中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040410

勾股鐵路網

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
高二 王重臻	歐志昌
	林忠宗

關鍵詞：直角三角形　遞迴數列　共軛

摘要

此研究乃從兩股差 1 的勾股三角形 (3 ,4 ,5)開始，藉由勾股數的表達式$(n^2-m^2,2mn,m^2+n^2)$得一數對(m,n)=(1,2)。而我發現一遞迴關係式 $S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$。令 $S_1=1,S_2=2$ 則可產生一條數列 1 ,2 , 5 , 12 , …；取相鄰兩項如(2,5)、(5,12)、…等，則可找到其他兩股差 1 的勾股三角形。

$S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$ 對於所有邊長爲最簡整數比之勾股三角形皆適用。此外我發現任何互質邊長之勾股三角形的股差皆可寫成 8k±1 的形式。

接著討論股差與數列之性質。我找到一個合成法則，可以將股差分別是 d_1、d_2 之兩條數列合成一條新的數列，且其股差恰爲 d_1d_2。另外我也找到共軛法則，來對同一股差的數列予以衍生。最後，將所有的數列集結在一起，便成了一網絡。

在數列鐵路網建構完成後，我則推導出了一套原則，用以確認或預估數列的條數。

壹、研究動機

在中學學習數學時，於平面幾何，或立體空間的相關領域時，常常會碰到勾股定理，然而，一些簡單的勾股數，也是時常可以見到的。例如：(3,4,5) (6,8,10) (9,12,15) (5,12,13) (7,24,25)(20,21,29)…等等，其中**(3,4,5)(20,21,29)**這兩組勾股數，其兩股之差皆為１，且斜邊差距也特別大，約 **6** 倍。這讓我特別感興趣，於是我想找到第三個兩股差為１之勾股數。

貳、研究問題

一、所有兩股差 1 的勾股三角形之間有何關聯？如何找出所有兩股差 1 的勾股三角形？

二、若勾股三角形之三邊長互質，則其兩股之差(股差)有何限制？

三、若股差 d 滿足上述限制，則所有股差為 d 的勾股三角形間有何關聯？又如何找出所有股差為 d 的勾股三角形？而股差為 d_1 和股差為 d_2 之勾股三角形之間有何關聯？

參、研究工具

工程計算機，excel 試算表，C++，mathematica，紙筆

肆、研究過程與方法

一、 前言

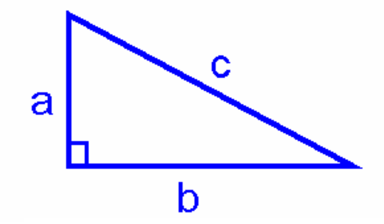
當(a,b,c)為一組勾股數時，必會滿足

$$a^2 + b^2 = c^2$$

若(a,b,c)=1 時，我們稱之為 *素勾股數*。又如果一組直角三角形之三邊長為素勾股數，則我們稱之為*最簡*。然而，我們在此先特別針對素勾股數作探討。因為對於非素勾股數之勾股數，如：(6,8,10)(9,12,15)…等等，是由一素勾股數(3,4,5)放大而成的。而在探討素勾股數之性質，時常會用以下之引理，作為輔助：

> 引理：
>
> 設(a,b,c)為素勾股數且 b 為偶數，若且唯若可找到一奇一偶且互質之兩正整數 m,n(m<n)，使(a,b,c) = $(n^2 - m^2 , 2mn , m^2+n^2)$

此引理出自參考資料二和三。



左圖爲一直角三角形，且(a , b , c)爲一素勾股數。讓 b 爲 **4** 的倍數，則由引理我們知道：

$$\mathbf{(a,b,c) = (n^2 - m^2 , 2mn , m^2+n^2)}$$

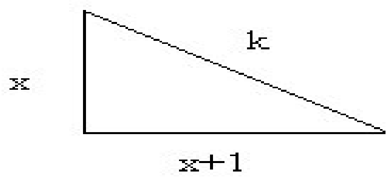
在此我們稱**(m,n)**爲素勾股數(a,b,c)之*衍生數對*

例如：當(a,b,c) = (3,4,5)時，有(m,n)= (1,2)；或當(m,n)= (1,4)時，有(a,b,c) = (15,8,17)

二、　單一數列

(一)特例：兩股股差爲 1

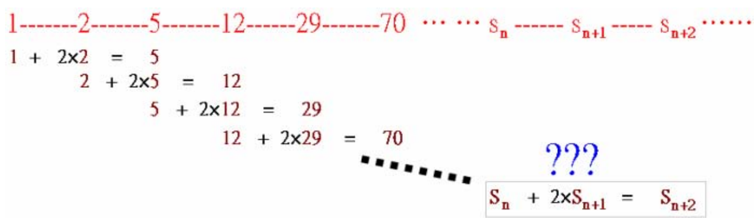
我們知道，當一勾股三角形之兩股股差爲 1 時，必定爲**最簡**。而*(3,4,5)(20,21,29)*爲兩組最常見的形態。對於兩股股差爲 1 之勾股三角形的三邊長，我們可假設其爲(x , x+1, k)，如右圖。由勾股定理列出關係式：



$$x^2 + (x+1)^2 = k^2 \quad , \qquad k = \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$$

我使用了 Excel 試算表，找到了一些 k 的整數值，以及勾股三角形三邊長(x ,x+1 ,k)之整數解。接著，我將其以(a,b,c)的形式表示，尋找其衍生數對(m,n)，並把它們做成左下表。

a	b	c	m	n
3	4	5	1	2
21	20	29	2	5
119	120	169	5	12
697	696	985	12	29
4059	4060	5471	29	70



然而從表中之橘色框的數字分佈，我們看到了其中的數字，可形成一條數列(右上圖)。而在這條數列的前面部份：1,2,5,15,29,70，任意兩相鄰項皆可當作一組衍生數對(m,n)，進而產生一組兩股股差爲 1 之勾股三角形。我們再觀察一下數列中的項，便會發現這條數列似乎存在遞迴關係：

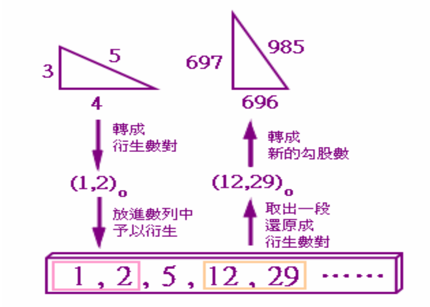
$$\mathbf{s_n + 2s_{n+1} = s_{n+2}}$$

我們不難猜測到，以此數列任一組相鄰項當衍生數對所產生之素勾股數，兩股股差皆爲 1。對於此猜測，我們採取直接檢驗的方法：

$$|b-a| = |2s_ns_{n+1} - (s_{n+1}^2 - s_n^2)| = 1$$

則由其下一組相鄰項$(s_{n+1}, s_{n+2})_o$所成之素勾股數，其股差

$$\begin{aligned}|b'-a'| &= |2s_{n+1}s_{n+2} - (s_{n+2}^2 - s_{n+1}^2)| \\ &= |2s_{n+1}(s_n+2s_{n+1}) - [(s_n+2s_{n+1})^2 - s_{n+1}^2]| \\ &= |-2s_ns_{n+1}+s_{n+1}^2 - s_n^2| = 1\end{aligned}$$



所以，我們的猜測是正確的。這表示，我們可以透過此數列，找到無窮多個兩股股差為 1 之勾股三角形。我們在此稱這種數列為*衍生數列*。其衍生流程如右上圖。

在眾多的素勾股數中，我們已經粗略地將兩股股差為 1 之勾股三角形挑了出來，並且確定了挑出的各組三角形之間的關聯。然而對於這條數列，*是不是產生股差 1 的唯一數列，我們在後面將有一套判定法則*。

(二) 一般情形：兩股股差為一般正整數

在了解兩股股差為 1 的特例後，我同樣地懷疑在兩股股差為一般正整數時是否也能找到類似的數列。如果能，那麼它們間有沒有關聯？

1 、衍生法則

我由 Excel 找了數個股差為 7 的勾股三角形，並對它們的衍生數對進行了分析，如右表。由表中的數字分佈，我們可找到兩條數列：

a	b	c	m	n
5	12	13	2	3
15	8	17	1	4
55	48	73	3	8
65	72	97	4	9
297	304	425	8	19
403	396	565	9	22

橘色框　**2 , 3 , 8 , 19 , ……**

藍色框　**1 , 4 , 9 , 22 , ……**

而這兩條數列也滿足

$$s_n + 2s_{n+1} = s_{n+2}$$

然而，當股差為 17，23 時，我們也發現了類似的狀況，如下：

當股差為 17 時，有：

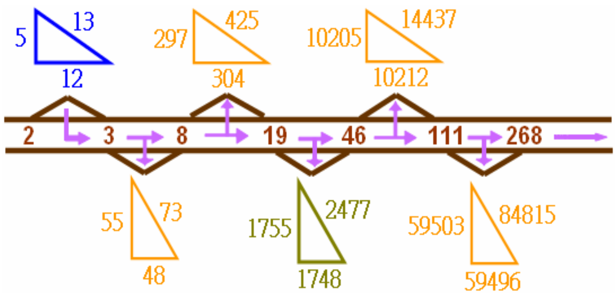
3 , 4 , 11 , 26 , ……　　以及　**2 , 7 , 16 , 39 , ……**　兩條數列。

又當股差為 23 時，有：

4 , 7 , 18 , 43 , ……　　以及　**1 , 6 , 13 , 32 , ……**　兩條數列。

接著，我使用了確認股差為 1 時的方法確認了：此數列同樣地可以無限延伸，而衍生出無窮多組同股差的勾股三角形，而且其奇數股和偶數股之大小關係會互換。我稱其為衍生法則。

當我們找到一個**最簡的勾股三角形**時，可將其轉成**衍生數對**，再隨著**數列的移動**，找到一連串**同股差的三角形**。如右圖：



以(5,12,13)至(1748,1755,2477)為例，先將(5,12,13)轉成衍生數對(2,3)，再隨著數列的移動，到衍生數列為(19,46)時，產生一組勾股三角(1748,1755,2477)。

這種感覺也好比：數列是一條鐵路，數列的項是里程數，直角三角形是一站又一站。某人從**(5,12,13)**搭著列車前往**(1748,1755,2477)**似的。

而對於產生一般股差之最簡勾股三角形的數列個數，仍是以後面將推導的原則做判斷。***若我們將各種股差的衍生數對擺在一起，就成了數列網。***

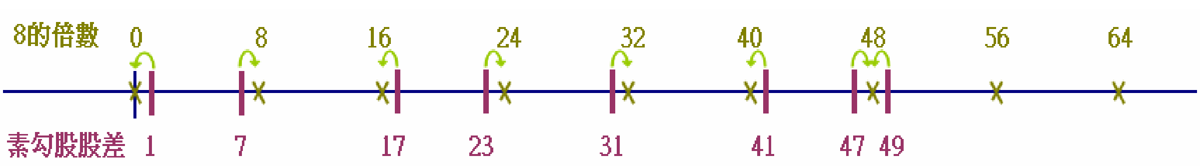
2、最簡股差

股差	(a,b,c)	(m,n)
1	(3,4,5)	(1,2)
7	(5,12,13)	(2,3)
17	(7,24,25)	(3,4)
23	(33,56,65)	(4,7)
31	(9,40,41)	(4,5)
41	(39,80,89)	(5,8)
47	(85,132,157)	(6,11)
49	(11,60,61)	(5,6)
71	(13,84,85)	(6,7)
73	(95,168,193)	(7,12)
79	(161,240,289)	(8,15)
89	(51,140,149)	(7,10)
97	(15,112,113)	(7,8)

接著，我們對一些已找到的素勾股數進行分析，發現似乎僅有在***特殊條件下***的股差，才找得到最簡勾股三角形，如右表。而我們稱找得到最簡三角形之股差為***最簡股差***。為了了解此種股差的分佈情形，我將它們列成一數列，如下：

1 , 7 , 17 , 23 , 31 , 41 , 47 , 49 , 71 , 73 , 79 , 89 , 97 , 103 , 113 , 119 , 127 , 137 , 151 , 161 , 167 , 191 , 193 , 199 , ……

從這串數中，我們發現了一個現象：**每個數皆與某一個 8 的倍數差 1**，如下圖。而我也利用了同餘的觀念證得了：所有的最簡股差皆是如此。



雖然我們現在沒辦法直接由一大片正整數集合中，直接挑出最簡股差。但我們已經利用了上述的性質，剔除了一大部份不可能是最簡股差的正整數了。

為了對股差有更多的認知，我試著藉由素勾股數(a,b,c)而尋找股差 d 與衍生數對(m,n)之間的關係：

$$d = |b - a| = |2mn - (n^2 - m^2)| = |2m^2 - (n - m)^2|$$

設 $n - m = \Delta m$，則：

$$d = |2m^2 - \Delta m^2| \quad , \quad 2m^2 - \Delta m^2 = \pm d$$

此式即表示：

$$\boxed{d = 2m^2 - \Delta m^2} \text{ 或 } \boxed{d = \Delta m^2 - 2m^2}$$

3、互質一致性

我們在分析**最簡**勾股三角形的衍生數對、股差、以及數列時，發現它們不論怎麼轉換，怎麼衍生，所產生之勾股三角形，皆是**最簡**的。也就是說，隨著數列的移動，以及彼此間的轉換，始終都一直保有著其**最簡**互質的特性。如右表：

(a,b,c)	(m,n)	(Δm,m)	d	數列
(3,4,5)	(1,2)	(1,1)	1	1,2,5,12,29…
(5,12,13)	(2,3)	(1,2)	7	2,3,8,19,46…
(7,24,25)	(3,4)	(1,3)	17	3,4,11,26,…
(33,56,65)	(4,7)	(3,4)	23	4,7,18,43,…
(9,40,41)	(4,5)	(1,4)	31	4,5,14,33,…
(39,80,89)	(5,8)	(3,5)	41	5,8,21,50,…

因而，我們可以得到以下的猜測：

（１）衍生數對(m,n) = 1 若且唯若數對(Δm,m) = 1

（２）數列中的一組衍生數對(s_n,s_{n+1})=1 若且唯若其下一組衍生數對(s_{n+1},s_{n+2})=1

（３）若(Δm,m) = 1 則(m,d) = (Δm , d) = 1

然而，這三樣猜測，皆可藉由反證法證得。

在得到*最簡股差* 8k±1 之規則以及用*衍生法則* 生成新勾股三角形的方法後，我又進一步的想知道，最簡股差的分佈規則究竟是如何？對於此，我發展出了合成數列，和共軛數列：

二、 合成數列—數列的擴張

首先，我由 Mathematica 軟體，找到了更多的最簡股差，如下：

1 , $\boxed{7}$, $\boxed{17}$, $\boxed{23}$, 31, 41, 47, $\boxed{49}$, 71, 73, 79, 89, 97, 103, 113, $\boxed{119}$, 127, 137, 151, $\boxed{161}$, 167, 191, 193, 199, 217, 223, 233, 239, 241, 257, 263, 271, 281, 287, $\boxed{289}$, 311, 313, 329, 337, $\boxed{343}$, 353, 359, 367, 383, 391, 401, 409, 431, 433, 439, 449, 457, 463, 479, 487, 497, 503, 511, 521, 527, $\boxed{529}$, 553, 569, 577, 593, 599, 601, 607, 617, 623, 631, 641, 647, 673, 679, 697, 713, 719, 721, 727, 743, 751, 761, 769, 791, 799, 809, 823, $\boxed{833}$, 839, 857, 863, 881, 887, 889, 911, 919, 929, 937, 943, 953, 959, 961, 967, 977, 983, 991……

我們發現，在這些數中

有 7、7^2(49)、7^3(343)、7^4(2401)、17、17^2(289)、17^3(4913)、23、23^2(529)、23^3(12167)

以及 7×17(119)、7×23(161)、7^2×17(833)、17^2×23(6647)、17^2×23^2(152881)等等。

於是我猜測：

若有數個質數，皆爲最簡股差，則其冪次之乘積必亦爲最簡股差。對於此，我們必須找到一個原則來尋找上述股差之***最簡***勾股三角形，也就是利用兩個已知股差的最簡三角形，合成出一個新的最簡三角形，其股差爲原兩個股差之乘積。

(一) 合成法則

我們由 $|2m^2-\Delta m^2| = d$ 之因式分解，得到 $|\sqrt{2}m+\Delta m|\,|\sqrt{2}m-\Delta m| = d$

接著，再把已知的最簡股差所生成之最簡三角形做分析，如下表：

d	(a,b,c)	(m,n)	因式分解式	註
7	(5,12,13)	(2,3)	$7=(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$	
17	(7,24,25)	(3,4)	$17=(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)$	
23	(35,12,37)	(1,6)	$23=(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$	
d_1	----	----	$d_1 = (m_1\sqrt{2}+\Delta m_1)\,\lvert m_1\sqrt{2}-\Delta m_1\rvert$	令 m_1 , $\Delta m_1 \in N$
d_2	----	----	$d_2 = (m_2\sqrt{2}+\Delta m_2)\,\lvert m_2\sqrt{2}-\Delta m_2\rvert$	令 m_2 , $\Delta m_2 \in N$

(i)我們試著取股差為 7 時的 $2\sqrt{2}+1$ 自乘兩次，

得到$(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}+1) = 4\sqrt{2}+9$，所得之新股差 $d' = |2\times4^2-9^2| = 49 = 7\times7$

我們再取股差為 7 的 $2\sqrt{2}+1$ 和股差為 49 的 $4\sqrt{2}+9$ 相乘

得到$(2\sqrt{2}+1)(4\sqrt{2}+9)= 22\sqrt{2}+25$，新股差 $d'' = 343 = 7\times49$

(ii)我們取股差 7 時的 $2\sqrt{2}+1$ 和股差 17 時之 $3\sqrt{2}+1$ 相乘，

得到$(2\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}+1) = 5\sqrt{2}+13$，新股差 $d' =119=7\times17$

再取股差 7 時的 $2\sqrt{2}+1$ 和股差 119 時之 $5\sqrt{2}+13$ 相乘，

得到$(2\sqrt{2}+1)(5\sqrt{2}+13) = 31\sqrt{2}+33$，新股差 $d''= 833 = 7\times119$

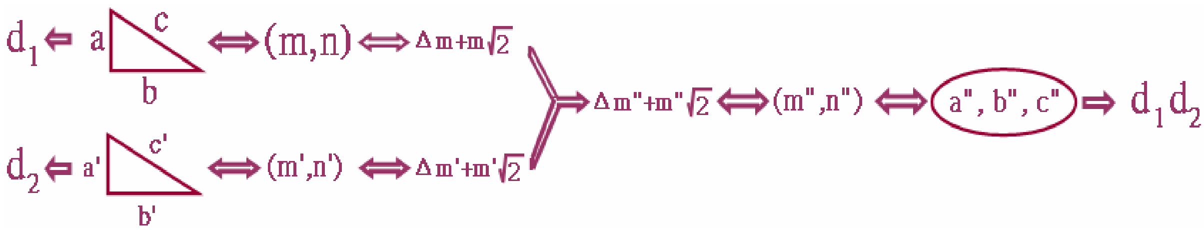
(iii)我們取股差為 d_1 時的 $\sqrt{2}\,m_1+\Delta m_1$ 和股差為 d_2 時的 $\sqrt{2}\,m_2+\Delta m_2$ 相乘，會得到

$$(\sqrt{2}\,m_1+\Delta m_1)(\sqrt{2}\,m_2+\Delta m_2) = (\Delta m_1\Delta m_2+2\,m_1\,m_2)+\sqrt{2}\,(m_1\Delta m_2+m_2\Delta m_1)$$

所得之新股差

$$\begin{aligned} d' &= |2(m_1\Delta m_2+m_2\Delta m_1)^2-(\Delta m_1\Delta m_2+2\,m_1\,m_2)^2\,| \\ &= |\,2m_1^2\Delta m_2^2+2m_2^2\Delta m_1^2+4m_1m_2\Delta m_1\Delta m_2-\Delta m_1^2m_2^2-4m_1^2m_2^2-4m_1m_2\Delta m_1\Delta m_2| \\ &= |\Delta m_2^2-2m_2^2|\,|2m_1^2-\Delta m_1^2|= d_1d_2 \end{aligned}$$

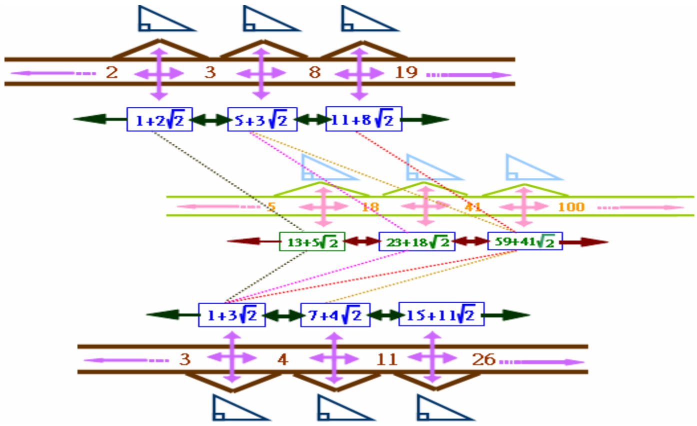
(i)(ii)的測試在(iii)中證明出是正確的。我們由因式分解式中的一個根式找到了一個***合成法則***來合成兩個已知最簡直角三角形，在此我們稱此一根式爲*構造式*。又若勾股根式 $\Delta m+m\sqrt{2}$ 中，$(\Delta m , m) = 1$ 則稱此合成式爲*最簡構造式*。利用合成出來的新構造式，我們又可以產生一條數列，進而衍生更多的勾股三角形，這時我們稱合成後所形成之數列爲*合成數列*。而下圖即爲從已知的勾股三角形合成出新勾股三角形式流程：



(二) 數列的移動關係

我們已經知道***構造式***是用來合成一組勾股三角形的，也就是如果我們取(5,15,13)的衍生數對(2,3)和(7,24,25)的(3,4)，則可透過合成法則產生(5,18)。那麼，以數列(2,3,8,19…)和(3,4,11,26…)中的其他組衍生數對進行合成，又會得到什麼東西呢？

於是，我做了些測試，如右圖：



(1)若我們挑股差為 7 的衍生數對(2,3)和股差為 17 的衍生數對(3,4)，會得到衍生數對(5,18)

(2)又若挑選 d=7 的(3,8)和 d=17 的(3,4)做合成，或挑選 d=7 的(2,3)和 d=17 的(4,11)做合成，皆會得到衍生數對(18,41)，而(18,41)為(5,18)後移一次的衍生數對。

(3)由此兩數列各組衍生數對進行合成，則合成後的衍生數對都在同一條數列上。

對於組衍生數對間的移動關係也是如此。所以我懷疑若原先的兩條數列中，將其中一條數列的衍生數對往後移動一次，則合成數列的衍生數對也會由原位置往後移一次。

若以鐵路來比喻，即若原先兩路列車中有一車進到下一站，則合成鐵路上的列車也會進到下一站。

對於此猜測，我使用了推導合成法則的方法證之。

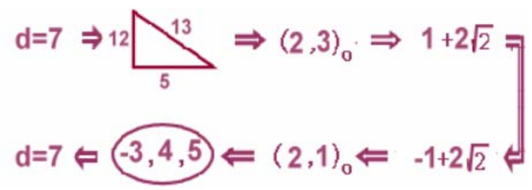
所以，藉由此一特性，我們可以說：數列(2,3,8,19,…)和數列(3,4,11,26,…)，可以合成出數列(5,18,41,100,…)。

四、共軛數列

(一) 共軛式，共軛數對

由先前的$(\Delta m+m\sqrt{2})\,|\Delta m-m\sqrt{2}|=$ d(設 m , Δm$\in N$)，我們成功地利用$\Delta m+m\sqrt{2}$合成股差。那麼，$|\Delta m-m\sqrt{2}|$ 是不是也有什麼特別的用途呢？還有，究竟股差為 7 的兩條數列(2 , 3 , 8 , 19 , ……)及(1 ,4 , 9 , 22 , ……)，有沒有什麼關係呢？

我們知道，$|\Delta m-m\sqrt{2}|$ 為$\Delta m-m\sqrt{2}$或$-\Delta m+m\sqrt{2}$(取正者)，而不論是$\Delta m+(-m)\sqrt{2}$或$(-\Delta m)+m\sqrt{2}$ ，都符合構造式的形式，我們不妨將它們轉回衍生數對看看。



如左圖，由股差為 7 之(5,12,13)可轉成構造式 $1+2\sqrt{2}$ 。若我們取 $|1-2\sqrt{2}| = (-1)+2\sqrt{2}$ (即 $-1+2\sqrt{2}$ 、$1-2\sqrt{2}$ 值為正數者)，則可還原成一組衍生數對(2,1)，不過這時，所產生之三邊長為(-3,4,5)！此為不合理之情形。但若細察，則可發現：其中之股差(即大邊和小邊之差) 4–(–3) = 7。所以，其衍生數對(2,1)仍具有衍生的性質，故可以將其衍生成一條數列 2 , 1 , 4 , 9 , 22 ,……。若我們取 1 , 4 , 9 , 22 , ……，則此數列亦為兩股差 7 之數列。

當然，在一般情況下，只要構造式 $\Delta m + m\sqrt{2}$ 中(Δ m , m) = 1，我們即可由 $|\Delta m - m\sqrt{2}|$ 所生的數列上找到無窮多組勾股三角形，且其邊長必為最簡！其證明詳見附錄一。

所以，我們在此稱($\Delta m + m\sqrt{2}$) 和 $|\Delta m - m\sqrt{2}|$ *互為共軛構造式(簡稱共軛式)*，以及由一構造式所成之衍生數對和其共軛式所成者互為***共軛數對***。例如：股差為 7 之 $1+2\sqrt{2}$ 和 $-1+2\sqrt{2}$ 互為共軛式，且(2,3)與(2,1)互為共軛數對。

（二）反向移動—共軛數列

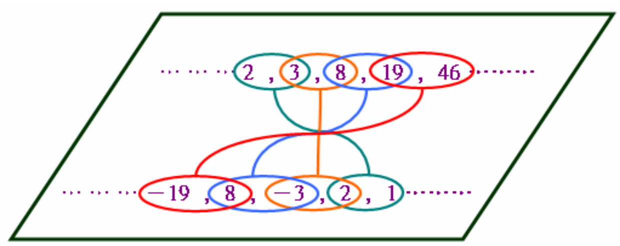
由衍生數對(2,3)和其共軛數對(2,1)可產生兩條數列：

(2 , 3 , 8 , 19,…)　及　(2 , 1 , 4 , 9 , 22 ,…)

我們已知道，兩數列中，(2,3)和(2,1)互為共軛數對。那麼，藍色數列中之(3,8)、(8,19)…等其他組數對之共軛數對，與(2,1)會有什麼關聯嗎？

如下表，藍色框中為股差 7 時的數列，而綠色框，則為藍色框各組數對之共軛數對所成的數列。接著，我將藍框和綠框中的兩條數列列出來，並標出它們的共軛數對關係，如右下圖。則我發現了一個現象：即兩數列中共軛數對，是程反向移動的現象。此證明詳見附錄一。

衍生數對	→	素構造式	→	共軛式	→	衍生數對
$(2,3)_o$	→	$1+2\sqrt{2}$	→	$-1+2\sqrt{2}$	→	$(2,1)_o$
$(3,8)_o$	→	$5+3\sqrt{2}$	→	$5-3\sqrt{2}$	→	$(-3,2)_o$
$(8,19)_o$	→	$11+8\sqrt{2}$	→	$-11+8\sqrt{2}$	→	$(8,-3)_o$
$(19,46)_o$	→	$27+19\sqrt{2}$	→	$27-19\sqrt{2}$	→	$(-19,8)_o$



因為此二數列有如此的移動關係，所以我在此稱此二數列互為*共軛數列*。

五、 數列的特性

(一)數列的異同

接著，我對***構造式***、共軛式及其數列的相同與相異，做了些討論，如下：

編號	D	構造式	數列	共軛式	數列
(1)	7	$1+2\sqrt{2}$ …(A_1)	2 , 3 , 8 , 19……	$(-1)+2\sqrt{2}$ …(A_2)	2 , 1 , 4 , 9 , 22 , ……
(2)	17	$1+3\sqrt{2}$ …(B_1)	3 , 4 , 11 , 26……	$(-1)+3\sqrt{2}$ …(B_2)	3 , 2 , 7 , 16 , 39 , ……
(3)	23	$5+\sqrt{2}$ …(C_1)	1 , 6 , 13 , 32 , ……	$5+(-1)\sqrt{2}$ …(C_2)	–1 , 4 , 7 , 18 , 43 , ……
(4)	7x17	$13+5\sqrt{2}$	5 , 18 , 41 , 100 ,…	$13-5\sqrt{2}$	–5 , 8 , 11 , 30 , 71 ,…
編號	D	構造式	數列	構造式	數列
(5)	7x17	$(A_1)\times(B_1)$	5 , 18 , 41 , 100 , …	$(A_2)\times(B_1)$	-1 , 10 , 19 , 48 , 115 , ..
(6)	7x23	$(C_1)\times(A_1)$	11 , 20 , 51 , 122 , …	$(C_2)\times(A_1)$	9 , 10 , 29 , 68 , …

編號	D	構造式	構造式
(7)	7x17	$(A_1)\times(B_1)=13+5\sqrt{2}$	$(A_2)\times(B_2)=13-5\sqrt{2}$
(8)	7x23	$(C_1)\times(A_1)=9+11\sqrt{2}$	$(C_2)\times(A_2)=-9+11\sqrt{2}$

上表為某些***構造式***及其共軛式之合成情形，從(1)到(4)、(5)(6)、(7)(8)我分別得到了三個性質：當數列所成***最簡勾股三角形股差不為 1 時***，則：(令 L 表一數列，$\overline{L}$ 表 L 之共軛數列。$L_1\times L_2$ 表示 L_1 和 L_2 的合成數列，$L_1=L_2$ 和 $L_1\neq L_2$ 分別表兩數列相同及不同)：

〈一〉 $L_1 \neq \overline{L_1}$ 〈二〉 $L_1\times L_2 \neq \overline{L_1}\times L_2$ 〈三〉 $\overline{L_1}\times\overline{L_2}=\overline{L_1\times L_2}$

其證明詳見附錄二。

(二)合成最簡勾股三角形

由先前的合成法則，我們知道了：合成，是***構造式***的的功能之一(另一功能為共軛數列)，由先前的測試中，所合成出的直角三角形，其邊長皆是最簡整數比。難道，所有由合成而得之直角三角形，皆是如此嗎？

d_1	構造式 A	d_2	構造式 B	d_1d_2	構造式(AxB)	勾股三角形
7	$1+2\sqrt{2}$	7	$3+\sqrt{2}$	49	$7+7\sqrt{2}$	(147,196,245)
7	$1+2\sqrt{2}$	119	$9+10\sqrt{2}$	833	$49+28\sqrt{2}$	(5145,4312,6713)

表中之 $7+7\sqrt{2}$，是由 $1+2\sqrt{2}$ 和 $3+\sqrt{2}$ 所合成，這也表示，由此二根式所成之兩條數列，無法合成最簡直角三角形，故根據<六>，$-1+2\sqrt{2}$ 和 $3+\sqrt{2}$，或 $1+2\sqrt{2}$ 和 $3-\sqrt{2}$，皆可合成***最簡勾股數***，又根據先前之<三>和<一>，可知，其為兩條不同之數列！

答案是未必，如上表，當股差為 49 時，會產生 $7+7\sqrt{2}$，進而得到(147 , 196 , 245)，當股差為 833(= 7×7×17) 時，也會得到(5145,4312,6713)等邊長非最簡整數比之直角三角形。這是怎麼回事呢？有沒有方法，可以確定合成數列能否找到最簡整數比之邊長？

事實上當當數列所成***最簡勾股三角形股差不為１時***，還具有下列性質：〈五〉$L_1 \times \overline{L_1}$ 無法產生最簡勾股數　〈六〉若 $L_1 \times L_2$ 無法產生最簡勾股數，則 $\overline{L_1} \times L_2$ 或 $L_1 \times \overline{L_2}$ 必產生最簡勾股數（但 L_1 和 L_2 其中一條數列之股差須為質數）

其中<六>之證明，詳見***附錄二***

六、數列的個數

(一) 合成數列的個數

在判定合成數列之個數之前，我們得先觀察以下的象現：

股差	7	7×17	7×17×23	7×17×23×31	7×17×23×31×41
構造式	$1+2\sqrt{2}$	$13+5\sqrt{2}$	$75+38\sqrt{2}$	$379+338\sqrt{2}$	$4005+3124\sqrt{2}$

上表爲股差爲７的某一***構造式***，分別與股差爲 17,23,31,41 者累次做合成所得的***構造式***。從其合成結果我發現到，若合成後的股差爲數個質因數之一次方乘積，則所生成之勾股三角形必爲最簡。

設 $d = p_1p_2p_3\ldots p_n = |2m^2 - \Delta m^2|$，又由於 d 是由合成法則產生的，所以$(\Delta m,m)$必為正整數。

若$(\Delta m,m)\neq 1$，則 $d = |2m^2 - \Delta m^2| = h^2k\ (h,k \in N)$，與已知不合，所以$(\Delta m,m)=1$，故此勾股數必最簡。

(1) 增廣合成領域

既然合成後之質因數一次乘積的股差皆生成最簡勾股數。那麼我們也就想知道，倒底它們能生成幾組數列。由實際測試發現：股差爲 7×17 時，合成出 4 條數列；股差為 7×17×23 時，合成出 8 條；當股差為 7×17×23×31 時，合成出 16 條；當股差為 7×17×23×31×41 時，合成出 32 條。事實上，若當股差為 $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ 時皆僅找得到兩條數列，則當股差 $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdot\ldots\cdot p_n^{a_n}$ 時，必可合成出 2^n 條數列。

首先，我們要先證明，當股差爲 $d = p_1p_2p_3\ldots p_n$，可合成出 2^n 條數列。接著才能依次增高各質因數之次數。而此證明，必須依懶先前推出的七個大定理：

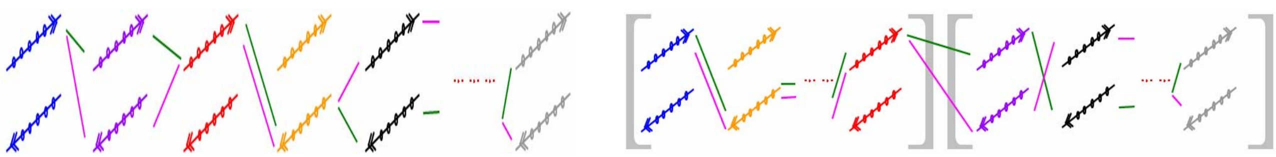
當數列所成最簡勾股三角之股差不為１時，則：

〈一〉$L_1 \neq \overline{L_1}$　〈二〉$L_1 \times L_2 = L_2 \times L_1$　〈三〉$L_1 \times L_2 \neq \overline{L_1} \times L_2$

〈四〉$\overline{L_1} \times \overline{L_2} \times \ldots \times \overline{L_n} = \overline{L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n}$　〈五〉$L_1 \times \overline{L_1}$ 無法產生素勾股數

〈六〉若 $L_1 \times L_2$ 無法產生素勾股數，則 $\overline{L_1} \times L_2$ 或 $L_1 \times \overline{L_2}$ 必產生素勾股數(但其一股差為質數)

〈七〉當股差為數個質數之一次乘積時，***必產生素勾股數***



左上圖為其 n 個質數股差(p_1 , p_2 , p_3 , …. , p_n)所生成之 n 組共軛數列，藍、紫、紅、黃、黑、…灰、各一組，且-o-o-o-o-〉〉-和-〈〈-o-o-o-o-互為共軛。其中的綠色線，和粉紅色線，為其合成情形中，2^n 種組合裡的兩種組合。以下為其確認步驟：

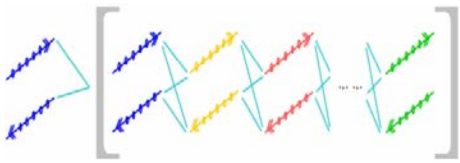
1) 首先根據〈七〉可確定，其 2^n 種組合所成之直角三角***形***皆 ***皆必為最簡***。
2) 根據〈二〉將原圖改成右上圖。其中左方中括號內的數列為藍、黃、…紅，且所被挑選到的數列為相同數列；相對地右半中括號內為紫、黑…灰色數列，被挑選者列互為共軛。
3) 再根據〈四〉則我們可以把綠色和粉紅色線的合成形式分別視為 $M \times N$ 以及 $M \times \overline{N}$ (其中 M 和 N 代表兩條數列)
4) 由〈三〉。我們得知 $M \times N \neq M \times \overline{N}$ 。

既然任兩種組合所成之數列皆相異，則可確定：

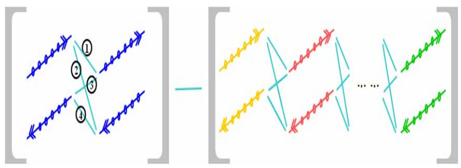
此 n 個*質數*一次乘積的最簡直角三角形，可藉由合成法則得到 2^n 條數列！

(2)升高合成次數

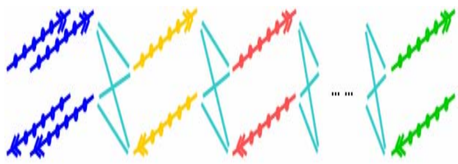
但如果我們為此股差之 n 個質數加高次數時，有可能會在藍色數列的產生非最簡之勾股數，使得合成數列的數目仍舊維持在 2^n，如下：



圖甲



圖乙



圖丙

右方圖甲之括號內為上述之 n 組共軛數列，括號外則為括號內中之一組共軛數列，以下為其確認步驟：

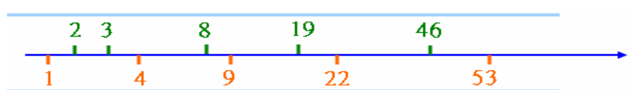
1) 先利用〈二〉將圖甲轉換成圖乙。
2) 再根據〈五〉，在圖乙之左括號內，僅有(1)和(4)可產生***最簡勾股數***，再由〈四〉，得(1)和(4)互為共軛。
3) 由〈六〉，左括號內之(2)和(3)搭配右括內任一組合，皆無法產生***最簡勾股數***，故左括號內之(1)和(4)搭配右括號中的任一組合，必產生***最簡直角勾股數***。
4) 所以，我們可以將圖乙轉換成圖丙，把兩組藍色的數列視爲一體做合成，故仍爲 2^n 條！

當然，此 2^n 條數列一性質，必須建築在其中各質因數股差，皆只有兩條數列。

(二) 數列個數判定法則

合成數列，是由合成而得的數列。未必所有的數列都可以是由合成而得。所以對於此，我們仍須要一套方法來找足由合成法則所找不到的數列。

右下圖爲股差 7 所找到之兩條數列，其中兩數列之各項，除了 1 和 2 之外，皆以交錯的形式排列。這給了我一個靈感，是不是可以利用數列交錯的形式，來判定其個數。

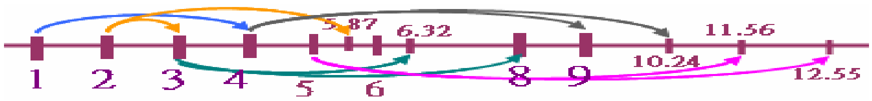


於是，我使用了 $2m^2-\Delta m^2=\pm d$，得知 $\Delta m=n-m=\sqrt{2m^2\pm d}$，所以 $n=m+\sqrt{2m^2\pm d}$，是故只要 $\sqrt{2m^2+d}$ 或 $\sqrt{2m^2-d}$ 爲正整數，即可找到正整數 n，並產生一條股差爲 d 的數列。所以我在此稱能使 $\sqrt{2m^2+d}$ 或 $\sqrt{2m^2-d}$ 爲正整數的 m 爲*衍生項*，又由此衍生項產生之正整數 n 爲其*對應衍生項*。又由 $n=m+\sqrt{2m^2\pm d}$，我們令 $n_1=m+\sqrt{2m^2+d}$ 及 $n_2=m-\sqrt{2m^2+d}$，當然，$n_1<n_2$。

接著，我先觀察 d=7 的情形。將 m 從 1 逐一代入，觀察它們的 n_1 及 n_2，而得到下表。

m	n_1	n_2	m	n_1	n_2	m	n_1	n_2	m	n_1	n_2	m	n_1	n_2	m	n_1	n_2
1	#NUM!	4	5	11.56	12.55	9	21.45	22	13	31.19	31.57	17	40.90	41.19	21	50.58	50.82
2	3	5.87	6	14.06	14.89	10	23.89	24.39	14	33.62	33.97	18	43.32	43.59	22	53	53.22
3	6.32	8	7	16.54	17.25	11	26.33	26.78	15	36.05	36.38	19	45.74	46	23	55.42	55.63
4	9	10.24	8	19	19.62	12	28.76	29.18	16	38.47	38.78	20	48.16	48.41	24	57.84	58.04

然後，又將上表轉成下圖的形式。結果我發現了：



(1)漸增性質

當 m=2,3,4…所找到之 n，有逐漸增加的趨勢

當 m = 1 時，n_1 為虛根，$n_2 = 4$，當 m = 2 時，$n_1 = 3$，$n_2 \fallingdotseq 5.87$，

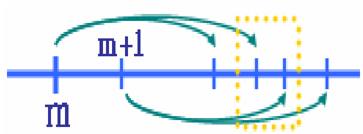
當 m = 3 時，$n_1 \fallingdotseq 6.32$，$n_2 = 8$，當 m = 4 時，$n_1 = 9$，$n_2 \fallingdotseq 10.24$

……..

而 $3<5.87<6.32<8<9<10.24<11.56<12.55<14.06<14.89<\ldots$，但 $4>3$。

這時我想：是不是當 m 大過某一個數時，就會得到 n 漸增的性質。

如右圖，若 m 滿足黃色框框中的大小關係，則 n 必漸增：



$(m+1)+\sqrt{2(m+1)^2-d} > m+\sqrt{2m^2+d}$，

也就是〔$(m+1)+\sqrt{2(m+1)^2-d}$〕－〔$m+\sqrt{2m^2+d}$〕>0

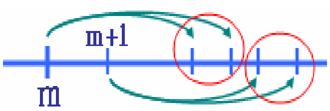
即 $1+\sqrt{2m^2+4m+2-d}-\sqrt{2m^2+d}>0$…….(＊)

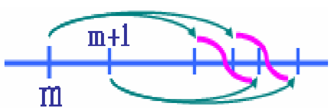
若 $2m^2+4m+2-d \geqq 2m^2+d$ 時，則 ＊式 必成立，此時 $2m+1-|d| \geqq 0$，故我們取

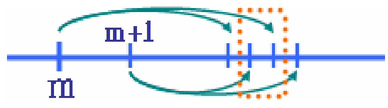
$$m \geq \frac{|d|-1}{2}$$

(2) 大小恆定性質

對於不滿足漸增性質時，也就是上圖黃色框框不成立時，則會變成如右下圖的情形。但左下圖之紅色框，及中下圖之粉紅色線之大小關係，是必然成立的。也就是對於每個 m，$n_1<n_2$，且對於每個 n_1，由 m+1 產生的必大於由 m 產生的，n_2 亦是如此。



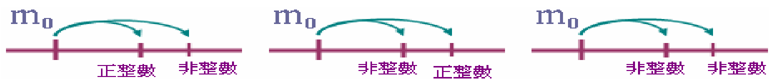




然而，我稱此性質爲大小恆定性質。當漸增性質不成立時，大小恆定性質仍舊成立。

(3) 三一性質

由以上的數字，我亦發現了當 m 為任意正整數時，n_1 和 n_2 不可能同時為正整數，而只有如下圖之三種可能。



對於此，我使用了同餘的觀念證明之。

而有了這三個性質之後，我們就可以來推導數列個數判定原則了。

(＊)數列確認

當股差為 d (d$\in N$)時，如下圖，<s_n>為股差為 d 的其中一條數列，其中兩項為 s_{n+1} 和 s_{n+2}。且 $s_{n+1} > \dfrac{d-1}{2}$

我們讓 s_{n+1} 和 s_{n+2} 間為(一)區， s_{n+2} 和 s_{n+3} 間為(二)區，s_{n+2} 和 s_{n+3} 間為(二)區，依此類推。接著，我在各區標示出<s_n>之外的衍生項(其中 X、▌ 、Δ、…等符號各代表一條數列)，當然，d 不同，數列的個數也就不同。而若當我們找到若干個衍生項後，由實測發現(一)區中除了標示的衍生項外已無其他的衍生項了，則我們可以開始推斷出列的個數，如下：

(1) 由實測已知(一)區中無標示外的衍生項

(2) 若(二)區中有標示外的衍生項 x_{n+2}，則其下一項 x_{n+3} 必在(三)區，且為非標示者。由此兩項可知在 x_{n+2} 和 x_{n+3} 前必有一項為 x_{n+1}，由先前的性質可知 x_{n+1} 不會在二區及其後。若 x_{n+1} 在(一)區前，根據大小恆定性質，可知其下一項會在(二)區之前，亦不合，所以明顯地，x_{n+1} 在(一)區中，且不為先前所標示的衍生項，表示(一)區中除了已標示了的衍生項之外，仍有其他的衍生項，矛盾。表示(二)區中不存在標示外的衍生項。

(3)由(2)的原理，可往後推得(三)(四)…..等各區間皆不存在衍生項。

(4)若在一號區左邊的區塊，仍有除了那已找到的衍生項之外的衍生項 m_0，則必有 $n_0=m_0+\sqrt{2m_0^{\ 2}\pm d}$ 為正整數。由$(m_0,n_0)_o$ 可產生一數列，且數列中各項皆為衍生項，但此數列往右延伸後必會到有標號的區塊，表示這些區塊中存在有未標示的衍生項，矛盾，故不該存在衍生項 m_0。

如此一來，我們就可以由部份的檢測，得知其數列的個數。其步驟如下：

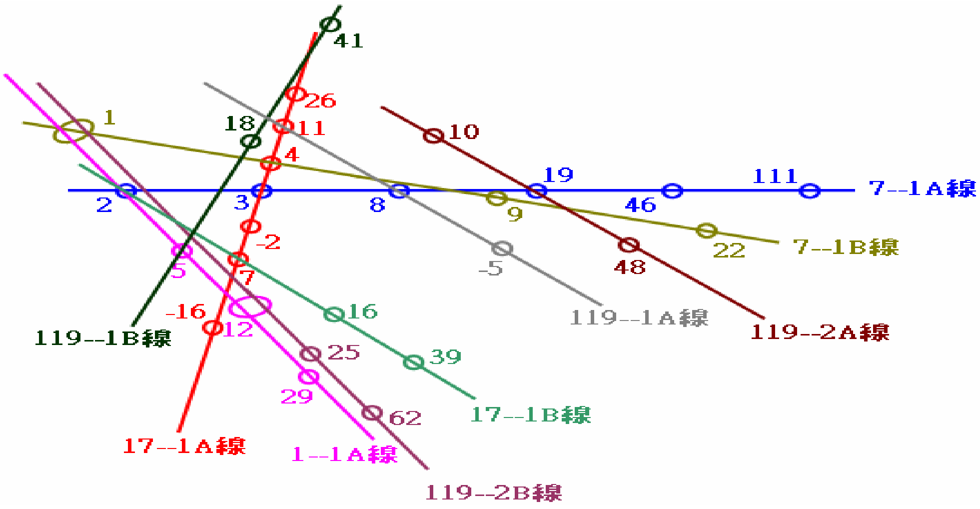
(1) 找到一數列，並計算 $x=\dfrac{d-1}{2}$

(2) 尋找任一個大於 x 的項及其下一項

(3) 尋找此兩項間的衍生項，並將這些衍生項構成數列

這些數列即所有數列。

我亦使用了此原則，證明了，當股差爲 1 時，有 1 條數列，股差爲 7,17,23,31,41,47,49…97，皆有兩條數列。而最後，結合了數列的衍生性質，合成數列和共軛數列，還有數列個數判定法則，我們可以把所有的鐵路幹線(數列)，排成一個鐵路網，如下：



伍、結論

(1)我們對於任何已知股差的素勾股數($n^2 - m^2$, $2mn$, m^2+n^2)，皆可藉由衍生數對(m,n)產生一條數列 $s_n + 2s_{n+1} = s_{n+2}$，而若取數列中的任兩相鄰項爲新衍生數對，則可找到同股差的素勾股數。

(2)對於兩組已知股差的素勾股數的衍生數對(m_1,n_1)、(m_2,n_2)，可轉換成構造式的形式 $\Delta m_1 + m_1\sqrt{2}$ 、及 $\Delta m_2 + m_2\sqrt{2}$ (其中 $\Delta m_1 = n_1 - m_1$，且 $\Delta m_2 = n_2 - m_2$)。藉由合成法則 $(\Delta m_1 + m_1\sqrt{2})(\Delta m_2 + m_2\sqrt{2})$，將其展開後可得到新股差爲原兩股差之乘積的構造式。

(3)凡是*素勾股股差* (素勾股數的股差)皆可寫成 $8k\pm1$ 的形式(k 爲非負整數)；且若 d_1 爲質數的素勾股股差且 d_2 亦爲素勾股股差，則 d_1d_2 必會是素勾股股差。

(4)對於一個股差非 1 的素勾股數，可藉由衍生數對(m,n)產生一條數列。若將其轉換成共軛式 $\Delta m + m\sqrt{2}$ 的形式，則我們可以藉由此構造式之共軛式($-\Delta m + m\sqrt{2}$ 與 $\Delta m - m\sqrt{2}$ 之値爲正數者)轉回的衍生數對再產生一條數列，進而產生更多的素勾股數，且這兩條數列是不同的數列。

(5)當股差爲質數時，會有 2 條衍生數列，若素勾股三角形的股差爲 N 個股差爲質數之冪次方乘積時，則至少有 2^N 條衍生數列。

(6)對於某一股差所擁有的數列個數，我們可以用一個判定法則來確定：於一已知數列中大於　　　的兩相鄰項，對於此相鄰項間的所有正整數 m，利用存在多少個 $\sqrt{2m^2 \pm d}$ 爲正整數者來判定(其中 d 爲股差)。

(7)直角三角形(三整數邊長互質)、素勾股數、衍生數對、構造式，此四者間可以互相轉換。

衍生數對的功能爲，產生一數列而衍生出一系列的素勾股數，藉由共軛數列找到另一條數列，進而產生更多的素勾股數(股差爲 1 除外)；也可以藉由數列個數的判定法則，確定數列的個數。構造式的功能在於合成，將兩個已知股差的素勾股數，合成新的勾股數。

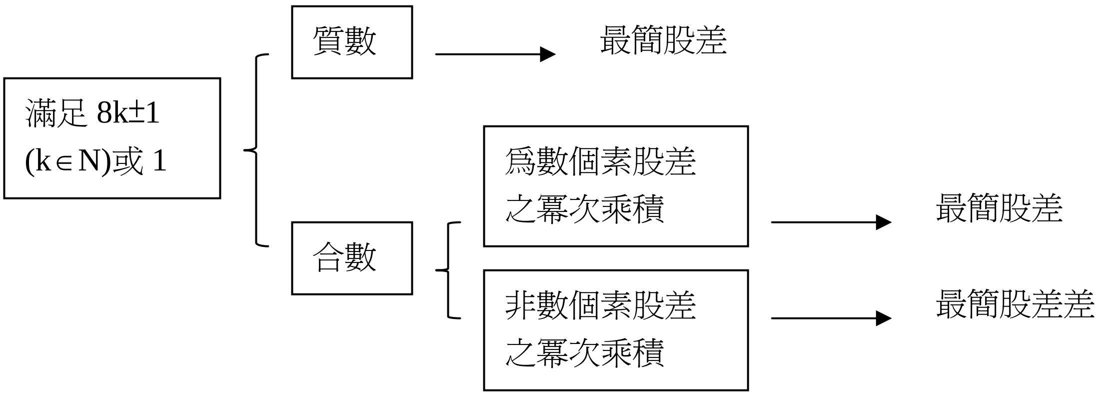
陸、展望

(1) 對於已知的兩組素勾股數，是否一定能找到股差爲原兩組股差之積的素勾股數 此一猜測，我證得了若已知的兩組素勾股數中其中有一的股差爲質數，則必成立。然而，我希望能夠證得若*沒有質數的限制* 亦成立

(2) 對於任一質數的股差，由部份實測發現，皆存在兩條數列(互爲共軛)，我希望能夠解決此一問題。另外，對於質數股差的個數，是否爲無窮多個？

(3) 對於數列的組合，我已經推得以 n 個雙股差質數冪次乘積爲股差的數列個數，至少有 2^n，由實測發現，皆恰爲 2^n。也就是不會有合成數列之外的數列

(4) 對於股差，我未能完全透析其真面貌，我僅確定了其合成的性質(其中一定要有質數)。不過，從觀察，我將正整數分爲三個類型



(5)我希望能將其推廣至夾角非 90 度之三角形，探討其夾角兩邊的差與整數邊長之關係。例如：當夾角爲 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 時，將找到的對邊畫成圖形，則會成爲一類似指數函數的圖形，夾邊差似乎可寫成 12k±1 的形式，且 11 爲夾邊差，13 爲夾邊差，143 及 121 亦爲其夾邊差。

柒、參考資料

(一) 高中數學課本第一冊（2005）。第二章：數與座標系。南一書局。

(二) 閔嗣鶴（1998）。初等數論。第二章：不定方程。凡異出版社

(三) 潘承洞、潘承彪（2002）。簡明數論。九章出版社

(四) 盛立人、嚴鎮軍（2001）。從勾股定理談起。九章出版社

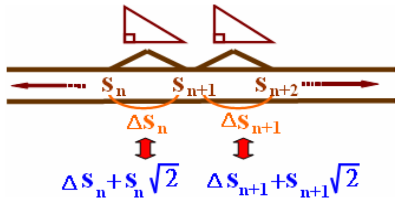
(五) Pell’s equations。取自: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pell.html

捌、附錄

附錄一、共軛式之定理證明

定理：右圖爲一條衍生數列，則

$(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = \Delta s_{n+1}+s_{n+1}\sqrt{2}$



<proof>

由 $s_{n+1}-s_n=\Delta s_n$ ，所以 $\mathbf{s_{n+1}=s_n+\Delta s_n}$，且

$\mathbf{\Delta s_{n+1}} = s_{n+2}-s_{n+1} = s_n+2s_{n+1}-s_{n+1} = s_n+s_{n+1} = \mathbf{2s_n+\Delta s_n}$

則

$\mathbf{(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=(\Delta s_n+2s_n)+\sqrt{2}(s_n+\Delta s_n) = \mathbf{\Delta s_{n+1}+s_{n+1}\sqrt{2}}$

定義：設 $\Delta\mathbf{s}+\mathbf{s}\sqrt{2}$ 爲一　：：：合成式：：：則，以符號 $\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}$ 表其共軛式。

定理：$(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^m=\overline{(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{-m}}$　其中 $\mathbf{m,n}\in Z$ ，$(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})>\mathbf{0}$

<proof>

當 n ＝ 1 時 $(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=\Delta s_{n+1}+s_{n+1}\sqrt{2}$

令 $\overline{\Delta s_n+s_n\sqrt{2}}=(-1)^t(\Delta s_n-s_n\sqrt{2})>0$，其中 t=0 或 1，則

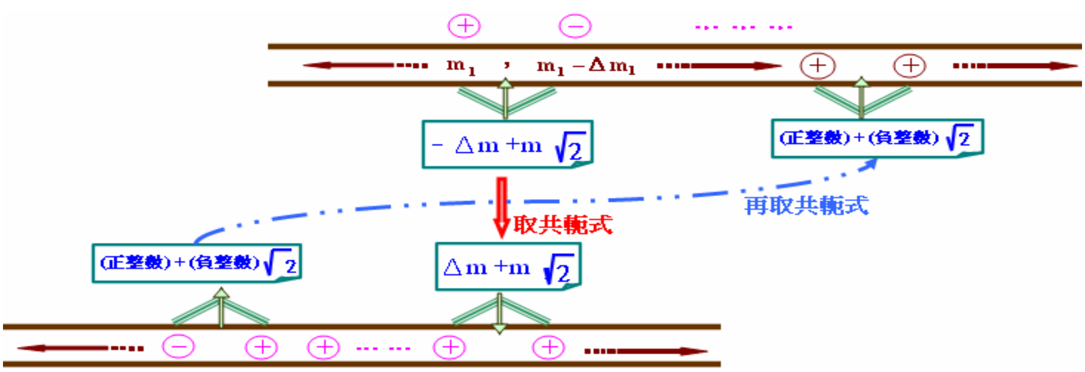
$$\begin{aligned}
&\overline{(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{-1}}\\
&=\overline{(-1)^t(\Delta s_n-s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{-1}}=\overline{(-1)^t(\Delta s_n-s_n\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\\
&=\overline{(-1)^t[(-\Delta s_n-2s_n)+\sqrt{2}(\Delta s_n+s_n)]}=\overline{(-1)^t(-\Delta s_{n+1}+s_{n+1}\sqrt{2})}\\
&=\Delta s_{n+1}+s_{n+1}\sqrt{2}=(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

故 $(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=\overline{(\Delta s_n+s_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{-1}}$

若 n ＞ 1 時，可重覆使用上式證得

若 n ＜ 0 時，則亦可同理證得

定理：若 Δm , $m\in N$ 且 $(\Delta m, m)=1$ ，則由 $\overline{\Delta m+m\sqrt{2}}$ 所成之數列必可找到連續正整數項



<proof>　設 $\overline{\Delta m+m\sqrt{2}}$ ＝(–Δm)+m$\sqrt{2}$ ＞0，而由此*合成式*所產生之衍生數列如上圖。但由此數列之正負情形，難以斷定其是否存在連續正整數項。

於是我將$(-\Delta m)+m\sqrt{2}$取共軛式，即$\Delta m+m\sqrt{2}$。而由此共軛式，可以找到一組衍生數對，且此數對中的兩個數皆為正整數。再由此兩正整數，可產生一條共軛數列，藉由數列的移動，可以往左找到正負相間的項，取一組相臨項為衍生數對，轉換成***構造式***素構造式的形式，則會是：

$$\mathbf{(A) + (-B)}\sqrt{2} \quad \text{其中 } A,B\in N$$

將此構造式取共軛式，則會是：

$$\mathbf{(A) + (B)}\sqrt{2}$$

將其轉換回衍生數對的形式，會是：

$$\mathbf{(B , A+B)} \qquad \text{其中 } B,A+B\in N$$

又此兩正整數為原數列中的兩項，故當$(-\Delta m_1)+m_1\sqrt{2} > 0$ 時，由此素構造式產生之數列必可以找到兩連續正整數項。同理，當$\overline{\Delta m+m\sqrt{2}}=\Delta m_1+(-m_1)\sqrt{2}$時，所產生之數列亦存在連續正整數項。

定理：設$\sigma=2s^2+\Delta s^2$，$d=2s^2-\Delta s^2$ (其中$(\Delta s,s)=1$)，則$(\sigma,s)=(\sigma,\Delta s)=(\sigma,d)=1$

<proof>設$(\sigma,s)=d'>1$ 且 $d'\neq 2$ ，則 $d'|2s^2+\Delta s^2$ 且 $d'|s$ ，所以 $d'|\Delta s^2$

所以必存在一個質數 p' ，使得 $p'|d'|(\Delta s,s)$，矛盾，故$(\sigma,s)=1$

同理$(\sigma,\Delta s)=(\sigma,d)=1$

定理：若$\Delta s+s\sqrt{2}$為素構造式且由此構造式形成之股差不為**1**，則由$\Delta s+s\sqrt{2}$和$\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}$所產生之數列必不同

<*proof*>設兩數列相同，則令$\Delta s+s\sqrt{2}$移動 n 項後會變成$\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}$，其中$n\in Z$，又$\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}=\pm(\Delta s-s\sqrt{2})$

由數列的移動：

$\pm(\Delta s-s\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^n(\Delta s+s\sqrt{2})$，

$$(1+\sqrt{2})^n=\pm\frac{\Delta s-s\sqrt{2}}{\Delta s+s\sqrt{2}}$$

$$=\pm\frac{(\Delta s-s\sqrt{2})(\Delta s-s\sqrt{2})}{(\Delta s+s\sqrt{2})(\Delta s-s\sqrt{2})}$$

$$=\pm\frac{\Delta s^2+2s^2-2s\Delta s\sqrt{2}}{-d_s}$$

$$=\mp\left(\frac{\sigma}{d_s}-2\sqrt{2}\,\frac{s\Delta s}{d_s}\right)$$

又 $d_s\neq 1$ 或-1，所以 $\dfrac{\sigma}{d_s}$ 和 $\dfrac{s\Delta s}{d_s}$ 皆為分數，不能化為$(1-\sqrt{2})^n$之形式。

所以兩者不在同一條數列上

定理：若$\Delta s+s\sqrt{2}$和$\Delta t+t\sqrt{2}$皆爲素構造式且由此二構造式形成之股差皆不爲 **1**，則由

($\Delta s+s\sqrt{2}$**)(**$\Delta t+t\sqrt{2}$**)和(**$\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}$**)(**$\Delta t+t\sqrt{2}$**)所形成的數列必不同**

<proof>

設兩數列相同，則令($\Delta s+s\sqrt{2}$)($\Delta t+t\sqrt{2}$)移動 n 項後會變成($\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}$)($\Delta t+t\sqrt{2}$)，

其中$n\in Z$，又$\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}=\pm(\Delta s-s\sqrt{2})$

由數列的移動：

($\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}$)($\Delta t+t\sqrt{2}$) = ($\Delta s+s\sqrt{2}$)($\Delta t+t\sqrt{2}$)$(1+\sqrt{2})^n$

($\overline{\Delta s+s\sqrt{2}}$) = ($\Delta s+s\sqrt{2}$)$(1+\sqrt{2})^n$

$\pm(\Delta s-s\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^n(\Delta s+s\sqrt{2})$

這和前定理爲一樣的狀況。所以兩者不在同一條數列上。

定理：$\overline{\Delta m_1+m_1\sqrt{2}}\cdot\overline{\Delta m_2+m_2\sqrt{2}} = \overline{(\Delta m_1+m_1\sqrt{2})(\Delta m_2+m_2\sqrt{2})}$

<proof>

$\overline{\Delta m_1+m_1\sqrt{2}}=(-1)^{t_1}(\Delta m_1-m_1\sqrt{2})$，$\overline{\Delta m_2+m_2\sqrt{2}}=(-1)^{t_2}(\Delta m_2-m_2\sqrt{2})$。其中 $t_1,t_2\in N$

又$(\Delta m_1+m_1\sqrt{2})(\Delta m_2+m_2\sqrt{2})=(\Delta m_1\Delta m_2+2m_1m_2)+\sqrt{2}(m_1\Delta m_2+m_2\Delta m_1)$

且〔$(-1)^{t_1}(\Delta m_1-m_1\sqrt{2})$〕〔$(-1)^{t_2}(\Delta m_2-m_2\sqrt{2})$〕

$=(-1)^{t_1+t_2}$〔$(\Delta m_1\Delta m_2+2m_1m_2)-\sqrt{2}(m_1\Delta m_2+m_2\Delta m_1)$〕

又$(-1)^{t_1+t_2}$〔$(\Delta m_1\Delta m_2+2m_1m_2)-\sqrt{2}(m_1\Delta m_2+m_2\Delta m_1)$〕$>0$，所以

$(-1)^{t_1+t_2}$〔$(\Delta m_1\Delta m_2+2m_1m_2)-\sqrt{2}(m_1\Delta m_2+m_2\Delta m_1)$〕

$=\overline{(\Delta m_1\Delta m_2+2m_1m_2)+\sqrt{2}(m_1\Delta m_2+m_2\Delta m_1)}$，故得證

附錄二、合成數對—定理證明

定理：**若$|d_s|$與$|d_t|$皆爲素勾股股差(且$|d_s|$爲質數)，則$|d_sd_t|$亦爲素勾股股差**

構想：因爲$|d_s|$和$|d_t|$皆爲素勾股股差，

表示存在整數 $s,\Delta s,t,\Delta t$，且$(\Delta s,s)=(\Delta t,t)=1$，使得

$2s^2-\Delta s^2=d_s$ 且 $2t^2-\Delta t^2=d_t$,由合成數對法則可知，必存在

$$\Delta u=\Delta s\Delta t+2st,\ u=s\Delta t+t\Delta s$$

使得 $2u^2-\Delta u^2=-d_sd_t$

設$(\Delta u,u)=d'>1$ 則 $d'|\Delta s\Delta t+2st$ 且 $d'|s\Delta t+t\Delta s$，則

$d'|-(\Delta s\Delta t+2st)\Delta s+(s\Delta t+t\Delta s)2s=d_s\Delta t$ 所以

$d'|d_s(\Delta t,t)$ 但已知 $d'\nmid(\Delta t,t)$

故 $d'|d_s$ ，又 d_s 爲質數且 $d'>1$，故唯有可能$(\Delta u,u)=d'=d_s$

所以證明目標將轉成證明$(\Delta u,u)\neq d_s$ 。若能將

$\Delta u=\Delta s\Delta t+2st$, $u=s\Delta t+t\Delta s$ 寫成

$\Delta u=d_s\alpha+B\Delta s$, $u=d_s\beta+Bs$ 的形式（其中 $\alpha,\beta,B\in Z$ ，且 $d_s\nmid B$）

則 $d_s\nmid\Delta u$ 且 $d_s\nmid u$ ，可得$(\Delta u,u)\neq d_s$

< *proof* > 由 $\Delta u=\Delta s\Delta t+2st=d_s\alpha+B\Delta s$，且 $u=s\Delta t+t\Delta s=d_s\beta+Bs$

可知 $B\Delta s=\Delta s\Delta t+2st-d_s\alpha$ ， 且 $Bs=s\Delta t+t\Delta s-d_s\beta$

則 $\dfrac{\Delta s}{s}=\dfrac{\Delta s\Delta t+2st-d_s\alpha}{s\Delta t+t\Delta s-d_s\beta}$

故 $(s\Delta t+t\Delta s-d_s\beta)\dfrac{\Delta s}{s}$

$=[s\Delta t+t\Delta s-(2s^2-\Delta s^2)\beta]\dfrac{\Delta s}{s}=\Delta s\Delta t+\dfrac{t\Delta s^2}{s}-2s\beta\Delta s+\dfrac{\beta\Delta s^3}{s}$

$=\Delta s\Delta t-2s\beta\Delta s+\dfrac{t\Delta s^2+\beta\Delta s^3}{s}=....=\Delta s\Delta t+2st-d\ \alpha$

令 $\beta=-At$ (其中 A 為待定數)，則

$(s\Delta t+t\Delta s-d_s\beta)\dfrac{\Delta s}{s}$

$=\Delta s\Delta t-2s\beta\Delta s+\dfrac{t\Delta s^2+\beta\Delta s^3}{s}=\Delta s\Delta t-2s(-At)\Delta s+\dfrac{t\Delta s^2+(-At)\Delta s^3}{s}$

$=\Delta s\Delta t+2sAt\ \Delta s+\dfrac{t\Delta s^2-At\ \Delta s^3}{s}=\Delta s\Delta t+2st(1+A\Delta s-1)+\dfrac{t\Delta s^2-At\ \Delta s^3}{s}$

$=\Delta s\Delta t+2st+2st(A\Delta s-1)+\dfrac{t\Delta s^2(1-A\Delta s)}{s}=\Delta s\Delta t+2st+td_s\dfrac{(A\Delta s-1)}{s}$

$=\Delta s\Delta t+2st-d_s\alpha$

因為 $\Delta s\Delta t+2st-d_s\alpha\in Z$ ，我們令 $Q=\dfrac{(A\Delta s-1)}{s}\in Z$ ，於是

$\Delta s\cdot A-s\cdot Q=1$ ， 從$(\Delta s,s)=1$ 可知，A,Q 有整數解，

再由 $\Delta s\Delta t+2st+td_s\dfrac{(A\Delta s-1)}{s}=\Delta s\Delta t+2st-d_s\alpha$

可知 $\alpha=-tQ$ ， 又因$(\Delta s,s)=1$，所以令一整數 B 且滿足

$$B=\frac{s\Delta t+t\Delta s+d_sAt}{s}=d_sR$$

即 $d_stA-d_ssR=-(s\Delta t+t\Delta s)$

我們希望 $d_s\nmid B$，也就是希望 A，R 不同時有整數解，若 $d_s(t,s)\mid s\Delta t+t\Delta s$，則 A,R 有整數解，違背我們的期望，所以我們希望在某些地方做點小改變使得 A，R 可確定不同時有整數解

由於 d_s 不整除 s 及 Δs，且 d_s 不會同時整除 t 及 Δt，可知 $d_s(t,s)$亦不同時整除 s 及 Δs，

且 $d_s(t,s)$不會同時整除 t 及 Δt，若 d_s 整除 t 或 Δt 之一時，$d_s \nmid s\Delta t+t\Delta s$，即Ａ，Ｒ不同時有整數解，而此狀況在 $d_s(t,s) \mid s\Delta t+t\Delta s$ 亦不會發生，故 d_s 必同時不整除 t 及 Δt

由 $s\Delta t+t\Delta s\equiv 0 \pmod{d_s}$ ， 可得 $s\Delta t\equiv -t\Delta s \pmod{d_s}$，即 $s\Delta t-t\Delta s\equiv 2s\Delta t \pmod{d_s}$

故 $d_s \nmid s\Delta t-t\Delta s$，且 $d_s \nmid -s\Delta t+t\Delta s$

因 s，t，Δs，Δt 任意改變性質符號並不影響 d_s 及 d_t 之值，所以我們可以將原 s，t，Δs，Δt 其一改變性質符號，則得到新的 s，t，Δs，Δt，再重覆上方步驟，則必滿足 $d_s \nmid s\Delta t+t\Delta s$

當 $d_s \nmid s\Delta t+t\Delta s$ 時，則 A,R 不同時有整數解，而已知 A 有整數解，故 R 找不到整數解即 $d_s \nmid$ B，此時

$$(d_s\alpha+B\Delta s, d_s\beta+Bs)\neq d_s \quad 即 \quad (\Delta u,u)\neq d_s$$

又先前已知若$(\Delta u,u)\neq 1$，則唯有可能$(\Delta u,u)=d_s$，矛盾。故$(\Delta u,u)=1$，故$|d_sd_t|$為素勾股股差

得證！！

附錄三、素勾股股差及其素勾股數

d=股差 (a,b,c) (m,Δm)
d= 1 (3,4,5) (1,1)
d= 7 (5,12,13) (2,1)
d=17 (7,24,25) (3,1)
d=23 (33,56,65) (4,3)
d=31 (9,40,41) (4,1)
d=41 (39,80,89) (5,3)
d=47 (85,132,157) (6,5)
d=49 (11,60,61) (5,1)
d=71 (13,84,85) (6,1)
d=73 (95,168,193) (7,5)
d=79 (161,240,289) (8,7)
d=89 (51,140,149) (7,3)
d=97 (15,112,113) (7,1)
d=103 (84,187,205) (3,11)
d=113 (52,165,173) (2,11)
d=119 (24,143,145) (1,11)
d=127 (17,144,145) (8,1)
d=137 (115,252,277) (9,5)
d=151 (96,247,265) (3,13)
d=161 (19,180,181) (9,1)
d=167 (28,195,197) (1,13)
d=191 (69,260,269) (10,3)
d=193 (152,345,377) (4,15)
d=199 (21,220,221) (10,1)
d=217 (68,285,293) (2,15)
d=223 (32,255,257) (1,15)
d=233 (75,308,317) (11,3)
d=239 (217,456,505) (12,7)
d=241 (23,264,265) (11,1)
d=257 (168,425,457) (4,17)
d=263 (145,408,433) (12,5)
d=271 (120,391,409) (3,17)
d=281 (76,357,365) (2,17)
d=287 (25,312,313) (12,1)
d=289 (231,520,569) (13,7)
d=311 (240,551,601) (5,19)
d=313 (155,468,493) (13,5)
d=329 (87,416,425) (13,3)
d=337 (27,364,365) (13,1)
d=343 (132,475,493) (3,19)
d=353 (84,437,445) (2,19)
d=359 (40,399,401) (1,19)
d=367 (165,532,557) (14,5)
d=383 (93,476,485) (14,3)
d=391 (29,420,421) (14,1)
d=401 (259,660,709) (15,7)
d=409 (200,609,641) (4,21)
d=431 (369,800,881) (16,9)
d=433 (92,525,533) (2,21)
d=439 (44,483,485) (1,21)
d=449 (31,480,481) (15,1)
d=457 (348,805,877) (6,23)
d=463 (273,736,785) (16,7)
d=479 (280,759,809) (5,23)
d=487 (185,672,697) (16,5)
d=497 (216,713,745) (4,23)
d=503 (105,608,617) (16,3)
d=511 (33,544,545) (16,1)
d=521 (100,621,629) (2,23)
d=527 (48,575,577) (1,23)
d=529 (287,816,865) (17,7)
d=553 (195,748,773) (17,5)
d=569 (111,680,689) (17,3)
d=577 (35,612,613) (17,1)
d=593 (232,825,857) (4,25)
d=599 (301,900,949) (18,7)
d=601 (539,1140,1261) (19,11)
d=607 (168,775,793) (3,25)
d=617 (108,725,733) (2,25)
d=623 (52,675,677) (1,25)
d=631 (476,1107,1205) (7,27)
d=641 (423,1064,1145) (19,9)
d=647 (37,684,685) (18,1)
d=673 (315,988,1037) (19,7)
d=679 (320,999,1049) (5,27)
d=697 (215,912,937) (19,5)
d=713 (123,836,845) (19,3)
d=719 (441,1160,1241) (20,9)
d=721 (39,760,761) (19,1)
d=727 (56,783,785) (1,27)
d=743 (504,1247,1345) (7,29)
d=751 (329,1080,1129) (20,7)
d=761 (583,1344,1465) (21,11)
d=769 (420,1189,1261) (6,29)
d=791 (129,920,929) (20,3)
d=799 (41,840,841) (20,1)
d=809 (264,1073,1105) (4,29)
d=823 (192,1015,1033) (3,29)
d=833 (124,957,965) (2,29)
d=839 (60,899,901) (1,29)
d=857 (235,1092,1117) (21,5)
d=863 (532,1395,1493) (7,31)
d=881 (43,924,925) (21,1)
d=887 (477,1364,1445) (22,9)
d=889 (444,1333,1405) (6,31)
d=911 (360,1271,1321) (5,31)
d=919 (357,1276,1325) (22,7)
d=929 (280,1209,1241) (4,31)
d=937 (627,1564,1685) (23,11)
d=943 (204,1147,1165) (3,31)
d=953 (132,1085,1093) (2,31)
d=959 (64,1023,1025) (1,31)
d=961 (656,1617,1745) (8,33)
d=967 (45,1012,1013) (22,1)
d=977 (495,1472,1553) (23,9)
d=983 (793,1776,1945) (24,13)
d=991 (560,1551,1649) (7,33)
d=1009 (371,1380,1429) (23,7)
d=1031 (649,1680,1801) (24,11)
d=1033 (255,1288,1313) (23,5)
d=1039 (380,1419,1469) (5,33)
d=1049 (147,1196,1205) (23,3)
d=1057 (47,1104,1105) (23,1)
d=1063 (792,1855,2017) (9,35)
d=1081 (140,1221,1229) (2,33)
d=1087 (68,1155,1157) (1,33)
d=1097 (688,1785,1913) (8,35)
d=1103 (385,1488,1537) (24,7)
d=1127 (265,1392,1417) (24,5)
d=1129 (671,1800,1921) (25,11)
d=1151 (49,1200,1201) (24,1)
d=1153 (492,1645,1717) (6,35)
d=1169 (531,1700,1781) (25,9)
d=1193 (312,1505,1537) (4,35)
d=1201 (399,1600,1649) (25,7)
d=1207 (228,1435,1453) (3,35)
d=1217 (148,1365,1373) (2,35)
d=1223 (72,1295,1297) (1,35)
d=1231 (693,1924,2045) (26,11)
d=1241 (159,1400,1409) (25,3)
d=1249 (51,1300,1301) (25,1)
d=1271 (549,1820,1901) (26,9)
d=1279 (1100,2379,2621) (11,39)
d=1289 (871,2160,2329) (27,13)
d=1297 (516,1813,1885) (6,37)
d=1303 (413,1716,1765) (26,7)
d=1319 (420,1739,1789) (5,37)
d=1321 (980,2301,2501) (10,39)
d=1327 (285,1612,1637) (26,5)
d=1337 (328,1665,1697) (4,37)
d=1343 (165,1508,1517) (26,3)
d=1351 (53,1404,1405) (26,1)
d=1361 (156,1517,1525) (2,37)
d=1367 (76,1443,1445) (1,37)
d=1393 (752,2145,2273) (8,39)
d=1399 (897,2296,2465) (28,13)
d=1409 (427,1836,1885) (27,7)
d=1423 (644,2067,2165) (7,39)
d=1433 (295,1728,1753) (27,5)
d=1439 (1144,2583,2825) (11,41)
d=1447 (737,2184,2305) (28,11)
d=1457 (55,1512,1513) (27,1)
d=1471 (440,1911,1961) (5,39)
d=1481 (1020,2501,2701) (10,41)
d=1487 (585,2072,2153) (28,9)
d=1489 (344,1833,1865) (4,39)
d=1511 (1309,2820,3109) (30,17)
d=1513 (164,1677,1685) (2,39)
d=1519 (80,1599,1601) (1,39)
d=1543 (305,1848,1873) (28,5)
d=1553 (784,2337,2465) (8,41)
d=1559 (177,1736,1745) (28,3)
d=1561 (759,2320,2441) (29,11)
d=1567 (57,1624,1625) (28,1)
d=1583 (672,2255,2353) (7,41)
d=1601 (603,2204,2285) (29,9)
d=1607 (1188,2795,3037) (11,43)
d=1609 (564,2173,2245) (6,41)
d=1631 (460,2091,2141) (5,41)
d=1633 (455,2088,2137) (29,7)
d=1649 (360,2009,2041) (4,41)
d=1657 (315,1972,1997) (29,5)
d=1663 (264,1927,1945) (3,41)
d=1673 (172,1845,1853) (2,41)
d=1679 (84,1763,1765) (1,41)
d=1681 (59,1740,1741) (29,1)
d=1687 (936,2623,2785) (9,43)
d=1697 (1155,2852,3077) (31,15)
d=1721 (816,2537,2665) (8,43)
d=1751 (469,2220,2269) (30,7)
d=1753 (975,2728,2897) (31,13)
d=1759 (1377,3136,3425) (32,17)
d=1777 (588,2365,2437) (6,43)
d=1783 (1232,3015,3257) (11,45)
d=1799 (61,1860,1861) (30,1)
d=1801 (803,2604,2725) (31,11)
d=1817 (376,2193,2225) (4,43)
d=1823 (1185,3008,3233) (32,15)
d=1831 (276,2107,2125) (3,43)
d=1841 (180,2021,2029) (2,43)
d=1847 (88,1935,1937) (1,43)
d=1871 (1560,3431,3769) (13,47)
d=1873 (483,2356,2405) (31,7)
d=1879 (1001,2880,3049) (32,13)
d=1889 (1411,3300,3589) (33,17)
d=1897 (335,2232,2257) (31,5)
d=1913 (195,2108,2117) (31,3)
d=1921 (63,1984,1985) (31,1)
d=1927 (728,2655,2753) (7,45)
d=1951 (1653,3604,3965) (34,19)
d=1967 (657,2624,2705) (32,9)
d=1993 (392,2385,2417) (4,45)
d=1999 (497,2496,2545) (32,7)
d=2009 (1027,3036,3205) (33,13)
d=2017 (188,2205,2213) (2,45)
d=2023 (92,2115,2117) (1,45)
d=2039 (201,2240,2249) (32,3)
d=2047 (65,2112,2113) (32,1)
d=2063 (1612,3675,4013) (13,49)
d=2081 (880,2961,3089) (8,47)
d=2087 (1245,3332,3557) (34,15)
d=2089 (1691,3780,4141) (35,19)
d=2111 (756,2867,2965) (7,47)
d=2113 (1464,3577,3865) (12,49)
d=2129 (511,2640,2689) (33,7)
d=2137 (636,2773,2845) (6,47)
d=2143 (1053,3196,3365) (34,13)
d=2153 (355,2508,2533) (33,5)
d=2159 (520,2679,2729) (5,47)
d=2161 (1479,3640,3929) (35,17)
d=2177 (67,2244,2245) (33,1)
d=2191 (300,2491,2509) (3,47)
d=2201 (196,2397,2405) (2,47)
d=2207 (96,2303,2305) (1,47)
d=2209 (1820,4029,4421) (14,51)
d=2231 (693,2924,3005) (34,9)
d=2239 (1044,3283,3445) (9,49)
d=2263 (525,2788,2837) (34,7)
d=2273 (912,3185,3313) (8,49)
d=2281 (1079,3360,3529) (35,13)
d=2287 (365,2652,2677) (34,5)
d=2297 (1995,4292,4733) (37,21)
d=2303 (213,2516,2525) (34,3)
d=2311 (69,2380,2381) (34,1)
d=2329 (660,2989,3061) (6,49)
d=2351 (540,2891,2941) (5,49)

【評　語】　　040410　勾股鐵路網

1. 作者對於最基本的數學定理，經其個人觀察後，能發展出具創意的方法，嚴密的推導出令人興奮的成果。

2. 對於數列的性質，及合成函數的運用，有相當好的掌握。

3. 數學概念相當清楚。

+G343