中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040412

<u>鬼腳圖</u>

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者：	指導老師：
高二 王聖諭 高二 吳尚恩 高二 李　威 高二 林承翰	王進益

關鍵詞：<u>機率</u>　<u>媒介</u>　<u>鬼腳圖</u>

摘要

在本文中，我們試著從不一樣的角度下去研究鬼腳圖，想辦法以空間的情況找出鬼腳圖的特性。首先，我們將參考書籍上的簡略資料作延伸，努力找出出空間鬼腳圖最完整的定義，並找出它的化簡方法。接著，我們開始結合群論的角度去討論之，好讓空間鬼腳圖的運算特性更為明瞭。最後，我們還自行發展出一套計算方法來研究空間鬼腳圖的畫法，並運用機率統計的方式來分析空間鬼腳圖遊戲的公平性。

壹、研究動機

在翻閱書籍時，偶然發現一本科普書──《拼圖拼字拼數學》。其中有一個關於知名遊戲「鬼腳圖」，或稱「爬格子」的章節。鬼腳圖是一種配對遊戲、類似連連看的一對一函數，常被用於多人中選取一些人出來的場合。與其它關於鬼腳圖之文章不同的是，這一章節帶領我們以不同的角度來觀看鬼腳圖，即是以「群」與「空間」的概念來重新切入這令人著迷的遊戲，如獲至寶的我們希望以一個全新的視角來觀察鬼腳圖。

貳、研究目的

一.將鬼腳圖拓展到空間。

二.研究鬼腳圖的群性質。

三.定義鬼腳圖的畫法。

四.探索鬼腳圖遊戲的公平性。

五.討論出空間鬼腳圖的化簡方法。

參、研究設備及器材

電腦(C Language)、人腦、紙、筆。

肆、研究過程

一、 名詞介紹

（一）穿梭線：鬼腳圖中連接兩條直線的橫線。

（二）元素：構成各種鬼腳圖的最簡單位。

（三）交換子：鬼腳圖交換的物件。

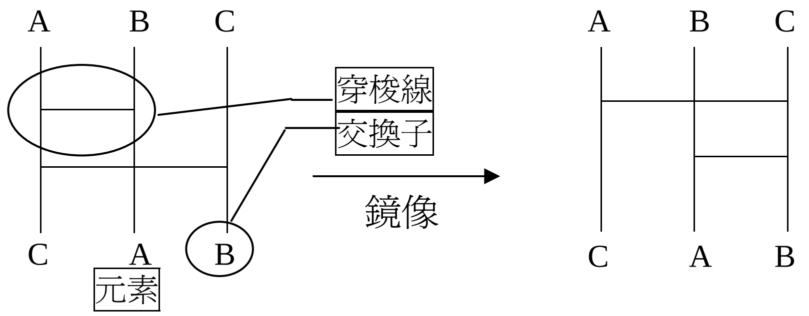
（四）交換動作：兩直線上的物件互相交換，故一條穿梭線即一個交換動作。

（五）媒介：即各交換子所經過的穿梭線（一條穿梭線可產生兩個媒介）。

（六）最簡運算：不可再化簡的鬼腳圖。

（七）鏡像：當鬼腳圖以上下顛倒，左右相反時看的樣子，稱作鏡像。

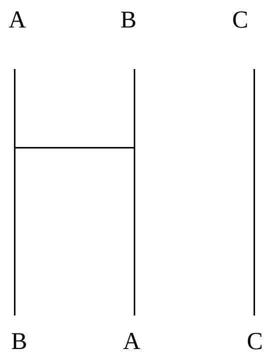
（八）媒介數：媒介的個數。



二、鬼腳圖

鬼腳圖是一種有趣的數學遊戲，一般的玩法是先畫出幾條直線，再讓遊戲者各畫上數條橫線（我們稱為**穿梭線**），之後每人選取一條直線開始向下走，每遇到穿梭線就需沿著穿梭線移動到另一條直線繼續向下。

如下圖：



A 從第一條直線向下走遇到兩條直線間的穿梭線，即交換至第二條直線繼續，所以最後 A 與 B 互換。前人針對此類鬼腳圖做了一些分析，也得到了一些結果，像是證明鬼腳圖具有一對一的性質、畫法不唯一，且討論出了它的一些化簡方法。【見參考資料一】

三、鬼腳圖與群論

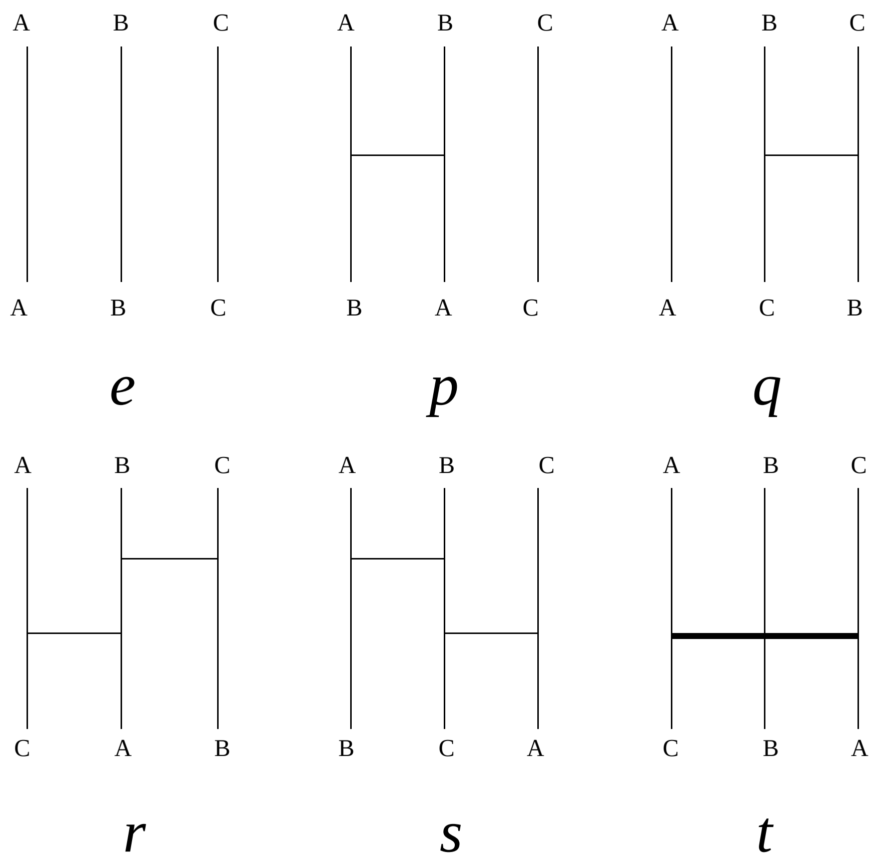
而一開始最引起我們興趣的則是葛登能著，遠流出版社出版的《拼圖拼字拼數學》一書【見參考資料二】，其中第二章「群論與辮子」一文中對鬼腳圖的見解。在這篇文章中，提到了三條直線的鬼腳圖符合「群（Group）」的性質。

所謂「群」是一種抽象的結構，包含數個元素（以 a,b,c,…表示）組成的集合，以及一種二元運算（Binary Operation，以∘表示），將兩個元素做二元運算可產生第三個元素。當這種結構若符合以下四個條件，即稱為「群」【見參考資料三】:

1. 集合中任兩個元素做運算得到的元素也屬於此集合，即符合「封閉性」
2. 需滿足「結合律」，即$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3. 有一單位元素e，使$a \circ e = e \circ a = a$
4. 對任一元素a，皆存在一反元素a'，使$a \circ a' = a' \circ a = e$

我們想知道四條直線的鬼腳圖，是否能產生如同三條直線一樣的情況（包括是否為一種群？每種元素的畫法是否唯一？），於是我們開始上網搜尋相關資料，想了解相關方面的研究，但並未發現有人將鬼腳圖與群論做連結。

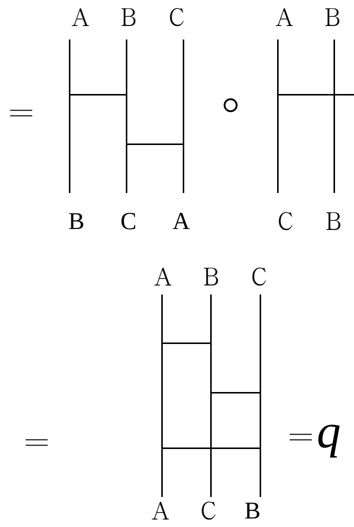
在我們研讀「群論與辮子」一文中的三條直線情況時，該文列出六個基本元素，見下圖：



	計算之前項						
計算之後項		***e***	***p***	***q***	***r***	***s***	***t***
	e	*e*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*
	p	*p*	*e*	*r*	*q*	*t*	*s*
	q	*q*	*s*	*e*	*t*	*p*	*r*
	r	*r*	*t*	*p*	*s*	*e*	*q*
	s	*s*	*q*	*t*	*e*	*r*	*p*
	t	*t*	*r*	*s*	*p*	*q*	*e*

第 s 行第 t 列即代表 $s \circ t$，結果爲 q，以下列圖形說明：

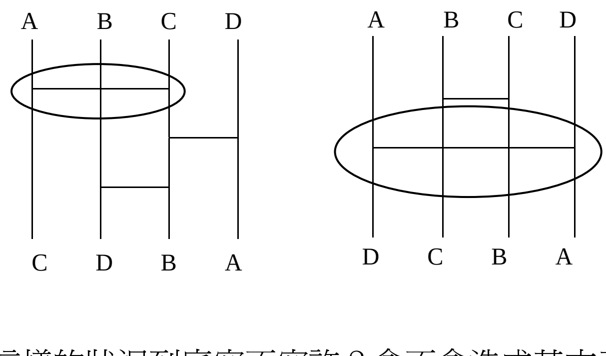
$s \circ t$



（上表中，e 爲單位元素，t、s 互爲反元素。）

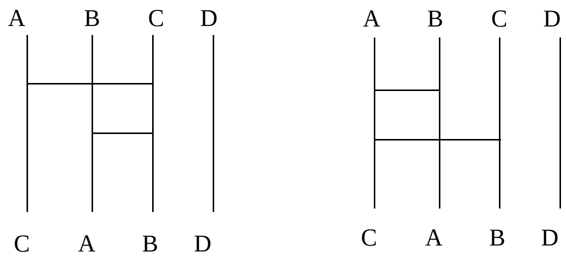
我們發現一件奇怪的事情：它所給定的基本元素中，竟有「**穿越橫線**」出現的情況。所謂有穿越橫線的鬼腳圖是指元素 t：A,C 間直接交換直線(Directly exchange A and C)；此穿梭線造成了一個問題——路徑長不同。亦即在平面上，這條穿梭線走過的長度較其他穿梭線來的長。這樣一來，我們在探索四條直線的鬼腳圖時，就出現問題：基本元素究竟要多「基本」？有幾個基本元素？基本元素的畫法是否唯一？穿梭線又需要有多少條？

首先，我們的想法是：在三條直線的鬼腳圖中，基本元素的個數，共有 3! = 6 個，亦即 ABC 的排列數。所以我們覺得四條直線的鬼腳圖的基本元素應有 4!=24 個，否則就難以如同三條直線的鬼腳圖滿足群論定義中的「封閉性」。我們開始用尋找形成 ABCD、ABDC、……、DCBA 等 24 個排列方式的鬼腳圖畫法，藉此找出它的基本元素；但我們在四條直線的鬼腳圖產生過程中，有些圖形需要如下列穿梭線才能產生：



而這樣的狀況到底容不容許？會不會造成基本元素畫法的重複？

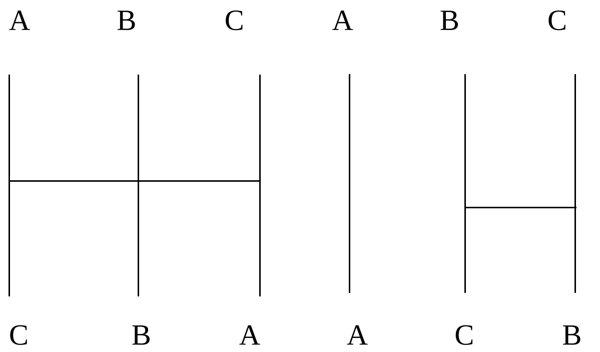
另外，我們進一步發現，即使在穿梭線數目相同的情形下，亦能產生相同的結果。如下列均有兩條穿梭線的情形：



於是，我們再設想著將**元素**定義成：**不能化簡的鬼腳圖**。

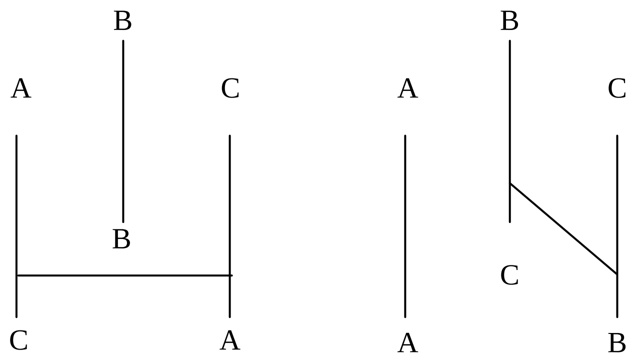
接著我們努力試著改善元素畫法的重複性，並歸納出以下定義：

（一）不論在平面上的長短，兩條直線間的穿梭線都算一個動作。



以平面觀之

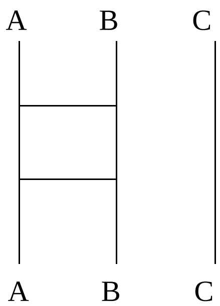
(exchange A & C) (exchange B & C)



改以空間觀之

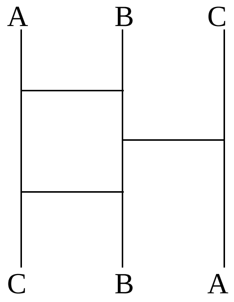
如上面這兩張圖都是一種**交換**，都算是「**一個動作**」。

（二）在基本運算（即元素）中，任兩條線段不可連續交換兩次，不然不爲**最簡運算**（因爲可將其化簡）。如下圖就不爲一個最簡運算圖形：



將鬼腳圖拓展至空間中之後，關於路徑長短的問題便解決了，每條穿梭線的長短都視爲相同，如此一來，基本六個元素中的 p、q 和 t 圖都可以視爲僅做「一個動作」的元素。

而如果以平面形式，基本六元素中的 t，則須改寫成如下：



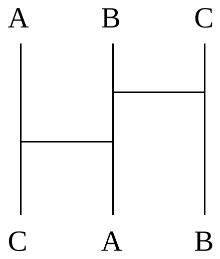
才能完成。

由以上定義，得知四條直線的空間鬼腳圖中的任一個基本元素，最多只需三條穿梭線即可形成。並可推廣如下：

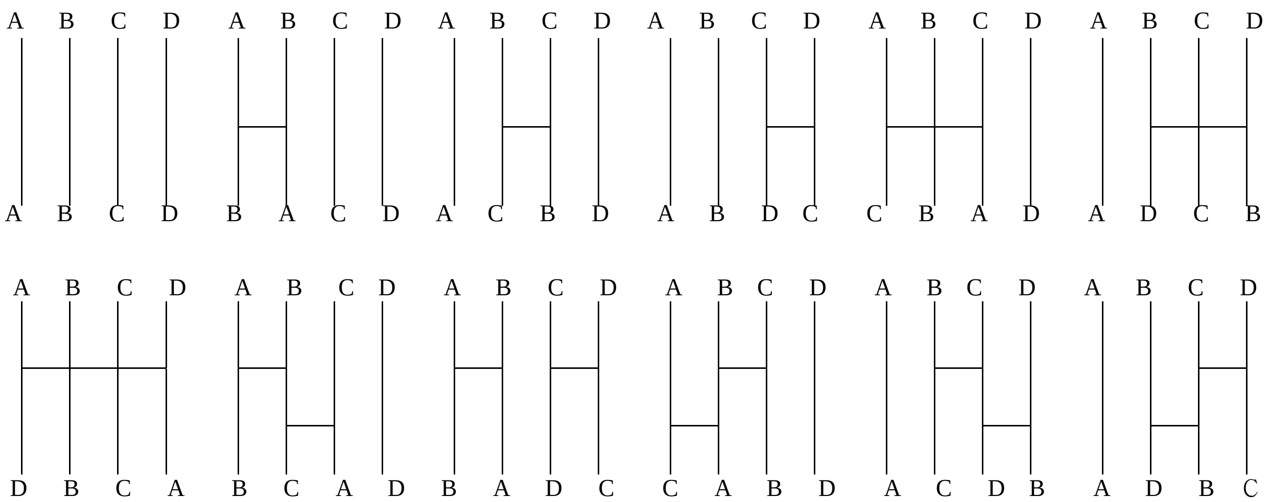
定理：n 條直線的鬼腳圖中的任一個基本元素，最多只需 $n-1$ 條穿梭線即可形成。

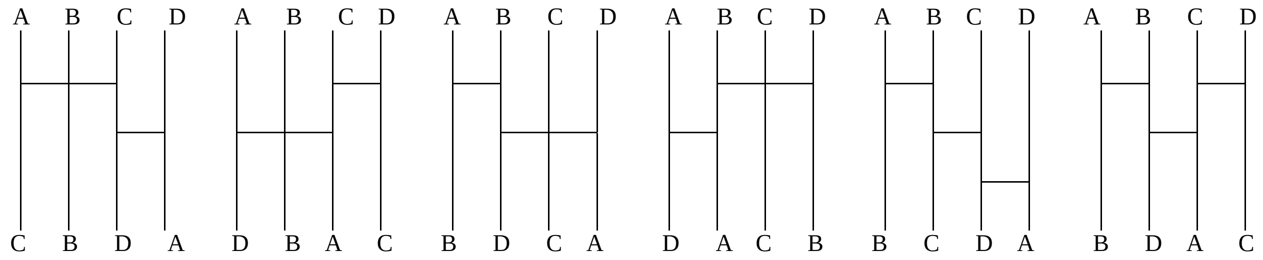
證明：由於每條穿梭線最少可將一個交換子移動至定位，在 n 條直線鬼腳圖中，最多使用 n-1 條穿梭線即可將 n-1 個交換子移至定位，又因爲鬼腳圖有一對一性質【見參考資料一】，所以剩下的一個交換子也必定可以移至定位。 #

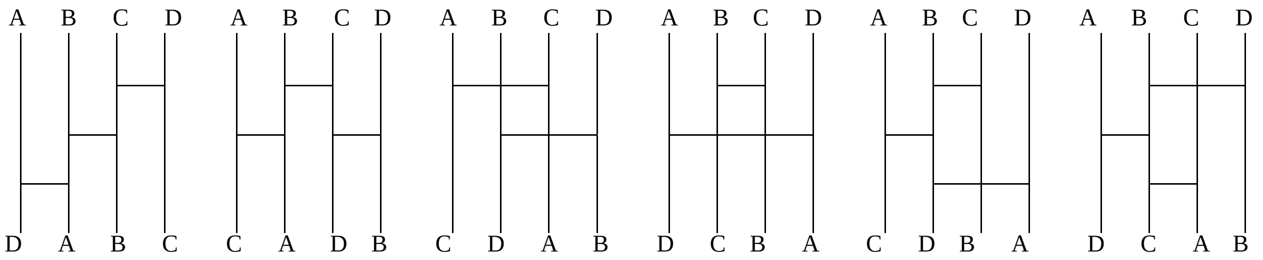
例如：三條直線鬼腳圖，最多只需兩個動作。



因此，我們試著用「空間鬼腳圖」的想法畫出 24 個四條直線鬼腳圖的基本元素。

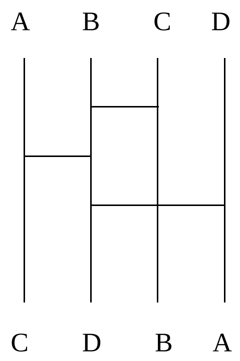


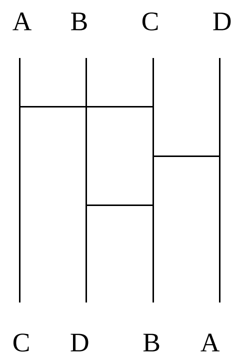




在畫上列 24 個四條直線鬼腳圖的基本元素過程中，我們發現**許多基本元素都有很多種不同樣的表現方法(畫法)**，即基本元素在四條直線鬼腳圖中不具唯一性。

例如：

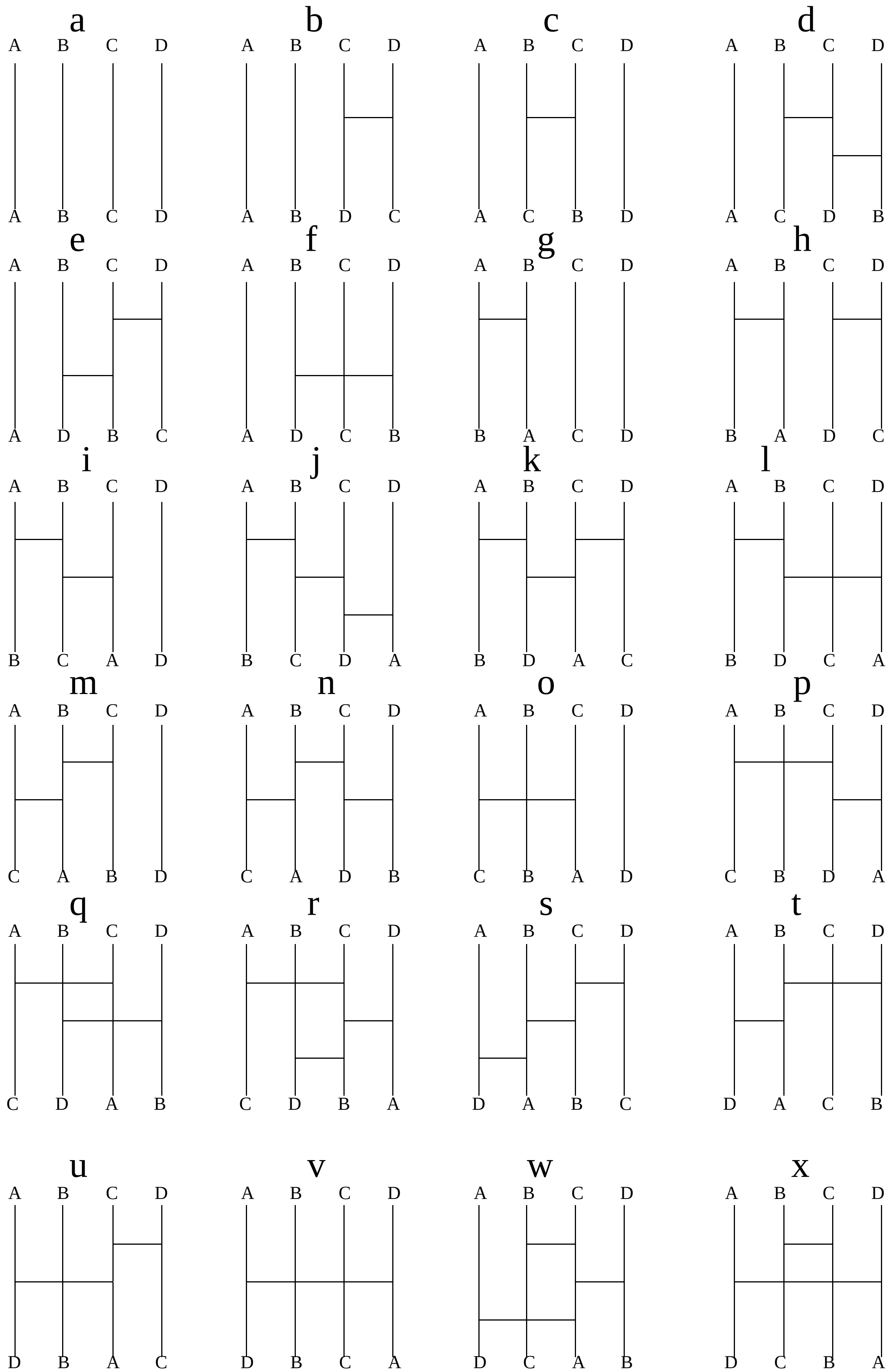




上圖兩者若以空間觀之，皆使用了三條穿梭線且有四個**交換子**，而最後呈現的結果也相同。如此不禁令我們懷疑，鬼腳圖元素畫法的重複性，會不會影響鬼腳圖的公平性？（這將在之後討論）

我們決定令具有同樣結果的最簡鬼腳圖爲相同的元素，並將每一基本元素以英文字母代稱，如此一來，便可定義出四條直線鬼腳圖的 24 個基本元素，並同時能滿足群論定義的四個條件。

下列爲我們所使用符號之對照表：

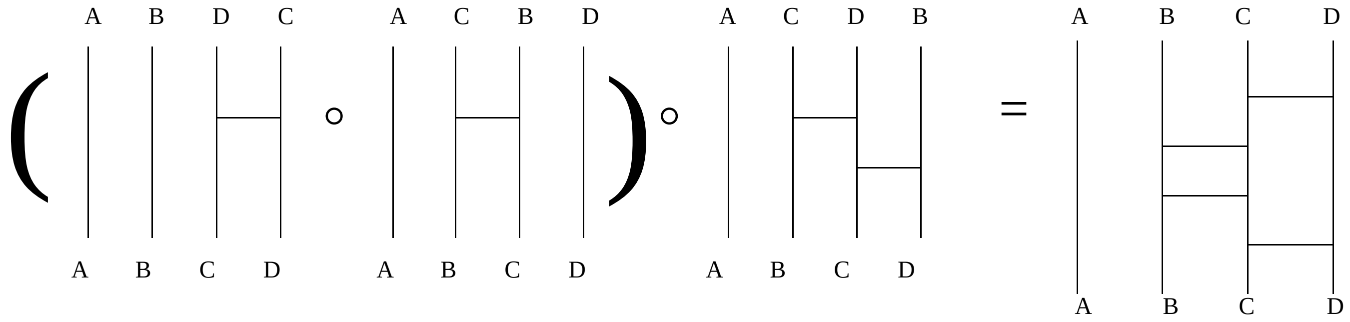

a
A B C D
A B C D
b
A B C D
A B D C
c
A B C D
A C B D
d
A B C D
A C D B
e
A B C D
A D B C
f
A B C D
A D C B
g
A B C D
B A C D
h
A B C D
B A D C
i
A B C D
B C A D
j
A B C D
B C D A
k
A B C D
B D A C
l
A B C D
B D C A
m
A B C D
C A B D
n
A B C D
C A D B
o
A B C D
C B A D
p
A B C D
C B D A
q
A B C D
C D A B
r
A B C D
C D B A
s
A B C D
D A B C
t
A B C D
D A C B
u
A B C D
D B A C
v
A B C D
D B C A
w
A B C D
D C A B
x
A B C D
D C B A

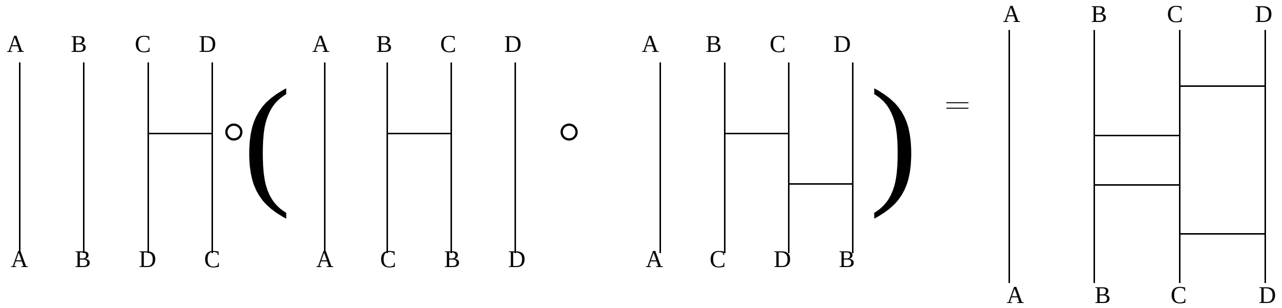
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**l**	**m**	**n**	**o**	**p**	**q**	**r**	**s**	**t**	**u**	**V**	**w**	**x**
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	V	w	x
b	b	a	d	c	f	e	h	g	j	i	l	k	n	m	p	o	r	q	t	s	v	U	x	w
c	c	e	a	f	b	d	i	k	g	l	h	j	o	q	m	r	n	p	u	w	s	X	t	v
d	d	f	b	e	a	c	j	l	h	k	g	i	p	r	n	q	m	o	v	x	t	W	s	u
e	e	c	f	a	d	b	k	i	l	g	j	h	q	o	r	m	p	n	w	u	x	S	v	t
f	f	d	e	b	c	a	l	j	k	h	i	g	r	p	q	n	o	m	x	v	w	T	u	s
g	g	h	m	n	s	t	a	b	o	p	u	v	c	d	i	j	w	x	e	f	k	L	q	r
h	h	g	n	m	t	s	b	a	p	o	v	u	d	c	j	i	x	w	f	e	l	K	r	q
i	i	k	o	q	u	w	c	e	m	r	s	x	a	f	g	l	t	v	b	d	h	J	n	p
j	j	l	p	r	v	x	d	f	n	q	t	w	b	e	h	k	s	u	a	c	g	I	m	o
k	k	i	q	o	w	u	e	c	r	m	x	s	f	a	l	g	v	t	d	b	j	H	p	n
l	l	j	r	p	x	v	f	d	q	n	w	t	e	b	k	h	u	s	c	a	i	G	o	m
m	m	s	g	t	h	n	o	u	a	v	b	p	i	w	c	x	d	j	k	q	e	R	f	l
n	n	t	h	s	g	m	p	v	b	u	a	o	j	x	d	w	c	i	l	r	f	Q	e	k
o	o	u	i	w	k	q	m	s	c	x	e	r	g	t	a	v	f	l	h	n	b	P	d	j
p	p	v	j	x	l	r	n	t	d	w	f	q	h	s	b	u	e	k	g	m	a	O	c	i
q	q	w	k	u	i	o	r	x	e	s	c	m	l	v	f	t	a	g	j	p	d	N	b	h
r	r	x	l	v	j	p	q	w	f	t	d	n	k	u	e	s	b	h	i	o	c	M	a	g
s	s	m	t	g	n	h	u	o	v	a	p	b	w	i	x	c	j	d	q	k	r	E	l	f
t	t	n	s	h	m	g	v	p	u	b	o	a	x	j	w	d	i	c	r	l	q	F	k	e
u	u	o	w	i	q	k	s	m	x	c	r	e	t	g	v	a	l	f	n	h	p	B	j	d
v	v	p	x	j	r	l	t	n	w	d	q	f	s	h	u	b	k	e	m	g	o	A	i	c
w	w	q	u	k	o	i	x	r	s	e	m	c	v	l	t	f	g	a	p	j	n	D	h	b
x	x	r	v	l	p	j	w	q	t	f	n	d	u	k	s	e	h	b	o	i	m	C	g	a

上表格(25×25)爲 24 個基本元素運算後產生的結果，運算爲先做行，再做列，例如第 5 行第 6 列即代表 $d \circ e = a$ 。由符號之對照表及上表格(25×25)可看出在四條直線的鬼腳圖中：a 爲單位元素；d∘e 運算後結果爲單位元素 a，故 d、e 互爲反元素（此爲眾多反元素中的一組）。亦發現鬼腳圖並不具有交換性，如 $i \circ h = p \neq e = h \circ i$ ，所以鬼腳圖雖是群，但卻**不是交換群**。

而下頁圖則表現出了空間鬼腳圖符合「結合律」的特性：

$$(b \circ c) \circ d = b \circ (c \circ d)$$





說明：如上兩圖，不論過程中結合律結合的對象爲何，鬼腳圖穿梭線運算的疊加順序皆相同，故計算後得到的結果會相同。 #

四、鬼腳圖的化簡

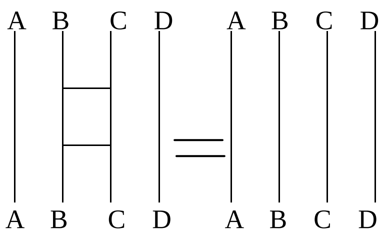
在前人的研究資料中，有提到平面鬼腳圖的化簡方式【見參考資料一】，我們亦發現在空間中還有其他可以化簡鬼腳圖的方法。

因爲鬼腳圖中，同樣的結果有不同的畫法，表示應該有性質可以使之簡化成較簡單的過程。

不失一般性，我們以四條直線的鬼腳圖爲例。

性質 a.成對抵消性

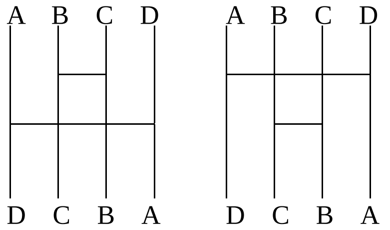
當兩個或偶數個交換動作（K,K+n）（K,K+n）（其中 n∈N），原本在 K 位置的交換子先交換到 K+n 位置，之後再交換到 K 位置，所以等於沒有交換動作，故可消去。如下圖：



=>（K,K+n）（K,K+n）=（K,K）

性質ｂ.無關動作交換性

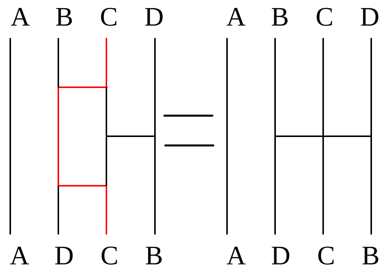
當兩或多個交換動作不相連時，也就是說交換動作互相不影響，那這兩交換動作的順序可變動，可先做一，後做二；亦可先做二，後做一。



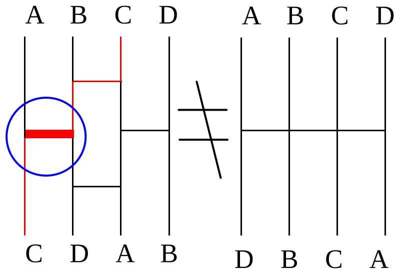
=> （A,A+a）（B,B+b）⋯（Y,Y+y）（Z,Z+z） = （B,B+b）（F,F+f）⋯（K,K+k）（W,W+w）

其中$a,b,\cdots\cdots,y,z\in \mathrm{N}$且$A\neq A+a\neq B\neq B+b\neq\cdots\cdots\neq Y\neq Y+y\neq Z\neq Z+z$

性質 C .縮搓性

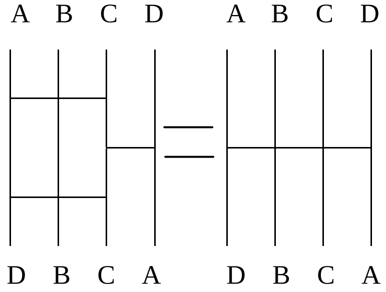


（2,3）（3,4）（2,3），原本在 3 位置的交換子第一次交換後，避開了第二個交換動作，直接碰到第三個交換動作，再交換到原本的位置，等同於只有 B 和 D 互相交換，故簡化爲（2,4）。



如圖，若加上此穿梭線，位置 3 的交換子，其路線（3,2）（2,1）換到位置 1，無法像上述性質中原本在位置 3 的交換子，會走兩次的（2,3）回到位置 3，故不符合此性質。

也可推廣成：

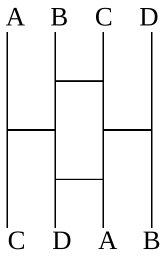


$\Rightarrow (\mathrm{K},\mathrm{K}+\mathrm{m})(\mathrm{K}+\mathrm{m},\mathrm{K}+\mathrm{m}+\mathrm{n})(\mathrm{K},\mathrm{K}+\mathrm{m})=(\mathrm{K},\mathrm{K}+\mathrm{m}+\mathrm{n})$ 其中 $m,n\in \mathrm{N}$

特例：迂迴化簡法

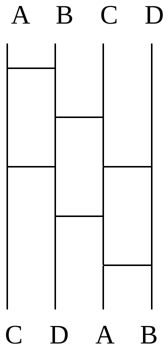
相對於直接消去或化簡，相反則是多加幾畫，再簡化。

舉個例子：

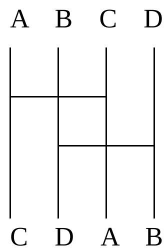


此鬼腳圖若在平面上，應是最簡的畫法，若是在空間中，還可再化簡，但以上的性質中，似乎沒有一個可以應用，所以換個角度想，無法直接化簡，那就以迂迴方式化簡。

首先會發現 A,B 交換子在交換的過程中，過程相似，且 A 總是在 B 的前面，那如果在第一條（2,3）前加上（1,2），先將 A,B 交換，最後在第二條（2,3）下加上（3,4），將按照原動作交換的 A,B 交換回來，結果是不變的。



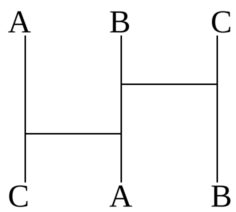
此時發現若依照性質 c.可簡化成（1,3）（2,4）



五、以媒介討論鬼腳圖

我們發現可以用另一種角度來觀察我們的鬼腳圖，即是：**將每個交換子所走的路線中經過的穿梭線條數總加起來。**

例如：



讓我們從 A、B、C 三個交換子的角度下去操作：

A〈位置由 1→2〉交換過程：以(1,2)表示

B〈位置由 2→3〉交換過程：以(2,3)表示

C〈位置由 3→1〉交換過程：以(2,3) (1,2)表示

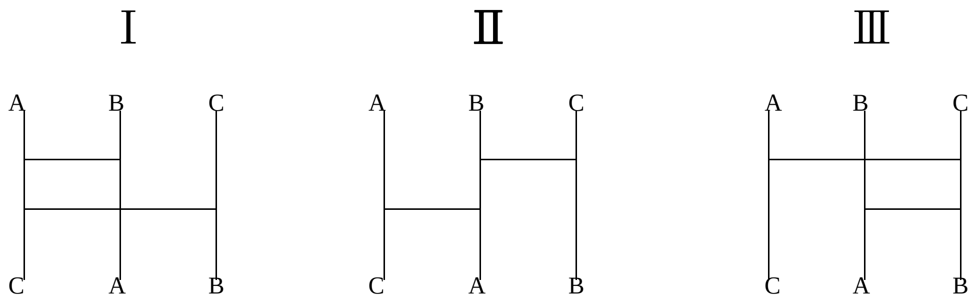
媒介種類有兩種〈(1,2)，(2,3)〉，媒介總數由 ABC 三個過程所經總加，共 4 個。

由 A 來看，在到達指定位置的過程中，共經過 1 條穿梭線，B 有 1 條，C 有兩條。各交換子必須執行這些動作才可完成此圖。我們將各交換子所經過的穿梭線稱作「**媒介**」。

綜觀，此圖形有兩條穿梭線（分別爲(1,2),(2,3)），過程共經過 1+1+2=4 條媒介。並且我們發現 A、B 走完後，C 只要沿著 A、B 所走過的穿梭線即可到達終點，此乃因爲 C 的交換過程中所用到的穿梭線重複到前面 A、B 使用的穿梭線。

我們將這種由交換子角度出發的概念推廣：

例如：



每一張圖都是使用 4 個媒介數。如圖：

圖序 媒介種類 交換子結果	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A〈1→2〉	(1,2)	(1,2)	(1,3)(2,3)
B〈2→3〉	(1,2)(1,3)	(2,3)	(2,3)
C〈3→1〉	(1,3)	(2,3)(1,2)	(1,3)
媒介數總和	1+2+1=4	1+1+2=4	2+1+1=4

由此我們便推測，有兩條穿梭線的鬼腳圖，若其結果相同，其媒介數總和守恆，皆爲 4。而這三個圖的結果都一樣，A 的目標是要從 1 的位置走到 2〈 Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ.圖的目標都一樣〉，若只交換一次，可使用(1,2)，但(1,2)也可以分解成兩個交換，即(1,3)(2,3)，B 和 C 的狀況也相同。（只是分解的穿梭線不一樣）

接著，我們由觀察發現「媒介數總和守恆」的性質。

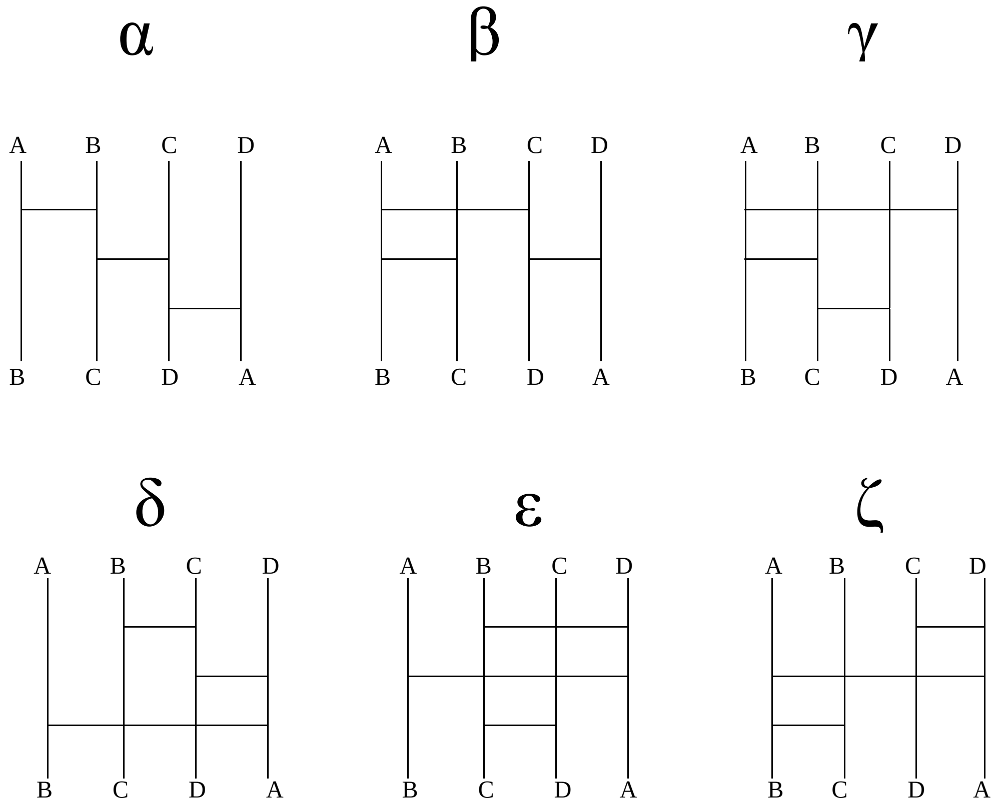
媒介數總和守恆：

在符合媒介數 $\le 2(n-1)$ 的情況下，若結果相同、穿梭線相同，則媒介數皆相同。

說明：於一空間鬼腳圖，將之依照簡化性質化簡，若不能成功使用成對抵消性來　　化簡（見鬼腳圖的化簡性質 a），表示所需最少穿梭線恆爲一定數，那各個交換子所交換的次數總和當然不變，換句話說，媒介數守恆。#

在交換三個交換子的狀況下，要畫出 CAB 的結果，視爲媒介個數（1,1,2）的排列，即有 $\frac{3!}{2!}=3$ 種圖形，由此可知，要使(A,B,C)變成(C,A,B)，並化簡到所使用穿梭線最少的結果，有 3 種走法。

接下來，我們再將此種想法應用在有 4 個交換子的鬼腳圖上（結果爲 BCDA）：

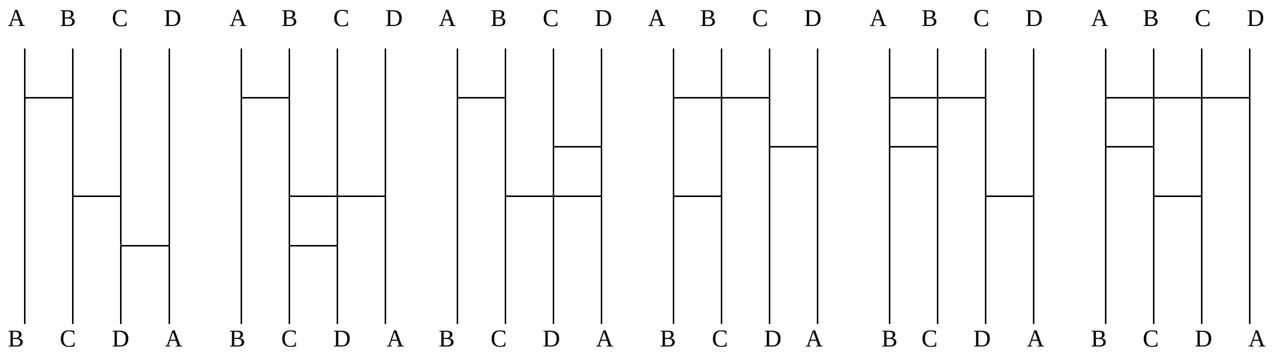


每張圖皆用去 6 個媒介，並且用了 3 條穿梭線（**此處先舉六個例子**）統計各交換子的媒介數。如下圖：

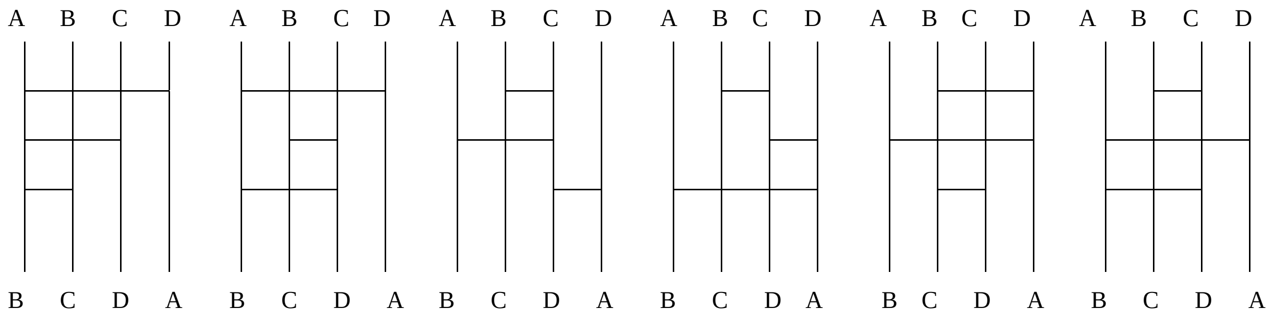
交換子 / 媒介數 / 圖序	A	B	C	D	媒介數總和
圖 α	3	1	1	1	6
圖 β	2	1	2	1	6
圖 γ	1	1	1	3	6
圖 δ	1	3	1	1	6
圖 ε	1	2	1	2	6
圖 ζ	1	1	3	1	6

所以，要計算達到 $\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & \Downarrow & & \\ B & C & D & A \end{array}$ 的方法數，應該就是（1，1，1，3）或（1，1，2，2）的全排列，故有 $\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}=10$ 種方法，但依照程式計算的結果，卻有 16 種。列出如下圖：

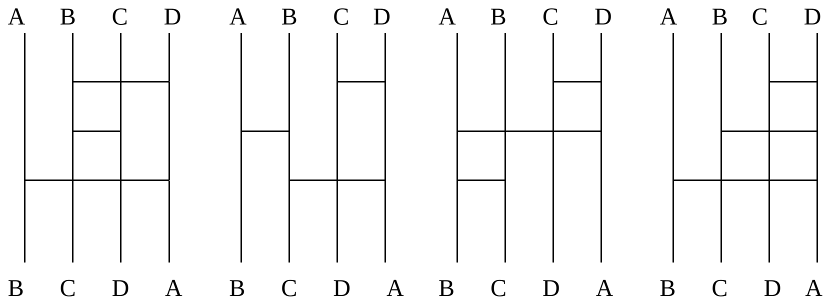
Α Β Γ Δ Ε Ζ



Η Θ Ι Κ Λ Μ



Ν Ξ Ο Π



.

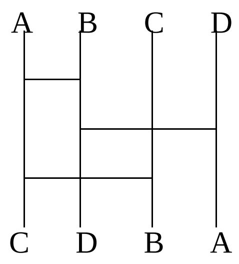
由上面 16 張圖統計媒介數的種類，如下表：

媒介數種類	符合圖	
1，1，1，3	Z	
1，1，3，1	O	
1，3，1，1	K	
3，1，1，1	A	
1，1，2，2	H	
1，2，1，2	M Λ Θ N	⇒多了 3 個
2，1，1，2	B	
1，2，2，1	Π	
2，1，2，1	Γ Δ E Ξ	⇒多了 3 個
2，2，1，1	I	

上表格中，明顯看出在媒介數（1，2，1，2）和（2，1，2，1）兩種中，有多的畫法，此性質可用鬼腳圖的化簡性質，表示同樣媒介數的交換子所走的穿梭線不同且沒有連在一起，具有之前提到的「簡化性質 b——無關動作交換性」，也就是，同樣媒介數的交換子，各自經過的穿梭線不相連，所以交換動作的順序可以變化，故會多出幾種圖形，但呈現相同的結果。除此之外，另有**鏡像**的性質，也就是說依照**無關動作交換性**，可有兩種畫法，而這兩種都有自己的鏡像圖，故為 $2\times2=4$ 種，所以重寫元素的計算方法 $\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}+2\times2\times2-2=16$ 種。

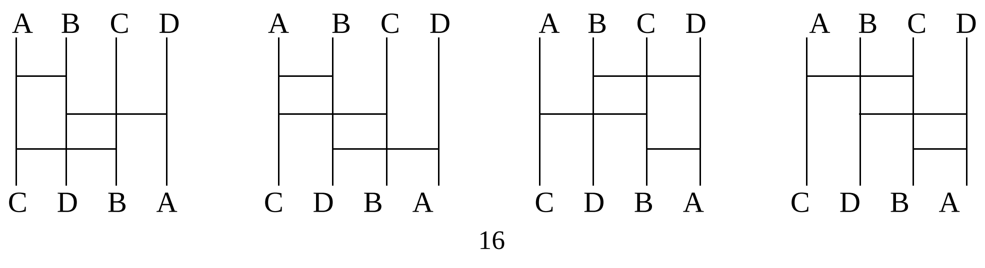
在上例中，我們討論出間隔排列的媒介數，如 1212，2121 要多算其符合的圖形。之後，我們再對另外一個鬼腳圖作類似分析。

其圖形如右：



它的圖形是為媒介數 2211 的排列以及媒介數 3111 的排列所構成。

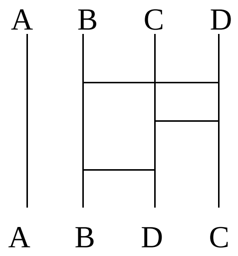
但是，其媒介數分布為 2211 時就有 4 張圖都可達成其結果（CDBA）分別為：(1,2)(2,4)(1,3)、(1,2) (1,3) (2,4)、(2,4)(1,3)(3,4)、(1,3) (2,4) (3,4) 圖形如下：



其中，前兩個爲**無關動作交換性**產生的結果，後兩個爲前兩個的鏡像。

而其另一種媒介數分布 1122 亦有上述狀況，反而是 1212、 2121 沒有鏡像與**無關動作交換性**的問題。(因爲其媒介數分布 1212 的圖形爲(1,4)(1,2)(1,3)沒有牽涉到**無關動作交換性**與鏡像。)

由此推斷，四條直線狀況下，1212 等間隔排列的媒介數需考慮多出圖形，而如 1122、2211、1221 計算時也須考慮多出的圖形。



另外，我們還發現另一個現象，如上圖(2,4) (3,4) (2,3)，它所產生的結果爲 ABDC，而媒介數分布是 0312。誠如前面所述，這一張三條穿梭線的圖媒介數守恆，都是 6；但是，經過觀察後，發現：若一個具三條穿梭線的鬼腳圖有兩個交換子經運算後回到原來位置（例如上述例子 ABCD→ABDC），則其中有一交換子的媒介數爲 0，且其他三個交換子的媒介數爲 1,2,3。

換句話說，這種三條穿梭線的鬼腳圖總共有 4!=24 個(0123 的排列數)。另外，上述這種鬼腳圖一定可以化簡成媒介數總和爲 2 的鬼腳圖（即化成只有一條穿梭線），其原因爲：只須要 2 個交換子來做交換，因此若給予 3 條穿梭線則有：2(穿梭線數)×2(每條穿梭線可產生 2 個媒介)=4 個媒介是多餘的，所以必可以化簡。

在遊戲規則下（n 條直線鬼腳圖穿梭線最多有 n-1 條），如果玩四條直線的鬼腳圖，以一條穿梭線畫圖，則亦可用三條穿梭線來畫出相同結果。若玩家畫出的是兩條穿梭線，則不能擴充其穿梭線數而達到同樣結果。

說明：兩條穿梭線鬼腳圖，我們若要再加上穿梭線讓它產生相同結果，勢必一次要加上兩條穿梭線，才能達到讓交換子「來回」的效果。這樣一來，就有 4 條穿梭線了，這和規則抵觸。

但是，如果我們玩的鬼腳圖不侷限於四條直線，而是 n 條直線的時候，上述媒介數總和爲 2 的圖形不但可以擴充媒介數總和爲 6，更可擴充爲 10 以上（原因同上述說明）；而媒介數總和爲 4 的鬼腳圖亦可擴充其圖形爲 8 以上（=4+4m）。

如果遊戲規則可容許三條穿梭線中有重複的情形出現，這樣讓媒介數總和爲 2 的鬼腳圖被畫出的機會會增加，媒介數總和爲 4 的鬼腳圖一次要增加 4 個媒介，才能「來回」，所以有重複時，其機會不會增加。而媒介數爲 6 的鬼腳圖沒有增加空間了，更不可能提高被畫出的機會。

經過媒介數計算畫法的種類，歸納出下列性質或規則：

（一）若是n條直線，最多有$n-1$條穿梭線，故媒介數最多$2(n-1)$個。

（二）若各個交換子的媒介數都一樣，則畫法只有一種。

（三）同樣的媒介數，不能有奇數個交換子擁有，不然此圖畫不出來。

（例如不會有媒介數為 111 的圖形。）

（四）n 條直線時，媒介數總和為 m 的圖形，可擴充至媒介數總和為

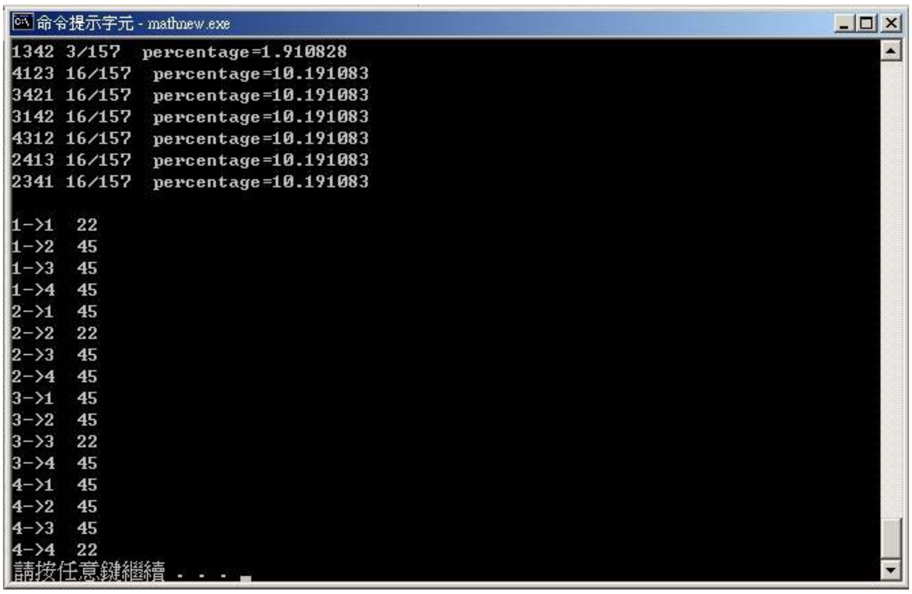
$m+4k(k \in N \cup \{0\} \wedge m+4k \le 2(n-1))$。

六、鬼腳圖的機率

為了探討鬼腳圖的公平性，我們發展出了一個程式，可自動畫出一定條件下的鬼腳圖。以四條直線為例，穿梭線有(1,2)、(1,3)、(1,4)、(2,3)、(2,4)、(3,4)六種，各種鬼腳圖即是以這六種穿梭線產生，只要將六種穿梭線做排列即可畫出鬼腳圖的各種圖形。

程式執行情況如下：

↑輸入直線數與穿梭線數目



↑計算結果個數與機率

（一）不可重複的狀況

1、同一人畫穿梭線

我們探討機率的第一個想法，就是鬼腳圖規則為 n 條直線，穿梭線限制在 n-1 條以下，並由同一個人來畫穿梭線，畫法總數即為穿梭線的排列數目。

我們以四條直線為例，共有 $C_2^4=6$ 種穿梭線，在無穿梭線時，有 $P_0^6=1$ 種圖形；一條穿梭線時，有 $P_1^6=6$ 種圖形；兩條為 $P_2^6=30$ 種；三條為 $P_3^6=120$ 種；所以四條直線、至多三條穿梭線的鬼腳圖共有 $P_0^6+P_1^6+P_2^6+P_3^6=157$ 種（程式統計如下表）。運用此想法，我們便能推廣得到：

定理： n 條直線，由一人畫穿梭線，不可重複畫穿梭線，且最多畫 $n-1$ 條穿梭線，則有 $P_0^{C_2^n}+P_1^{C_2^n}+P_2^{C_2^n}+\ldots\ldots+P_{n-2}^{C_2^n}+P_{n-1}^{C_2^n}$ 種

我們將程式資料統計歸納，以探討一些空間鬼腳圖的現象。

若依交換的次數來統計（即穿梭線數）則結果為何？

註： →表示「換到」的意思，1 → 1 表示將交換子由一號位置換到一號位置。

一條穿梭線

$1\to1\Rightarrow3$（種結果）	$2\to1\Rightarrow1$	$3\to1\Rightarrow1$	$4\to1\Rightarrow1$
$1\to2\Rightarrow1$	$2\to2\Rightarrow3$	$3\to2\Rightarrow1$	$4\to2\Rightarrow1$
$1\to3\Rightarrow1$	$2\to3\Rightarrow1$	$3\to3\Rightarrow3$	$4\to3\Rightarrow1$
$1\to4\Rightarrow1$	$2\to4\Rightarrow1$	$3\to4\Rightarrow1$	$4\to4\Rightarrow3$

二條穿梭線

$1\to1\Rightarrow6$	$2\to1\Rightarrow8$	$3\to1\Rightarrow8$	$4\to1\Rightarrow8$
$1\to2\Rightarrow8$	$2\to2\Rightarrow6$	$3\to2\Rightarrow8$	$4\to2\Rightarrow8$
$1\to3\Rightarrow8$	$2\to3\Rightarrow8$	$3\to3\Rightarrow6$	$4\to3\Rightarrow8$
$1\to4\Rightarrow8$	$2\to4\Rightarrow8$	$3\to4\Rightarrow8$	$4\to4\Rightarrow6$

三條穿梭線

$1\to1\Rightarrow12$	$2\to1\Rightarrow36$	$3\to1\Rightarrow36$	$4\to1\Rightarrow36$
$1\to2\Rightarrow36$	$2\to2\Rightarrow12$	$3\to2\Rightarrow36$	$4\to2\Rightarrow36$
$1\to3\Rightarrow36$	$2\to3\Rightarrow36$	$3\to3\Rightarrow12$	$4\to3\Rightarrow36$
$1\to4\Rightarrow36$	$2\to4\Rightarrow36$	$3\to4\Rightarrow36$	$4\to4\Rightarrow12$

由此看來，只有在一條穿梭線的情況下，要讓鬼腳圖某個位置經過一系列交換而回到原來位置的機率較高，兩條跟三條穿梭線的情況下，都會使機率較低。這跟一條穿梭線時，這條橫線分配給各個間隔的排列數較少有關，故會產生此現象。

經過統計，直線數四條，穿梭線 0~3 條的交換狀況：

交換	個數
1->1	22
1->2	45
1->3	45
1->4	45
2->1	45
2->2	22
2->3	45
2->4	45
3->1	45
3->2	45
3->3	22
3->4	45
4->1	45
4->2	45
4->3	45
4->4	22

由上表可發現自己交換到自己的狀況，機率最小。

２、不同人畫穿梭線

另外，假如鬼腳圖由不同人來畫穿梭線，並限定在 n-1 個人，此時就必須考慮由不同人畫的差別。

例如在四條直線的情況，一條穿梭線必須考慮在三人中選一人來畫，即有 $C_1^3=3$種選擇，兩條時也有$C_2^3=3$種，故可知不同圖形總數爲 $P_0^6\times C_0^3+P_1^6\times C_1^3+P_2^6\times C_2^3+P_3^6\times C_3^3=229$ 種。如此我們便能推廣得：

定理：n 條直線，由$n-1$人畫穿梭線，不可重複畫穿梭線，且最多畫$n-1$條，則有 $P_0^{C_2^n}\times C_0^{n-1}+P_1^{C_2^n}\times C_1^{n-1}+P_2^{C_2^n}\times C_2^{n-1}+\cdots\cdots+P_{n-2}^{C_2^n}\times C_{n-2}^{n-1}+P_{n-1}^{C_2^n}\times C_{n-1}^{n-1}$種。

另外，各別交換統計如下表，我們也可以看出交換到自己的機率較低。

交換	個數
1->1	40
1->2	63
1->3	63
1->4	63
2->1	63
2->2	40
2->3	63
2->4	63
3->1	63
3->2	63
3->3	40
3->4	63
4->1	63
4->2	63
4->3	63
4->4	40

（二）可重複的狀況

在上面我們討論的是不能畫相同穿梭線的情形，但假如可以隨機畫穿梭線，沒有不可重複的限制，機率會不會改變呢？

1、同一人畫穿梭線

以四條直線來說，若可以畫相同的穿梭線，每畫一次即是在$C_2^4=6$種穿梭線中選一種，故零條穿梭線有$\left(C_2^4\right)^0=1$種圖形，一條穿梭線有$\left(C_2^4\right)^1=6$種圖形，兩條有$\left(C_2^4\right)^2=36$種，三條有$\left(C_2^4\right)^3=216$種。故可知不同圖形總數爲$\left(C_2^4\right)^0+\left(C_2^4\right)^1+\left(C_2^4\right)^2+\left(C_2^4\right)^3=259$種。由此可推得：

定理：n 條直線，由一人畫穿梭線，若可重複畫穿梭線，且最多畫$n-1$條，則有 $\left(C_2^n\right)^0+\left(C_2^n\right)^1+\left(C_2^n\right)^2+\cdots\cdots+\left(C_2^n\right)^{n-2}+\left(C_2^n\right)^{n-1}$ 種，由等比級數得知原式= $\dfrac{\left(C_2^n\right)^n-1}{C_2^n-1}, n\geq 3$

經過統計，我們發現：可重複的狀況下，自己交換到自己的狀況機率最高，與不可重複的狀況不同。例如，下表爲四條直線，0~3 條穿梭線個別交換的個數統計：

交換	個數
1->1	76
1->2	61
1->3	61
1->4	61
2->1	61
2->2	76
2->3	61
2->4	61
3->1	61
3->2	61
3->3	76
3->4	61
4->1	61
4->2	61
4->3	61
4->4	76

說明：

（1）以四條直線爲例，在可重複的規則下，若要達到相同的結果，需增加兩條穿梭線，但若鬼腳圖原本有兩條穿梭線，增加兩條之後即違反規則；原本有三條穿梭線的鬼腳圖增加後也會違反規則。

（2）本來有一條穿梭線的鬼腳圖，若增加兩條穿梭線以達到來回的效果，就不違反規則。

由上述兩點可發現，只有一條穿梭線的鬼腳圖，在可重複的規則下，會有更多同樣結果的圖形出現。又因爲一條穿梭線的鬼腳圖交換子不動的機會最大，所以在可重複的規則下，交換子交換到自己的機率較大。

２、不同一人畫穿梭線

但若討論由不同人（$n-1$以下）來畫穿梭線的情形，同不可重複的討論方式，可知：

定理：n 條直線，由$n-1$人畫穿梭線，若可重複畫穿梭線，且最多畫$n-1$條，則有

$\left(C_2^n\right)^0 \times C_0^{n-1} + \left(C_2^n\right)^1 \times C_1^{n-1} + \cdots\cdots + \left(C_2^n\right)^{n-2} \times C_{n-2}^{n-1} + \left(C_2^n\right)^{n-1} \times C_{n-1}^{n-1}$種。

由二項式定理得知，原式=$\left(1+C_2^n\right)^{n-1}, n \geq 2$

同樣的，若穿梭線可重複，並由不同人畫穿梭線，自己交換到自己的機率會最高，如下表：

交換	個數
1->1	106
1->2	79
1->3	79
1->4	79
2->1	79
2->2	106
2->3	79
2->4	79
3->1	79
3->2	79
3->3	106
3->4	79
4->1	79
4->2	79
4->3	79
4->4	106

規則四：四條直線，由三人畫穿梭線，可重複畫穿梭線，且最多畫三條穿梭線的規則下，交換子不動的機率為 $\dfrac{106}{106+79+79+79} \fallingdotseq 30.90\%$，而交換子動的機率為 $\dfrac{79}{106+79+79+79} \fallingdotseq 23.03\%$，其差值為 7.87%。

所以，我們得到的結論為「四條直線的鬼腳圖，以可重複、同一個人畫穿梭線」的規則較為公平。

伍、研究結果

一、鬼腳圖為一個群，即鬼腳圖的結構有下列特性：

（一）集合中任兩個元素做運算得到的元素也屬於此集合，即符合「封閉性」。

（二）需滿足「結合律」，即 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

（三）有一單位元素 e，使 $a \circ e = e \circ a = a$

（四）對任一元素 a，皆存在一反元素 a'，使 $a \circ a' = a' \circ a = e$

二、鬼腳圖的基本性質

（一）n 條直線鬼腳圖，最簡運算的動作 $\leq n-1$

（二）元素定義：不可化簡的鬼腳圖

（三）元素的表現方法不唯一

三、媒介的性質

（一）媒介數總和守恆：在符合媒介數 $\leq 2(n-1)$ 的情況下，若結果相同、穿梭線相同，

$\Rightarrow$ 媒介數皆相同。

（二）１、若是 n 條直線鬼腳圖，最多有 $n-1$ 條穿梭線，故媒介數最多 $2(n-1)$ 個。

２、若各個交換子的媒介數都一樣，則畫法只有一種。

３、同樣的媒介數，不能有奇數個交換子擁有，否則此圖形畫不出來。

４、n 條直線時，媒介數總和為 m 的圖形，媒介數可擴充至

$m+4k\left(k \in N \cup \{0\} \wedge m+4k \leq 2(n-1)\right)$ 並產生相同結果

四、鬼腳圖的機率

（一）n 條直線，由一人畫穿梭線，不可重複畫穿梭線，且最多畫 $n-1$ 條穿梭線，

則有 $P_0^{C_2^n}+P_1^{C_2^n}+P_2^{C_2^n}+\ldots\ldots+P_{n-2}^{C_2^n}+P_{n-1}^{C_2^n}$ 種圖形。

（二）n 條直線，由 $n-1$ 人畫穿梭線，不可重複畫穿梭線，且最多畫 $n-1$ 條，

則有 $P_0^{C_2^n} \times C_0^{n-1}+P_1^{C_2^n} \times C_1^{n-1}+P_2^{C_2^n} \times C_2^{n-1}+\cdots\cdots+P_{n-2}^{C_2^n} \times C_{n-2}^{n-1}+P_{n-1}^{C_2^n} \times C_{n-1}^{n-1}$ 種圖形。

（三）n 條直線，由一人畫穿梭線，若可重複畫穿梭線，且最多畫 $n-1$ 條，

則有 $\left(C_2^n\right)^0+\left(C_2^n\right)^1+\left(C_2^n\right)^2+\cdots\cdots+\left(C_2^n\right)^{n-2}+\left(C_2^n\right)^{n-1}$ 種圖形。

（四）n 條直線，由 $n-1$ 人畫穿梭線，若可重複畫穿梭線，且最多畫 $n-1$ 條，

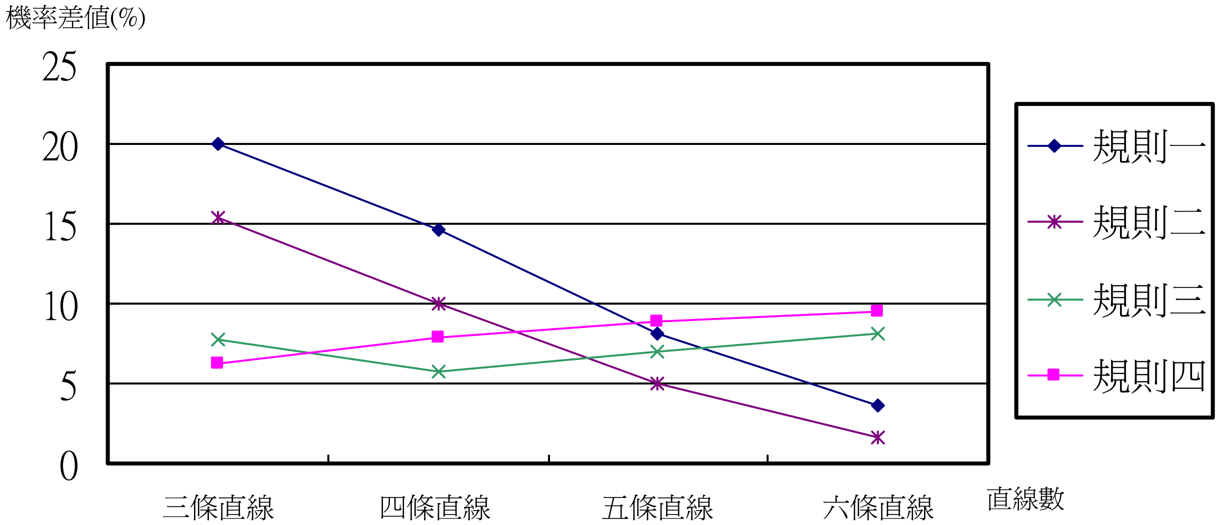
則有 $\left(C_2^n\right)^0 \times C_0^{n-1}+\left(C_2^n\right)^1 \times C_1^{n-1}+\cdots\cdots+\left(C_2^n\right)^{n-2} \times C_{n-2}^{n-1}+\left(C_2^n\right)^{n-1} \times C_{n-1}^{n-1}$ 種圖形。

陸、討論

一、如說明書中的「媒介」部分所示，我們發現以媒介數排列計算圖形個數時，須注意特殊現象。

直線數 / 交換子 / 規則	三條直線		四條直線		五條直線		六條直線	
	動	不動	動	不動	動	不動	動	不動
規則一	40%	20%	28.66%	14.01%	21/62%	13.53%	17.27%	13.66%
規則二	38.46%	23.08%	27.51%	17.47%	21.01%	15.96%	16.93%	15.34%
規則三	30.77%	38.46%	23.55%	29.34%	18.59%	25.62%	15.31%	23.47%
規則四	31.25%	37.50%	23.03%	30.90%	18.23%	27.08%	15.08%	24.61%
機率最小差值	6.25%		5.79%		5.05%		1.59%	

接著，將各個規則交換子動與不動機率差值列出，繪成折線圖，可得到如下圖：



由此張圖表可知：在四條直線鬼腳圖時，使用規則三來玩較為公平；但若是玩五或六條直線的鬼腳圖，則使用規則四比較公平。

柒、結論

其實一開始空間鬼腳圖的引起我們興趣的原因是，書上的鬼腳圖實在太單純了。因此，我們著手畫畫看複雜一點的空間鬼腳圖，試著編織出最完美的遊戲規則，想辦法把它變的公平、有條理。

藉由「群」的概念，我們找到了鬼腳圖中的「元素」，利用性質－簡化和媒介，找出同樣結果的鬼腳圖，使得樣本數擴充了許多，再用這些樣本來建構我們的研究過程。

然而，在使用了媒介、統計、程式，並親自一一尋找出空間鬼腳圖應具備的性質後，我們了解到，要產生出某個空間鬼腳圖的元素，並非只有一種方法，而是有很多等價的方式（都不能化簡），皆能得到我們想要的結果；可是，如果我們想要產生另外幾個空間鬼腳圖的元素，有時候卻又只有一種方法；關於這點，又讓我們有了些許的失望，覺得這項研究是不成功的，但是轉念一想，或許這些看似簡明又表面完美的數學遊戲，都暗藏著陷阱，它們實際上是不公平的；再者，在討論的過程中我們也發現了許多有趣的現象，比方說統計資料的奇妙規律性等等的，而我們也更針對於此資料下去分析了它形成的原因；結合了我們所下的定義，推論出的性質，再加上鬼腳圖的化簡方法，我們因此對空間鬼腳圖有了更進一步的理解。

雖然，依照我們的定義，可以得到如上所述的結論，但是，空間鬼腳圖也許還可以用別的角度觀之，這樣是否能讓它變的更為公平？能產生什麼樣有趣的性質？另外，我們希望能以媒介數排列找出鬼腳圖圖形數的通式；還有，程式的效率能否提升？這都是我們未來所要繼續研究下去的。

捌、參考資料與其它

【參考資料一】林義軒、蘇億城；2004 年；鬼腳圖的數學原理；台灣國際科展。

【參考資料二】葛登能著，胡守仁譯；拼圖拼字拼數學；初版；遠流出版社；P.27 第二章－群論與辮子；出版年：2005 年。

【參考資料三】Gilbert；Modern Algebra with Application；Chapter 3: Groups。

【參考資料四】林福來等編；高級中學數學第四冊；第二版；出版地：台灣；出版社：南一書局；頁數：81~271；出版年：2007 年。

【評　語】　　040412　鬼腳圖

1. 能利用高等數學工具解決有趣的數學問題。

2. 分類討論所有可能的情況，並探討機率大小，相當有趣。