中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040409

弦...話家常

學校名稱：國立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 廖婉珊	陳松靖
高二 曾顯堯	
高二 李哲逸	
高二 張少綺	

關鍵詞：平行弦　類蚶線　水滴線

摘要

此研究爲探討圓錐曲線與弦的關係，主要分爲兩大主題，一爲探討在平面上一點與圓錐曲線所成之任一弦，其中點軌跡及按任一固定比例下所成之軌跡圖形與方程式；另一主題爲研究圓錐曲線所有平行弦之中點軌跡及按任一固定比例下所成之軌跡圖形與方程式。

經過研究有些軌跡方程式非常複雜，我們透過 GSP 與 Cabri Geometry II Plus 等兩套幾何繪圖軟體協助觀察。最後得知主題一以弦中點繪出的圖形具有不變性，而按固定比例下所成的圖形看似蚶線(點在圓內)，經過研究發現是不一樣的曲線(類蚶線)，其他這類圖形似乎和擺線有一定的關係；主題二以弦中點所得的圖形爲圓錐曲線之軸，而按固定比例下構成的圖形一樣具有不變性。

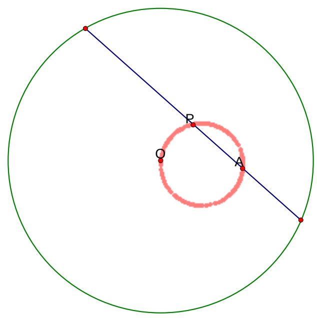
壹、 研究動機

我們在學習圓、圓錐曲線時，接觸到不少有關於動點軌跡的題目，於是，我們從中找出幾個和”弦”有關的問題，想作更深入的研究.

貳、 研究目的

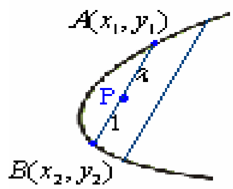
我們想要解決圓錐曲線中和”弦”相關的兩個問題：

一、我們已知：圓 C 內部一點 A，過 A 點之所有弦中點 P，其軌跡爲以 $\overline{OA}$ 爲直徑的圓.



想要研究若將 P 之條件改爲 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$ (B, C 爲過 A 弦之兩端點)時，P 點軌跡爲何？

二、我們已知：拋物線 $\Gamma: y^2=4cx$，Γ 上斜率爲 m 之平行弦的中點軌跡爲 $y=\dfrac{2c}{m}$.若將條件改成：



拋物線 Γ 上斜率爲 m 之平行弦，交拋物線 Γ 於 A,B 兩點，滿足 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$ 之 P 點軌跡爲何？

在圓錐曲線上，這種定比例下內外分比的動點軌跡爲何？

參、 研究設備及器材

紙、筆、直尺、圓規、*GSP* 軟體、*Cabri Geometry II Plus* 軟體

肆、 研究過程

我們知道圓錐曲線方程式 $\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ (非退化)，可經過平移得 $\Gamma': a'x^2+b'xy+c'y^2+f'=0$，又經過旋轉可得 $\Gamma'': a''x^2+c''y^2+f''=0$. 而平移、旋轉並不會改變弦上定比例的條件，所以以下我們就從圓錐曲線的標準式著手研究：

一、不是蚶線的神秘圖形

我們以知圓內一點 A，過 A 作任一弦，取弦中點 M,M 之軌跡爲以原心 O 到 A 之距離爲直徑的一個圓.

(一)我們將此題目作以下的推廣:

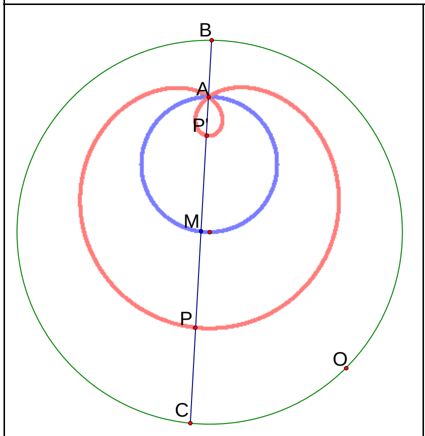
平面上圓 O, 在平面上取一點 A, 過 A 作一直線交圓 O 於 B、C 兩點, 再此線段上取一點 P 與 P' 滿足條件 $\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$ 與 $\frac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\frac{1}{\lambda}$, 探討此時 P 點與 P' 點構成的軌跡

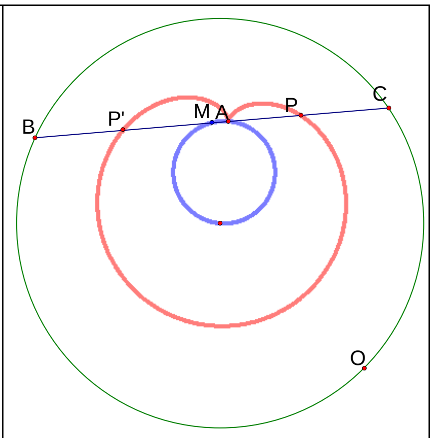
又可分為幾種討論方向:

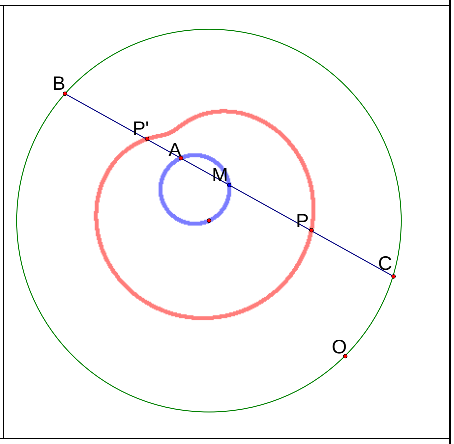
1. P 點與 P' 點在圓內(內分比), A 點在圓內、上、外時所行程的軌跡
2. P 點與 P' 點在圓外(外分比), A 點在圓內、上、外時所行程的軌跡

為方便討論這些圖形, 先由 *GSP* 製圖得以下圖形

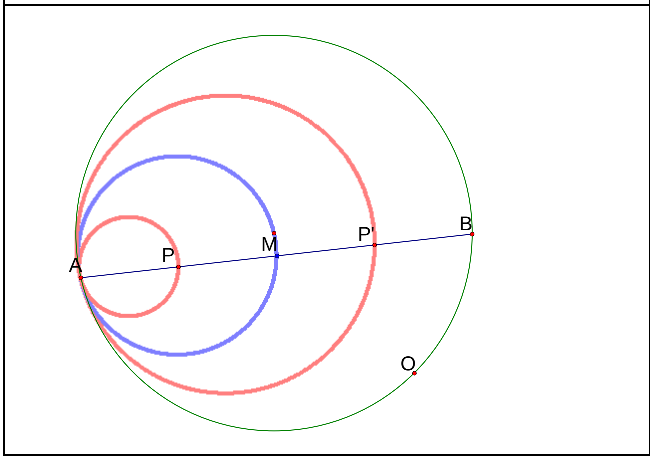
內分比 A 在原內



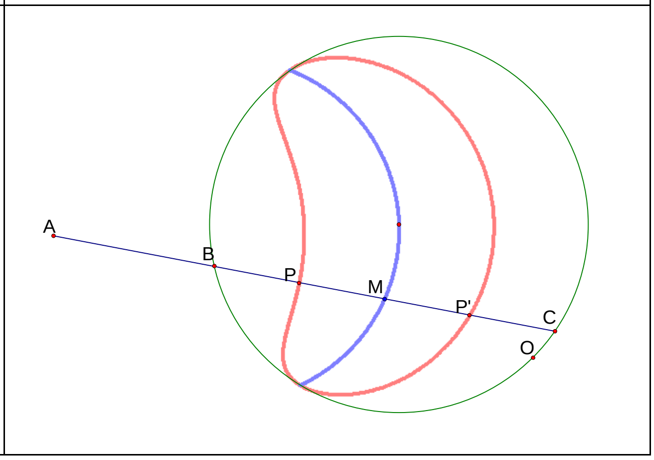


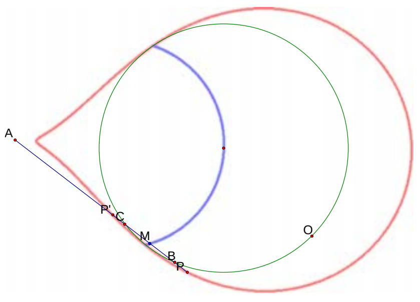
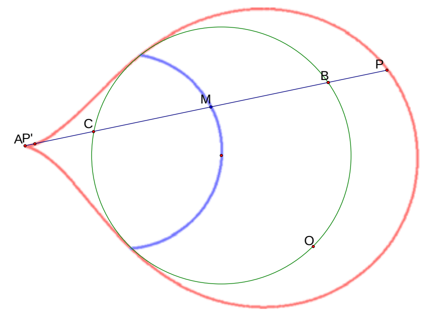
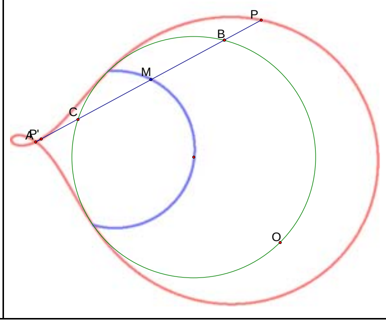
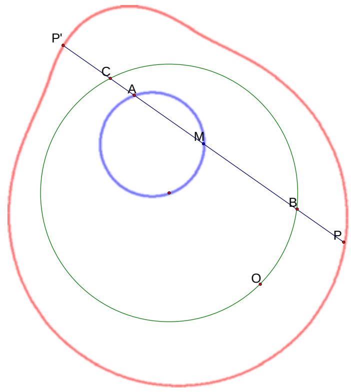
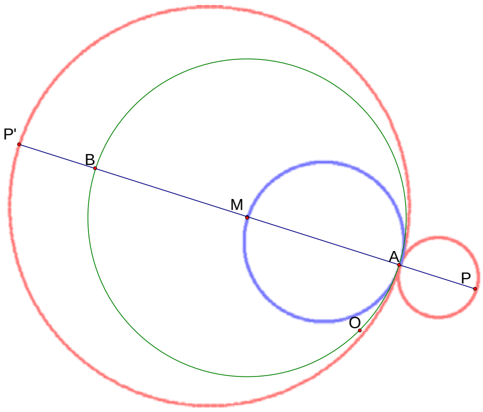


內分比 A 點在圓上



內分比 A 點在圓外



<table>
<tr><td colspan="6">外分比, A 點在圓外</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="3">外分比, A 點在圓內</td><td colspan="3">外分比, A 點在圓上</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

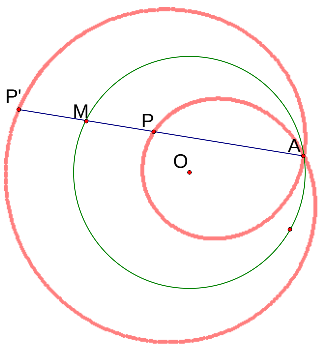
(二)我們先對內分比的問題作延伸討論:

透過 *GSP* 製圖, 我們發現內分比 A 點再圓內的圖形十分類似蚶線.

我們推測此圖形與蚶線有極大的關係, 爲了方便討論, 我們先探討蚶線的定義, 方便未來的討論與比較.

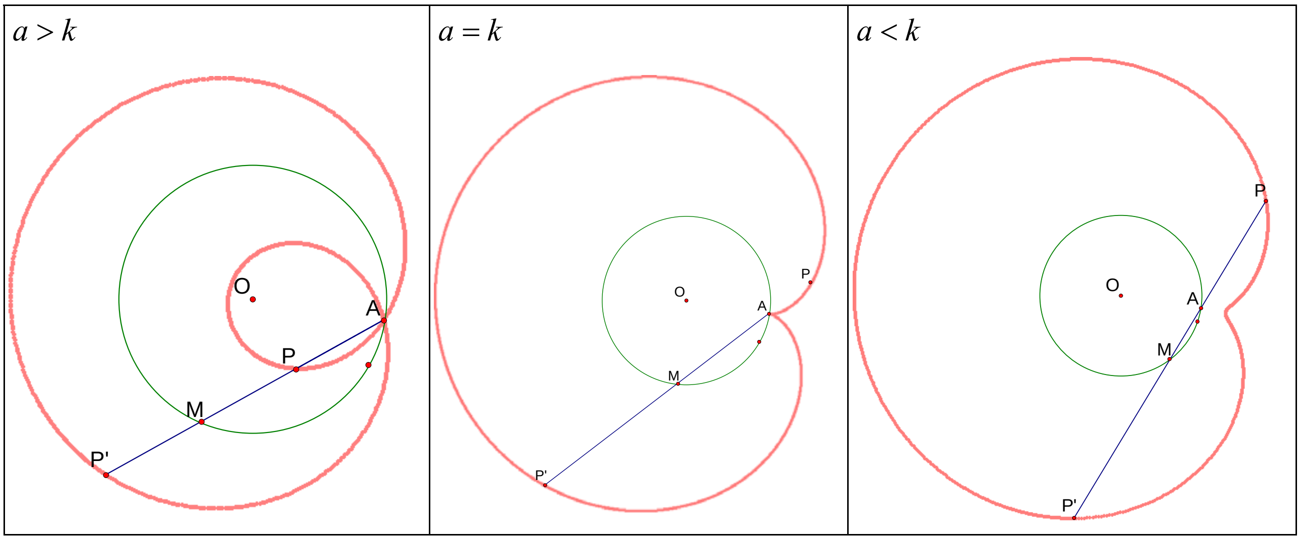
1、蚶線的定義

給定一圓 O 及圓周上的一定點 A, 設過 A 之任意直線與圓 O(標準圓)交於另一點 M, 在 $\overleftrightarrow{AM}$ 上有兩個點 P, P' ,且 $\overline{PM}=\overline{P'M}=k$ (爲定值), 兩點所繪製形成的圖形爲蚶線. (圖形如右)



蚶線的方程式爲: $r=2a\cos\theta+k$ (且 k=$\overline{PM}$ 爲一定值)

圖形會隨著且 k 值變化而變化, 整理如下:



2、圖形觀察

為了仿照蚶線之定義尋找關係，得以下的關係式:

過 A 點所有弦，滿足 $\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda(\lambda>0)$ 之 P 與滿足 $\frac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\frac{1}{\lambda}$ 之 P' 的關係，以 A 為極點，$\overrightarrow{AO}$ 為極軸，作一直徑為 $\overline{OA}$ 的圓 O' (即為蚶線中的表準圓)，則 $\overline{OA}=2r'$，過 A 之任意直線與給定圓 O' 交於 M 點

$$\overline{OM}\perp\overline{BC}\left(\because \overline{OA}\text{為直徑}\right)\Rightarrow \overline{CM}=\overline{BM}\left(\overline{BC}\text{為圓之弦}\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda \Rightarrow \overline{BP}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overline{BC}\\ \dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}\Rightarrow \overline{CP'}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overline{BC}\end{cases}\quad \therefore \overline{BP}=\overline{CP'}\text{ 又 }\overline{CM}=\overline{BM}\text{ 得 }\overline{PM}=\overline{PM'}$$

3、比較

由上定義，可發現兩者不同之處，蚶線的 $\overline{PM}$ 、$\overline{P'M}$ 均為常數 k，但是新圖形的 $\overline{PM}$ 、$\overline{P'M}$ (k 值)會隨著弦長而變動，所以他並不是一種蚶線，於是我們暫且將內分 A 點在圓內的圖形稱為”類蚶線”.

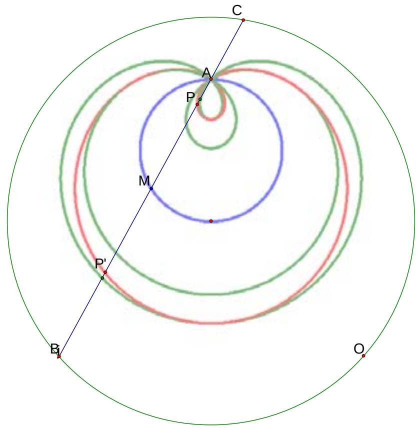
更為了精確的探討類酣線的圖形，我們對其 $\overline{PM}$ 、$\overline{P'M}$ 的 k 值加以討論:

首先令過 A 之弦長為 l，令圓 $O(x-a)^2+y^2=R^2$ 交弦於 B、C 兩點，M 為弦中點且 $\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$

$$\overline{PM}=\left|\overline{BM}-\overline{BP}\right|=\left|\frac{1}{2}l-\frac{\lambda l}{1+\lambda}\right|$$，則 l 最小值為 $2\sqrt{R^2-a^2}$ 最大值為 $2R$

得$\left|\frac{1}{2}-\frac{\lambda 1}{1+\lambda}\right|2\sqrt{R^2-a^2}\le \overline{PM}\le\left|\frac{1}{2}-\frac{\lambda 1}{1+\lambda}\right|2R$

右方為一張類蚶線與酣線的比較圖片，綠色線段為標準蚶線分別以 k=$\left|\frac{1}{2}-\frac{\lambda 1}{1+\lambda}\right|2\sqrt{R^2-a^2}$ 與 k=$\left|\frac{1}{2}-\frac{\lambda 1}{1+\lambda}\right|2R$ 製作出來的，而紅色線段則是類蚶線.



4、如何畫出〝類蚶線〞？

(作法)圓 C 上取定點 A，在$\overrightarrow{OA}$取一點 B，以圓 C 上動點以 M 為圓心，$\overline{BM}$ 為半徑，交$\overleftrightarrow{AM}$ 於 P,P' 兩點，P,P' 軌跡即為〝類蚶線〞.

因$\overline{PM}$介於$\overline{AB}$與 R(直徑)$-\overline{AB}$間，推測為 k 之最大.最小值，即$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\lambda}\right)2R$ 與 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\lambda}\right)2\sqrt{R^2-a^2}$. 我們設法求出 R,λ 值，作出一圓，再以$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$和$\frac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\frac{1}{\lambda}$畫出$P'',P'''$之軌跡，檢驗是否與$P,P'$軌跡重合.

(1)如何求 R 值？

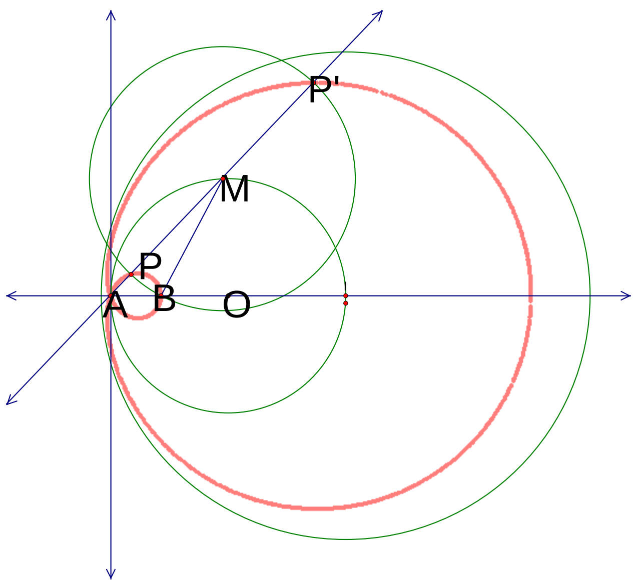
$\overline{AB}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)2\sqrt{R^2-a^2}=A$，$\overline{BC}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)2R=B$

$A+B=a$，$A:B=\sqrt{R^2-a^2}:R$，$AR=B\sqrt{R^2-A^2}$

$A^2R^2=B^2\left(R^2-a^2\right)=B^2R^2-B^2\left(A+B\right)^2$，

$\left(A-B\right)R^2=-B^2\left(A+B\right)$

則$R=\sqrt{B^2\frac{B+A}{B-A}}$.



(2)如何求λ值？

$A+B=a$, $2\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\left(\sqrt{R^2-a^2}+R\right)=a$

$1+\frac{2\lambda}{1+\lambda}=1+\frac{2\lambda}{1+\lambda}=\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}+R}$，$\frac{2\lambda}{1+\lambda}=\frac{a-\sqrt{R^2-a^2}-R}{\sqrt{R^2-a^2}+R}$則$\lambda=\frac{a-\sqrt{R^2-a^2}-R}{3\left(\sqrt{R^2-a^2}+R\right)-a}$.

5、‶類蚶線″的方程式

(1)設圓O$:x^2+y^2=R^2$，令過$A(a,0)$之一弦L交圓於B,C兩點$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$，

設$B\left(R\cos\theta,R\sin\theta\right)$，$C\left(R\cos\phi,R\sin\phi\right)$，又$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$，則

$$P=\frac{B+C\lambda}{1+\lambda}=\left(\frac{R\cos\theta+R\cos\phi\lambda}{1+\lambda},\frac{R\sin\theta+R\sin\phi\lambda}{1+\lambda}\right)$$

$$r^2=x^2+y^2=\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2\left[R^2+R^2\lambda^2+2R^2\lambda\cos\left(\theta-\phi\right)\right]=\left(\frac{R}{1+\lambda}\right)^2\left[1+\lambda^2+2\lambda\cos\left(\theta-\phi\right)\right]$$

又因A、B、C共線，斜率相同

$$\Rightarrow\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta-a},\frac{R\sin\phi}{R\cos\phi-a}\Rightarrow R\sin\theta\cos\phi-a\sin\theta=R\sin\phi\cos\theta-a\sin\phi$$

$$\Rightarrow R\sin\left(\theta-\phi\right)=a\left(\sin\theta-\sin\phi\right)\Rightarrow\frac{a}{R}=\frac{\sin\left(\theta-\phi\right)}{\sin\theta-\sin\phi}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)}$$

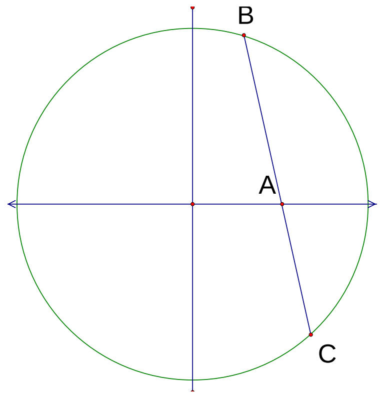
$\therefore\theta$和ϕ必須滿足$\dfrac{\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)}=\dfrac{a}{R}$

(2)若$\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}$，則方程式爲$r^2=x^2+y^2$

$$=\left(\frac{R}{1+\frac{1}{\lambda}}\right)^2\left[1+(\frac{1}{\lambda})^2+2\cdot\frac{1}{\lambda}\cos\left(\theta-\phi\right)\right]$$

$$=\left(R\lambda\right)^2\left[1\cdot\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}\cdot\lambda^2+2\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda^2\cos\left(\theta-\phi\right)\right](\frac{1}{\lambda})^2$$

$$=\left(\frac{R}{1+\lambda}\right)^2\left[1+\lambda^2+2\lambda\cos\left(\theta-\phi\right)\right]$$

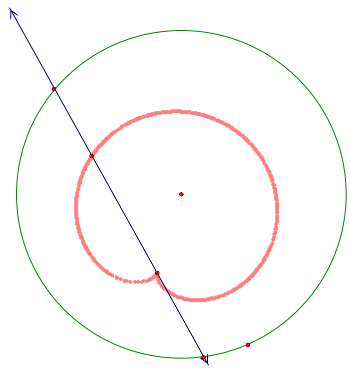


和$\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\lambda$軌跡方程式相同，所以$P$和$P'$　兩點恰畫出一”類蚶線”．

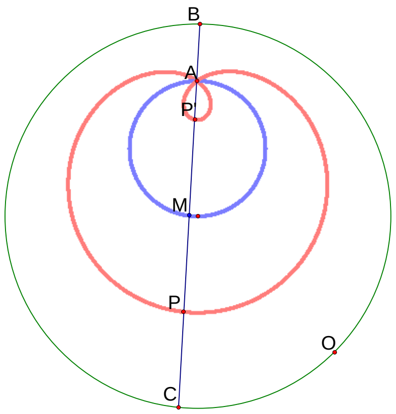
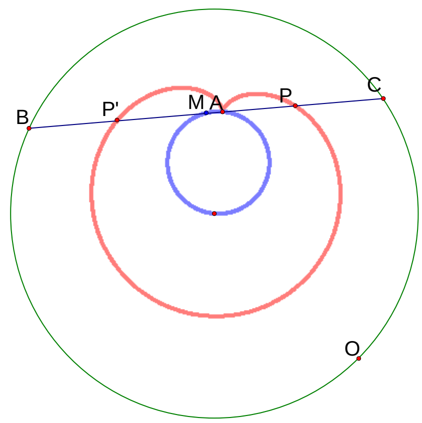
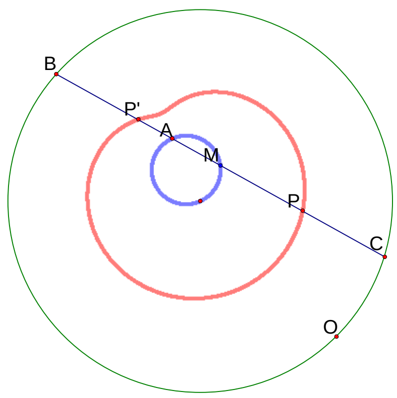
(3)特殊情形：若A點在圓O上，則A爲過A所有弦上一端點，因此$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$和$\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}$的$P$

和P'　軌跡分別爲$\left(x-\dfrac{\lambda R}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{R}{1+\lambda}\right)^2$和$\left(x-\dfrac{R}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{\lambda R}{1+\lambda}\right)^2$，所以爲兩個圓.

(4) “類心臟線” ：蚶線方程式 $r = 2a\cos\theta + k$，當 $a = k$ 時，為一心臟線. 在”類蚶線”中，若 $\overline{OA} = \left|\dfrac{(\lambda-1)R}{(\lambda+1)}\right|$，則形成一”類心臟線”．因為過 A 所有弦中，以直徑最長，設 $\overleftrightarrow{OA}$ 交圓於 B, C 兩點，滿足 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \lambda$ 時，即 $\overline{OA} = \left|\overline{AB} - \overline{OB}\right| = \left|\dfrac{R\lambda}{1+\lambda} - 2R\right| = \left|\dfrac{(\lambda-1)R}{\lambda+1}\right|$，形成一”類心臟線”(如右圖).



(5)同蚶線對於影響圖形變化的值做比較:

$\overline{OA} > \left\|\dfrac{(\lambda-1)R}{(\lambda+1)}\right\|$	$\overline{OA} = \left\|\dfrac{(\lambda-1)R}{(\lambda+1)}\right\|$	$\overline{OA} < \left\|\dfrac{(\lambda-1)R}{(\lambda+1)}\right\|$
		

在這比較過程中，我們發現影響圖形的 $\overline{OA}$ 值(基圓)，並非蚶線中的 k 值，這也是蚶線和新圖形的差異之一.

(二) 我們接著對外比的問題作延伸討論:

畫出來圖形極為特殊，並沒有看過類似的圖形與關係，於是直接著手求它的方程式.

1、求外分比圖形的軌跡

(1)設圓O : $x^2 + y^2 = R^2$，令過 $A(a,0)$ 之一弦 L 交圓於 B,C 兩點 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \lambda$，且滿足 A、B、C 三點共線之條件

設 $B\left(R\cos\theta, R\sin\theta\right)$，$C\left(R\cos\phi, R\sin\phi\right)$，又 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \lambda$，則

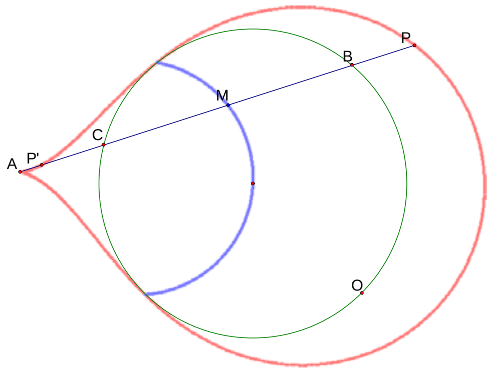
$$P = \frac{B - C\lambda}{1-\lambda} = \left(\frac{R\cos\theta - R\cos\phi\lambda}{1-\lambda}, \frac{R\sin\theta - R\sin\phi\lambda}{1-\lambda}\right)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 \left[R^2 + R^2\lambda^2 - 2R^2\lambda\cos\left(\theta-\phi\right)\right] = \left(\frac{R}{1-\lambda}\right)^2 \left[1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\left(\theta-\phi\right)\right].$$

(2) 若 $\frac{\overline{CP'}}{\overline{BP'}}=\frac{1}{\lambda}$, 則方程式的推導如類蚶線, 所以 P' 與 P 會恰構成一圖形.

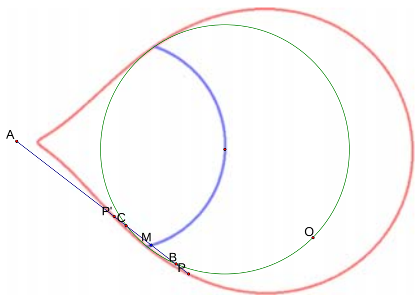
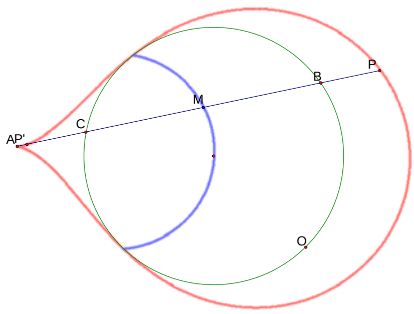
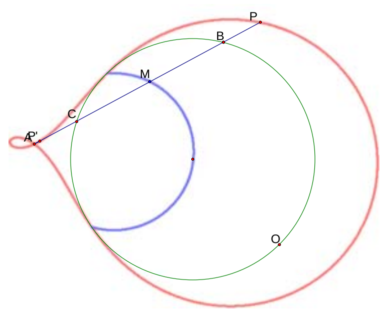
(3) 特殊情形: 若 A 點在圓 O 上, 則 A 爲過 A 所有弦上一端點, 因此 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\lambda$ 和 $\frac{\overline{CP'}}{\overline{BP'}}=\frac{1}{\lambda}$ 的 P 和 P' 軌跡分別爲 $\left(x-\frac{\lambda R}{\lambda-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{\lambda-1}\right)^2$ 和 $\left(x-\frac{R}{1-\lambda}\right)^2+y^2=\left(\frac{\lambda R}{1-\lambda}\right)^2$, 所以爲兩個圓形.

(4)” 水滴線”



在前 *GSP* 製圖發現 A 點在外, 外分形成的某一個圖型, 會與通過 A 點, 圖形十分相似水滴, 我們命名爲” 水滴線” 若 $\overline{OA}=\left|\frac{(\lambda+1)R}{(\lambda-1)}\right|$, 則形成一” 水滴線” . 因爲過 A 所有弦中, 以直徑最長, 設 $\overleftrightarrow{OA}$ 交圓於 B, C 兩點, 滿足 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\lambda$ 時, 即 $\overline{OA}=\left|\overline{AB}-\overline{OB}\right|=\left|R-\frac{\lambda R}{1+\lambda}\right|=\left|\frac{(\lambda+1)R}{(\lambda-1)}\right|$, 形成一” 水滴線” (如右圖).

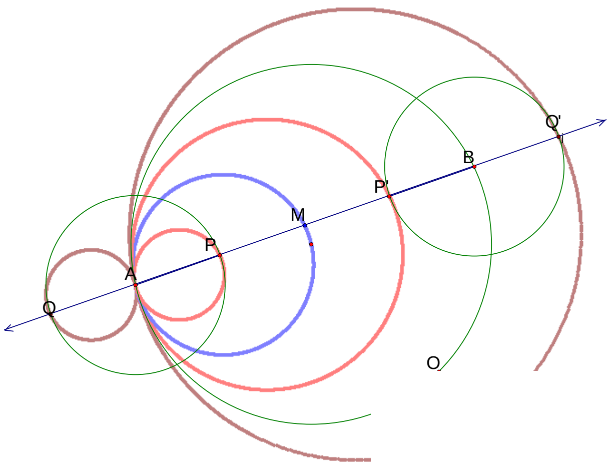
(5)同蚶線對影響圖形變化的值做比較:

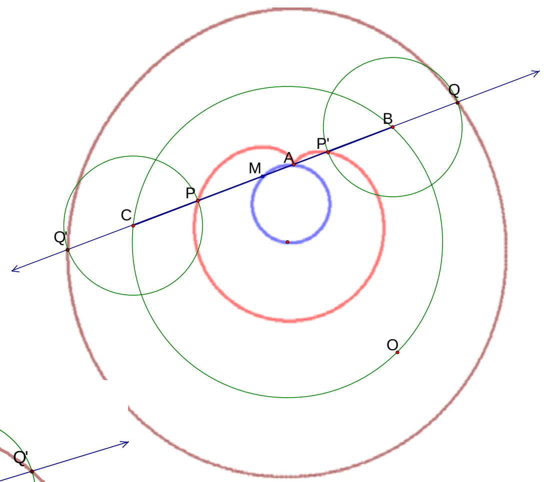
$\overline{OA}>\left\|\frac{(\lambda+1)R}{(\lambda-1)}\right\|$	$\overline{OA}=\left\|\frac{(\lambda+1)R}{(\lambda-1)}\right\|$	$\overline{OA}<\left\|\frac{(\lambda+1)R}{(\lambda-1)}\right\|$
		

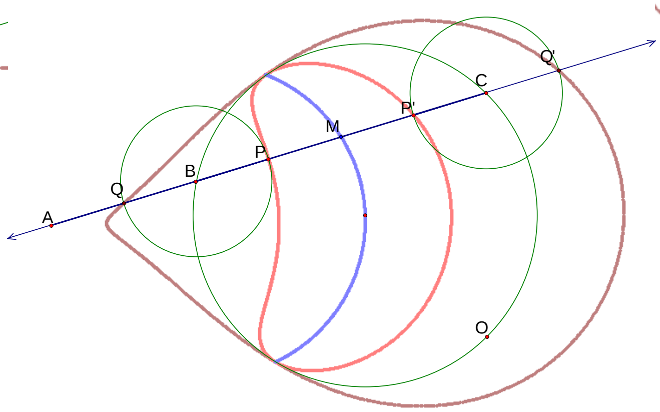
影響此圖形變化之值 $\overline{OA}$ 不再是標準圓與酣線中的 k 值, 這已經和蚶線差異甚遠.

(三)將兩新圖形做連結

在前者我們發現與蚶線有極大的關連，但蚶線是由標準圓出發製作出來的圖形，我們製作新圖形的過程中，需要不斷的用到一個圓，於是我們從另一個角度切入，在內分圖形中的 B 點與 P' 點的距離作半徑，以 B 爲圓心，作新的一圓 C 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於另一點 Q，以同樣方法,以 C 爲圓心,做出新的一點 Q 觀察 Q' 的圖形，我們有了新的發現.







1、我們推導下列的關係:

$\overline{CQ}=\overline{CP'}+2\overline{BP'}$ ，$\overline{BQ}=\overline{BP'}$

$\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{CP'}+2\overline{BP'}}{\overline{BP'}}=\lambda+2$ 代表外分比比例固定

我們發現 A 在圓上時，內分比與外分比所形成較小的兩個圓大小相等，於是將 A 點在圓上外分比公式之 λ 以 $\lambda'+2$ 代入

$$\left(x-\frac{\lambda R}{\lambda-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{\lambda-1}\right)^2 \text{和} \left(x-\frac{R}{1-\lambda}\right)^2+y^2=\left(\frac{\lambda R}{1-\lambda}\right)^2$$

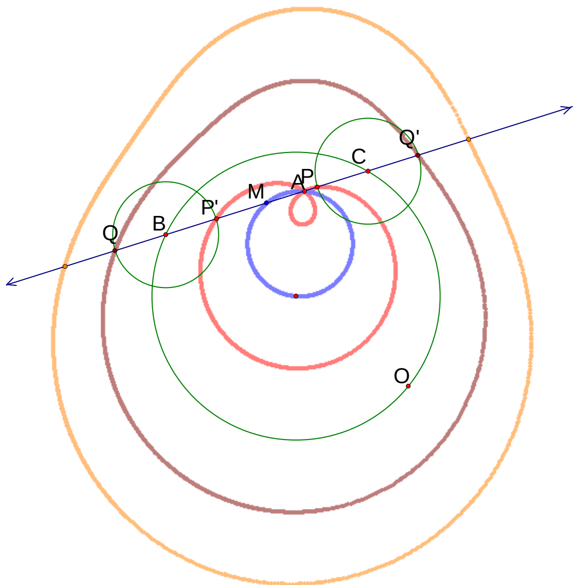
λ 以 $\lambda'+2$ 代入 $\Rightarrow \left(x-\dfrac{(\lambda'+2)R}{\lambda'+1}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{R}{\lambda'+1}\right)^2$ 和 $\left(x+\dfrac{R}{\lambda'+1}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{(\lambda'+2)R}{-\lambda'-1}\right)^2$

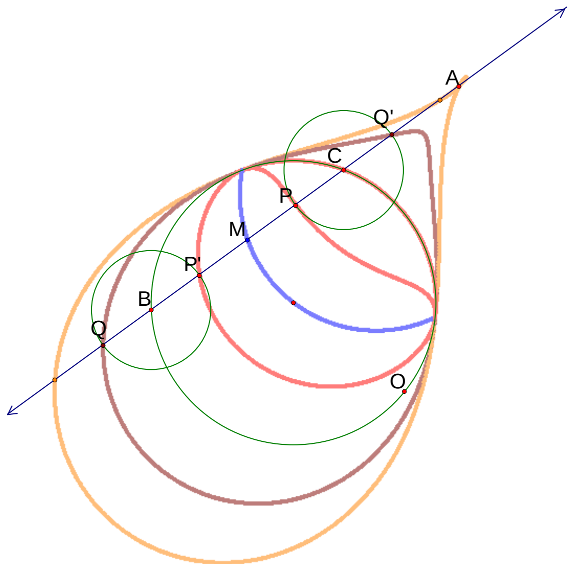
比較 A 點在圓上內分比公式:

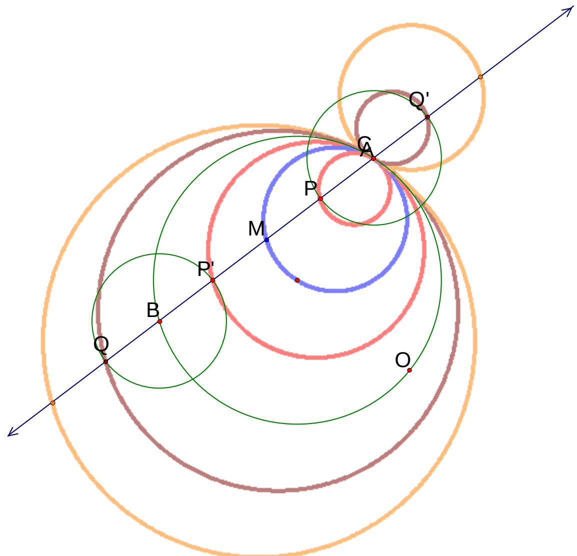
$$\left(x-\frac{\lambda R}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{1+\lambda}\right)^2 \text{和} \left(x-\frac{R}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\left(\frac{\lambda R}{1+\lambda}\right)^2$$

可以發現較小的兩個圓圓心位置改變，半徑不變.

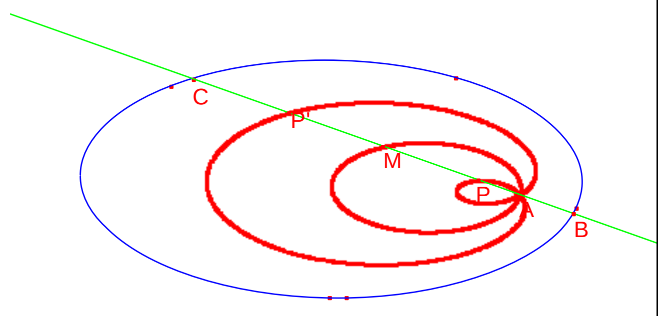
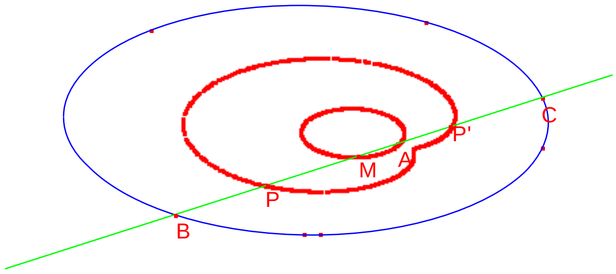
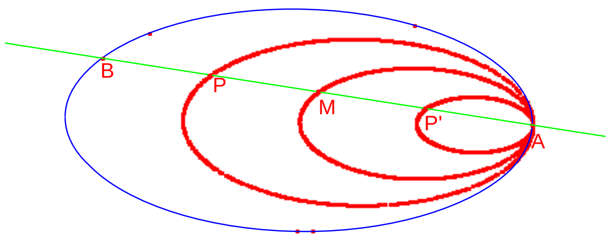
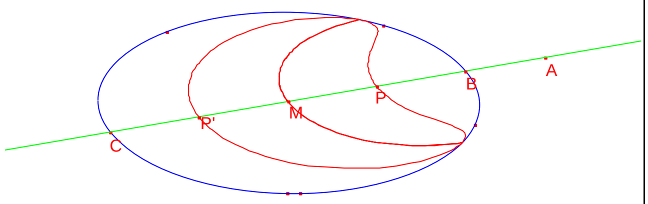
2、我們又將外分比定爲 λ ,放入上方製圖，可以得到以下的圖形，橘色線段爲外分比爲 λ 所構成之軌跡、褐色線段爲外分比爲 $\lambda+2$ 所構成之軌跡、紅色線段爲內分比爲 λ 構成之軌跡

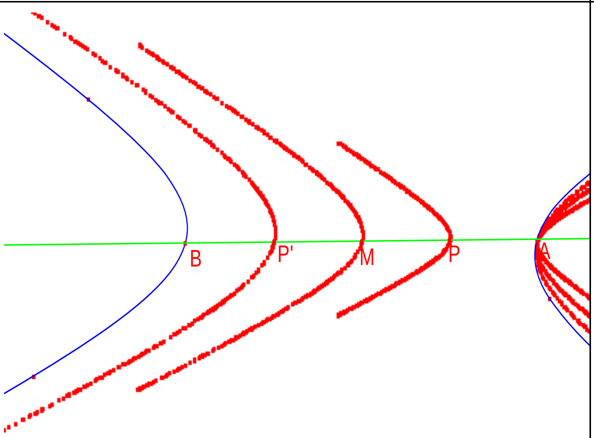
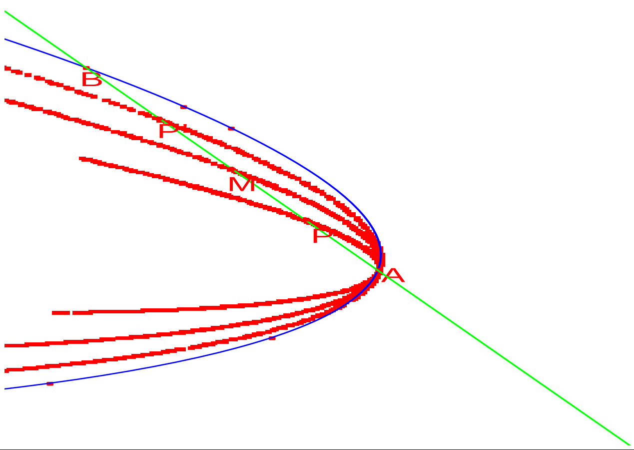


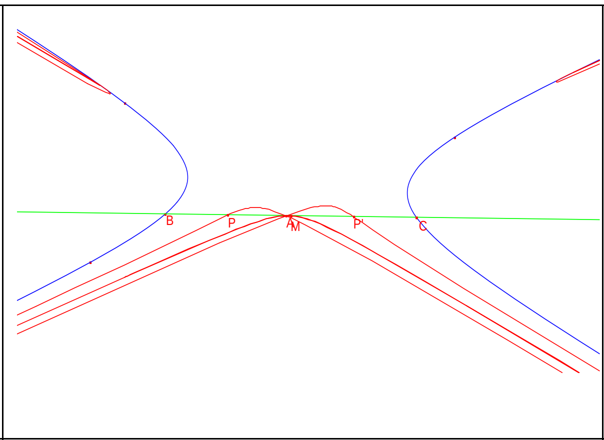
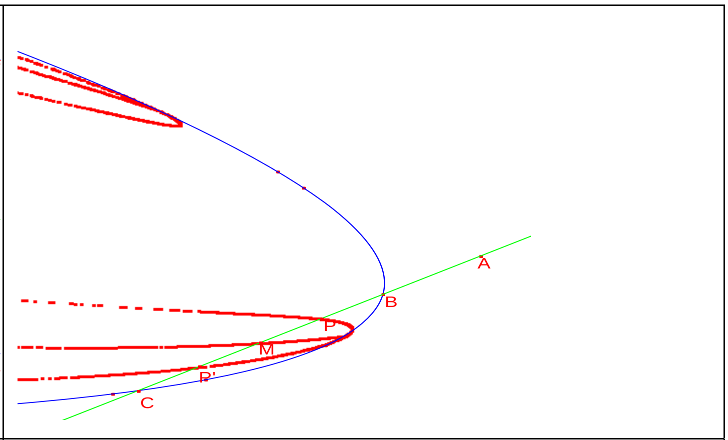
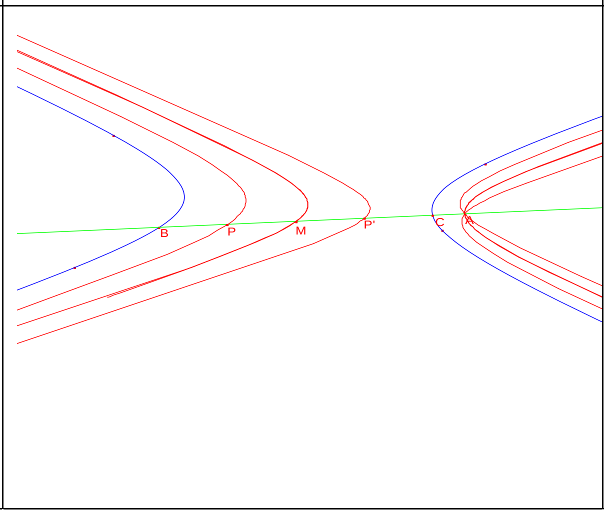
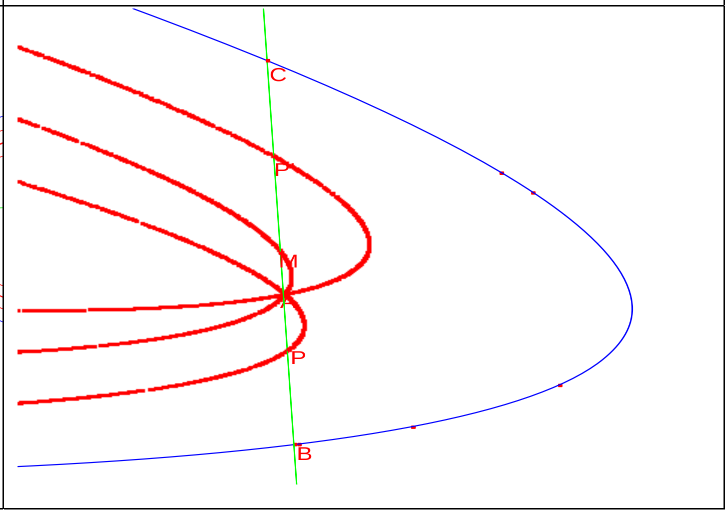




(四)將問題推廣至圓錐曲線

<table>
<tr><td colspan="2">A 點在橢圓內</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A 點在橢圓上</td><td>A 點在橢圓外</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>雙曲線</td><td>拋物線</td></tr>
<tr><td>A
點
在
圓
錐
曲
線
上</td><td></td><td></td></tr>
</table>

A 點在圓錐曲線外		
A 點在圓錐曲線內		

1、內分比的討論

(1)設拋物線$\Gamma: y^2=4cx$，在平面上任取一點 A，過 A 作一直線交拋物線Γ於 B、C兩點，在 $\overline{BC}$ 上取一點 P與 P' 滿足條件$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$與$\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}$，探討此時 P點與 P' 點構成的軌跡.

[求法]

$$\begin{cases}(y-b)=m(x-a)\\ y^2=4cx\end{cases}$$

將 $x=\dfrac{y-b+ma}{m}$ 代入 $y^2=4c\left(\dfrac{y-b+ma}{m}\right)$

得 $y=\dfrac{2c\pm2\sqrt{c^2-m(cb-acm)}}{m}$

又$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$，所以 $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\dfrac{2c}{m}+\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\dfrac{2\sqrt{c^2-m(cb-acm)}}{m}$

$$(my-2c)^2=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\cdot4\cdot\left(c^2-cbm+acm^2\right)$$

將 $m=\dfrac{y-b}{x-a}$ 代入，整理得

$$\left[y^2-by-2c(x-a)\right]^2=4\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\left[(x-a)^2c^2-cb(y-b)(x-a)+ac(y-b)^2\right]$$

特例：若 $\lambda=1$，即過點 A 所有弦中點的軌跡爲 $\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=2c\left(x-a+\dfrac{b^2}{8c}\right)$，仍爲一抛物線.

(2)設橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，在平面上任取一點 A，過 A 作一直線交橢圓 Γ 於 B、C 兩點，在 $\overline{BC}$ 上取一點 P 與 P' 滿足條件 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$ 與 $\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}$，探討此時 P 點與 P' 點構成的軌跡.

[求法]

先求出 B, C 兩點 $\begin{cases}(y-t)=m(x-s)\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，經過整理得

$$\left(b^2+a^2m^2\right)x^2+2a^2m(t-ms)x+a^2(t-ms)^2-a^2b^2=0$$

令 $A=b^2+a^2m^2$，$B=2a^2m(t-ms)$，$C=a^2(t-ms)^2-a^2b^2$

得 $x_1=\dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$，$x_1=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

因 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$，故 P 點 x 座標 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\dfrac{-B}{2A}+\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\dfrac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

所以軌跡方程式爲 $\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2=\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\dfrac{B^2-4AC}{4A^2}$.

特例：若 $\lambda=1$，即過點 A 所有弦中點的軌跡爲

因 $\lambda=1$，所以 $x+\dfrac{B}{2A}=0$，

$$2\left(b^2+a^2m^2\right)x+2a^2m(t-ms)=0$$

代入 $m=\dfrac{y-t}{x-s}$，得 $2\left[b^2+a^2\left(\dfrac{y-t}{x-s}\right)^2\right]x+2a^2\left(\dfrac{y-t}{x-s}\right)\left[t-\left(\dfrac{y-t}{x-s}\right)s\right]=0$

整理爲$b^2(x-\frac{s}{2})^2+a^2(y-\frac{t}{2})^2=\frac{b^2s^2+a^2t^2}{4}$，所以得到圖形亦爲一橢圓，而新橢圓的中心爲原橢圓中心與 A 點的中點.

(3)設雙曲線$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，在平面上任取一點 A，過 A 作一直線交雙曲線Γ於 B、C兩點，在$\overline{BC}$上取一點 P與 P' 滿足條件$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$與$\frac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\frac{1}{\lambda}$，探討此時 P點與 P' 點構成的軌跡.

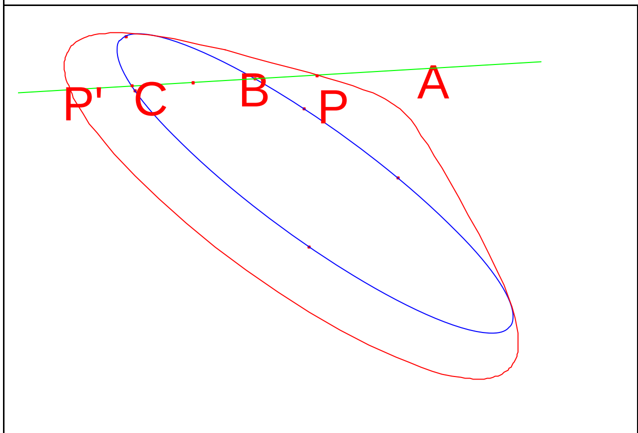
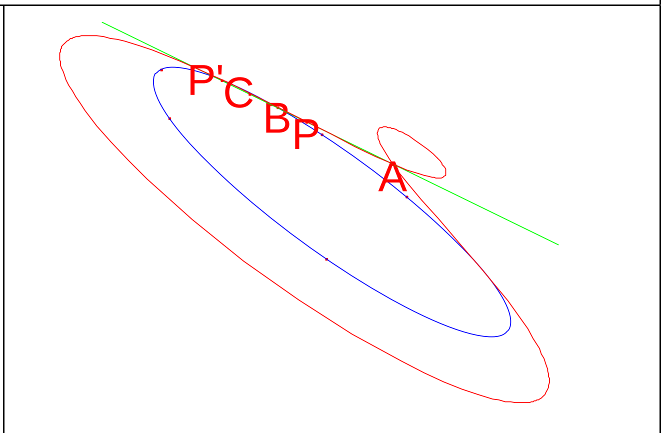
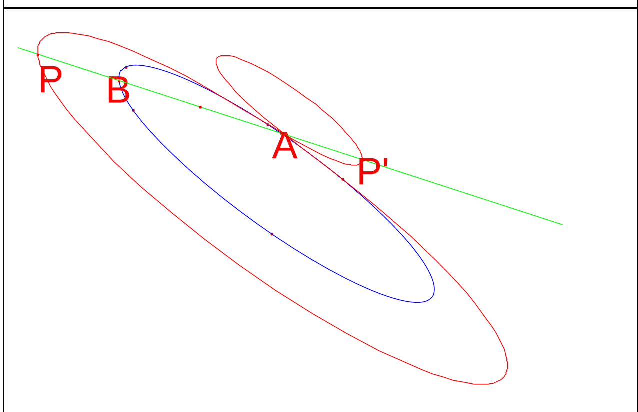
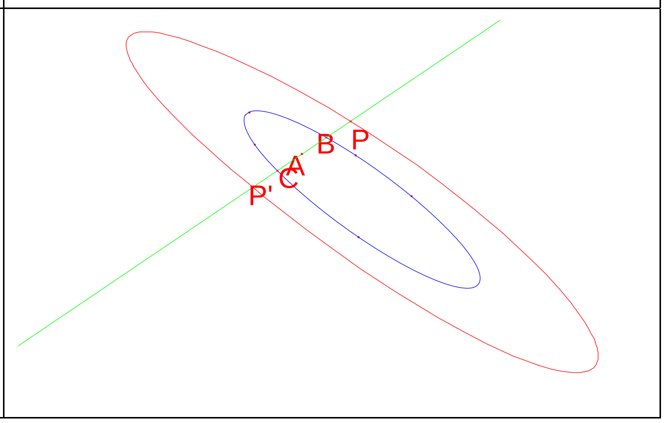
[求法] 仿照橢圓的作法

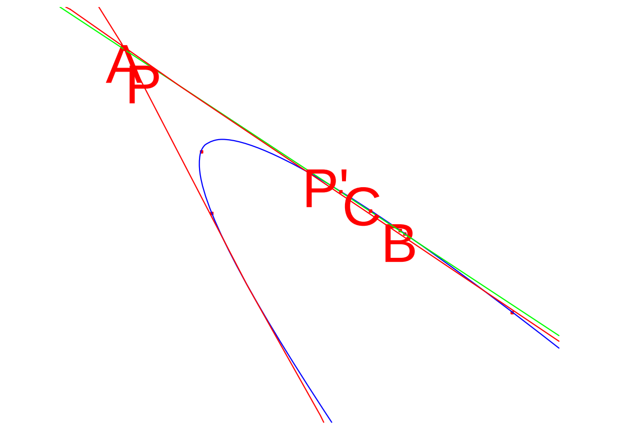
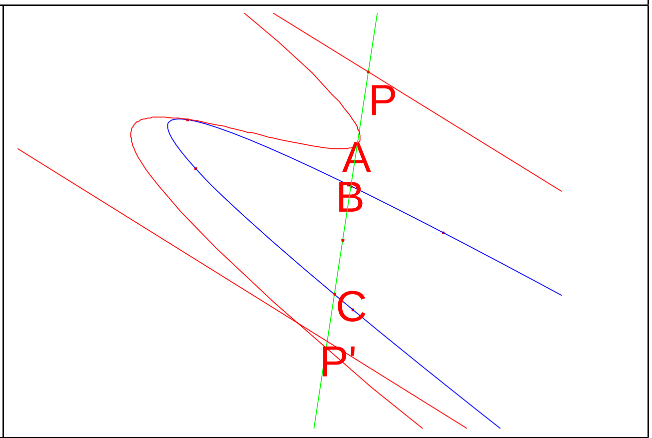
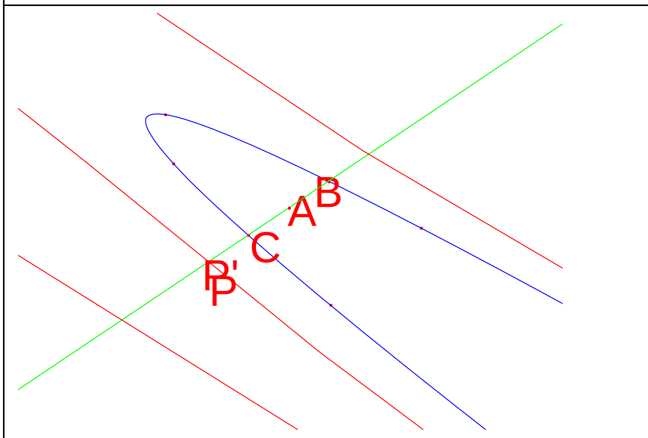
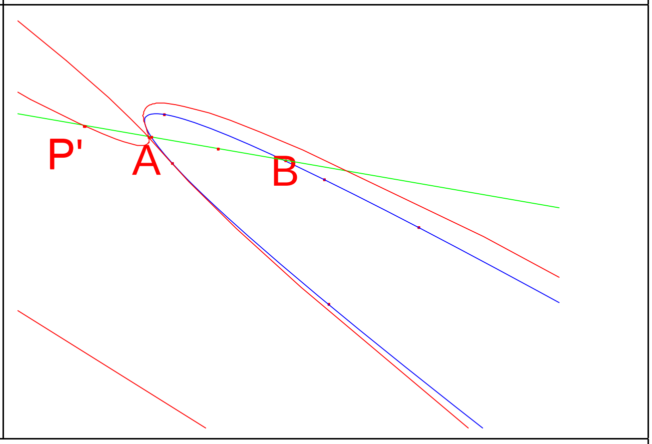
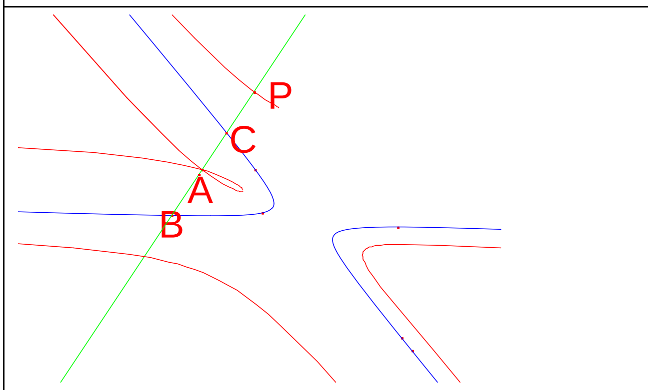
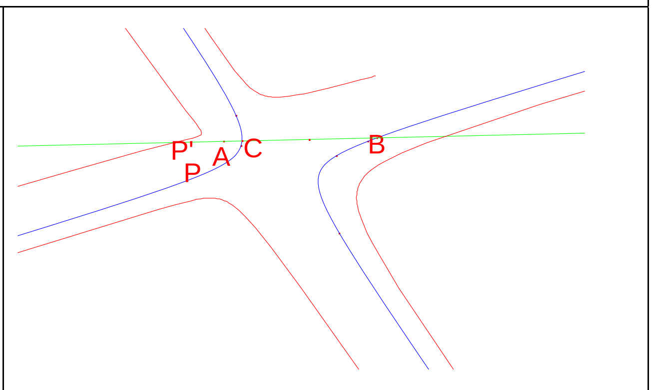
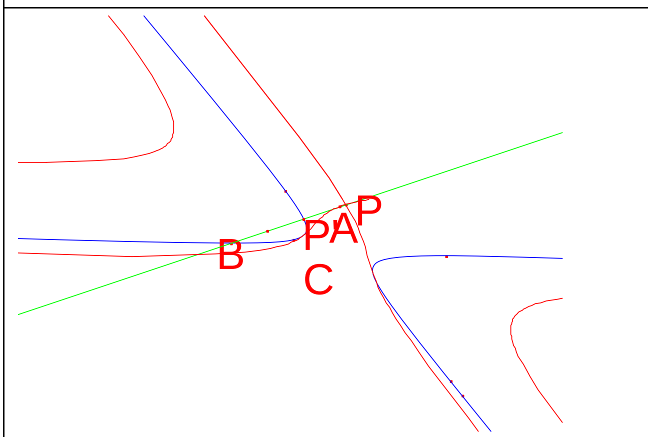
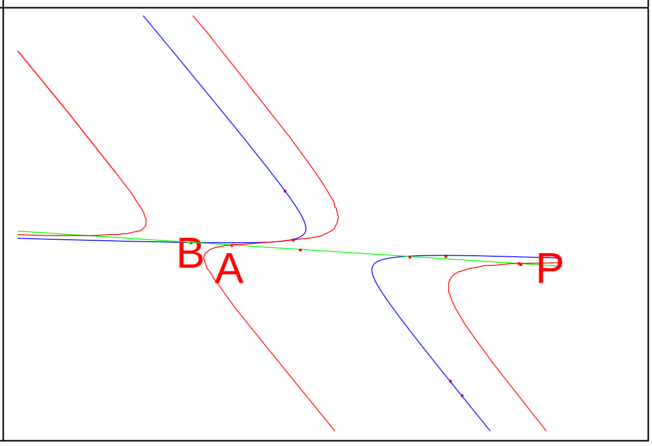
$\begin{cases}(y-t)=m(x-s)\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 得軌跡方程式爲$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\frac{B^2-4AC}{4A^2}$

其中 $A=b^2-a^2m^2$，$B=2a^2m(ms-t)$，$C=-a^2(t-ms)^2-a^2b^2$.

特例：若$\lambda=1$，即過點 A 所有弦中點的軌跡爲$b^2(x-\frac{s}{2})^2-a^2(y-\frac{t}{2})^2=\frac{b^2s^2+a^2t^2}{4}$，亦爲一雙曲線(開口不變).

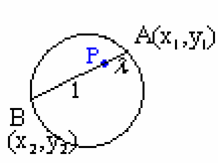
2、當比比例爲外分比時得以下圖形，但其方程式與性質位能精確的掌握

<table>
<tr><td colspan="2">A點在橢圓形外</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A點在橢圓上</td><td>A點在橢圓內</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">A點在拋物線外</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A點在拋物線內</td><td>A點在拋物線上</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">A點在雙曲線內</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A點在雙曲線外</td><td>A點在雙曲線上</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

二、平行弦定比例下的軌跡圖形

（一)圓 O 上斜率爲 m 之平行弦，交圓 O 於 A,B 兩點，滿足 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$（$\lambda>0$）之 P 點軌跡.



[方法一]

設 $\begin{cases}\text{圓O}: x^2+y^2=r^2\\ \text{平行弦}\overleftrightarrow{AB}: y=mx+k\end{cases}$ 解得

$$\left(1+m^2\right)x^2+2mkx+k^2-r^2\Rightarrow x_1=\frac{-2mk+\sqrt{4m^2k^2-4\left(1+m^2\right)\left(k^2-r^2\right)}}{2\left(1+m^2\right)}$$

$$=\frac{-mk+\sqrt{m^2k^2-k^2+r^2-m^2k^2+m^2r^2}}{\left(1+m^2\right)}$$

$$=\frac{-mk+\sqrt{m^2r^2+r^2-k^2}}{\left(1+m^2\right)}$$

$$x_2=\frac{-mk-\sqrt{m^2r^2+r^2-k^2}}{\left(1+m^2\right)}$$

1. 內分比

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-mk}{1+m^2}+\frac{1-\lambda}{\left(1+m^2\right)\left(1+\lambda\right)}\sqrt{m^2r^2+r^2-k^2}$$

將 $k=y-mx$ 代入

$$x=\frac{-mk}{1+m^2}+\frac{1-\lambda}{\left(1+m^2\right)\left(1+\lambda\right)}\sqrt{m^2r^2+r^2-k^2}$$

$$x+\frac{m\left(y-mx\right)}{1+m^2}=\frac{1-\lambda}{\left(1+m^2\right)\left(1+\lambda\right)}\sqrt{m^2r^2+r^2-\left(y-mx\right)^2}$$

$$\frac{1}{1+m^2}\left(x+my\right)=\frac{1-\lambda}{\left(1+m^2\right)\left(1+\lambda\right)}\sqrt{m^2r^2+r^2-\left(y-mx\right)^2}$$

$$\left(x+my\right)^2=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\left[m^2r^2+r^2-\left(y-mx\right)^2\right]$$

令$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 = A$

$$x^2+2mxy+m^2y^2 = A\left(m^2r^2+r^2-y^2+2mxy-m^2x^2\right)$$

$$\underbrace{\left(1+Am^2\right)}_{a}x^2+\underbrace{2m\left(1-A\right)}_{b}xy+\underbrace{\left(m^2+A\right)}_{c}y^2-\left(1+m^2\right)Ar^2=0$$

> 特例：當$\lambda=1$時，軌跡方程式爲$x+my=0$.

(定理)判斷二次曲線$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$			
判別式	類型	非退化錐線	退化錐線
$b^2-4ac<0$	橢圓型	橢圓或圓	一點或φ
$b^2-4ac>0$	雙曲線型	雙曲線	兩條相交直線
$b^2-4ac=0$	拋物線型	拋物線	兩條平行線或兩條重和直線或

檢查b^2-4ac,

$$4\left[m^2\left(1-A\right)^2-\left(1+Am^2\right)\left(m^2+A\right)\right] = 4\left[\left(m^2-2m^2A+m^2A^2\right)-\left(m^2+A+Am^4+A^2m^2\right)\right]$$

$=-4A\left(2m^2+1+m^4\right)<0$　，所以爲橢圓型.

又設$f(x)=(\frac{1-x}{1+x})^2$，則$f(\lambda)=f(\frac{1}{\lambda})=A$，故$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$和$\frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}}=\frac{1}{\lambda}$之$P,P'$補足一橢圓.

2. 外分比

$$x=\frac{\lambda x_2-x_1}{\lambda-1}=\frac{-mk}{1+m^2}+\frac{-\left(1+\lambda\right)}{\left(1+m^2\right)\left(\lambda-1\right)}\sqrt{m^2r^2+r^2-k^2}$$

將$k=y-mx$代入

$$x+\frac{m\left(y-mx\right)}{1+m^2}=\frac{-\left(1+\lambda\right)}{\left(1+m^2\right)\left(\lambda-1\right)}\sqrt{m^2r^2+r^2-\left(y-mx\right)^2}$$

$$\frac{1}{1+m^2}\left(x+my\right)=\frac{-\left(1+\lambda\right)}{\left(1+m^2\right)\left(\lambda-1\right)}\sqrt{m^2r^2+r^2-\left(y-mx\right)^2}$$

$$\left(x+my\right)^2=\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\left[m^2r^2+r^2-\left(y-mx\right)^2\right]$$

令$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2=A$

$$x^2+2mxy+m^2y^2=A\left(m^2r^2+r^2-y^2+2mxy-m^2x^2\right)$$

$$\underbrace{\left(1+Am^2\right)}_{a}x^2+\underbrace{2m\left(1-A\right)}_{b}xy+\underbrace{\left(m^2+A\right)}_{c}y^2-\left(1+m^2\right)Ar^2=0$$

檢查b^2-4ac,

$$4\left[m^2\left(1-A\right)^2-\left(1+Am^2\right)\left(m^2+A\right)\right]=4\left[\left(m^2-2m^2A+m^2A^2\right)-\left(m^2+A+Am^4+A^2m^2\right)\right]$$

$=-4A\left(2m^2+1+m^4\right)<0$ 爲橢圓型.

又設$f(x)=(\frac{1+x}{1-x})^2$, 則$f(\lambda)=f(\frac{1}{\lambda})=A$, 故$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$和$\frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}}=\frac{1}{\lambda}$之$P,P'$補足一橢圓.

我們發現, 對A,B作內分比與外分比的P點軌跡方程式, 除A值互爲倒數外, 其餘皆相同, 不影響圖形的判別, 因此會得到相同的圖形.

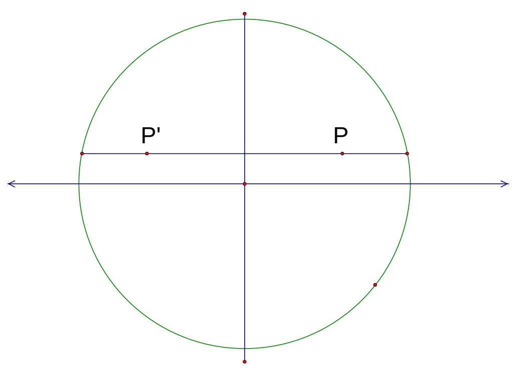
[方法二]

我們嘗試用旋轉的概念來解決, 先解決斜率爲 0 的平行弦, 再旋轉至斜率爲$m=\tan\theta$.

第一步：設圓$C:x^2+y^2=r^2$, $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $P'(-r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$和$\frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}}=\frac{1}{\lambda}$

$$\Rightarrow\Gamma:\begin{cases}x=\dfrac{rcos\theta-\lambda rcos\theta}{1+\lambda}=\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)rcos\theta\\ y=rsin\theta\end{cases}$$



斜率爲 0 的平行弦按定比例下軌跡爲一橢圓Γ方程式$\Rightarrow\Gamma:\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2x^2+y^2=r^2$.

第二步：對圓作旋轉, 平行弦斜率爲$m=\tan\theta$

視爲橢圓旋轉$-\theta$,

$$\begin{cases} x = x'cos(-\theta) - y'sin(-\theta) = x'cos\theta + y'sin\theta \\ y = x'sin(-\theta) + y'cos(-\theta) = -x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases}$$代入Γ

$$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 (x'cos\theta + y'sin\theta)^2 + (-x'sin\theta + y'cos\theta)^2 = r^2$$

令$A = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$,同乘$A$

$$\Rightarrow (x'cos\theta + y'sin\theta)^2 + A(-x'sin\theta + y'cos\theta)^2 = Ar^2$$

$$\Rightarrow x'^2cos^2\theta + 2x'y'cos\theta sin\theta + y'^2sin^2\theta + Ax'^2sin^2\theta - 2Ax'y'cos\theta sin\theta + Ay'^2cos^2\theta = Ar^2$$

$$\Rightarrow (cos^2\theta + Asin^2\theta)x'^2 + 2cos\theta sin\theta(1-A)x'y' + (sin^2\theta + Acos^2\theta)y'^2 = Ar^2$$

同除$cos^2\theta$ $\because m = tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (1+Am^2)x'^2 + 2m(1-A)x'y' + (m^2+A)y'^2 &= \frac{Ar^2}{cos^2\theta} \\ &= Ar^2sec^2\theta \\ &= Ar^2(1+tan^2\theta) \\ &= Ar^2(1+m^2)\end{aligned}$$

長軸所在直線方程式$\Rightarrow y = -\frac{1}{m}x$

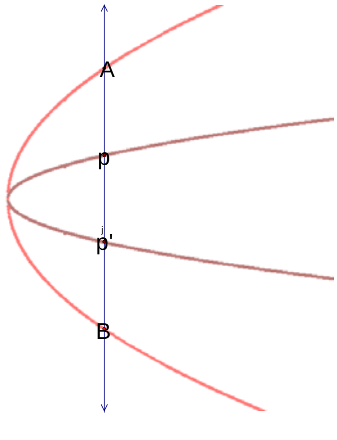
短軸所在直線方程式$\Rightarrow y = mx$

橢圓旋轉仍爲橢圓：1.中心在原點　2.長軸長爲 $2r$，短軸長爲 $2r\left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|$

3.和圓相切於$\left(-\frac{rm}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{r}{\sqrt{m^2+1}}\right)$或$\left(\frac{rm}{\sqrt{m^2+1}}, -\frac{r}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

（二）拋物線Γ上斜率爲m之平行弦，交拋物線Γ於A,B兩點

滿足$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \lambda\,(\lambda>0)$之$P$點軌跡？



設$\begin{cases} y^2 = 4cx \\ y = mx + k \Rightarrow x = \frac{1}{m}(y-k) \end{cases}$，解聯立：

$$y^2 = 4c \cdot \frac{1}{m}(y-k)$$

$$\Rightarrow y^2 - \frac{4c}{m}y + \frac{4ck}{m} = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\frac{4c}{m} + \frac{4\sqrt{c^2 - cmk}}{m}}{2}$$

$$= \frac{2}{m}(c + \sqrt{c^2 - cmk})$$

$$y_2 = \frac{2}{m}(c - \sqrt{c^2 - cmk})$$

1.內分比

$$\therefore y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$= \frac{1}{1+\lambda} \cdot \frac{2(c + \sqrt{c^2 - cmk})}{m} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{2(c - \sqrt{c^2 - cmk})}{m}$$

↓ ↓

$$\frac{2c}{(1+\lambda)m} + \frac{2\sqrt{c^2 - cmk}}{(1+\lambda)m} \qquad \frac{2c\lambda}{(1+\lambda)m} + \frac{2\lambda\sqrt{c^2 - cmk}}{(1+\lambda)m}$$

$$= \frac{2c}{m} + \frac{2\sqrt{c^2 - cmk}(1-\lambda)}{(1+\lambda)m}$$

特例：當 $\lambda = 1$ 時，軌跡方程式為 $y = \frac{2c}{m}$，即拋物線的徑.

將 $k = y - mx$ 代入

$$\Rightarrow y = \frac{2c}{m} + \frac{2(1-\lambda)}{m(1+\lambda)}\sqrt{c^2 - cm(y - mx)}$$

$$\Rightarrow m(1+\lambda)y = 2c(1+\lambda) + 2(1-\lambda)\sqrt{c^2 - cm(y-mx)}$$

$$\Rightarrow (1+\lambda)(my - 2c) = 2(1-\lambda)\sqrt{c^2 - cm(y-mx)}$$

$$\Rightarrow (1+\lambda)^2(m^2y^2 - 4cmy + 4c^2) = 4(1-\lambda)^2\left[c^2 - cm(y-mx)\right]$$

$$\Rightarrow m^2(1+\lambda)^2y^2 - 4(1+\lambda)^2cmy + 4(1+\lambda)^2c^2 - 4(1-\lambda)^2c^2 + 4(1-\lambda)^2cm(y-mx) = 0$$

$$\Rightarrow m^2(1+\lambda)^2y^2 - 4\left[(1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2\right]cmy + 4\left[(1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2\right]c^2 - 4cm^2(1-\lambda)^2x = 0$$

$$\Rightarrow m^2\left(1+\lambda\right)^2 y^2-16cm\lambda y+16c^2\lambda-4cm^2\left(1-\lambda\right)^2 x=0$$

$$\Rightarrow m^2(1+\lambda)^2\left[y-\frac{8c\lambda}{m\left(1+\lambda\right)^2}\right]^2=4cm^2\left(1-\lambda\right)^2\left[x-\frac{4c\lambda}{m^2\left(1-\lambda\right)^2}+\frac{16c\lambda^2}{m^2\left(1-\lambda\right)^2\left(1+\lambda\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow\left[y-\frac{8c\lambda}{m\left(1+\lambda\right)^2}\right]^2=4c\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\left\{x-\frac{4c\lambda\left[\left(1+\lambda\right)^2-4\lambda\right]}{m^2\left(1-\lambda\right)^2(1+\lambda)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow\left[y-\frac{8c\lambda}{m\left(1+\lambda\right)^2}\right]^2=4c\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\left[x-\frac{4c\lambda}{m^2\left(1+\lambda\right)^2}\right]$$

又 $f(x)=(\frac{1-x}{1+x})^2$　　$f(\lambda)=(\frac{1-\lambda}{1+\lambda})^2$　　$f(\frac{1}{\lambda})=(\frac{1-\frac{1}{\lambda}}{1+\frac{1}{\lambda}})^2=(\frac{1-\lambda}{1+\lambda})^2$

故兩相乘為 1 的數，其 P 點軌跡方程式相同（即 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$ 和 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{1}{\lambda}$ ），可補足一完整之拋物線，

其頂點為 $\left(\frac{4c\lambda}{m^2\left(1+\lambda\right)^2},\frac{8c\lambda}{m\left(1+\lambda\right)^2}\right)$ 焦距為 $c\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$ ．

為探討此拋物線關係，求出兩拋物線之交點：

$$\begin{cases}y^2=4cx\\ m^2\left(1+\lambda\right)^2 y^2-16cm\lambda y+16c^2\lambda-4m^2c\left(1-\lambda\right)^2 x=0\end{cases}$$

將 $x=\frac{y^2}{4c}$ 代入

$$\Rightarrow m^2\left(1+\lambda\right)^2 y^2-16cm\lambda y+16c^2\lambda-4m^2c\left(1-\lambda\right)^2\frac{y^2}{4c}=0$$

$$\Rightarrow m^2\left(1+\lambda\right)^2 y^2-16cm\lambda y+16c^2\lambda-m^2\left(1-\lambda\right)^2 y^2=0$$

$$\Rightarrow 4\lambda m^2y^2-16cm\lambda y+16c^2\lambda=0$$

檢查判別式 $D=b^2-4ac$，

$$\left(16\right)^2c^2m^2\lambda^2-4\left(4\lambda m^2\right)\left(16c^2\lambda\right)=0$$

$\Rightarrow$ $\because$ 判別式爲0，爲一有重根之二次方程式 $y=\dfrac{16cm\lambda}{8\lambda m^2}=\dfrac{2c}{m}, x=\dfrac{y^2}{4c}=\dfrac{c}{m^2}$,

故兩拋物線交於一點 $\left(\dfrac{c}{m^2}, \dfrac{2c}{m}\right)$

又 $\boxed{\text{定理：}m\neq 0\text{而與拋物線}y^2=4cx\text{相切的直線方程式爲}y=mx+\dfrac{c}{m}\text{，切點坐標爲}\left(\dfrac{c}{m^2}, \dfrac{2c}{m}\right)}$

因此，我們推知，拋物線 $y^2=4cx$ 與一斜率 m 之直線方程式相切，此切點同時爲此兩拋物線之交點.

2.外分比

P點座標爲 $\left(\dfrac{\lambda x_2-x_1}{\lambda-1}, \dfrac{\lambda y_2-y_1}{\lambda-1}\right)$，仿照上述方法，推得方程式爲

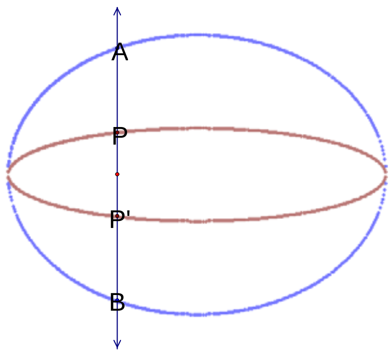
$$\left[y+\frac{8c\lambda}{m(1-\lambda)^2}\right]^2=4c\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\left[x+\frac{4c\lambda}{m^2(1-\lambda)^2}\right]$$

所以其頂點爲 $\left(\dfrac{-4c\lambda}{m^2(1-\lambda)^2}, \dfrac{-8c\lambda}{m(1-\lambda)^2}\right)$ 焦距爲 $c\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2$

$\boxed{\text{特例：當 }\lambda=1\text{時，軌跡方程式爲 }y=\dfrac{2c}{m}.}$

（三）橢圓 Γ 上斜率爲 m 之平行弦，交橢圓 Γ 於 A,B 兩點，

滿足 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$ （ $\lambda>0$ ）之 P點軌跡.



設 $\begin{cases}\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \text{平行弦 } y=mx+k\end{cases}$ 解得

$$b^2x^2+a^2(mx+k)^2=a^2b^2$$

$$\Rightarrow \left(b^2+a^2m^2\right)x^2+2ma^2kx+a^2\left(k^2-b^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-ma^2k + ab\sqrt{a^2m^2+b^2-k^2}}{a^2m^2+b^2} \\ x_2 = \dfrac{-ma^2k - ab\sqrt{a^2m^2+b^2-k^2}}{a^2m^2+b^2} \end{cases}$$

1.內分比

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-ma^2k}{b^2+a^2m^2} + \frac{ab\sqrt{b^2+a^2m^2-k^2}}{b^2+a^2m^2}$$

$$= \frac{-ma^2(y-mx)}{b^2+a^2m^2} + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\frac{ab\sqrt{b^2+a^2m^2-(y-mx)^2}}{b^2+a^2m^2}$$

$$\left[\left(b^2+a^2m^2\right)x + a^2m\left(y-mx\right)\right] = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)ab\sqrt{b^2+a^2m^2-(y-mx)^2}$$

$$(b^2x+a^2my) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)ab\sqrt{b^2+a^2m^2-(y-mx)^2}$$

$$b^4x^2+2a^2b^2mxy+a^4m^2y^2 = a^2b^2\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2\left(b^2+a^2m^2-y^2+2mxy-m^2x^2\right)$$

令$\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 = A$

$$\underbrace{b^2\left(b^2+a^2m^2A\right)}_{a}x^2 + \underbrace{2a^2b^2m\left(1-A\right)}_{b}xy + \underbrace{a^2\left(a^2m^2+b^2A\right)}_{c}y^2 - a^2b^2A\left(a^2+b^2\right) = 0$$

特例：當 $\lambda = 1$ 時，軌跡方程式爲 $b^2x + a^2my = 0$.

檢查b^2-4ac

$$4\left\{\left[a^2b^2m\left(1-A\right)\right]^2 - a^2b^2\left(a^2m^2+b^2A\right)\left(b^2+a^2m^2A\right)\right\}$$

$$=\left[a^2b^2m\left(1-A\right)\right]^2 - a^2b^2\left(a^2b^2m^2+a^4m^4A+b^4A+a^2b^2m^2A^2\right)$$

$= -2Aa^4b^4m^2 - a^6b^2m^4A - a^2b^6A < 0$，所以爲橢圓型.

又設 $f(x) = (\dfrac{1-x}{1+x})^2$，則 $f(\lambda) = f(\dfrac{1}{\lambda}) = A$，故 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \lambda$ 和 $\dfrac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}} = \dfrac{1}{\lambda}$ 之 P, P' 補足一橢圓.

由於之前我們討論並証明出，兩拋物線之交點，同時爲切線與原拋物線之交點，所以我們猜測橢圓同時符合此現象：

定理：$m \neq 0$而與橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相切的直線方程式為$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
兩切點坐標為$\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$、$\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

橢圓Γ_2: $b^2\left(b^2+Aa^2m^2\right)x^2+2a^2b^2m\left(1-A\right)xy+a^2\left(a^2m^2+b^2A\right)y^2-a^2b^2A\left(a^2m^2+b^2\right)=0$

$A=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$ 沒有x,y項 $\therefore$中心亦在$\left(0,0\right)$

斜率為m與橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相切的一直線方程式為$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$,將其代入$\Gamma_2$

$$\Rightarrow b^2\left(b^2+Aa^2m^2\right)x^2+2a^2b^2m\left(1-A\right)xy+a^2\left(a^2m^2+b^2A\right)y^2-a^2b^2A\left(a^2m^2+b^2\right)=0$$

$$\Rightarrow b^2\left(b^2+Aa^2m^2\right)x^2+2a^2b^2m\left(1-A\right)x\left(mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}\right)$$

$$+a^2\left(a^2m^2+b^2A\right)\left(m^2x^2+a^2m^2+b^2+2mx\sqrt{a^2m^2+b^2}\right)-a^2b^2A\left(a^2m^2+b^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left[b^4+a^2b^2m^2A+2a^2b^2m^2\left(1-A\right)+a^4m^4+a^2b^2Am^2\right]x^2$$

$$+\left[2a^2b^2m(1-A)\sqrt{a^2m^2+b^2}+2a^4m^3\sqrt{a^2m^2+b^2}+2a^2b^2Am\sqrt{a^2m^2+b^2}\right]x$$

$$+a^6m^4+a^4m^2b^2+a^4b^2m^2A+a^2b^4A-a^4b^2m^2A-a^2b^4A=0$$

$$\Rightarrow\left(b^2+a^2m^2\right)^2x^2+2a^2m\sqrt{a^2m^2+b^2}\left(b^2+a^2m^2\right)x+a^4m^2\left(b^2+a^2m^2\right)=0$$

檢查判別式$D=b^2-4ac$

$$\left[2a^2m\sqrt{a^2m^2+b^2}\left(b^2+a^2m^2\right)\right]^2-4\left(b^2+a^2m^2\right)^2\left[a^4m^2\left(b^2+a^2m^2\right)\right]$$

$$=4a^4m^2\left(a^2m^2+b^2\right)\left(b^2+a^2m^2\right)^2-4a^4m^2\left(b^2+a^2m^2\right)^2\left(b^2+a^2m^2\right)$$

$$=0 \qquad \therefore \text{相切}$$

同理, $y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}$亦與橢圓相切.

因此$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$亦為橢圓Γ_2的切線.

我們可推知, 橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$與直線方程式$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$相切, 其切點同時為兩橢圓之交點.

2.外分比

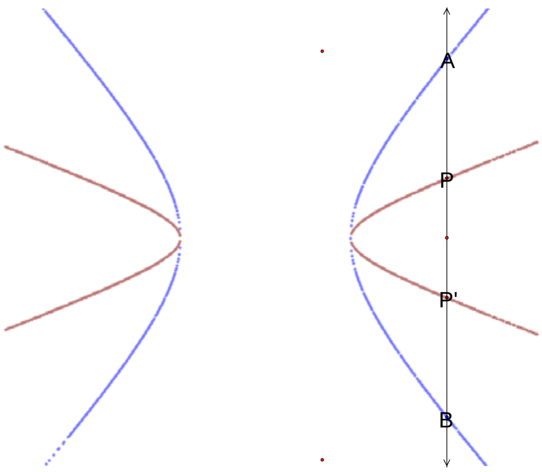
P點座標爲$\left(\dfrac{\lambda x_2-x_1}{\lambda-1},\dfrac{\lambda y_2-y_1}{\lambda-1}\right)$，仿照上述方法，推得方程式爲

$$b^2\left(b^2+a^2m^2A\right)x^2+2a^2b^2m(1-A)xy+a^2\left(a^2m^2+b^2A\right)y^2-a^2b^2A\left(a^2+b^2\right)=0\,,A=\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2$$

所以其圖形同爲橢圓.

（四）雙曲線

雙曲線$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上斜率爲$m$之平行弦，交雙曲線$\Gamma$於$A,B$兩點，滿足$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$（$\lambda$>0）之$P$點軌跡？



設平行弦$\overleftrightarrow{AB}=y=mx+k$

$$b^2x^2-a^2\left(mx+k\right)^2=a^2b^2$$

$$\Rightarrow b^2x^2-a^2m^2x^2-2a^2mkx-a^2k^2-a^2b^2=0$$

$$\Rightarrow\left(b^2-a^2m^2\right)x^2-2a^2mkx-a^2\left(k^2+b^2\right)=0$$

$$x_1=\frac{2a^2mk+\sqrt{4a^4m^2k^2+4a^2\left(b^2-a^2m^2\right)\left(k^2+b^2\right)}}{2\left(b^2-a^2m^2\right)}$$

$$=\frac{a^2mk+ab\sqrt{k^2+b^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}$$

$$x_2=\frac{a^2mk-ab\sqrt{k^2+b^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}$$

1.內分比

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{a^2mk}{b^2-a^2m^2}+\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\frac{ab\sqrt{k^2+b^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}$$

$$\left(b^2-a^2m^2\right)x-a^2mk=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)ab\sqrt{k^2+b^2-a^2m^2}$$

將 $k=y-mx$ 代入

$$\Rightarrow\left(b^2-a^2m^2\right)x-a^2m\left(y-mx\right)=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)ab\sqrt{\left(y-mx\right)^2+b^2-a^2m^2}$$

$$\Rightarrow b^2x-a^2my=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right).ab\sqrt{\left(y-mx\right)^2+b^2-a^2m^2}$$

$$\Rightarrow b^4x^2-2a^2b^2mxy+a^4m^2y^2=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2a^2b^2\left(y^2-2mxy+m^2x^2+b^2-a^2m^2\right)$$

令 $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2=A$

特例：當 $\lambda=1$ 時，軌跡方程式爲 $b^2x-a^2my=0$.

$$b^4x^2-2a^2b^2mxy+a^4m^2y^2=Aa^2b^2y^2-2Aa^2b^2mxy+Aa^2b^2m^2x^2+Aa^2b^4-Aa^4b^2m^2$$

$$\underbrace{b^2\left(b^2-Aa^2m^2\right)}_{a}x^2+\underbrace{2a^2b^2m\left(A-1\right)}_{b}xy+\underbrace{a^2\left(a^2m^2-Ab^2\right)}_{c}y^2+Aa^2b^2\left(a^2m^2-b^2\right)=0$$

檢查 b^2-4ac,

$$\left[2a^2b^2m\left(A-1\right)\right]^2-4b^2\left(b^2-Aa^2m^2\right)a^2\left(a^2m^2-Ab^2\right)$$

$$=4a^2b^2\left[a^2b^2m^2\left(A-1\right)^2-\left(b^2-Aa^2m^2\right)\left(a^2m^2-Ab^2\right)\right]$$

$$=4a^2b^2\left[a^2b^2m^2\left(A^2-2A+1\right)-\left(a^2m^2b^2-Ab^4-Aa^4m^4+A^2a^2b^2m^2\right)\right]$$

$$=4a^2b^2\left(-2Aa^2b^2m^2+Ab^4+Aa^4m^4\right)$$

$$=4a^2b^2A\left(b^2-a^2m^2\right)^2>0$$

所以爲雙曲線型.

又設 $f(x)=(\frac{1-x}{1+x})^2$，則 $f(\lambda)=f(\frac{1}{\lambda})=A$，故 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$ 和 $\frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}}=\frac{1}{\lambda}$ 之 P,P' 補足一雙曲線.

定理：$m\neq0$ 而與雙曲線 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的直線方程式爲 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 兩切點坐標爲 $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$、$\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$

我們同樣討論Γ_2:$b^2\left(b^2-Aa^2m^2\right)x^2+2a^2b^2m\left(A-1\right)xy+a^2\left(a^2m^2-Ab^2\right)y^2$
$+Aa^2b^2\left(a^2m^2-b^2\right)=0$和直線$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$的關係.

將$y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$代入Γ_2

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow b^2\left(b^2-Aa^2m^2\right)x^2+2a^2b^2m\left(A-1\right)x\left(mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}\right)\\
&\quad+a^2\left(a^2m^2-Ab^2\right)\left[m^2x^2+2mx\sqrt{a^2m^2-b^2}+\left(a^2m^2-b^2\right)\right]^2+Aa^2b^2\left(a^2m^2-b^2\right)=0\\
&\Rightarrow\left[b^4-Aa^2b^2m^2+a^4m^4-Aa^2b^2m^2+2a^2b^2m\left(A-1\right)\right]x^2\\
&\quad+\left[2a^4m^3-2Aa^2b^2m+2a^2b^2m\left(A-1\right)\right]\sqrt{a^2m^2-b^2}\,x\\
&\quad+\left(a^6m^4-a^4m^2b^2-Aa^4m^2b^2+Aa^2b^4-Aa^2b^4+Aa^4m^2b^2\right)=0\\
&\Rightarrow\left(a^2m^2-b^2\right)^2x^2+2a^2m\left(a^2m^2-b^2\right)\sqrt{a^2m^2-b^2}\,x+a^4m^2\left(a^2m^2-b^2\right)=0
\end{aligned}$$

檢查判別式b^2-4ac

$$\begin{aligned}
&\left[2a^2m\left(a^2m^2-b^2\right)\sqrt{a^2m^2-b^2}\right]^2-4\left(a^2m^2-b^2\right)^2\left[a^4m^2\left(a^2m^2-b^2\right)\right]\\
&=4a^4m^2\left(a^2m^2-b^2\right)^2\left(a^2m^2-b^2\right)-4a^4m^2\left(a^2m^2-b^2\right)^2\left(a^2m^2-b^2\right)\\
&=0\qquad\therefore\text{相切}
\end{aligned}$$

同理，$y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}$亦與雙曲線相切

因此, 我們推知, 雙曲線$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$與直線方程式$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$相切, 其切點同時爲兩雙曲線之交點.

2.外分比

P點座標爲$\left(\dfrac{\lambda x_2-x_1}{\lambda-1},\dfrac{\lambda y_2-y_1}{\lambda-1}\right)$, 仿照上述方法, 推得方程式爲

$$b^2\left(b^2-Aa^2m^2\right)x^2+2a^2b^2m\left(A-1\right)xy+a^2\left(a^2m^2-Ab^2\right)y^2+Aa^2b^2\left(a^2m^2-b^2\right)=0,$$

$$A=\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2$$

所以其圖形同爲雙曲線.

伍、 研究結果

一、圓錐曲線Γ上斜率爲m之平行弦, 交圓錐曲線Γ於A,B兩點, 滿足$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lambda$與

$\dfrac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}}=\dfrac{1}{\lambda}(\lambda>0)$, 則點$P$與點$P'$的軌跡爲：

1. 若$\lambda=1$, 則點P和點P'軌跡爲圓錐曲線之徑.
2. 若$\lambda\neq 1$, 則不管內分比或外分比所得之點P和點P'軌跡所構成的圖形與該圓錐曲線同型, 具有不變性.

二、在平面上任取一點A. 過A點作一直線與圓C交於B、C兩點($\overline{BC}$即爲圓C上的一弦)在弦$\overline{BC}$上取P和P'兩點滿足$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$與$\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}(\lambda>0)$, 則點$P$與點$P'$的軌跡爲：

1. 若$\lambda=1$, 則點P與點P'的軌跡爲以$\overline{OA}$爲直徑的圓.
2. 若$\lambda\neq 1$, 則點P和點P'軌跡所構成的圖形爲兩圓(當點 A 在圓上), 〝類蚶線〞(當點 A 在圓內)及〝水滴線〞(當點 A 在圓外).

三、〝類蚶線〞的意義和作法：

1. 〝類蚶線〞的意義：

相較於蚶線的定義：給定一圓O及圓周上的一定點A, 設過A之任意直線與圓O(標準圓)交於另一點M, 在$\overleftrightarrow{AM}$上有兩個點P,P',且$\overline{PM}=\overline{P'M}=k$(爲定值), 兩點所繪製形成的圖形爲蚶線. 〝類蚶線〞的差異在於$\overline{PM}=\overline{P'M}$非定值, 是變動的.

2. 〝類蚶線〞的作法：

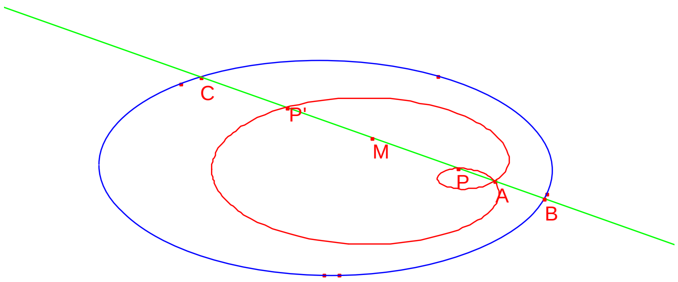
(1)由題目定義之作法：我們已知在圓C內部任取一點A. 過A點作一直線與圓C交於B、C兩點在弦$\overline{BC}$上取P和P'兩點滿足$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$與$\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}(\lambda>0)$, 則點$P$與點$P'$的軌跡爲〝類蚶線〞.

(2)模仿蚶線定義之作法：在圓C上取定點A, 在$\overrightarrow{OA}$取一點B, 以圓C上動點以M爲圓心, $\overline{BM}$ 爲半徑, 交$\overleftrightarrow{AM}$於P, P'兩點, P, P'軌跡即爲〝類蚶線〞.

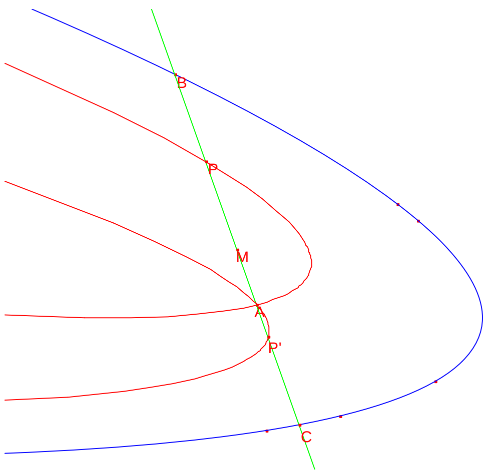
四、有一圓錐曲線Γ, 在平面上任取一點 A. 過 A 點作一直線與 P 交於 B、C 兩點($\overline{BC}$ 即為 P 上的一弦)在弦 $\overline{BC}$ 上取 P 和 P' 兩點滿足 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\lambda$ 與 $\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=\dfrac{1}{\lambda}$ ($\lambda>0$), 則點 P 與點 P' 的軌跡為：

1. 若 $\lambda=1$, 則點 P 和點 P' 軌跡所構成的圖形與該圓錐曲線同型, 具有不變性.
2. 若 $\lambda\neq1$, 則點 P 和點 P' 軌跡所構成的圖形為一種新的圖形, 分別如下:

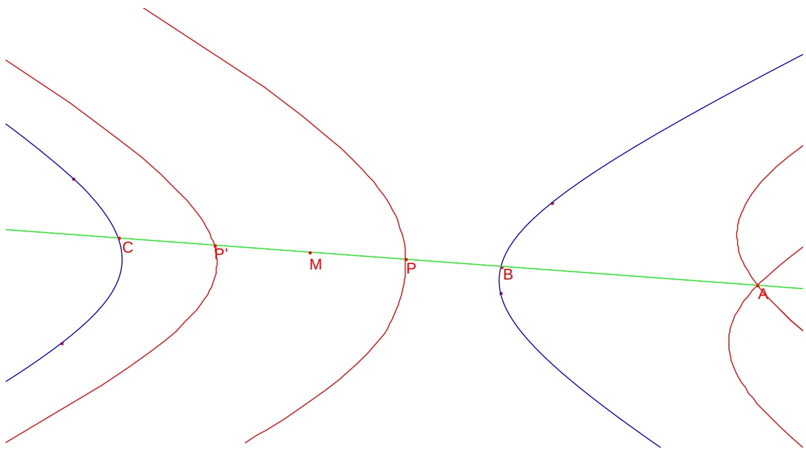
(1)橢圓



(2)拋物線



(3)雙曲線



陸、 討論

一、兩個半徑相同的圓A、B，其中一圓A為固定圓，另一圓B為滾動圓沿著固定圓的外部作不滑動的滾動，則圓B上一定點所構成的軌跡即為蚶線．我們將這想法應用在”類蚶線”上，以控制k值變化的範圍，能成功的畫出”類蚶線”，然滾動圓B的半徑會隨著滾動而變化，我們不妨稱為”不定擺線”．這種固定圓與滾動圓的想法可否推廣至圓錐曲線上？又關於”不定擺線”的特性，都有待進一步的研究.

二、關於這新的圖形，我們是透過代數的運算，推導出軌跡的方程式(非常複雜)，然後利用電腦的輔助畫出其圖形，不知有無較直觀的方法？

柒、 參考資料及其他

一、 趙文敏，〈蚶線〉，《科學月刊》二十一卷七期, 1990.

二、 趙文敏，〈擺線及其他(上)〉，《科學月刊》二十卷十一期, 1989.

三、 趙文敏，〈擺線及其他(下)〉，《科學月刊》二十卷十二期, 1989.

四、 趙文敏，〈心臟線〉，《科學月刊》二十一卷五期, 1990.

五、 林福來等編撰，《高中課本數學（甲）上冊》，南一書局, 2005.

【評　語】　　040409　弦...話家常

1) 現場的動態幾何示範缺乏週全的預備，以致（令人難以忍受的）將正圓展示成為橢圓。

2) 作品說名書當中最具吸引力的水滴線並未出現於海報上，實在可惜。