omega_2(1,n)=2^{k-1}\cdot 2^x$

(3) $\omega_2(1,49875)=?$

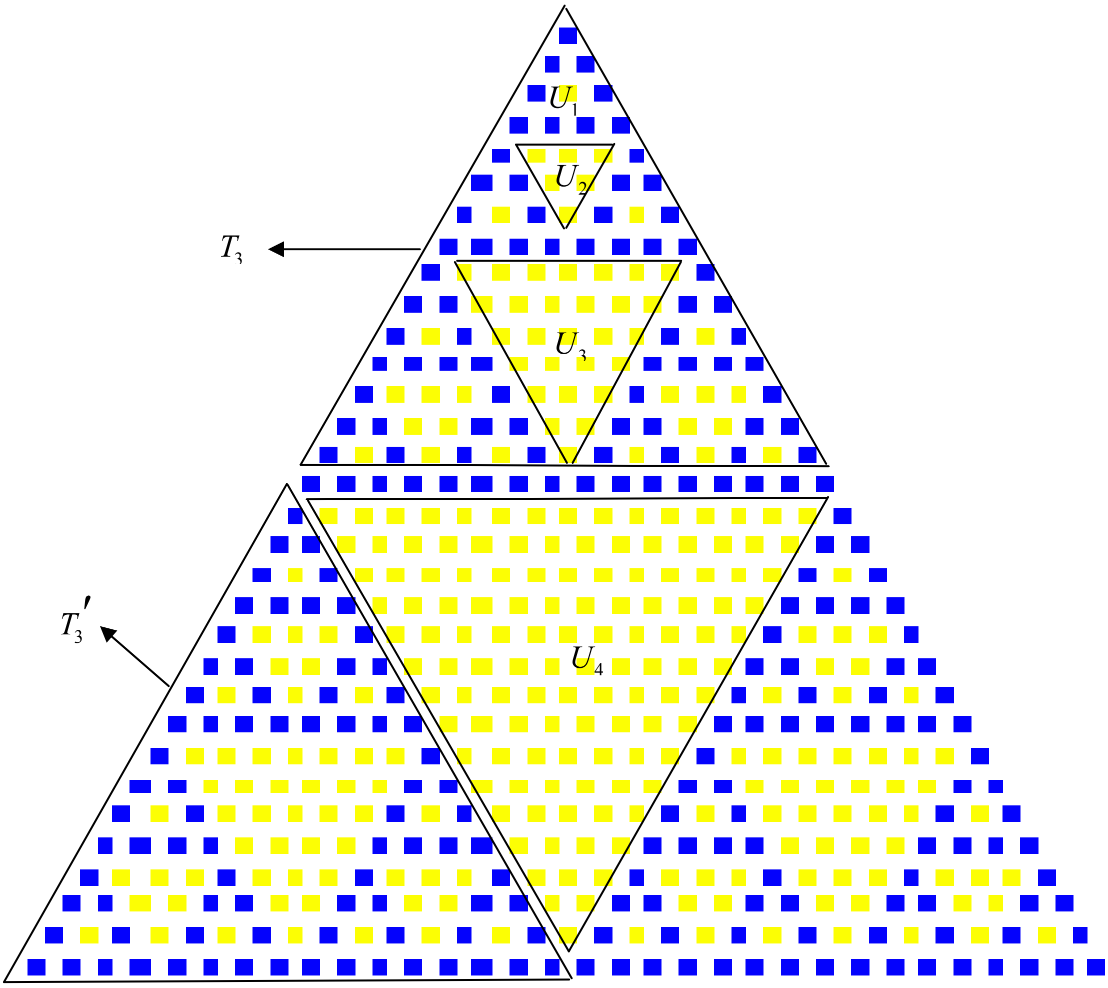
$(49875)_{10}=(1100001011010011)_2\Rightarrow k=8,2^x=2^0$

故 $\omega_2(1,49875)$ $=2^7\cdot 2^0$=128

(三) 第 n 列第 j 項是1或 -1 的討論

除了每一列「-1」與「1」其個數的討論外，本研究最後將針對此圖形第 n 列第 j 行的數是1或 -1 作討論。 爲了要表示「第 n 列第 j 行的數」，引進 A_j^n 這個符號。因爲此三角形左右必對稱，左邊數來第 j 項會等於右邊數來第 j 項： $\Rightarrow A_j^n=A_{n-j+1}^n$ （對稱數)，關於此部分的研討，我們最終的目標是想要盡可能簡單迅速地得出 A_j^n 等於何數。而唯一能做的，就是不放過圖中任何的蛛絲螞跡——發現規則性：

首先我們以圖形作觀察：將圖七作分割如圖十：



圖十：將三角形的各項以集合的觀點分類

初步觀察後，我們開始猜測，或許如圖十的 U 系列集合，其中的每一項會有共同點。我們由 U 系列集合三角形的倒立性質，發現對於同一個 U 系列集合，其中最右項與最左項的連線長，與列數成反向變動的關係。我們以表格的方式呈現：

所屬的集合	列數 n	U 系列集合最右數和最左數連線的格子點數	此連線的格子點數與列數之和
U_1	$3=2^1+1$	1	2^2
U_2	$5=2^2+1$	3	2^3
	$6=2^2+2$	2	2^3
	$7=2^2+3$	1	2^3
U_3	$9=2^3+1$	7	2^4
	$10=2^3+2$	6	2^4
	$11=2^3+3$	5	2^4
	$12=2^3+4$	4	2^4
	$13=2^3+5$	3	2^4
	$14=2^3+6$	2	2^4
	$15=2^3+7$	1	2^4
	$31=2^4+15$	1	2^5

表一：分析 U 系列集合三角形與列數的關係

上述連線的格子點數，就等於 U 系列集合中最右項和最左項的項數差加一。而因爲圖形是對稱的，最右和最左的兩數是對稱數，所以此兩數必爲 A_j^n 和 A_{n-j+1}^n 的關係。只要任一 A_j^n 與其對稱數 A_{n-j+1}^n 連線的格子點數，小於或等於表中所列的的上限，就表示這個 A_j^n 身在 U 系集合中，也就等於「1」（連線的格子點數 $=|n+1-2j|+1$）。我們又發現，在同一個集合的範圍，此連線的格子點數，與列數之和維持一定值 2^k。

將以上的結論整理如下：

令 $n=2^k+r, 2^k \geq r\left(n, r \in N, k \geq 0\right)$

若且唯若 $A_j^n \in U_k$

則 $|n+1-2j|+1+n \leq 2^{k+1}$

$\Rightarrow |n+1-2j|+1+n-2^k \leq 2^{k+1}-2^k$

$\Rightarrow |n+1-2j|+r+1 \leq 2^k$

這是我們得到的初步結論，然而鍥而不捨地設法讓它更單純。

只要將 A_j^n 鎖定在三角形的左半部（滿足 $j \leq \frac{n+1}{2}$），。右半部的數以 $A_j^n = A_{n-j+1}^n$ 的方式轉換到左半部，則此公式還可以修改得更簡單：

$\because n+1-2j \geq 0$

$\therefore |n+1-2j| = n+1-2j$

$\therefore |n+1-2j|+r+1 \leq 2^k$

$\Rightarrow n+1-2j+2r+1 \leq n$

$\Rightarrow r-j+1 \leq 0$

$r-j+1 \leq 0 \Rightarrow A_j^n \in U_k$

但若結果發現 $A_j^n \notin \mathrm{U}_k$？譬如說 n=21,j=3，因爲 A_3^{21} 已經被鎖定在左半部了（$3 \leq \frac{21+1}{2}$），又發現 $A_3^{21} \notin \mathrm{U}_4$，則表示 $A_3^{21} \in T_3'$。接著，因爲 T_3' 是 T_3 中所有的數下移 2^k 列之後的結果，所以 T_3 中所有的數應皆可表爲 $A_j^{n-2^k}=A_j^r$；A_3^{21} 在 T_3 中有一個對應的數 A_3^5。現在換成檢測 A_3^5（$3 \leq \frac{5+1}{2}$）是否在 U_2 中，$\because$ 1-3+1 ≤ 0，$\therefore A_3^{21}$=1。

將所得結果再正式做總結：

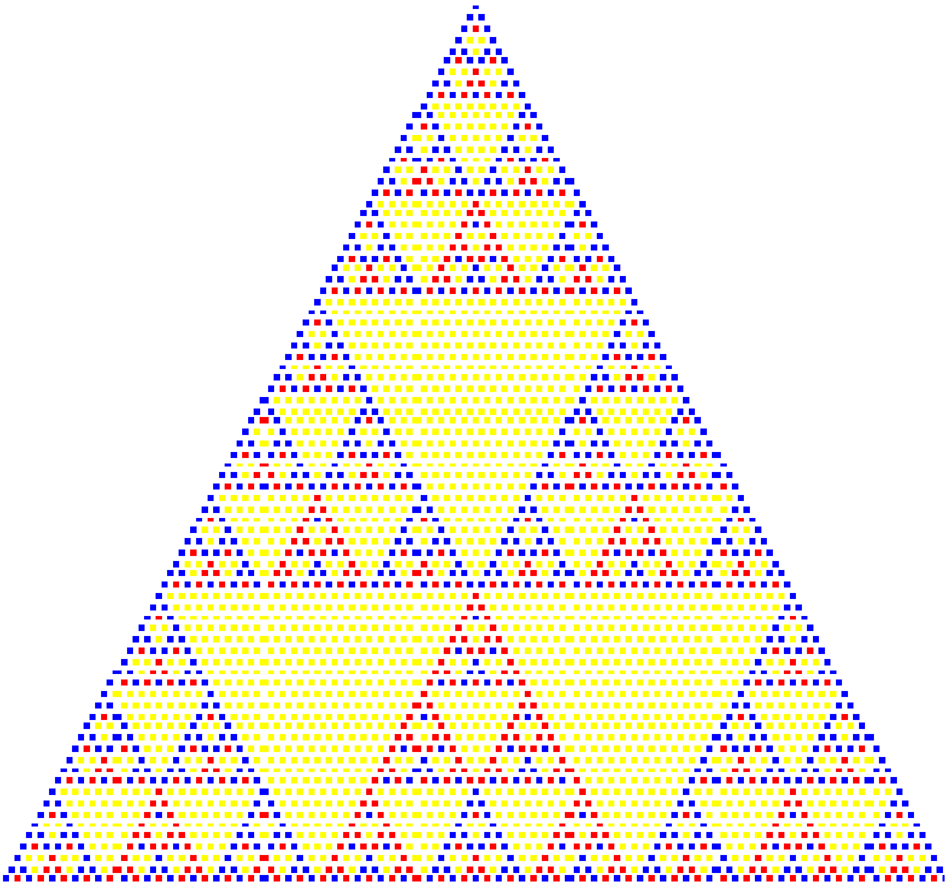
設 A_j^n 爲第 n 列第 j 項的數，$n=2^k+r, 2^k > r\left(n, r \in N, k \geq 0\right), j \leq \frac{n+1}{2}$，則：

1.若$\mathrm{r}-j+1\le 0 \Rightarrow A_j^n=1$

2.若$\mathrm{r}-j+1>0$，則改求$A_{j_2}^r$，且$r=2^{k_2}+r_2, 2^{k_2}>r_2\left(r,r_2\in N,k_2\ge 0\right),\mathrm{j}_2\le\dfrac{r+1}{2}$，回到

1.，檢驗r_2-j_2+1；如果又不合，再回到 2.，檢查到能得知$A_{j_{x+1}}^{r_x}$爲止。

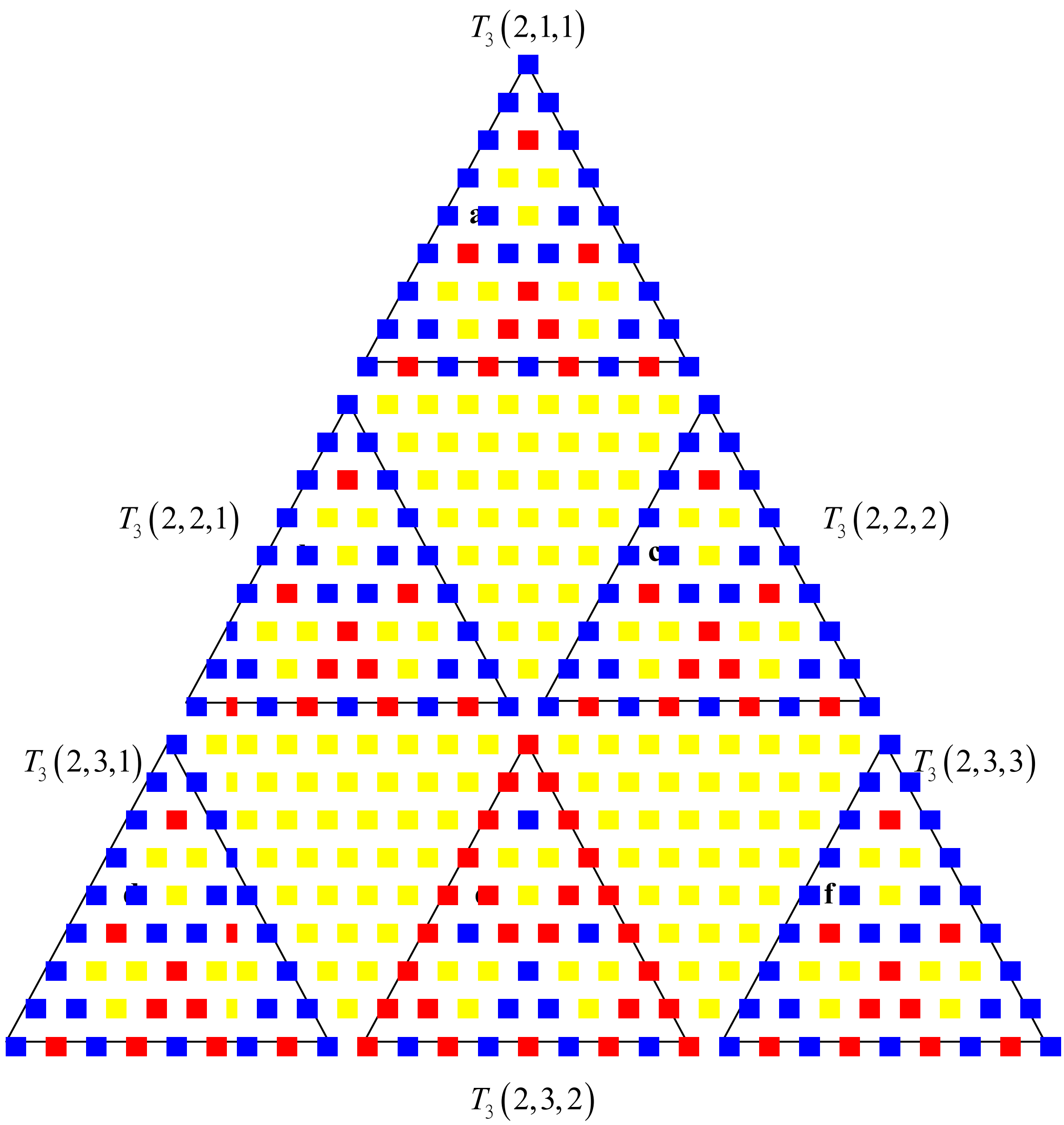
二. 以「ω」爲首，「×」爲運算符號的三角形



圖十一：程式繪出的以「ω」爲首的巴斯卡三角形（藍色表ω，紅色表ω^2，黃色表1）

與「-1」爲首，「×」爲運算符號的三角形（模 2 之巴斯卡三角形）相同，我們也使用 Lucas' Theorem 來證明圖形之遞迴性

(一) 證明圖形的遞迴關係



圖十二：以 T 集合表徵模 3 之巴斯卡三角形各部份

欲證： $T_3(k,1,1) \equiv T_3(k,2,1) \equiv T_3(k,2,2) \equiv T_3(k,3,1) \equiv T_3(k,3,3)$`

$\equiv 2 \cdot T_3(k,3,2) \qquad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

證明：設 a,b,c,d,e,f 各爲 $T_3(k,1,1)$, $T_3(k,2,1)$, $T_3(k,2,2)$, $T_3(k,3,1)$, $T_3(k,3,3)$,

$T_3(k,3,2)$ 中同一個相對位置上的數（如圖十二）。

即

$$a=\binom{n-1}{j-1}, b=\binom{n-1+3^k}{j-1}, c=\binom{n-1+3^k}{j-1+3^k},$$

$$d=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1}, e=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1+3^k}, f=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1+2\cdot 3^k}\left(n,j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$$

又令

$$n-1=n_0+n_1\cdot 3+n_2\cdot 3^2+\ldots=(n_0n_1n_2\ldots)_3$$

$$j-1=j_0+j_1\cdot 3+j_2\cdot 3^2+\ldots=(j_0j_1j_2\ldots)_3$$

$$\left(n_i,j_i\in\{0,1,2\}\right)$$

根據 Lucas' Theorem，可得：

$$a=\binom{n-1}{j-1}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\cdots}$$（三進制，以下同）

$$b=\binom{n-1+3^k}{j-1}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\ldots 1}{j_0j_1j_2\ldots 0}\equiv\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\cdots}\binom{1}{0}\equiv 1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$

$$c=\binom{n-1+3^k}{j-1+3^k}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\ldots 1}{j_0j_1j_2\ldots 1}\equiv\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\cdots}\binom{1}{1}\equiv 1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$

$$d=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\ldots 2}{j_0j_1j_2\ldots 0}\equiv\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\cdots}\binom{2}{0}\equiv 1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$

$$f=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1+2\cdot 3^k}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\ldots 2}{j_0j_1j_2\ldots 2}\equiv\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\cdots}\binom{2}{2}\equiv 1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$

$$\Rightarrow a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv f$$

$$e=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1+3^k}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\ldots 2}{j_0j_1j_2\ldots 1}\equiv\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\cdots}\binom{2}{1}\equiv 2\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$

$$\Rightarrow e\equiv 2a\pmod 3$$

意即 $a\equiv 1\Leftrightarrow e\equiv 2\cdot 1\equiv 2\pmod 3, a\equiv 2\Leftrightarrow e\equiv 2\cdot 2\equiv 1\pmod 3\Leftrightarrow a\equiv 2e$

故對任一組 a,b,c,d,e,f $\Rightarrow$ a $\equiv$ b $\equiv$ c $\equiv$ d $\equiv$ f $\equiv$ 2e

$$\Rightarrow T_3(k,1,1)\equiv T_3(k,2,1)\equiv T_3(k,2,2)\equiv T_3(k,3,1)\equiv T_3(k,3,3)\equiv 2\cdot T_3(k,3,2)$$

$\left(k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$故得證。說明此種模式會反覆遞迴下去。

(二) 對 $\omega_3(1,\mathrm{n})$ 與 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 的探討

$\omega_3(1,n)$定義爲在以「ω」（$x^3=1$的根）爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第n列「ω^1」的個數；$\omega_3(2,n)$定義爲在以「ω」（$x^3=1$的根）爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第n列「ω^2」的個數。

由(一)的結論，我們不難找出$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$之間的關係。

1. $\omega_3(1,\mathrm{n})$與$\omega_3(2,\mathrm{n})$的遞迴式

觀察圖十二的模式，發現若把整個三角形分爲三個階層，則第二階每一列中的同類餘數個數，都是第一階相對列的兩倍。（$\because T_3(k,1,1)\equiv T_3(k,2,1)\equiv T_3(k,2,2)$）

而第三階，類似的，$T_3(k,1,1)\equiv T_3(k,3,1)\equiv T_3(k,3,3)$，但它還多了一個

$T_3(k,3,2)\equiv 2\cdot T_3(k,1,1)$，使得$T_3(k,3,2)$的$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$恰好與$T_3(k,1,1)$相反。

於是可以得到以下結論：

(1) 遞迴起點

$$\begin{cases}\omega_3(1,1)=1\\ \omega_3(2,1)=0\end{cases}$$

(2) 當$3^k<n\le 2\cdot 3^k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

則令$n=3^k+r\left(3^k\ge r,\quad n,r\in\mathbb{N}\right)$

$$\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})\end{cases}$$

(3) 當$2\cdot 3^k<n\le 3^{k+1}, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

則令$n=2\cdot 3^k+r\left(3^k\ge r,\quad n,r\in\mathbb{N}\right)$

$$\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})+\omega_3(1,\mathrm{r})\end{cases}$$

我們得到了$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$相互依賴的遞迴式，但還想繼續探索下去，嘗試找出$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$各自獨立的一般式。

2. $\omega_3(1,\mathrm{n})$與$\omega_3(2,\mathrm{n})$的一般式表示

爲了從如此特殊之遞迴式推導出一般式，我們分幾個階段來進行。

(1) $\omega_3(1,3^{\mathrm{k}}),\omega_3(2,3^{\mathrm{k}})=?$

觀察圖十一，可以發現，每當列數爲$3^0,3^1,3^2,3^3\ldots$時，列中餘數都只有1或2（藍點與紅點），似乎比較單純，於是我們決定先探討$\omega_3\left(1,3^k\right)$以及$\omega_3\left(2,3^k\right)$的一般式爲何。以下我們列表方便看出規律。

餘數個數 / 列數3^k	$\omega_3\left(1,3^k\right)$	$\omega_3\left(2,3^k\right)$	和
3^0	1	0	$1=3^0$
3^1	$2\cdot1+0=2$	$2\cdot0+1=1$	$3=3^1$
3^2	$2\cdot2+1=5$	$2\cdot1+2=4$	$9=3^2$
3^3	$2\cdot5+4=14$	$2\cdot4+5=13$	$27=3^3$
3^4	$2\cdot14+13=41$	$2\cdot13+14=40$	$81=3^4$
3^5	$2\cdot41+40=122$	$2\cdot40+41=121$	$243=3^5$

表二：第3^k列與餘數個數之關係

從表二，可以很清楚地看見，當k值改變時，$\omega_3\left(1,3^k\right)$及$\omega_3\left(2,3^k\right)$的和總是等於列數，並且$\omega_3\left(1,3^k\right)$比$\omega_3\left(2,3^k\right)$多一，於是我們大膽預測，$\omega_3\left(1,3^k\right)$以及$\omega_3\left(2,3^k\right)$的一般式應可寫作：

$$\begin{cases}\omega_3\left(1,3^k\right)=\dfrac{3^k+1}{2}\\[2ex]\omega_3\left(2,3^k\right)=\dfrac{3^k-1}{2}\end{cases}$$

要證明以上兩式，等於要證明兩項猜測：第一，在第3^k列中餘數只有1或2；第二，在第3^k列中餘數1比2多一個。所以，我們也分別從這兩部份來證明。

A.欲證：$\omega_3\left(1,3^k\right)+\omega_3\left(2,3^k\right)=3^k$（$\equiv$在第$3^k$列餘數只有1或2）

證明：根據巴斯卡三角形，第3^k列第j行的數可表爲$\binom{3^k-1}{j-1}$[註1]，且

$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$j\in\mathbb{N}$。

先令$\binom{3^k-1}{j-1}$以三進制表示，即$\binom{222\ldots2}{j_0j_1j_2\ldots}$，$j_i\in\{0,1,2\}$；又

[註1] 因我們定義頂列列數爲一，不同於巴斯卡三角形定義爲零，故要減一以修正。

$\binom{2}{0}=1,\binom{2}{1}=2,\binom{2}{2}=1$

由以上並根據 Lucas' Theorem，可得：

$$\binom{222\ldots2}{j_0j_1j_2\ldots}\equiv\binom{2}{j_0}\binom{2}{j_1}\binom{2}{j_2}\binom{2}{\ldots}\equiv 1or2$$

意即模 3 之巴斯卡三角形第3^k列中必不含餘數 0，得證。

B.欲證：$\omega_3\left(1,3^{\mathrm{k}}\right)-\omega_3\left(2,3^{\mathrm{k}}\right)=1$（≡在第$3^k$列中餘數 1 比 2 多一個）

已知：當$2\cdot3^k<n\le3^{k+1},k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，令$n=2\cdot3^k+r\left(3^k\ge r,\quad n,r\in\mathbb{N}\right)$

$$\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})--1\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})+\omega_3(1,\mathrm{r})--2\end{cases}$$

證明：由已知來推導，第一式減第二式可得：

$$\omega_3(1,\mathrm{n})-\omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})-2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})-\omega_3(1,\mathrm{r})$$

$$=\omega_3(1,\mathrm{r})-\omega_3(2,\mathrm{r})$$

$n=3^k$代入遞迴式$\omega_3(1,\mathrm{n})-\omega_3(2,\mathrm{n})=\omega_3(1,\mathrm{r})-\omega_3(2,\mathrm{r})$

即$\omega_3\left(1,3^k\right)-\omega_3\left(2,3^k\right)=\omega_3\left(1,3^{k-1}\right)-\omega_3\left(2,3^{k-1}\right)$

$$=\omega_3\left(1,3^{k-2}\right)-\omega_3\left(2,3^{k-2}\right)$$

$$=\ldots=\omega_3(1,1)-\omega_3(2,1)$$

$\because\omega_3(1,1)=1,\omega_3(2,1)=0\Rightarrow1-0=1$

得證。

綜合（A）、（B），得到：

$$\begin{cases}\omega_3\left(1,3^{\mathrm{k}}\right)+\omega_3\left(2,3^{\mathrm{k}}\right)=3^{\mathrm{k}}\\ \omega_3\left(1,3^{\mathrm{k}}\right)-\omega_3\left(2,3^{\mathrm{k}}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega_3\left(1,3^{\mathrm{k}}\right)=\dfrac{3^{\mathrm{k}}+1}{2}\\ \omega_3\left(2,3^{\mathrm{k}}\right)=\dfrac{3^{\mathrm{k}}-1}{2}\end{cases}$$

這樣就證明完全了。

然而，這跟我們的目標仍有段距離，因爲其它列數非3^k的列還有更多，而且更難歸納爲一般式；而我們也確實遇到瓶頸，決定先回到遞迴式本身，觀察

實際數字代入的情形如何。

(2) 遞迴式之操作（引進三進制）

根據（一）的結論，n 值在不同範圍時，有不同的遞迴算法，現在先代入幾個數來觀察看看。

A. $\omega_3(1,20072007)=?$

∨ $20072007=14348907+5723100=2\cdot 3^{15}+5723100$

∨ $5723100=4782969+940131=2\cdot 3^{14}+940131$

∨ $940131=531441+408690=3^{12}+408690$

∨ $408690=2\cdot 177147+54396=2\cdot 3^{11}+54396$

∨ $54396=2\cdot 19683+15030=2\cdot 3^{10}+15030$

$$\Rightarrow \omega_3(1,20072007)=2\cdot\omega_3(1,5723100)$$

$$=4\cdot\omega_3(1,940131)=8\cdot\omega_3(1,408690)$$

$$=16\cdot\omega_3(1,54396)+8\cdot\omega_3(2,54396)$$

$$=\left[32\cdot\omega_3(1,15030)+16\cdot\omega_3(2,15030)\right]+\left[16\cdot\omega_3(2,15030)+8\cdot\omega_3(1,15030)\right]$$

實驗了許多數字後，我們發現似乎一直在重複同樣的步驟（打勾的算式），便想，如果能夠一次處理完這樣的步驟，便能加快演算的速度。而這個答案，仍與三進制有極大關係。

B. $\omega_3(1,20072007)=?$（改成三進制）

$20072007=(1101202202121200)_3$

像這樣大的數字，若是用（1）的方法，必定相當冗長，但用三進制表示後，可以明顯地判別需要如何處理。以下皆改以三進制表示。

從遞迴式的的計算過程來看，$\omega_3(1,1101202202121200)$ 可直接寫為

$\omega_3(1,1112222121200)$[註2]。

$$\omega_3(1,1112222121200)=8\cdot\omega_3(1,2222121200)$$

$$=16\cdot\omega_3(1,222121200)+8\cdot\omega_3(2,222121200)=\ldots$$

以上就是遞迴式的實際運作情形，當然，我們也在其中發現不少問題，接下來，將以三進制繼續探討如何將遞迴式寫成一般式。

(3) 對 $\omega_3(1, n_0 n_1 n_2 \ldots), n_i \in \{1,2\}$ 的探討（三進制）

A. $\omega_3(1,2) = ?$

$\omega_3(1,21)$和$\omega_3(1,1211)$中的 2，範圍介在$3^k < n \le 2\cdot 3$,$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，而$\omega_3(1,2)$中的 2 有別於其它位數上的 2，因他的範圍是$3^0 < 2 \le 2\cdot 3^0$ 。

故$\omega_3(1,2) = 2\cdot\omega_3(1,1) = 2$ ；此外，$\omega_3(1,11) = 2\cdot\omega_3(1,1) = 2$ 。就結果論，

$\omega_3(1(or2),2) = \omega_3(1(or2),11)$ ，這在以後還會用到。

B. $\omega_3(1, n_0 n_1 n_2 \ldots n_c)$中$n_i$的「交換律」

觀察：

$\omega_3(1,2121) = 2\cdot\omega_3(1,121) + \omega_3(2,121) = \ldots = 10\cdot\omega_3(1,1) + 8\cdot\omega_3(2,1)$

$\omega_3(1,1221) = 2\cdot\omega_3(1,221) = \ldots = 10\cdot\omega_3(1,1) + 8\cdot\omega_3(2,1)$

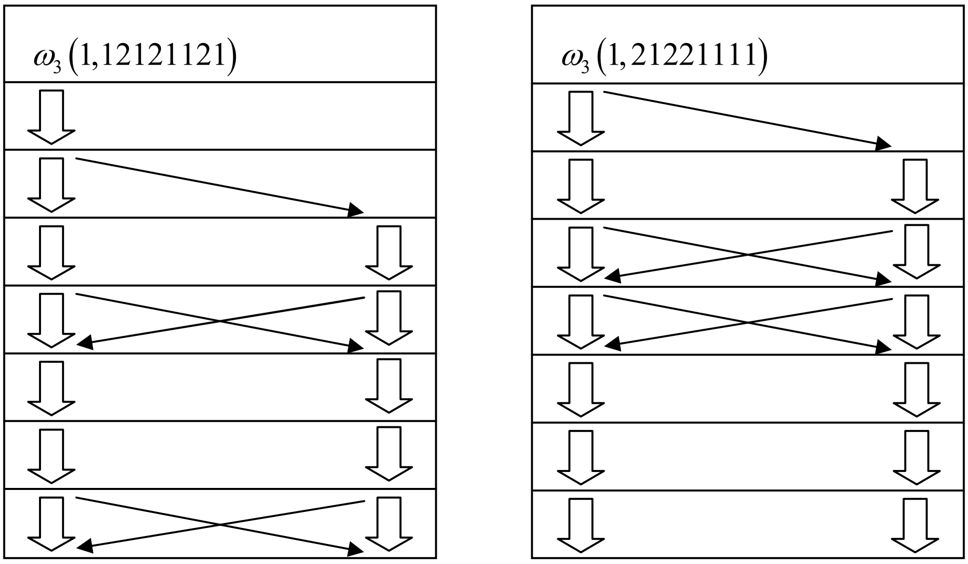
$\omega_3(1,2211) = 2\cdot\omega_3(1,211) + \omega_3(2,211) = \ldots = 10\cdot\omega_3(1,1) + 8\cdot\omega_3(2,1)$

這些算式的共通點是，它們都「分」兩次，「乘」一次[註3]，而很巧地，它們的計算結果相同；直覺告訴我們其中必有學問，便嘗試其它組數字，例如$\omega_3(1,22211), \omega_3(1,22121), \omega_3(1,21221), \omega_3(1,12221)$都相同；但$\omega_3(1,22211)$與$\omega_3(1,12212)$的結果就不同了。似乎只要三進制$n$由一樣多的 1、一樣多的 2 組成（順序不論），並且尾數相同，$\omega_3(1,\mathrm{n})$及$\omega_3(2,\mathrm{n})$便不改變。我們找到一個方法來解釋這個現象。

以$\omega_3(1,12121121)$和$\omega_3(1,21221111)$為例。

註2 將$(1101202202121200)_3$表為$3^{m_0} + 3^{m_1} + \ldots + 3^{m_i}$時，中間的 0 不會被表達出來，所以可省略。

註3 這裡用「分」表示$\omega_3(1,\mathrm{n}) = 2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r}) + \omega_3(2,\mathrm{r})$的過程，而用「乘」表示$\omega_3(1,\mathrm{n}) = 2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})$的過程。



圖十三：遞迴路徑圖，粗箭頭表「乘以 2」，細箭頭表「餘數 1、2 互換」。

如圖十三，這是$\omega_3(1,12121121)$和$\omega_3(1,21221111)$以遞迴求解的過程，需要做七次運算（因尾數是 1 不用算，若是 2 則要算）。我們稱之為「遞迴的路徑圖」，每一個小矩形內即一次運算，稱之為「段」；只有粗箭頭的段稱為「直行段」，否則稱之為「分岔段」。從圖中可以看到，左右圖皆有三個分岔段，四個直行段，正反映著n的三個 2，四個1。

現在來看這些直行段，當中只有粗箭頭，也就是$\omega_3(1,\mathrm{r})$乘以二，$\omega_3(2,\mathrm{r})$也乘以二，簡言之，直行段即代表「同乘以二」；反過來說，將直行段抽出後，相當於把原本計算結果「同除以二」了。而將左右圖四個直行段抽出後，剩下的路徑是相同的，而根據等量公理，原本左右圖路徑的值也必相同。即$\omega_3(1,12121121)=\omega_3(1,21221111)$。

不只如此，將抽出的直行段插回不同的地方，答案也會相等。另外，由於$\omega_3(1,2)=\omega_3(1,11)$為直行段，而$\omega_3(1,12212)=\omega_3(1,122111)$，當然$\omega_3(1,12212)\neq\omega_3(1,22211)$。這一切就解釋了（2）的現象，得一結論：

只要$n_0n_1n_2\ldots n_c$與$m_0m_1m_2\ldots m_c$中有相同個數的1，又有相同個數的 2，且$n_c=m_c$，則$\omega_3(1(or2),n_0n_1n_2\ldots n_c)=\omega_3(1(or2),m_0m_1m_2\ldots m_c)$。

C. $\omega_3\left(1(or2),\overbrace{222\ldots2}^{k}1\right)=?$

觀察：

$$\omega_3(1,21)=2\cdot\omega_3(1,1)+\omega_3(2,1)=2$$
$$\omega_3(1,221)=2\cdot\omega_3(1,21)+\omega_3(2,21)=5\cdot\omega_3(1,1)+4\cdot\omega_3(2,1)=5$$
$$\omega_3(1,2221)=\ldots=14\cdot\omega_3(1,1)+13\cdot\omega_3(2,1)=14$$

這些計算結果給我們一種似曾相識的感覺，這才想到，原來這跟之前的

$\omega_3(1,10),\omega_3(1,100),\omega_3(1,1000)$ 註4 一模一樣。我們認爲其中一個原因是 $\omega_3(1,21)$ 及 $\omega_3(1,10)$ 都適用 $\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})$ 這個算式，即路徑都只有分岔段。但我們仍然嘗試證明這個結果，並且採用之前證明 $\omega_3(1,3^{\mathrm{k}})$ 與 $\omega_3(2,3^{\mathrm{k}})$ 一般式的手法。

a． 欲證： $\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)+\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)=3^k$

證明：根據巴斯卡三角形，第 $\overbrace{222\ldots21}^{k}$ 列第 j 行的數可表爲 $\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}$（三進制），且 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ， $j_i\in\{0,1,2\}$ ；又

$\binom{0}{0}=1,\binom{0}{1}=0,\binom{0}{2}=0,\binom{2}{0}=1,\binom{2}{1}=2,\binom{2}{2}=1$

根據 Lucas' Theorem，可得：

$$\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv\binom{2}{j_0}\binom{2}{j_1}\binom{2}{j_2}\binom{2}{\ldots}\binom{2}{j_{k-1}}\binom{0}{j_k}$$

(a) 當 $j_k=0$ ， $\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv 1 or 2$

(b) 當 $j_k=1 or 2$ ， $\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv 0$

第 $\overbrace{222\ldots21}^{k}$ 列有 $3^{k+1}-2$ 個數，而 j 是從 0 到 $222\ldots20$ ，尾數 j_k 以 $0,1,2$ 一直循環。共有 $\frac{(3^{k+1}-2)+2}{3}=3^k$ 個 $j_k=0$ ，使得 $\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv 1 or 2$ 。

$\Rightarrow\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)+\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)=3^k$ ，得證。

b． 欲證： $\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)=1$

註4 爲 $\omega_3(1,3^1),\omega_3(1,3^2),\omega_3(1,3^3)$ 之三進制。

已知：$\omega_3(1,\mathrm{n})-\omega_3(2,\mathrm{n})=\omega_3(1,\mathrm{r})-\omega_3(2,\mathrm{r})$ ，$n=2\cdot 3^k+r, r\le 3^k\in\mathbb{N}$

證明：$\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)$

$$=\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k-1}1\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots 2}^{k-1}1\right)$$

$$=\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k-2}1\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots 2}^{k-2}1\right)$$

$$=\ldots=\omega_3(1,1)-\omega_3(2,1)=1$$

綜何 a、b，$\begin{cases}\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)+\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)=3^{\mathrm{k}}\\ \omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)=1\end{cases}$ 可以得到：

$$\begin{cases}\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)=\dfrac{3^{\mathrm{k}}+1}{2}=\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots 0}^{k}\right)\\ \omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots 2}^{k}1\right)=\dfrac{3^{\mathrm{k}}-1}{2}=\omega_3\left(2,1\overbrace{000\ldots 0}^{k}\right)\end{cases}$$ （三進制）

(4) $\omega_3\left(1(or2),\overbrace{222\ldots 2}^{k_1}1\overbrace{000\ldots 0}^{k_2}\right)=?$

設 $\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k_1}1\overbrace{000\ldots 0}^{k_2}\right)$

$$=a_1\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k_1-1}1\overbrace{000\ldots 0}^{k_2}\right)+b_1\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k_1-1}1\overbrace{000\ldots 0}^{k_2}\right)$$

$$=a_2\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k_1-2}1\overbrace{000\ldots 0}^{k_2}\right)+b_2\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots 2}^{k_1-2}1\overbrace{000\ldots 0}^{k_2}\right)$$

$=\ldots\ldots$

$$=a_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)+b_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$$

觀察 $a_2=2\cdot a_1+b_1, b_2=2\cdot b_1+a_1$ 可推得

$$a_{k_1}+b_{k_1}=\left(2\cdot a_{k_1-1}+b_{k_1-1}\right)+\left(2\cdot b_{k_1-1}+a_{k_1-1}\right)=3\left(a_{k_1-1}+b_{k_1-1}\right)$$

$$=3\left[\left(2\cdot a_{k_1-2}+b_{k_1-2}\right)+\left(2\cdot b_{k_1-2}+a_{k_1-2}\right)\right]=3^2\left(a_{k_1-2}+b_{k_1-2}\right)$$

$$=\ldots\ldots=3^{k_1-1}\left(a_{k_1-(k_1-1)}+b_{k_1-(k_1-1)}\right)=3^{k_1-1}\left(a_1+b_1\right)=3^{k_1-1}\left(2+1\right)=3^{k_1}$$

$$a_{k_1}-b_{k_1}=\left(2\cdot a_{k_1-1}+b_{k_1-1}\right)-\left(2\cdot b_{k_1-1}+a_{k_1-1}\right)=a_{k_1-1}-b_{k_1-1}$$

$$=\left(2\cdot a_{k_1-2}+b_{k_1-2}\right)-\left(2\cdot b_{k_1-2}+a_{k_1-2}\right)=a_{k_1-2}-b_{k_1-2}$$

$$=\ldots\ldots=a_{k_1-(k_1-1)}-b_{k_1-(k_1-1)}=a_1-b_1=2-1=1$$

由 $\begin{cases}a_{k_1}+b_{k_1}=3^{k_1}\\ a_{k_1}-b_{k_1}=1\end{cases}$ 可得 $a_{k_1}=\dfrac{3^{k_1}+1}{2}, b_{k_1}=\dfrac{3^{k_1}-1}{2}$

故 $\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$

$$=a_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)+b_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$$

$$=\frac{3^{k_1}+1}{2}\cdot\frac{3^{k_2}+1}{2}+\frac{3^{k_1}-1}{2}\cdot\frac{3^{k_2}-1}{2}$$

$$=\frac{\left(3^{k_1+k_2}+3^{k_1}+3^{k_2}+1\right)+\left(3^{k_1+k_2}-3^{k_1}-3^{k_2}+1\right)}{4}$$

$$=\frac{2\left(3^{k_1+k_2}+1\right)}{4}=\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}$$

到這裡，所需的工具已具備，將逐步導出 $\omega_3\left(1,\mathrm{n}\right)$ 和 $\omega_3\left(2,\mathrm{n}\right)$ 的一般式。

(5) 導出 $\omega_3\left(1,\mathrm{n}\right)$ 和 $\omega_3\left(2,\mathrm{n}\right)$ 的一般式

A. $\omega_3\left(1,n_0n_1n_2\ldots n_c\right), n_i\in\{0,1,2\}$ 化簡的方法

欲導出最後的公式，所以先以一般方式化簡，茲舉例：

a. $\omega_3(1,10020010211222212000)$

(a) 將中間的 0 去掉（∵在化簡過程中，這些 0 不涉及任何運算）

$\Rightarrow \omega_3(1,12121122212000)$

(b) 與 0 相接的數（或最後一個數）若為 2，則將 2 化為11

$\Rightarrow \omega_3(1,121211222111000)$

(c) 不與 0 相接的 1 皆移至前方（∵已證明 1 或 2 的順序不影響運算結果）

$\Rightarrow \omega_3(1,111111222221000)$

(d) 有五個 1 在前面，有五個 2 及三個 0 在後面，所以

$$\omega_3(1,10020010211222212000)=2^5\times\frac{3^5+1}{2}=3904$$

b. $\omega_3(1,20010211120121000)$

(a) 同上，將中間的 0 去掉

$\Rightarrow \omega_3(1,2121112121000)$

(b) 不與 0 相接的 1 皆移至前方

$\Rightarrow \omega_3(1,1111122221000)$

(c) 有五個 1 在前面，有四個 2 及三個 0 在後面，所以

$$\omega_3(1,20010211120121000)=2^5\times\frac{3^7+1}{2}=11680$$

c. 結論

(a) 將中間的 0 去掉

(b) 若與 0 相接的為 2，則將 2 化為 11

(c) 不與 0 相接的 1 皆移至前方

(d) 化為$\omega_3\left(\overbrace{11\cdots1}^{l}\overbrace{22\cdots2}^{k_1}1\overbrace{00\cdots0}^{k_2}\right)$的形式，則

此列有$2^k\times\dfrac{3^{l+m}+1}{2}$個餘數 1

B. $\omega_3(1,\text{n})=?\,\omega_3(2,\text{n})=?$歸納結果

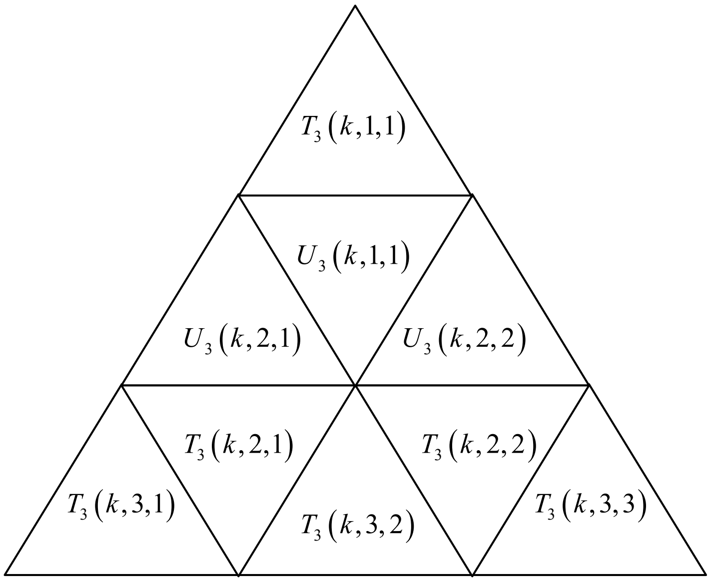
將n化為三進制，並依據前述規則化簡$\omega_3(1,n)$及$\omega_3(2,n)$，則：

$$\omega_3(1,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}+1\right)$$

$$\omega_3(2,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}-1\right)$$

$$\omega_3(2,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}-1\right)$$

(三) 能否以集合的觀點表徵出這類圖形中的任何一個數？



圖十四：簡化後的模 3 巴斯卡三角形（以集合表示）

圖十四中每個集合均有一定範圍限制，以下用表格來觀察各個集合的範圍為何。

定義 $P_3(n,j)$ 表模 3 之巴斯卡三角形第 n 列第 j 行的餘數。

$T_3(k,1,1)$		$T_3(k,2,1)$		$T_3(k,2,2)$	
n	j 範圍	n	j 範圍	n	j 範圍
1	1	3^k+1	1	3^k+1	3^k+1
2	1~2	3^k+2	1~2	3^k+2	$3^k+1 \sim 3^k+2$
3	1~3	3^k+3	1~3	3^k+3	$3^k+1 \sim 3^k+3$
N	$1 \sim n$	3^k+r	$1 \sim r$	3^k+r	$3^k+1 \sim 3^k+r$
$T_3(k,3,1)$		$T_3(k,3,2)$		$T_3(k,3,3)$	
n	j 範圍	n	j 範圍	n	j 範圍
$2\cdot 3^k+1$	1	$2\cdot 3^k+1$	3^k+1	$2\cdot 3^k+1$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+1$
$2\cdot 3^k+2$	1~2	$2\cdot 3^k+2$	$3^k+1 \sim 3^k+2$	$2\cdot 3^k+2$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+2$
$2\cdot 3^k+3$	1~3	$2\cdot 3^k+3$	$3^k+1 \sim 3^k+3$	$2\cdot 3^k+3$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+3$
$2\cdot 3^k+r$	$1 \sim r$	$2\cdot 3^k+r$	$3^k+1 \sim 3^k+r$	$2\cdot 3^k+r$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+r$
$U_3(k,1,1)$		$U_3(k,2,1)$		$U_3(k,2,2)$	
n	j 範圍	n	j 範圍	n	j 範圍
3^k+1	$2 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+1$	$2 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+1$	$3^k+2 \sim 2\cdot 3^k$
3^k+2	$3 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+2$	$3 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+2$	$3^k+3 \sim 2\cdot 3^k$
3^k+3	$4 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+3$	$4 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+3$	$3^k+4 \sim 2\cdot 3^k$
3^k+r	$r+1 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+r$	$r+1 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+r$	$3^k+r+1 \sim 2\cdot 3^k$

表三：模 3 之巴斯卡三角形各個集合的範圍

從表三可知模 3 之巴斯卡三角形的 T 集合可定義為：

$$T_3(k,s_1,s_2)=\left\{P_3(n,j) \mid n=(s_1-1)\cdot 3^k+r,(s_2-1)\cdot 3^k<j\le(s_2-1)\cdot 3^k+r\right\}$$

$\left(3^k \ge r,\quad n,r\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$

我們發現同在第二階上的 $T_3(k,2,1)$、$U_3(k,1,1)$、$T_3(k,2,2)$，其 j 值範圍分別為 $[1,r]$、

$\left[r+1,3^k\right]$、$\left[3^k+1,n\right]$；
同在第三階上的$T_3(k,3,1)$、$U_3(k,2,1)$、$T_3(k,3,2)$、$U_3(k,2,2)$、$T_3(k,3,3)$，其 j 值範圍分別爲$[1,r]$、$\left[r+1,3^k\right]$、$\left[3^k+1,3^k+r\right]$、$\left[3^k+r+1,2\cdot 3^k\right]$、$\left[2\cdot 3^k+1,n\right]$。故此，由 n 與 j 的關係就能判斷出$P_3(n,j)$所位於的集合。

若$P_3(n,j)$位於

1. U 集合，則$P_3(n,j)=0$
2. $T_3(k,s_1,s_2)$，$(s_1,s_2)\neq(3,2)$，則$P_3(n,j)=P_3\left(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k\right)$
3. $T_3(k,3,2)$，則$P_3(n,j)\equiv 2\cdot P_3\left(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k\right)$

例 1：$P_3(666,123)=?$

$666=2\cdot 243+180$，可分五區間$[1,180]$、$[181,243]$、$[244,423]$、$[424,486]$、$[487,666]$

$\because j=123\in[1,180]\Rightarrow P_3(666,123)\in T_3(5,3,1)$，$\therefore P_3(666,123)=P_3(180,123)$

$180=2\cdot 81+18$，又可分五區間$[1,18]$、$[19,81]$、$[82,99]$、$[100,162]$、$[163,180]$

$\because j=123\in[100,162]\Rightarrow P_3(180,123)\in T_3(4,3,2)$，$\therefore P_3(180,123)=0$

例 2：$P_3(243,21)=?$（n 爲 3 的 k 次方時）

$243=2\cdot 81+81$，只可分三區間$[1,81]$、$[82,162]$、$[163,243]$，因此列無 U 集合。

$\because j=21\in[1,81]\Rightarrow P_3(243,21)\in T_3(4,3,1)$，$\therefore P_3(243,21)=P_3(81,21)$……以此類推至答案。

柒、 結論

一、$T_m(k,s_1,s_2)=\left\{P_m(n,j)\mid n=(s_1-1)\cdot m^k+r,(s_2-1)\cdot m^k<j\le(s_2-1)\cdot m^k+r\right\}$，直觀來說，將此三角型分爲 m 階，就是第$s_1$階第$s_2$位的$k$單位三角形，則$T_2(k,1,1)\equiv T_2(k,2,1)\equiv T_2(k,2,2)\left(k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$。

二、$\omega_2(1,n)$定義爲在以「-1」（$x^2=1$的根）爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第n列「$(-1)^1$」的個數。$\omega_2(1,\mathrm{n})$，有$\omega_2(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_2(1,\mathrm{r})$的遞迴關係，由 Lucas' Theorem 可證明之。$\omega_2(1,\mathrm{n})$之一般式，與二進位制密切相關：令$(n)_{10}=(n_0n_1n_2\ldots)_2$，且$n_i$中有$k$個 1，最小 1 的權值爲$2^x$，則$\omega_2(1,\mathrm{n})=2^{k-1}\cdot 2^x$。

三、設A_j^n爲第n列的第j項（也就是同餘觀點中所定義的$P_2(n,j)$，但這次我們尚未探討完全），$n=2^k+r,2^k>r$且$n,r\in N,k\ge 0,j\le\dfrac{\mathrm{n}+1}{2}$，則若$\mathrm{r}-j+1\le 0\Rightarrow A_j^n=1$；若不然，則要繼續變換、檢驗，以得到所求。

四、$T_m(k,s_1,s_2)=\left\{P_m(n,j)\mid n=(s_1-1)\cdot m^k+r,(s_2-1)\cdot m^k<j\le(s_2-1)\cdot m^k+r\right\}$，直觀來說，將此三角型分爲 m 階，就是第$s_1$階第$s_2$位的$k$單位三角形，則$T_3(k,1,1)\equiv T_3(k,2,1)\equiv T_3(k,2,2)\equiv T_3(k,3,1)\equiv T_3(k,3,3)\equiv 2\cdot T_3(k,3,2)\ \left(k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$。

五、在模 3 之巴斯卡三角形，第n列餘數 1 或 2 的個數$\omega_3(1,\mathrm{n})$、$\omega_3(2,\mathrm{n})$，有著較爲複雜的遞迴關係。當$3^k<n\le 2\cdot 3^k,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，令$n=3^k+r\left(3^k\ge r,\quad n,r\in\mathbb{N}\right)$，則

$\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})\end{cases}$；當 $2\cdot 3^k < n \le 3^{k+1}, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，令 $n=2\cdot 3^k + r\left(3^k \ge r,\quad n,r\in\mathbb{N}\right)$，

則 $\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})+\omega_3(1,\mathrm{r})\end{cases}$。Lucas' Theorem 亦可證明之。

$\omega_3(1,\mathrm{n})$ 、 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 之一般式，與三進位制密切相關。

$$\omega_3(1,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}+1\right)$$

$$\omega_3(2,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}-1\right)$$

六、判斷出 $P_3(n,j)$ 所位於的集合。若 $P_3(n,j)$ 位於

1. U 集合，則 $P_3(n,j)=0$
2. $T_3(k,s_1,s_2)$，$(s_1,s_2)\ne(3,2)$，則 $P_3(n,j)=P_3\left(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k\right)$
3. $T_3(k,3,2)$，則 $P_3(n,j)\equiv 2\cdot P_3\left(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k\right)$

捌、 研究展望

雖然已經做出以「-1」或「ω」爲首且運算符號爲「×」的巴斯卡三角形，其圖形的遞迴規律，以及任一列「-1」或「ω」、「ω^2」的個數；但我們最希望的是可以找到一個通式，將第 n 列第 j 行的數直接推算出來是「1」、「-1」、「ω」或「ω^2」。我們計畫進一步將圖形改爲以「i」爲起首，且運算符號「＋」改爲「×」，並且繼續探討以下的問題：

一、以「i」爲起首，且運算符號「＋」改爲「×」三角形，其圖形有何規律性？

二、以「i」爲起首，且運算符號「＋」改爲「×」三角形，其每一列「-1」或「i」或「$-i$」個數是否有規律？是否可歸納爲通式？

三、能否推算出此三角形第 n 列第 j 行的數是「1」或「-1」或「i」或「$-i$」？

最後我們將針對以下再予以討論：

四、可以推算出此三角形第 n 列第 j 行的數爲何後，如何以一個公式表示？

五、能否將圖形的遞迴規律推廣到以 $x^p=1$（p 爲質數）的根爲首，運算符號爲「×」，之巴斯卡三角形？

在不斷的探索中陸續發現新的元素，也在整個研究過程中發現許多原先預想不到的結果，也希望在往後的研究中能有更驚奇的發現，我們正繼續努力著。

玖、 參考資料

一. 黃光雄、簡茂發（2000）。教育研究法。師大書苑有限公司印行。

二. 諸明嘉（1979）。楊輝三角形 P.1～P.58。人間文化事業公司。

三. 旗立電腦研究室、施威銘（2003）。高中電腦 P.62～P.67。旗立資訊股份有限公司。

四. 許介彥（2004）。巴斯卡三角形的幾個性質。科學教育月刊。275。

五. James G.. Huard, Blair K. Spearman & Kenneth S. Williams（1998）. Pascal's Triangle（mod 8）. In Europ. J. Combinatorics, 19, 45-62

六. Lawrence H. Riddle（1998）. Pascal's Triangle (mod 2).

【評　語】　　040413　別鬧了，巴斯卡!

1) 文獻探討是科學研究的重要一環，它能夠引發創新的靈感。海報上不見文獻探討，令人覺得研究走入了閉門造車的境界。

2) 作者無法精簡的敘述研究總結，表示研究過份重視細節而忽略了整體觀。