# 中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

高中組　數學科

040408

致勝密碼

學校名稱：國立宜蘭高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高一 陳彥齊 | 戴武郎 |
| 高一 李政緯 | |
| 高一 莊皓翔 | |


關鍵詞：Num-like 遊戲　輸數(組)

# 摘要

所謂的 Nim-like 遊戲〈$(N_1,N_2,\ldots,N_D)$ , Cond；$X$ , $Y$〉，指的就是：兩人輪流在一堆或二堆（以上）的石子中，在符合條件的狀況下，每次只能從其中的一堆裡面拿取石子，取完最後一顆石子的人贏。

例如：$N_1$=5、$n$=3、在 cond(1)的情況下，為僅有一堆石子，共 5 顆，條件是一次最多能取 3 顆的 Nim-like 遊戲。

本篇作品定義了三種不同的條件，此三個條件可以任意搭配

cond(1)：取石子範圍從 1~$n$。

cond(2)：取石子範圍從 1~$m$。

cond(3)：取石子時不可和前一個人取相同的石子數。

在這三個條件限制下，對於 Nim-like 遊戲呈現出豐富的變化，引起我們的好奇，不同的 cond、石子數、以及堆數皆會產生不同的效果。因此，嘗試以此主題做研究，探討 Nim-like 遊戲的性質與現象。


# 壹、研究動機

在一堂等差數列與級數的課堂上，老師舉了一個有趣的取石子遊戲（南一版課本例題），問題是：

| |
|---|
| 桌面上放了 15 粒棋子，甲、乙兩人輪流取棋子，每次至少拿 1 粒，至多拿 3 粒，規定：拿到最後一粒棋子的人獲勝。你有制勝的策略嗎？ |

後來，期末考結束。老師帶我們班一起去爬草嶺古道，休息時偶然發現一群同學圍聚在石桌上玩「取石子」的遊戲。這遊戲與老師舉的例子有些相似，回來，我們就開始上網找相關的資料，在許志農教授網站上《算術講義》第 11 單元又發現如下問題：

| |
|---|
| 假設遊戲者甲、乙兩人且甲先玩，並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從<br>$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$<br>中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數 $N$ 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過所給定的數字 $N$ 者算輸）。問：哪些正整數 $N$，乙方有必勝的策略？並証明你的答案。 |

我們發現這些都是拈(Nim)遊戲的相關問題，於是，我們就開始研究在各種條件下的規律。

# 貳、研究目的

一、研究 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(1)下的規律。

二、研究 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(2)下的規律。

三、研究 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(1,3)下的規律。

四、研究 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(2,3)下的規律。

# 參、研究設備與器材

一、電腦、紙、筆

二、Microsoft Visual Basic 6.0

三、Microsoft Office Word & Excel

# 肆、研究過程與方法

一、定義：

(一) 所謂的 Nim-like 遊戲，是指兩人（$X,Y$；$X$ 為先手，$Y$ 為後手）輪流取 $D$ 堆石子，在符合條件下，〝可以〞取得最後一個石子者獲勝的遊戲！

(二) 在一個 Nim-like 遊戲中，一共有 $D$ 堆的石子，我們稱此為 $D$ 維 Nim-like 遊戲。

(三) 在一個 $D$ 維的 Nim-like 遊戲中，定義每堆的石子數為 $N_1,N_2,\ldots,N_D$ 個，表示為 $\langle (N_1,N_2,\ldots,N_D)$ , Cond ; $X$ , $Y\rangle$。特別地，在 $D$=1 時，我們稱共有 $N$ 個石子，表示為 $\langle N$ , Cond ; $X$ , $Y\rangle$。

(四) 在一個 $D$ 維的 Nim-like 遊戲中，我們稱可以使得先手(當手)$X$ 獲勝的數組$(N_1,N_2,\ldots,N_D)$為贏數組，反之就稱為輸數組。在 $D$=1 時，則稱可以使得先手（當手）$X$ 獲勝的數 $N$ 為贏數，反之就稱為輸數。

由經驗得知，輸數(組)的數量少，故本篇作品主要探討輸數(組)。

(五) 在一維的 Nim-like 遊戲 $\langle N$ , Cond ; $X$ , $Y\rangle$ 中，令 $L=\{N \mid N$ 是輸數(for $X$)$\}$。
在 $D$ 維的 Nim-like 遊戲$\langle (N_1,N_2,\ldots,N_D)$ , Cond ; $X$ , $Y\rangle$中，我們同樣令 $L=\{(N_1,N_2,\ldots,N_D) \mid (N_1,N_2,\ldots,N_D)$是輸數組(for $X$)$\}$。

令 $x_k$ , $y_k$ 表第 $k$ 回中，$X$、$Y$ 所取的石子數。

(六) 我們定義下列的各種條件：對於 $n \geq 2$

Cond(1)：表 $1 \leq x_k$ , $y_k \leq n$。

Cond(2)：表 $1 < m \leq x_k$ , $y_k \leq n$。$(m < n)$

Cond(3)：表連續兩手取的數不相等，即 $x_k \neq y_k \neq x_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$。

## 二、研究過程與結果：

為方便起見，以下 $\mathbb{N}^*$ 皆表示$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$。

討論 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(1)下的輪數(組)集合 $L$，對於不同的維數 $D$ 及 $n$ 有何規律？

### (一) 一維：

我們透過 Visual Basic 程式跑出來的取法為：

| $N$ \ $n=$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E |
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **3** | E | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **4** | 1 | E | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| **5** | 2 | 1 | E | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| **6** | E | 2 | 1 | E | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| **7** | 1 | 3 | 2 | 1 | E | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| **8** | 2 | E | 3 | 2 | 1 | E | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| **9** | E | 1 | 4 | 3 | 2 | 1 | E | 9 | 9 | 9 | 9 |
| **10** | 1 | 2 | E | 4 | 3 | 2 | 1 | E | 10 | 10 | 10 |
| **11** | 2 | 3 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | E | 11 | 11 |
| **12** | E | E | 2 | E | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | E | 12 |
| **13** | 1 | 1 | 3 | 1 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | E |
| **14** | 2 | 2 | 4 | 2 | E | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| **15** | E | 3 | E | 3 | 1 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| **16** | 1 | E | 1 | 4 | 2 | E | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| **17** | 2 | 1 | 2 | 5 | 3 | 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| **18** | E | 2 | 3 | E | 4 | 2 | E | 8 | 7 | 6 | 5 |
| **19** | 1 | 3 | 4 | 1 | 5 | 3 | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| **20** | 2 | E | E | 2 | 6 | 4 | 2 | E | 9 | 8 | 7 |
| **21** | E | 1 | 1 | 3 | E | 5 | 3 | 1 | 10 | 9 | 8 |
| **22** | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 6 | 4 | 2 | E | 10 | 9 |
| **23** | 2 | 3 | 3 | 5 | 2 | 7 | 5 | 3 | 1 | 11 | 10 |
| **24** | E | E | 4 | E | 3 | E | 6 | 4 | 2 | E | 11 |
| **25** | 1 | 1 | E | 1 | 4 | 1 | 7 | 5 | 3 | 1 | 12 |
| **26** | 2 | 2 | 1 | 2 | 5 | 2 | 8 | 6 | 4 | 2 | E |
| **27** | E | 3 | 2 | 3 | 6 | 3 | E | 7 | 5 | 3 | 1 |
| **28** | 1 | E | 3 | 4 | E | 4 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| **29** | 2 | 1 | 4 | 5 | 1 | 5 | 2 | 9 | 7 | 5 | 3 |
| **30** | E | 2 | E | E | 2 | 6 | 3 | E | 8 | 6 | 4 |
| **31** | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 7 | 4 | 1 | 9 | 7 | 5 |
| **32** | 2 | E | 2 | 2 | 4 | E | 5 | 2 | 10 | 8 | 6 |
| **33** | E | 1 | 3 | 3 | 5 | 1 | 6 | 3 | E | 9 | 7 |
| **34** | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 2 | 7 | 4 | 1 | 10 | 8 |
| **35** | 2 | 3 | E | 5 | E | 3 | 8 | 5 | 2 | 11 | 9 |
| **36** | E | E | 1 | E | 1 | 4 | E | 6 | 3 | E | 10 |
| **37** | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 5 | 1 | 7 | 4 | 1 | 11 |
| **38** | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 6 | 2 | 8 | 5 | 2 | 12 |
| **39** | E | 3 | 4 | 3 | 4 | 7 | 3 | 9 | 6 | 3 | E |
| **40** | 1 | E | E | 4 | 5 | E | 4 | E | 7 | 4 | 1 |
| **41** | 2 | 1 | 1 | 5 | 6 | 1 | 5 | 1 | 8 | 5 | 2 |
| **42** | E | 2 | 2 | E | E | 2 | 6 | 2 | 9 | 6 | 3 |
| **43** | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 10 | 7 | 4 |
| **44** | 2 | E | 4 | 2 | 2 | 4 | 8 | 4 | E | 8 | 5 |
| **45** | E | 1 | E | 3 | 3 | 5 | E | 5 | 1 | 9 | 6 |

表中列($N$ )與行($n$)對應的格子內的數字表示當手可取的數，E 代表當手沒有數可取(即無論如

何取皆輸)，即該 $N$ 值爲輸數。

1.以 $n=5,N=12$ 爲例，$X$ 無論取 1;2;3;4;5，$Y$ 相對應取 5;4;3;2;1 做攻擊，剩餘 6，則 $X$ 無論如何取，$Y$ 都有對應的必勝取法，故 12 爲輸數。

2.以 $n=7,N=22$ 爲例，$X$ 取 6 做攻擊，剩餘 16，則 $Y$ 無論如何取，$X$ 都有對應的必勝取法，故 22 爲贏數。

由上表知，如果讓 $Y$ 有相對應的拿取方法，則此數應爲輸數。我們將輸數集 $L$ 整理如下：

| | |
|---|---|
| $n$=2 | $L=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,\cdots\}$ |
| $n$=3 | $L=\{4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,\cdots\}$ |
| $n$=4 | $L=\{5,10,15,20,25,30,35,40,45,\cdots\}$ |
| $n$=5 | $L=\{6,12,18,24,30,36,42,\cdots\}$ |
| $n$=6 | $L=\{7,14,21,28,35,42,\cdots\}$ |
| $n$=7 | $L=\{8,16,24,32,40,\cdots\}$ |
| $n$=8 | $L=\{9,18,27,36,45,\cdots\}$ |
| $n$=9 | $L=\{10,20,30,40,\cdots\}$ |
| $n$=10 | $L=\{11,22,33,44,\cdots\}$ |
| $n$=11 | $L=\{12,24,36,\cdots\}$ |
| $n$=12 | $L=\{13,26,29,\cdots\}$ |

結論：一維 Nim-like 遊戲 $\langle N$ , Cond(1) ; $X$ , $Y\rangle$ 中，$L=\{k(n+1) \mid k\in\mathbb{N}\}$，即 $k(n+1)$爲輸數，$\forall k\in\mathbb{N}$。

證明：(1)當 $k$=1 時，顯然 $n$+1 爲輸數。

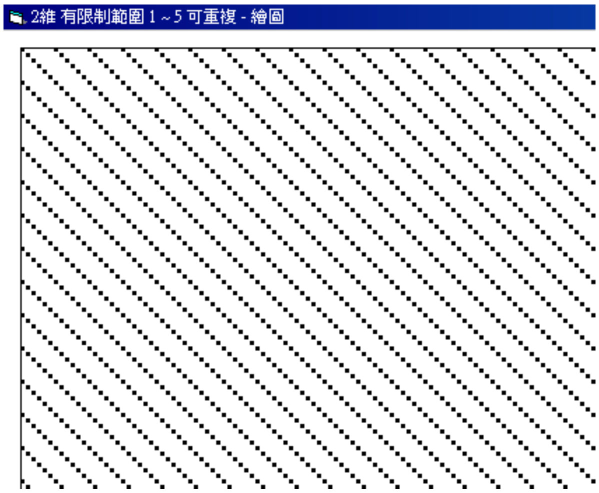
(2)假設 $k=t$ 時成立，即 $t(n+1)$爲輸數。

則當 $k=t+1$ 時，令先手 $X$ 取的數爲 $s$，那麼 $Y$ 只要對應取 $n$+1-$s$，則剩下 $t(n+1)$，由歸納法假設得知 $X$ 輸。

由數學歸納法原理得証。

(二) 二維：

我們透過 Visual Basic 程式跑出來的結果爲：(以 $n$=5 爲例)




| $N_2$ \ $N_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | E E | E A1 | E A2 | E A3 | E A4 | E A5 | E E | E A1 | E A2 | E A3 | E A4 | E A5 | E E | E A1 |
| 1 | B1 E | E E | E A1 | E A2 | E A3 | E A4 | B1 A5 | E E | E A1 | E A2 | E A3 | E A4 | B1 A5 | E E |
| 2 | B2 E | B1 E | E E | E A1 | E A2 | E A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | E A1 | E A2 | E A3 | B2 A4 | B1 A5 |
| 3 | B3 E | B2 E | B1 E | E E | E A1 | E A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | E A1 | E A2 | B3 A3 | B2 A4 |
| 4 | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | E A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | E A1 | B4 A2 | B3 A3 |
| 5 | B5 E | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 |
| 6 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 |
| 7 | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E |
| 8 | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 |
| 9 | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 |
| 10 | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 |
| 11 | B5 E | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 |
| 12 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 |
| 13 | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E |
| 14 | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 |
| 15 | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 |
| 16 | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 |
| 17 | B5 E | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 |
| 18 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 |
| 19 | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E |
| 20 | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 |
| 21 | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 |
| 22 | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 |
| 23 | B5 E | B4 E | B3 E | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 |
| 24 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 |
| 25 | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E |
| 26 | B2 E | B1 E | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 | E E | B5 A1 | B4 A2 | B3 A3 | B2 A4 | B1 A5 |

表中列($N_2$)與行($N_1$)對應的格子內的英文字代表取 A 堆($N_1$)或 B 堆($N_2$)數字表示當手可取的數，E E 代表當手沒有數可取(即無論如何取皆輸)，即($N_1$,$N_2$)爲輸數組。

1.以 $N_1$=2,$N_2$=4 爲例：

| | |
|---|---|
| 若 $x_1$=B2 | 由表得知 $Y$ 無數可取，故 $Y$ 輸。 |

2.以 $N_1$=8,$N_2$=2 爲例：

| | |
|---|---|
| 若 $x_1$=A1 | 由表得知 $Y$ 取 A5;B1，分別剩餘(2,2);(7,1)，$X$ 輸。 |
| 若 $x_1$=A2 | 由表得知 $Y$ 取 A4;B2，分別剩餘(2,2);(6,0)，$X$ 無數可取，亦輸。 |
| 若 $x_1$=A3 | 由表得知 $Y$ 取 A3，剩餘(2,2)，$X$ 輸。 |
| 若 $x_1$=A4 | 由表得知 $Y$ 取 A2，剩餘(2,2)，$X$ 亦輸。 |
| 若 $x_1$=A5 | 由表得知 $Y$ 取 A1，剩餘(2,2)，$X$ 輸。 |
| 若 $x_1$=B1 | 由表得知 $Y$ 取 A1，剩餘(7,1)，$X$ 輸。 |
| 若 $x_1$=B2 | 由表得知 $Y$ 取 A2，剩餘(6,0)，$X$ 輸。 |

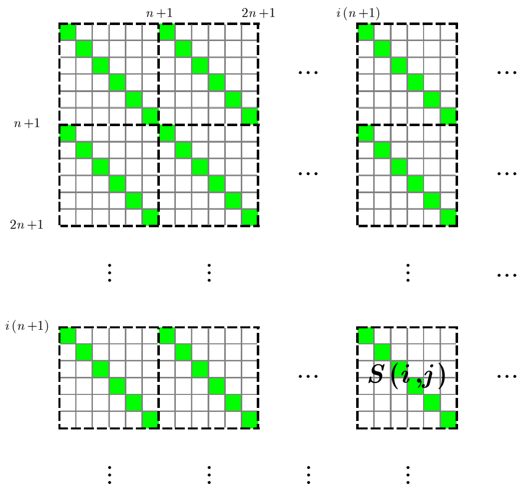
注：A3 代表在 A 堆取 3

由觀察的結果知，輸數組集合

$L$={(0,0);(0,6);(0,12);(1,1);(1,7);(1,13);(2,2);(2,8);(3,3);(3,9);(4,4);(4,10);(5,5);(5,11);(6,0);(6,6);(6,12);(7,1);(7,7);(7,13);(8,2);(8,8);(9,3);(9,9);(10,4);(10,10);(11,5);(11,11);(12,0);(12,6);(12,12);(13,1);(13,7);(13,13);…}

結論：$L=\{(\ i(n+1)+u, j(n+1)+u\ )\mid u=0,1,\cdots,n;\ i,j\in\mathbb{N}^{*}\}$

證明：我們把$\mathbb{N}^2$作如下的分割：




設命題 $S(i,j)$表示〝( $i(n+1)+u, j(n+1)+u$ ) ($u=0,1,\cdots,n$；$i,j\in\mathbb{N}^{*}$)爲輸數組〞

(1)先證明$\forall i\in\mathbb{N}^{*}$，$S(i,0)$成立，即

$(0,0)$，$((n+1),0)$，$(2(n+1),0)$，$(3(n+1),0)\cdots$ 爲輸數組

$(1,1)$，$((n+1)+1,1)$，$(2(n+1)+1,1)$，$(3(n+1)+1,1)\cdots$ 爲輸數組

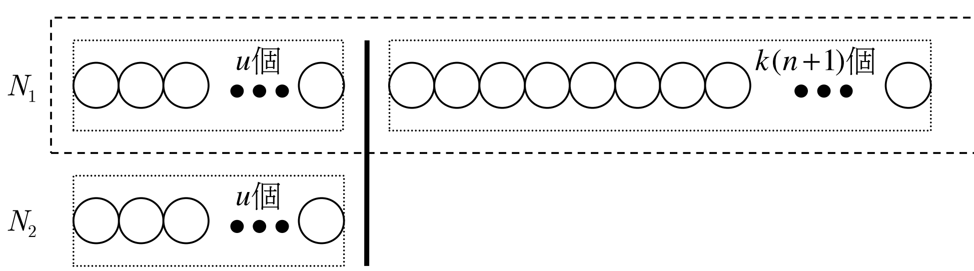
$(2,2)$，$((n+1)+2,2)$，$(2(n+1)+2, 2)$，$(3(n+1)+2,2)\cdots$ 爲輸數組

………

$(n,n)$，$((n+1)+n,n)$，$(2(n+1)+n,n)$，$(3(n+1)+n,n)\cdots$ 爲輸數組

當 $u=0$(即 $N_2=0$)時，此爲一維〈$N$, Cond(1)；$X$，$Y$〉的情形，所以$(k(n+1),0)$爲輸數組。

當 $u\neq 0$(即 $N_2=u$)時，此情形爲一維〈$N$, Cond(1)；$X$，$Y$〉經過平移 $u$ 的結果(如下圖所示)，故$(k(n+1)+u,u)$ 爲輸數組。




即$\forall i\in\mathbb{N}^{*}$，$S(i,0)$成立。

由對稱性知，$\forall j\in\mathbb{N}^{*}$，$S(0,j)$也成立。

(2)假設 $S(i,j+1)$及 $S(i+1,j)$成立，現在證明 $S(i+1,j+1)$也成立

對於每一個$(N_1,N_2)=(\ (i+1)(n+1)+u,(j+1)(n+1)+u\ )$，其中 $u=0,1,\cdots,n$，

不失一般性，只需考慮在第 1 堆中取即可。如果 $X$ 在第 1 堆中取 $r$，則 $Y$ 只要相對地在第 1 堆中取$(n+1)$-$r$，此時剩下$(\ i(n+1)+u,(j+1)(n+1)+u\ )$，由歸納法假設知 $X$ 輸，即$(N_1,N_2)$爲輸數組。故 $S(i+1,j+1)$成立。

由數學歸納法得證。

| 討論 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(2)下的輸數(組)集合 $L$，對於不同的維數 $D$ 及 $n$ 有何規律？ |
|---|

(一) 一維：

我們透過 Visual Basic 程式跑出來的取法爲：

| $N$ \ $(m,n)$= | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 3,4 | 3,5 | 4,5 | 4,6 | 5,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | E | E | E | E | E | E | E | E |
| 1 | E | E | E | E | E | E | E | E |
| 2 | 2 | 2 | 2 | E | E | E | E | E |
| 3 | 2,3 | 2,3 | 2,3 | 3 | 3 | E | E | E |
| 4 | 3 | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 4 | 4 | E |
| 5 | E | 4 | 4,5 | 3,4 | 3,4,5 | 4,5 | 4,5 | 5 |
| 6 | E | E | 5 | 4 | 4,5 | 4,5 | 4,5,6 | 5,6 |
| 7 | 2 | E | E | E | 5 | 4,5 | 4,5,6 | 5,6 |
| 8 | 2,3 | 2 | E | E | E | 5 | 5,6 | 5,6 |
| 9 | 3 | 2,3 | 2 | E | E | E | 6 | 5,6 |
| 10 | E | 3,4 | 2,3 | 3 | E | E | E | 6 |
| 11 | E | 4 | 3,4 | 3,4 | 3 | E | E | E |
| 12 | 2 | E | 4,5 | 3,4 | 3,4 | E | E | E |
| 13 | 2,3 | E | 5 | 4 | 3,4,5 | 4 | E | E |
| 14 | 3 | 2 | E | E | 4,5 | 4,5 | 4 | E |
| 15 | E | 2,3 | E | E | 5 | 4,5 | 4,5 | E |
| 16 | E | 3,4 | 2 | E | E | 4,5 | 4,5,6 | 5 |
| 17 | 2 | 4 | 2,3 | 3 | E | 5 | 4,5,6 | 5,6 |
| 18 | 2,3 | E | 3,4 | 3,4 | E | E | 5,6 | 5,6 |
| 19 | 3 | E | 4,5 | 3,4 | 3 | E | 6 | 5,6 |
| 20 | E | 2 | 5 | 4 | 3,4 | E | E | 5,6 |
| 21 | E | 2,3 | E | E | 3,4,5 | E | E | 6 |
| 22 | 2 | 3,4 | E | E | 4,5 | 4 | E | E |
| 23 | 2,3 | 4 | 2 | E | 5 | 4,5 | E | E |
| 24 | 3 | E | 2,3 | 3 | E | 4,5 | 4 | E |
| 25 | E | E | 3,4 | 3,4 | E | 4,5 | 4,5 | E |
| 26 | E | 2 | 4,5 | 3,4 | E | 5 | 4,5,6 | E |
| 27 | 2 | 2,3 | 5 | 4 | 3 | E | 4,5,6 | 5 |
| 28 | 2,3 | 3,4 | E | E | 3,4 | E | 5,6 | 5,6 |
| 29 | 3 | 4 | E | E | 3,4,5 | E | 6 | 5,6 |
| 30 | E | E | 2 | E | 4,5 | E | E | 5,6 |
| 31 | E | E | 2,3 | 3 | 5 | 4 | E | 5,6 |
| 32 | 2 | 2 | 3,4 | 3,4 | E | 4,5 | E | 6 |
| 33 | 2,3 | 2,3 | 4,5 | 3,4 | E | 4,5 | E | E |
| 34 | 3 | 3,4 | 5 | 4 | E | 4,5 | 4 | E |
| 35 | E | 4 | E | E | 3 | 5 | 4,5 | E |
| 36 | E | E | E | E | 3,4 | E | 4,5,6 | E |
| 37 | 2 | E | 2 | E | 3,4,5 | E | 4,5,6 | E |
| 38 | 2,3 | 2 | 2,3 | 3 | 4,5 | E | 5,6 | 5 |
| 39 | 3 | 2,3 | 3,4 | 3,4 | 5 | E | 6 | 5,6 |
| 40 | E | 3,4 | 4,5 | 3,4 | E | 4 | E | 5,6 |
| 41 | E | 4 | 5 | 4 | E | 4,5 | E | 5,6 |
| 42 | 2 | E | E | E | E | 4,5 | E | 5,6 |
| 43 | 2,3 | E | E | E | 3 | 4,5 | E | 6 |
| 44 | 3 | 2 | 2 | E | 3,4 | 5 | 4 | E |
| 45 | E | 2,3 | 2,3 | 3 | 3,4,5 | E | 4,5 | E |
| 46 | E | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 4,5 | E | 4,5,6 | E |
| 47 | 2 | 4 | 4,5 | 3,4 | 5 | E | 4,5,6 | E |
| 48 | 2,3 | E | 5 | 4 | E | E | 5,6 | E |
| 49 | 3 | E | E | E | E | 4 | 6 | 5 |
| 50 | E | 2 | E | E | E | 4,5 | E | 5,6 |

表中列($N$)與行($n$)對應的格子內的數字表示當手可取的數，E 代表當手沒有數可取(即無論如何取皆輸)，即該 $N$ 值爲輸數。

1.以 $m$=2,$n$=5,$N$=14 爲例，$X$ 無論取 2;3;4;5，$Y$ 相對應取 5;4,5;3,4;2,3;2 做攻擊，皆能使 $X$

無數可取，故 14 爲輸數。

2.以 $m$=4,$n$=5,$N$=16 爲例，$X$ 取 4;5 做攻擊，使 $Y$ 無數可取，故 16 爲贏數。

由上表知，如果讓 $Y$ 有相對應的拿取方法，則此數應爲輸數。我們將輸數集 $L$ 整理如下：(此處規定 0 爲輸數)

| | |
|---|---|
| $m$=2,$n$=3 | $L$={0,1,5,6,10,11,15,16,20,21,25,26,30,31,35,36,40,41,45,46,50,⋯} |
| $m$=2,$n$=4 | $L$={0,1,6,7,12,13,18,19,24,25,30,31,36,37,42,43,48,49,⋯} |
| $m$=2,$n$=5 | $L$={0,1,7,8,14,15,21,22,28,29,35,36,42,43,49,50,⋯} |
| $m$=3,$n$=4 | $L$={0,1,2,7,8,9,14,15,16,21,22,23,28,29,30,35,36,37,42,43,44,49,50,⋯} |
| $m$=3,$n$=5 | $L$={0,1,2,8,9,10,16,17,18,24,25,26,32,33,34,40,41,42,48,49,50,⋯} |
| $m$=4,$n$=5 | $L$={0,1,2,3,9,10,11,12,18,19,20,21,27,28,29,30,36,37,38,39,45,46,47,48,⋯} |
| $m$=4,$n$=6 | $L$={0,1,2,3,10,11,12,13,20,21,22,23,30,31,32,33,40,41,42,43,50,⋯} |
| $m$=5,$n$=6 | $L$={0,1,2,3,4,11,12,13,14,15,22,23,24,25,26,33,34,35,36,37,44,45,46,47,48,⋯} |

推論： $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$k(n+m)$ , $k(n+m)+1$ ,⋯, $k(n+m)+(m-1)$爲輸數；

$k(n+m)+m$ , $k(n+m)+m+1$ ,⋯, $k(n+m)+n+(m-1)$爲贏數。

證明：

令命題 $L(k)$表示：〝 $k(n+m)$ , $k(n+m)+1$ ,⋯, $k(n+m)+(m-1)$爲輸數 〞

命題 $W(k)$表示：〝 $k(n+m)+m$ , $k(n+m)+m+1$ ,⋯, $k(n+m)+n+(m-1)$爲贏數 〞

⑴先証 $L(0)$成立；當 $k$=0 時，顯然 $N$=0,1,2,⋯,$m$−1 時，$X$ 輸，故 $L(0)$成立。

⑵再証〝$L(k)$成立⇒$W(k)$成立〞

假設 $L(k)$成立，則

①若 $N=k(n+m)+j$ ($j$ = $m$,$m$+1,⋯,$n$)，$X$ 只要取 $j$ 做攻擊，剩下 $k(n+m)$，由歸納法假設知此爲輸數，故 $X$ 贏。

②若 $N=k(n+m)+j$ ($j$ = $n$+1,$n$+2,⋯,$n+m-1$)，$X$ 只要取 $n$ 做攻擊，剩下 $k(n+m)+(j-n)$，由歸納法假設知由歸納法假設知此爲輸數，故 $X$ 贏。

即 $W(k)$成立。

⑶最後証〝$W(k)$成立⇒$L(k+1)$成立〞

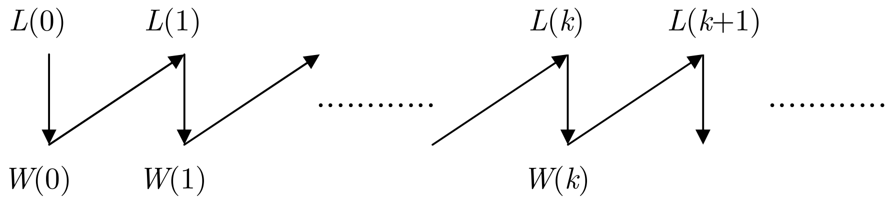
假設命題 $W(k)$成立

若 $N=(k+1)(n+m)+i=[k\ (n+m)+i\ ]+(n+m)$，其中 $i$=0,1,2,⋯,$m$−1，

因 $X$ 取數的範圍爲 $m$~$n$，則剩餘數的範圍爲 $k(n+m)+m+i$ ~ $k(n+m)+n+i$，由歸納法假設知此爲贏數，即命題 $L(k+1)$也成立。

由數學歸納法原理得証。

注：歸納法的架構(翹翹板歸納法)




結論：一維 Nim-like 遊戲 $\langle N, \mathrm{Cond}(2) ; X, Y\rangle$ 中，

$L=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} L_k$ ，其中 $L_k=\{ k(n+m), k(n+m)+1, \cdots, k(n+m)+(m-1) \}$，$\forall k\in\mathbb{N}^*$。

(二) 二維：


| $N_2$ \ $N_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | E E | E E | E E | E A3 | E A3 A4 | E A3 A4 A5 | E A4 A5 A6 | E A5 A6 A7 | E A6 A7 | E A7 | E E | E E | E E | E A3 |
| 1 | E E | E E | E E | E A3 | E A3 A4 | E A3 A4 A5 | E A4 A5 A6 | E A5 A6 A7 | E A6 A7 | E A7 | E E | E E | E E | E A3 |
| 2 | E E | E E | E E | E A3 | E A3 A4 | E A3 A4 A5 | E A4 A5 A6 | E A5 A6 A7 | E A6 A7 | E A7 | E E | E E | E E | E A3 |
| 3 | B3 E | B3 E | B3 E | E E | E E | E E | E A3 | E A3 A4 | E A3 A4 A5 | E A4 A5 A6 | B3 A5 A6 A7 | B3 A6 A7 | B3 A7 | E E |
| 4 | B3 B4 E | B3 B4 E | B3 B4 E | E E | E E | E E | E A3 | E A3 A4 | E A3 A4 A5 | E A4 A5 A6 | B3 B4 A5 A6 A7 | B3 B4 A6 A7 | B3 B4 A7 | E E |
| 5 | B3 B4 B5 E | B3 B4 B5 E | B3 B4 B5 E | E E | E E | E E | E A3 | E A3 A4 | E A3 A4 A5 | E A4 A5 A6 | B3 B4 B5 A5 A6 A7 | B3 B4 B5 A6 A7 | B3 B4 B5 A7 | E E |
| 6 | B4 B5 B6 E | B4 B5 B6 E | B4 B5 B6 E | B3 E | B3 E | B3 E | E E | E E | E E | E A3 | B4 B5 B6 A3 A4 | B4 B5 B6 A3 A4 A5 | B4 B5 B6 A4 A5 A6 | B3 A5 A6 A7 |
| 7 | B5 B6 B7 E | B5 B6 B7 E | B5 B6 B7 E | B3 B4 E | B3 B4 E | B3 B4 E | E E | E E | E E | E A3 | B5 B6 B7 A3 A4 | B5 B6 B7 A3 A4 A5 | B5 B6 B7 A4 A5 A6 | B3 B4 A5 A6 A7 |
| 8 | B6 B7 E | B6 B7 E | B6 B7 E | B3 B4 B5 E | B3 B4 B5 E | B3 B4 B5 E | E E | E E | E E | E A3 | B6 B7 A3 A4 | B6 B7 A3 A4 A5 | B6 B7 A4 A5 A6 | B3 B4 B5 A5 A6 A7 |
| 9 | B7 E | B7 E | B7 E | B4 B5 B6 E | B4 B5 B6 E | B4 B5 B6 E | B3 E | B3 E | B3 E | E E | B7 E | B7 E | B7 A3 | B4 B5 B6 A4 |
| 10 | E E | E E | E E | B5 B6 B7 A3 | B5 B6 B7 A3 A4 | B5 B6 B7 A3 A4 A5 | B3 B4 A4 A5 A6 | B3 B4 A5 A6 A7 | B3 B4 A6 A7 | E A7 | E E | E E | E E | B5 B6 B7 A3 |
| 11 | E E | E E | E E | B6 B7 A3 | B6 B7 A3 A4 | B6 B7 A3 A4 A5 | B3 B4 B5 A4 A5 A6 | B3 B4 B5 A5 A6 A7 | B3 B4 B5 A6 A7 | E A7 | E E | E E | E E | B6 B7 A3 |
| 12 | E E | E E | E E | B7 A3 | B7 A3 A4 | B7 A3 A4 A5 | B4 B5 B6 A4 A5 A6 | B4 B5 B6 A5 A6 A7 | B4 B5 B6 A6 A7 | B3 A7 | E E | E E | E E | B7 A3 |
| 13 | B3 E | B3 E | B3 E | E E | E E | E E | B5 B6 B7 A3 | B5 B6 B7 A3 A4 | B5 B6 B7 A3 A4 A5 | B4 A4 A5 A6 | B3 A5 A6 A7 | B3 A6 A7 | B3 A7 | E E |

我們透過 Visual Basic 程式跑出來的結果為：(以 $m$=3,$n$=7 為例)

1.以 $N_1$=3,$N_2$=7 為例：

| | |
|---|---|
| 若$x_1$=3(A) | 由表得知$Y$無數可取，故$Y$輸。 |
| 若$x_1$=4(A) | 由表得知$Y$無數可取，故$Y$輸。 |

2.以 $N_1$=5,$N_2$=4 為例：

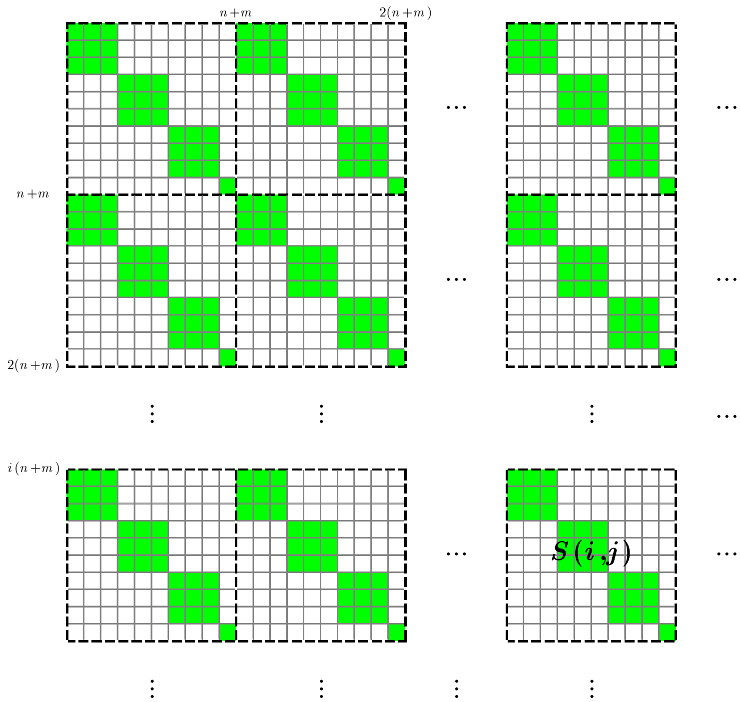
| | |
|---|---|
| 若$x_1$=3(B) | 由表得知$Y$取3(A);4(A)，分別剩餘(2,1);(2,0)，$X$輸。 |
| 若$x_1$=4(B) | 由表得知$Y$取3(A);4(A)，分別剩餘(1,1);(1,0)，$X$無數可取，亦輸。 |
| 若$x_1$=5(B) | 由表得知$Y$取3(A);4(A)，分別剩餘(0,1);(0,0)，$X$輸。 |
| 若$x_1$=3(A) | 由表得知$Y$取3(B);4(B);5(B)，剩餘(2,1);(1,1);(0,1)，$X$亦輸。 |
| 若$x_1$=4(A) | 由表得知$Y$取3(B);4(B);5(B)，剩餘(2,0);(1,0);(0,0)，$X$輸。 |

由觀察的結果知，輸數組集合 $L$={(0,0);(1,0);(2,0);(10,0);(11,0);(12,0);⋯;(0,1);(1,1);(2,1);(10,1);(11,1);(12,1);⋯;(0,2);(1,2);(2,2);(10,2);(11,2);(12,2);⋯(3,3);(4,3);(5,3);(13,3);(14,3);(15,3);⋯;(3,4);(4,4);(5,4);(13,4);(14,4);(15,4);⋯}

結論：

$L=\{(\ i(m+n)+km+r_1, j(m+n)+km+r_2\ )\mid r_1,r_2=0,1,\ldots,m\text{-}1;\ i,j,k\in\mathbb{N}^*\ ;\ km+r_1, km+r_2\le m+n\text{-}1\}$

證明：我們把$\mathbb{N}^2$作如下的分割：




設命題 $S(i,j)$表示

〝$(\ i(m+n)+km+r_1, j(m+n)+km+r_2\ )$ $(r_1,r_2=0,1,\ldots,m\text{-}1; km+r_1,\ km+r_2\le m+n\text{-}1)$爲輸數組〞

(1)先證明$\forall i\in\mathbb{N}^*$，$S(i,0)$成立，即

$(0,0),(1,0)\cdots(m\text{-}1,0),(m+n,0)\cdots(m+n+m\text{-}1,0)\cdots(i(m+n),0)\cdots(i(m+n)+m\text{-}1,0)\cdots$爲輸數組

$(0,1),(1,1)\cdots(m\text{-}1,1),(m+n,1)\cdots(m+n+m\text{-}1,1)\cdots(i(m+n),1)\cdots(i(m+n)+m\text{-}1,1)\cdots$爲輸數組

………

$(0,m\text{-}1),(1,m\text{-}1)\cdots(m\text{-}1,m\text{-}1)$ ……………… $(i(m+n),m\text{-}1)\cdots(i(m+n)+m\text{-}1,m\text{-}1)\cdots$爲輸數組

$(m,m),(m+1,m)\cdots(2m\text{-}1,m)$ ……………… $(i(m+n)+m,m)\cdots(i(m+n)+2m\text{-}1,m)\cdots$爲輸數組

………

$(m,2m\text{-}1)\cdots(2m\text{-}1,2m\text{-}1)$ …………… $(i(m+n)+m,2m\text{-}1)\cdots(i(m+n)+2m\text{-}1,2m\text{-}1)\cdots$爲輸數組

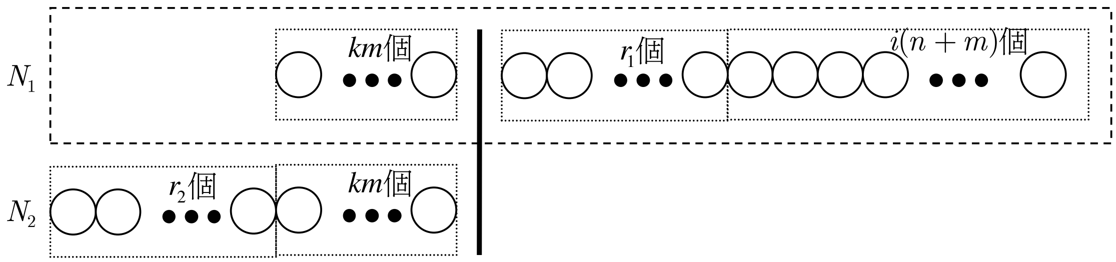
………

當 $k$=0(即 $N_2=r_2$)時，

因爲 $r_2<m$，此爲一維〈$N$, Cond(2)；$X$，$Y$〉的情形，所以$(i(m+n)+r_1,r_2)$爲輸數組。

當 $k$>0 時(即 $N_2=km+r_2$)，此情形爲一維〈$N$, Cond(2)；$X$，$Y$〉經過平移 $km$ 的結果(如下

圖所示)。




即$\forall i\in\mathbb{N}^*$，$S(i,0)$成立。

由對稱性知，$\forall j\in\mathbb{N}^*$，$S(0,j)$也成立。

假設 $S(i,j+1)$及 $S(i+1,j)$成立，現在證明 $S(i+1,j+1)$也成立

對於$(N_1,N_2)=(\ (i+1)(m+n)+km+r_1,(j+1)(m+n)+km+r_2\ )$，

不失一般性，只需考慮在第 1 堆中取即可。如果 $X$ 在第 1 堆中取 $r$，則 $Y$ 只要相對地在第 1 堆中取$(m+n)$-$r$，此時剩下$(\ i(m+n)+km+r_1,(j+1)(m+n)+km+r_2\ )$，由歸納法假設知 $X$ 輸，即$(N_1,N_2)$為輸數組。故 $S(i+1,j+1)$成立。

由數學歸納法得證。

討論 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(1,3)下的輸數(組)集合 $L$，對於不同的維數 $D$ 及 $n$ 有何規律？

(一) 一維：

我們透過 Visual Basic 程式跑出來的取法為：

| $N$ \ $n=$ | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 |
| **3** | E | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **4** | 1 | E | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| **5** | 1,2 | 1 | E | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| **6** | E | 1,2,3 | 1,3 | 3 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 |
| **7** | 1 | 3 | 2 | E | E | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| **8** | 1,2 | E | 3,4 | 1,4 | 1,4 | 4 | 4,8 | 4,8 | 4,8 | 4,8 | 4,8 | 4,8 | 4,8 | 4,8 |
| **9** | E | 1 | 2,4 | 2,3 | 2 | E | E | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| **10** | 1 | 1,2,3 | E | 3,5 | 3,5 | 1,5 | 1,5 | 5 | 5,10 | 5,10 | 5,10 | 5,10 | 5,10 | 5,10 |
| **11** | 1,2 | 3 | 1 | 4 | 2,4 | 2 | 2 | E | E | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| **12** | E | E | 1,2 | 5 | 5 | 3,4 | 3 | 1 | 1 | E | 12 | 12 | 12 | 12 |
| **13** | 1 | 1 | 3 | E | 6 | 2,4 | 2,4 | 1,2 | 1,2 | 1 | E | 13 | 13 | 13 |
| **14** | 1,2 | 1,2,3 | 4 | 1 | E | 5,7 | 5,7 | 3,7 | 3,7 | 1,2,7 | 1,7 | 7 | 7,14 | 7,14 |
| **15** | E | 3 | E | 1,2,4 | 1 | 6 | 3,6 | 4,5 | 4 | 3 | 2 | E | E | 15 |
| **16** | 1 | E | 1,3 | 3 | 1,2 | 7 | 7 | 5 | 5 | 4 | 3 | 1 | 1 | E |
| **17** | 1,2 | 1 | 2 | 4,5 | 3,5 | E | 8 | 6 | 6 | 5 | 2,4 | 1,2 | 1,2 | 1 |
| **18** | E | 1,2,3 | 3,4 | 5 | 4 | 1 | E | 7,9 | 7,9 | 3,6,9 | 5,9 | 3,9 | 3,9 | 1,2,9 |
| **19** | 1 | 3 | 2,4 | 3 | 5,6 | 1,2 | 1 | 8 | 4,8 | 7 | 3,6 | 4 | 4 | 3 |
| **20** | 1,2 | E | E | E | 6 | 3 | 1,2 | 9 | 9 | 4,8 | 7 | 5 | 5 | 4 |
| **21** | E | 1 | 1 | 1 | E | 4,6 | 3 | 5 | 5,10 | 9 | 8 | 6,7 | 6 | 5 |
| **22** | 1 | 1,2,3 | 1,2 | 1,2,3 | 1,4 | 5 | 4 | E | E | 5,10,11 | 9,11 | 7,11 | 7,11 | 3,6,11 |
| **23** | 1,2 | 3 | 3 | 3,5 | 2 | 3,6,7 | 5,7 | 1,6 | 1,6 | 11 | 10 | 4,8 | 4,8 | 7 |
| **24** | E | E | 4 | 4 | 3 | 7 | 3,6 | 2 | 2 | E | 11,12 | 9,12 | 9,12 | 4,8,12 |
| **25** | 1 | 1 | E | 5 | 2,4 | E | 7,8 | 3 | 3 | 1 | 12 | 5,10 | 5,10 | 9 |
| **26** | 1,2 | 1,2,3 | 1,3 | E | 5,6 | 1 | 4,8 | 2,4,5 | 2,4 | 1,2,7 | E | 11,13 | 11,13 | 5,10,13 |
| **27** | E | 3 | 2 | 1 | 3,6 | 1,2,5 | E | 5,8 | 5 | 3 | 1,7 | 12 | 6,12 | 11 |
| **28** | 1 | E | 3,4 | 1,2,4 | E | 3 | 1 | 3,6 | 3,6 | 4 | 2 | 13 | 13 | 12 |
| **29** | 1,2 | 1 | 2,4 | 3 | 1 | 4 | 1,2 | 7,9 | 7,9 | 5 | 3,8 | E | 14 | 13 |
| **30** | E | 1,2,3 | E | 4,5 | 1,2 | 5 | 3 | 8 | 8 | 3,6,9 | 2,4 | 1 | E | 7,14,15 |
| **31** | 1 | 3 | 1 | 5 | 3 | 3,6,7 | 4 | 9 | 9 | 7 | 5 | 1,2 | 1 | 15 |
| **32** | 1,2 | E | 1,2 | 3 | 4 | 7 | 5 | E | 5,10 | 4,8 | 6 | 3 | 1,2 | E |
| **33** | E | 1 | 3 | E | 5 | 4 | 3,6 | 1 | E | 9 | 7,10 | 4 | 3 | 1 |
| **34** | 1 | 1,2,3 | 4 | 1 | 3,6 | E | 7 | 1,2 | 1 | 5,10,11 | 8 | 5 | 4 | 1,2,9 |
| **35** | 1,2 | 3 | E | 1,2,3, | E | 1,5 | 4,8 | 3 | 1,2 | 11 | 9 | 3,6 | 5 | 3 |
| **36** | E | E | 1,3 | 3,5, | 1,4 | 2 | E | 4 | 3 | E | 5,10 | 7 | 3,6 | 4 |
| **37** | 1 | 1 | 2 | 4 | 2 | 3,4 | 1,5 | 5 | 4 | 1 | 11,12 | 4,8 | 7 | 5 |
| **38** | 1,2 | 1,2,3 | 3,4 | 5 | 3,5 | 2,4 | 2 | 3,6,8 | 5,8 | 1,2,7 | 6,12 | 9 | 4,8 | 3,6,11 |
| **39** | E | 3 | 2,4 | E | 2,4 | 5,7 | 3 | 7 | 3,6 | 3 | E | 5,10,12 | 9 | 7 |
| **40** | 1 | E | E | 1 | 5 | 6 | 2,4 | 4,8,9 | 7,9 | 4 | 1 | 11 | 5,10 | 4,8,12 |
| **41** | 1,2 | 1 | 1 | 1,2,4, | 6 | 7 | 5,7 | 9 | 4,8 | 5 | 1,2 | 12,13 | 11,13 | 9 |
| **42** | E | 1,2,3 | 1,2 | 3 | E | E | 3,6 | 5 | 9 | 3,6,9 | 3,8 | 13 | 12 | 5,10,13 |
| **43** | 1 | 3 | 3 | 4,5, | 1 | 1 | 7 | E | 10 | 7 | 4 | 7 | 13,14 | 11 |
| **44** | 1,2 | E | 4 | 5 | 1,2 | 1,2 | 8 | 1 | E | 4,8 | 5,9 | E | 7,14 | 12 |
| **45** | E | 1 | E | 3 | 3,5 | 3 | E | 1,2 | 1 | 9 | 6 | 1 | E | 13 |
| **46** | 1 | 1,2,3 | 1,3 | E | 4 | 4,6 | 1 | 3,7 | 1,2 | 5,10,11 | 7 | 1,2 | 1 | 7,14,15 |
| **47** | 1,2 | 3 | 2 | 1 | 5,6 | 5 | 1,2 | 4,5 | 3 | 11 | 4,8 | 3,9 | 1,2 | 15 |
| **48** | E | E | 3,4 | 1,2,3, | 6 | 3,6,7 | 3 | 5 | 4 | E | 9 | 4 | 3,9 | E |
| **49** | 1 | 1 | 2,4 | 3,5, | E | 7 | 4 | 6 | 5 | 1 | 10 | 5 | 4 | 1 |
| **50** | 1,2 | 1,2,3 | E | 4 | 1,4 | E | 5,7 | 7,9 | 3,6 | 1,2,7 | 11 | 6,7 | 5 | 1,2,9 |

表中列($N$)與行($n$)對應的格子內的數字表示當手可取的數，E 代表當手沒有數可取(即無論如何取皆輸)，即該 $N$ 值為輸數。

1.以 $n=5$，$N=22$ 為例：從表中得 $x_1$ 可以是 1 或 2 或 3，

| | |
|---|---|
| 若$x_1=1$ | 則因為$y_1$不能等於1，故$Y$輸。 |
| 若$x_1=2$ | 則$Y$無數可取，亦輸。 |
| 若$x_1=3$ | 則同理因為$y_1$不能等於3，故$Y$亦輸。故無論是哪一種情況，$X$贏。 |

2.以 $n=7,N=25$ 為例：從表中得 $x_1$ 可以是 1,2,3,4,5,6 或 7，

| | |
|---|---|
| 若$x_1=1$ | 由表得知$Y$取7，剩餘17，$X$輸。 |
| 若$x_1=2$ | 由表得知$Y$取3;6;7，分別剩下22;19;18，$X$無數可取。 |
| 若$x_1=3$ | 由表得知$Y$取5，剩餘17，$X$輸。 |
| 若$x_1=4$ | 由表得知$Y$取4;6，分別剩下21;19，$X$亦無數可取 |
| 若$x_1=5$ | 由表得知$Y$取3，剩餘17，$X$輸。 |
| 若$x_1=6$ | 由表得知$Y$取1,2，分別剩下18;17，$X$亦無數可取 |
| 若$x_1=7$ | 由表得知$Y$取1，剩餘17，$X$輸。 |

由觀察的結果知，如果讓 $Y$ 有相對應的拿取方法，則此數應為輸數。我們將輸數集 $L$ 整理如下：(此處規定 0 為輸數)

| | |
|---|---|
| $n=2$ | $L=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,\cdots\}$ |
| $n=3$ | $L=\{0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48,\cdots\}$ |
| $n=4$ | $L=\{0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,\cdots\}$ |
| $n=5$ | $L=\{0,7,13,20,26,33,39,46,\cdots\}$ |
| $n=6$ | $L=\{0,7,14,21,28,35,42,49,\cdots\}$ |
| $n=7$ | $L=\{0,9,17,25,34,42,50,\cdots\}$ |
| $n=8$ | $L=\{0,9,18,27,36,45,\cdots\}$ |
| $n=9$ | $L=\{0,11,22,32,43,\cdots\}$ |
| $n=10$ | $L=\{0,11,22,33,44,\cdots\}$ |
| $n=11$ | $L=\{0,12,24,36,48,\cdots\}$ |

結論 1：若 $n$ 為偶數，則 $L=\{k(n+1)\mid k\in\mathbb{N}\}$。即 $k(n+1)$為輸數，$\forall k\in\mathbb{N}$。

證明：

(1)當 $k=1$ 時，$N=n+1$，無論 $X$ 取多少(設為 $s$)，剩下 $n+1-s(\neq s)$，$Y$ 可全取，故 $X$ 輸。

(2)假設 $k=t$ 時成立，

則 $k=t+1$ 時，設 $X$ 取的數為 $s$，則 $Y$ 只要取 $n+1-s$，剩下 $t(n+1)$，輪到 $X$，由歸納法假設知 $X$ 輸。

由數學歸納法原理得証。

**底下我們只須針對 $n$ 為奇數的情形作討論即可。**

推論 1：$\forall p\in\mathbb{N}$

若 $n+1=2^{2p-1}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)，則 $N=n+1$ 爲贏數；

若 $n+1=2^{2p}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)，則 $N=n+1$ 爲輸數。

證明：

令命題 $A(p)$表示：〝若 $n+1=2^{2p-1}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)，則 $N=n+1$ 爲贏數〞

命題 $B(p)$表示：〝若 $n+1=2^{2p}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)，則 $N=n+1$ 爲輸數〞

(1)先證明 $A(1)$成立，即 $N=n+1=2\cdot q$ ($q$ 爲奇數)，此時 $X$ 取 $q$，輪到 $Y$，$Y$ 不得取 $q$，故 $X$ 勝。

(2)再證明〝$A(p)\Rightarrow B(p)$〞

設 $A(p)$成立，即 $N=n+1=2^{2p-1}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)爲贏數，

則當 $N=n+1=2^{2p}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)時，$X$ 必取 $\dfrac{N}{2}=2^{2p-1}\cdot q$ 作防守，此時剩下 $2^{2p-1}\cdot q$，輪到 $Y$，

由歸納法假設知 $Y$ 贏，故 $X$ 輸，即 $B(p)$成立。

(3)最後證明〝$B(p)\Rightarrow A(p+1)$〞

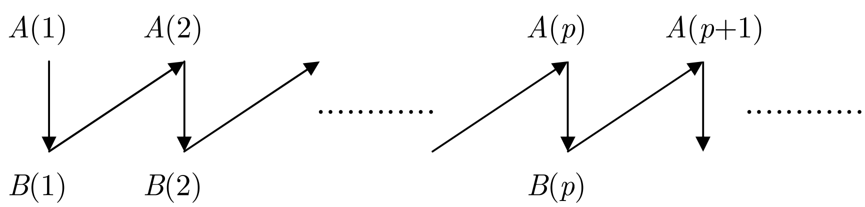
設 $B(p)$成立，即 $N=n+1=2^{2p}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)爲輸數，

則當 $N=n+1=2^{2p+1}\cdot q$ ($q$ 爲奇數)時，$X$ 必取 $\dfrac{N}{2}=2^{2p}\cdot q$ 作防守，此時剩下 $2^{2p}\cdot q$，輪到 $Y$，

由歸納法假設知 $Y$ 輸，故 $X$ 贏，即 $A(p+1)$成立。

由數學歸納法原理得証。

注：歸納法的架構(翹翹板歸納法)




推論 2：若 $n+1$ 是贏數，則 $n+2$ 爲輸數

當 $N=n+2$ 時，$X$ 必取 1(否則即輸)，則剩下 $n+1$，換 $Y$，$Y$ 贏，$\therefore X$ 輸

推論 3：$L$ 中連續兩輸數之差必大於 $n$。

證明：設 $l\in L$，當 $N=l+i$ ($i=1,2,\cdots,n$)時，先手 $X$ 只要取 $i$ 個，則剩下 $l$，則 $Y$ 輸，故 $X$ 贏。

推論 4：$L$ 中連續兩輸數之差爲 $n+1$ 或 $n+2$。

證明：設 $l\in L$，由推論 3 得到 $l+i\ (1,2,\cdots,n)\notin L$，

(1)若 $l+(n+1)\in L$，得証。

(2)若 $l+(n+1)\notin L$，當 $N=l+(n+2)$時，$X$ 必取 1，則剩下 $l+(n+1)$，換 $Y$，$Y$ 贏，$\therefore X$ 輸

結論 2：$n=8s+3$，則 $L=\{k(n+1)\mid k\in\mathbb{N}\}$

證明：

(1)當 $k=1$ 時，由推論 1 知正確。

(2)假設 $k\leqslant t$ 時成立

則 $k=t+1$ 時，

$N=(t+1)(n+1)$，$X$ 必取 $\frac{n+1}{2}$，剩下 $t(n+1)+\frac{n+1}{2}$，換 $Y$，$Y$ 只要取 $\frac{n+1}{4}$，

剩下 $t(n+1)+\frac{n+1}{4}$，因爲 $\frac{n+1}{4}$ 和 $\frac{n+1}{4}+(n+1)$皆爲奇數，無論 $X$ 取什麼，由歸納法假設得知 $X$ 皆輸

由數學歸納法原理得証

結論 3：$n=8s+5$，則$(n+2)+k(2n+3)$及$(2n+3)+k(2n+3)$爲輸數 $(k\in\mathbb{N}^*)$

證明：

令命題 $A(k)$表示：〝$(n+2)+k(2n+3)$輸數$(k\in\mathbb{N}^*)$〞

命題 $B(k)$表示：〝$(2n+3)+k(2n+3)$輸數$(k\in\mathbb{N}^*)$〞

(1)證明 $A(0)$及 $B(0)$成立，

證明 $A(0)$成立：即 $N=n+2$ 爲輸數，由推論 1&2 知成立。

證明 $B(0)$成立：即 $N=2n+3$，$X$ 必取 $\frac{n+1}{2}$，剩下 $n+2+\frac{n+1}{2}$，換 $Y$，$Y$ 取 $\frac{3n+5}{4}$，

剩下 $\frac{3n+5}{4}$，因爲 $\frac{3n+5}{4}$ 爲奇數，故 $X$ 輸，即 $2n+3$ 爲輸數。

(2)再證明〝$A(k)$及 $B(k)\Rightarrow A(k+1)$〞

設 $A(k)$及 $B(k)$成立，

則 $N=(n+2)+(k+1)(2n+3)$，$X$ 必取 1，剩下$(n+1)+(k+1)(2n+3)$，

換 $Y$，$Y$ 取 $\frac{n+1}{2}$，剩下 $\frac{n+1}{2}+(2n+3)+k(2n+3)=\frac{3(n+1)}{2}+(n+2)+k(2n+3)$，

因爲 $\frac{n+1}{2}$ 及 $\frac{3(n+1)}{2}$ 皆爲奇數，故 $X$ 輸，成立。

(3)最後證明〝$A(k)$及 $A(k+1)$及 $B(k)\Rightarrow B(k+1)$〞

設 $A(k)$ 及 $A(k+1)$及 $B(k)$成立，

則 $N=(2n+3)+(k+1)(2n+3)$，$X$ 必取$\dfrac{n+1}{2}$，

剩下$\dfrac{n+1}{2}+(n+2)+(k+1)(2n+3)=\dfrac{3n+5}{2}+(k+1)(2n+3)$，換 $Y$，因$\dfrac{n+1}{2}$爲奇數，故 $Y$ 取$\dfrac{3n+5}{4}$，剩下$\dfrac{3n+5}{4}+(k+1)(2n+3)$，因爲$\dfrac{3n+5}{4}$爲奇數，故 $X$ 輸，成立。

由數學歸納法原理得証

結論 4：若 $n+1=2^{2p}\cdot q$，則 $L=\{k(n+1)|k\in\mathbb{N}\}$

證明：

(1)當 $k=1$，$N=n+1$，由推論 1 知，$X$ 輸。

(2)假設 $k\leq s$ 時成立，

則 $k=s+1$ 時，

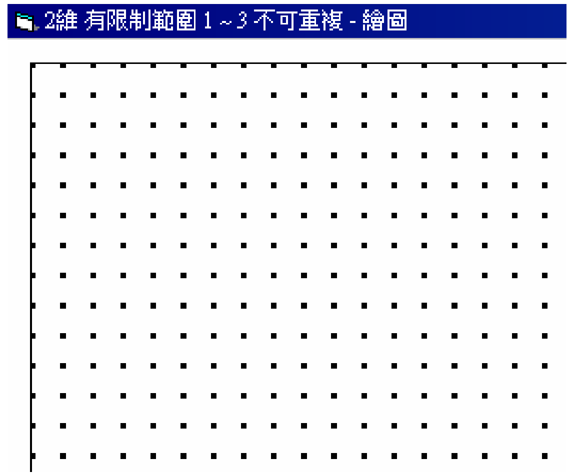
$N=(s+1)(n+1)\xrightarrow{X取\frac{n+1}{2}防禦}$剩下 $s(n+1)+\dfrac{n+1}{2}\xrightarrow{Y取\frac{n+1}{2^2}攻擊}$

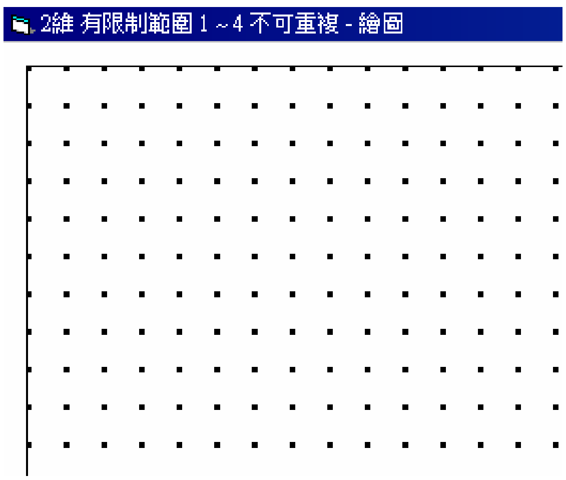
剩下 $s(n+1)+\dfrac{n+1}{2^2}=s(n+1)+2^{2(p-1)}\cdot q$，接下來，無論 $X$ 如何取半($X$ 不取半必輸)，$Y$ 只要取 $X$ 取數的一半作攻擊，則剩餘數必爲 $s'(n+1)+\dfrac{q'(n+1)}{2^{2u}}=s'(n+1)+2^{2(p-u)}\cdot q'$ (其中 $q'$爲奇數)，如此繼續取下去，那麼總可以在有限次後，使剩餘數爲 $s''(n+1)+q''$ (其中 $q''$爲奇數)，輪到 $X$，若 $X$ 取 $r<q''$，則 $Y$ 取 $q''-r$，此時剩下 $s''(n+1)$；若 $X$ 取 $r>q''$，則 $Y$ 取$(n+1)+q''-r$，此時剩下$(s''-1)(n+1)$，由歸納法假設知 $X$ 輸。

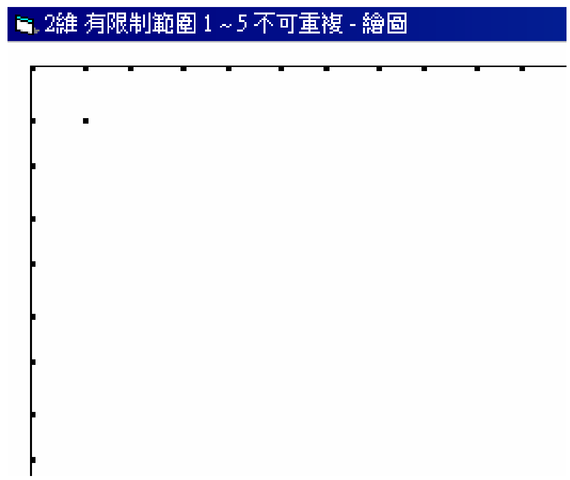
由數學歸納法知$\forall k\in\mathbb{N}$，$k(n+1)$爲輸數。

(二) 二維：

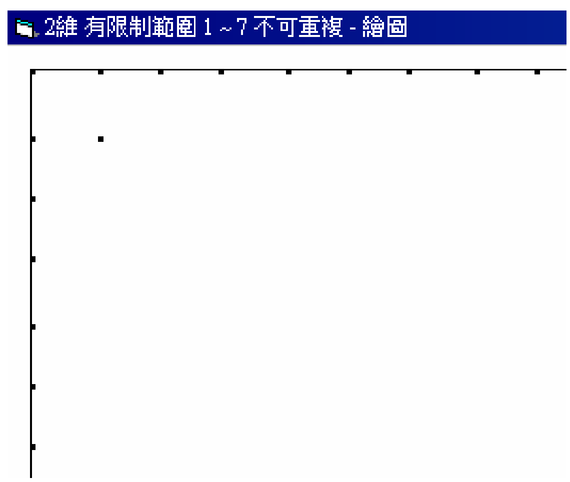
首先我們利用 Visual Basic 程式，跑出大量的輪數組$(N_1,N_2)$的散佈圖形：






結論：當 $n=2s$，則 $L=\{(((i(n+1),j(n+1))\mid i,j\in\mathbb{N}^*\}$

證明：

1.先證明$(i(n+1),j(n+1))$ $(i,j \in \mathbb{N}^*)$爲輸數組。

(1)當 $j$=0 時,此爲 1 維的情形,故$\forall i \in \mathbb{N}^*$ $(i(n+1),0)$爲輸數組,同理,$\forall j \in \mathbb{N}^*$ $(0,j(n+1))$亦爲輸數組。

(2)假設 $i=t_1,j=t_2+1$ 時,$(t_1(n+1),(t_2+1)(n+1))$爲輸數組。

且 $i=t_1+1,j=t_2$ 時,$((t_1+1)(n+1),t_2(n+1))$爲輸數組。

則當 $i=t_1+1,j=t_2+1$ 時,不失一般性,假設 $X$ 在第一堆拿 $r$,則 $Y$ 只要取 $n$+1-$r$ 做攻擊,剩下$(t_1(n+1),(t_2+1)(n+1))$,由歸納法假設知 $X$ 輸。

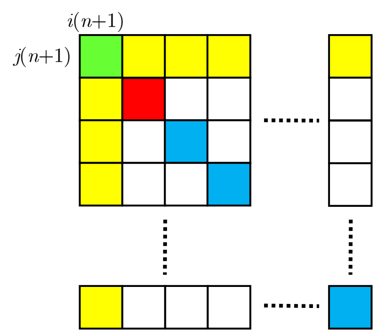
(3)由數學歸納法原理得證。

2.現在我們討論除了$(i(n+1),j(n+1))$ $(i,j \in \mathbb{N})$(綠色部分)之外,其他皆不是輸數組(皆爲贏數組)

(1)我們知道$(i(n+1),j(n+1)+u)$和$(i(n+1)+u,j(n+1))$,可取 $u$ 獲勝(黃色部分)。

(2) $(i(n+1)+1,j(n+1)+1)$,唯有拿 1 作攻擊獲勝,否則即輸(紅色區塊)。

(3) $(i(n+1)+u,j(n+1)+u)$,可能取 $u$ 獲勝(藍色部分)。




我們證明$(i(n+1)+u_1,j(n+1)+u_2)$(白色部分),$X$ 取 1 獲勝

因爲 $X$ 要避免對方落入黃色部分或藍色部分,一定要使得對方落入白色部分,此時無論對方如何拿取,總會落入藍色、紅色、黃色、或白色部分,當然,對方落入白色以外的顏色中,由前面之 $X$ 贏,考慮落入白色之中

此時 $X$ 繼續拿 1,重複上述情形,總有剩下(1,1)之時,此時無論誰當手,因爲 $Y$ 不能取 1,$Y$ 必輸。

討論 Nim(拈)-like 遊戲在 Cond(2,3)下的輸數(組)集合 $L$，對於不同的維數 $D$ 及 $n$ 有何規律？

(一) 一維：

我們透過 Visual Basic 程式跑出來的結果為：

| $N$ \ $(m,n)$= | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 4,5 | 4,6 | 5,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E |
| 1 | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E | E |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | E | E | E | E | E | E | E |
| 3 | 2,3 | 2,3 | 2,3 | 2,3 | 2,3 | 3 | 3 | 3 | 3 | E | E | E |
| 4 | 2,3 | 2,3,4 | 2,3,4 | 2,3,4 | 2,3,4 | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 4 | 4 | E |
| 5 | E | 4 | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 3,4 | 3,4,5 | 3,4,5 | 3,4,5 | 4,5 | 4,5 | 5 |
| 6 | E | E | 5 | 5,6 | 5,6 | 3,4 | 3,4,5 | 3,4,5,6 | 3,4,5,6 | 4,5 | 4,5,6 | 5,6 |
| 7 | 2 | E | E | 6 | 6,7 | E | 5 | 5,6 | 5,6,7 | 4,5 | 4,5,6 | 5,6 |
| 8 | 2,3 | 2 | E | E | 7 | E | E | 6 | 6,7 | 4,5 | 4,5,6 | 5,6 |
| 9 | 2,3 | 2,3,4 | 2 | E | E | E | E | E | 7 | E | 6 | 5,6 |
| 10 | E | 2,3,4 | 2,3 | 2 | E | 3 | E | E | E | E | E | 5,6 |
| 11 | E | 4 | 2,3,4,5 | 2,3 | 2 | 3,4 | 3 | E | E | E | E | E |
| 12 | 2 | E | 4,5 | 2,3,4 | 2,3 | 3,4 | 3,4,5 | 3 | E | E | E | E |
| 13 | 2,3 | E | 5 | 4,5,6 | 2,3,4 | 3,4 | 3,4,5 | 3,4 | 3 | 4 | E | E |
| 14 | 2,3 | 2 | E | 5,6 | 4,5 | E | 3,4,5 | 3,4,5,6 | 3,4 | 4,5 | 4 | E |
| 15 | E | 2,3,4 | E | 6 | 5,6,7 | E | 5 | 3,4,5,6 | 3,4,5 | 4,5 | 4,5,6 | E |
| 16 | E | 2,3,4 | 2 | E | 6,7 | E | E | 5,6 | 3,4,5,6,7 | 4,5 | 4,5,6 | 5 |
| 17 | 2 | 4 | 2,3 | E | 7 | 3 | E | 6 | 5,6,7 | 4,5 | 4,5,6 | 5,6 |
| 18 | 2,3 | E | 2,3,4,5 | 2 | E | 3,4 | E | E | 6,7 | E | 4,5,6 | 5,6 |
| 19 | 2,3 | E | 4,5 | 2,3 | E | 3,4 | 3 | E | 7 | E | 6 | 5,6 |
| 20 | E | 2 | 5 | 2,3,4 | 2 | 3,4 | 3,4,5 | E | E | E | E | 5,6 |
| 21 | E | 2,3,4 | E | 4,5,6 | 2,3 | E | 3,4,5 | 3 | E | E | E | 5,6 |
| 22 | 2 | 2,3,4 | E | 5,6 | 2,3,4 | E | 3,4,5 | 3,4 | E | 4 | E | E |
| 23 | 2,3 | 4 | 2 | 6 | 4,5 | E | 5 | 3,4,5,6 | 3 | 4,5 | E | E |
| 24 | 2,3 | E | 2,3 | E | 5,6,7 | 3 | E | 3,4,5,6 | 3,4 | 4,5 | 4 | E |
| 25 | E | E | 2,3,4,5 | E | 6,7 | 3,4 | E | 5,6 | 3,4,5 | 4,5 | 4,5,6 | E |
| 26 | E | 2 | 4,5 | 2 | 7 | 3,4 | E | 6 | 3,4,5,6,7 | 4,5 | 4,5,6 | E |
| 27 | 2 | 2,3,4 | 5 | 2,3 | E | 3,4 | 3 | E | 5,6,7 | E | 4,5,6 | 5 |
| 28 | 2,3 | 2,3,4 | E | 2,3,4 | E | E | 3,4,5 | E | 6,7 | E | 4,5,6 | 5,6 |
| 29 | 2,3 | 4 | E | 4,5,6 | 2 | E | 3,4,5 | E | 7 | E | 6 | 5,6 |
| 30 | E | E | 2 | 5,6 | 2,3 | E | 3,4,5 | 3 | E | E | E | 5,6 |
| 31 | E | E | 2,3 | 6 | 2,3,4 | 3 | 5 | 3,4 | E | 4 | E | 5,6 |
| 32 | 2 | 2 | 2,3,4,5 | E | 4,5 | 3,4 | E | 3,4,5,6 | E | 4,5 | E | 5,6 |
| 33 | 2,3 | 2,3,4 | 4,5 | E | 5,6,7 | 3,4 | E | 3,4,5,6 | 3 | 4,5 | E | E |
| 34 | 2,3 | 2,3,4 | 5 | 2 | 6,7 | 3,4 | E | 5,6 | 3,4 | 4,5 | 4 | E |
| 35 | E | 4 | E | 2,3 | 7 | E | 3 | 6 | 3,4,5 | 4,5 | 4,5,6 | E |
| 36 | E | E | E | 2,3,4 | E | E | 3,4,5 | E | 3,4,5,6,7 | E | 4,5,6 | E |
| 37 | 2 | E | 2 | 4,5,6 | E | E | 3,4,5 | E | 5,6,7 | E | 4,5,6 | E |
| 38 | 2,3 | 2 | 2,3 | 5,6 | 2 | 3 | 3,4,5 | E | 6,7 | E | 4,5,6 | 5 |
| 39 | 2,3 | 2,3,4 | 2,3,4,5 | 6 | 2,3 | 3,4 | 5 | 3 | 7 | E | 6 | 5,6 |
| 40 | E | 2,3,4 | 4,5 | E | 2,3,4 | 3,4 | E | 3,4 | E | 4 | E | 5,6 |
| 41 | E | 4 | 5 | E | 4,5 | 3,4 | E | 3,4,5,6 | E | 4,5 | E | 5,6 |
| 42 | 2 | E | E | 2 | 5,6,7 | E | E | 3,4,5,6 | E | 4,5 | E | 5,6 |
| 43 | 2,3 | E | E | 2,3 | 6,7 | E | 3 | 5,6 | 3 | 4,5 | E | 5,6 |
| 44 | 2,3 | 2 | 2 | 2,3,4 | 7 | E | 3,4,5 | 6 | 3,4 | 4,5 | 4 | E |
| 45 | E | 2,3,4 | 2,3 | 4,5,6 | E | 3 | 3,4,5 | E | 3,4,5 | E | 4,5,6 | E |
| 46 | E | 2,3,4 | 2,3,4,5 | 5,6 | E | 3,4 | 3,4,5 | E | 3,4,5,6,7 | E | 4,5,6 | E |
| 47 | 2 | 4 | 4,5 | 6 | 2 | 3,4 | 5 | E | 5,6,7 | E | 4,5,6 | E |
| 48 | 2,3 | E | 5 | E | 2,3 | 3,4 | E | 3 | 6,7 | E | 4,5,6 | E |
| 49 | 2,3 | E | E | E | 2,3,4 | E | E | 3,4 | 7 | 4 | 6 | 5 |
| 50 | E | 2 | E | 2 | 4,5 | E | E | 3,4,5,6 | E | 4,5 | E | 5,6 |

表中列($N$)與行($n$)對應的格子內的數字表示當手可取的數，E 代表當手沒有數可取(即無論如何取皆輸)，即該 $N$ 值為輸數。

1.以 $n$=2,$m$=6,$N$=30 爲例：

| | |
|---|---|
| 若 $x_1$=5 | 由表得知 $Y$ 無數可取，故 $Y$ 輸。 |
| 若 $x_1$=6 | 由表得知 $Y$ 無數可取，亦輸。 |

2.以 $n$=3,$m$=7,$N$=21 爲例：

<table>
<tr><td>若 $x_1$=3</td><td colspan="2">由表得知 $Y$ 取 6;7，分別剩餘 12;11，$X$ 輸。</td></tr>
<tr><td>若 $x_1$=4</td><td colspan="2">由表得知 $Y$ 取 5;6;7，分別剩下 12;11;10，$X$ 無數可取，亦輸。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">若 $x_1$=5</td><td rowspan="3">由表得知 $Y$ 取 3;4;5;6;7，分別剩餘</td><td>13，因爲 $X$ 不能取 3，故 $X$ 輸。</td></tr>
<tr><td>12;11;10，$X$ 無數可取，亦輸。</td></tr>
<tr><td>9，因爲 $X$ 不能取 7，故 $X$ 輸。</td></tr>
<tr><td>若 $x_1$=6</td><td colspan="2">由表得知 $Y$ 取 3;4;5，分別剩下 12;11;10，$X$ 亦無數可取，亦輸</td></tr>
<tr><td>若 $x_1$=7</td><td colspan="2">由表得知 $Y$ 取 3;4，剩餘 11;10，$X$ 輸。</td></tr>
</table>

由觀察的結果知，如果讓 $Y$ 有相對應的拿取方法，則此數應爲輸數。我們將輸數集 $L$ 整理如下：

| | |
|---|---|
| $m=2$ ,$n=3$ | $L=\{0,1,5,6,10,11,15,16,\cdots\}$ |
| $m=2$ ,$n=4$ | $L=\{0,1,6,7,12,13,18,19,\cdots\}$ |
| $m=3$ ,$n=4$ | $L=\{0,1,2,7,8,9,14,15,16,\cdots\}$ |
| $m=3$ ,$n=5$ | $L=\{0,1,2,8,9,10,16,17,18\cdots\}$ |
| $m=4$ ,$n=5$ | $L=\{0,1,2,3,9,10,11,12,18,19,20,21,\cdots\}$ |

推論： $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$k(n+m)$ , $k(n+m)+1$ ,⋯, $k(n+m)+(m\text{-}1)$爲輸數

$k(n+m)+m$ , $k(n+m)+m+1$ ,⋯, $k(n+m)+n+(m\text{-}1)$爲贏數

證明：

令命題 $L(k)$表示：〝 $k(n+m)$ , $k(n+m)+1$ ,⋯, $k(n+m)+(m-1)$爲輸數 〞

命題 $W(k)$表示：〝 $k(n+m)+m$ , $k(n+m)+m+1$ ,⋯, $k(n+m)+n+(m\text{-}1)$爲贏數 〞

⑴先証 $L(0)$成立；當 $k$=0 時，顯然 $N$=0,1,2,⋯,$m$-1 時，$X$ 輸，故 $L(0)$成立。

⑵再証〝$L(k)$成立⇒$W(k)$成立〞

假設 $L(k)$成立，

則考慮 $N=k(n+m)+j$ ($j=m,m+1,\cdots,n$)，$X$ 只要取 $j$，剩下 $k(n+m)$，由歸納法假設知 $k(n+m)$爲輸數，故成立

$N=k(n+m)+j$ ($j=n+1,n+2,\cdots,n+m-1$)，$X$ 只要取 $n$，剩下 $k(n+m)$~$k(n+m)+(m-1)$，由歸納法假設知 $k(n+m)+i$ ($i=0,1,\cdots,m-1$)爲輸數，故 $W(k)$成立

⑶最後証〝$W(k)$成立⇒$L(k+1)$成立〞

假設命題 $W(k)$成立

於是考慮 $N=(k+1)(n+m)+i=[k\ (n+m)+i\ ]+(n+m)$，其中 $i=0,1,2,\cdots,m-1$，

因 $X$ 取數的範圍爲 $m\sim n$，則剩餘數的範圍爲 $k(n+m)+i+m\ \sim\ k(n+m)+i+n$，由歸納法

假設知此爲贏數，故命題 $L(k+1)$也成立

由數學歸納法原理得証。

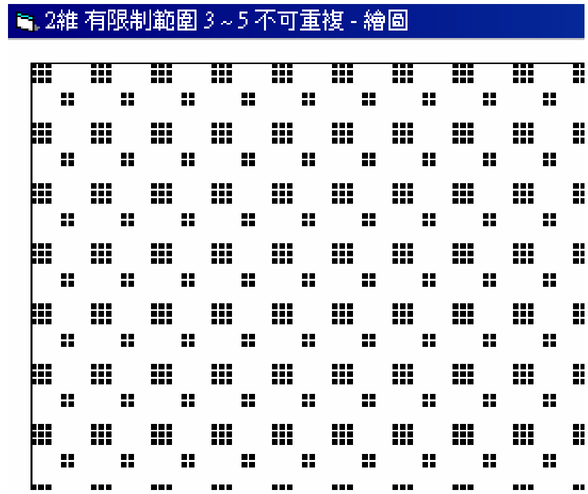
結論：一維 Nim-like 遊戲 $\langle N$ , Cond(2,3) ; $X$ , $Y\rangle$ 中，

$$L=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} L_k$$ ，其中 $L_k=\{\ k(n+m)\ ,\ k(n+m)+1\ ,\cdots,\ k(n+m)+(m-1)\ \}$，$\forall k\in\mathbb{N}^*$。

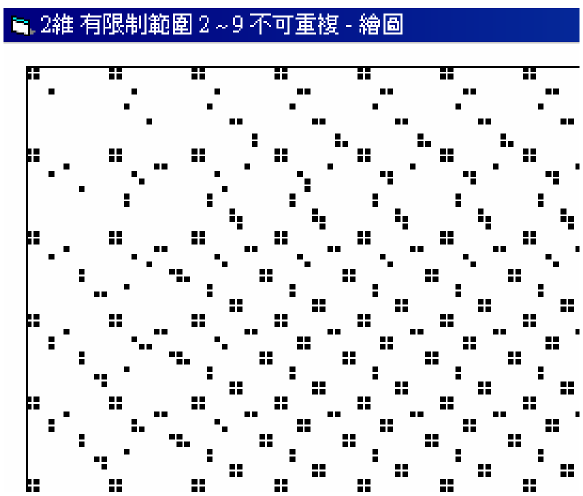
(二) 二維：

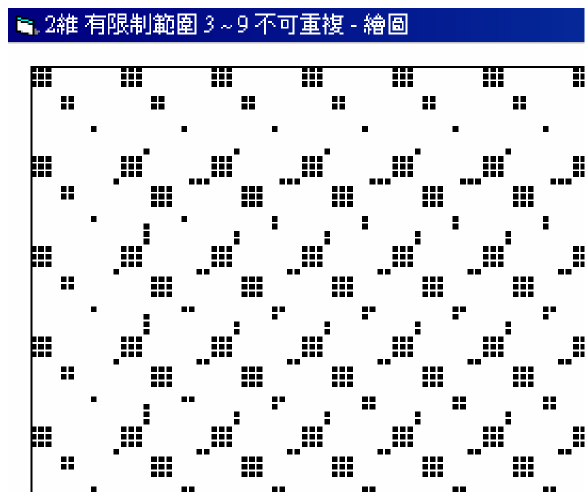
我們透過 Visual Basic 程式跑出來的結果為：

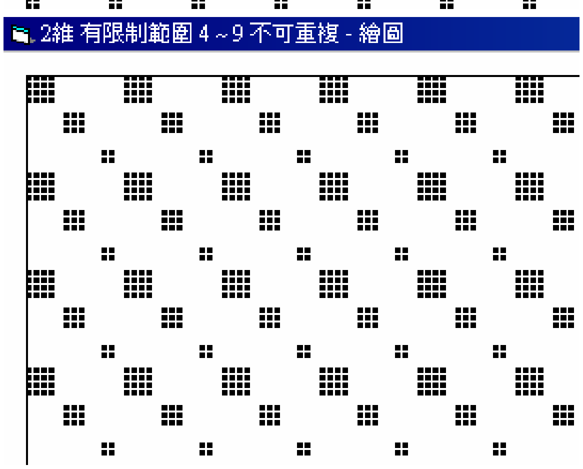
(1)固定 $n$=5，改變 $m$ 的值

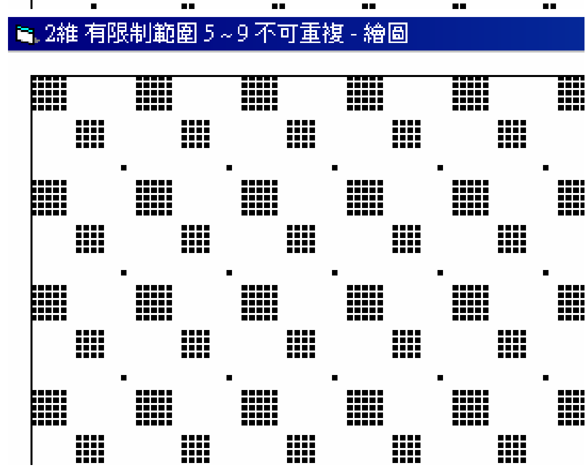




(2)固定 $n$=9，改變 $m$ 的值

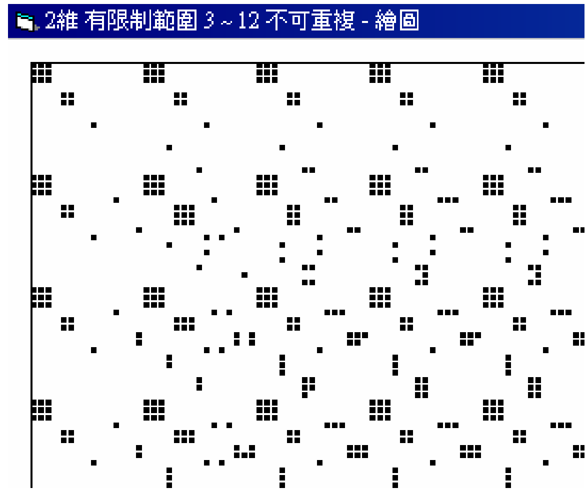


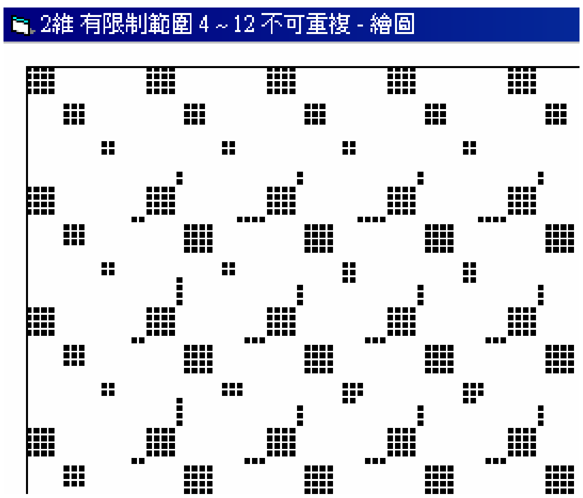



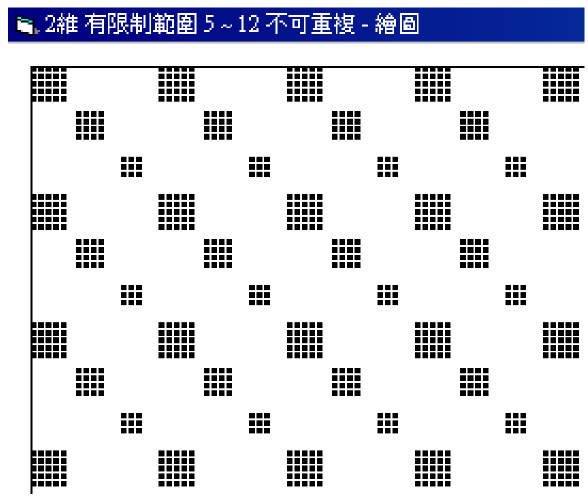



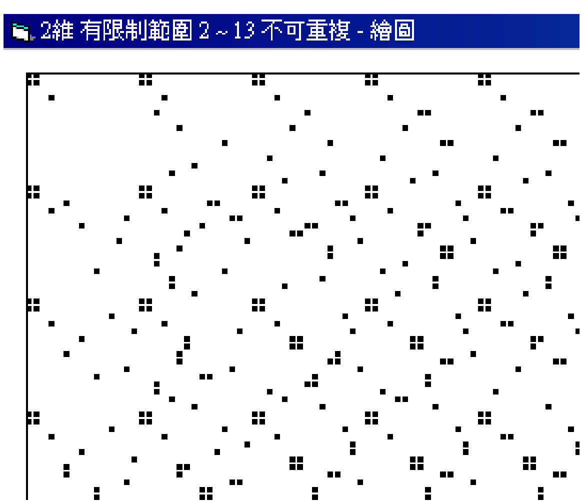
(3)固定 $n$=12，改變 $m$ 的值

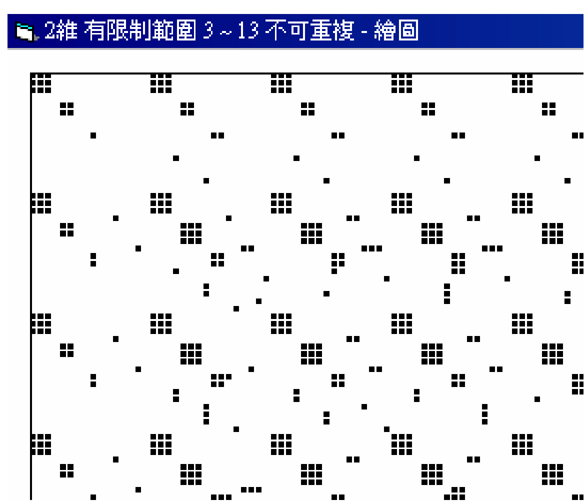



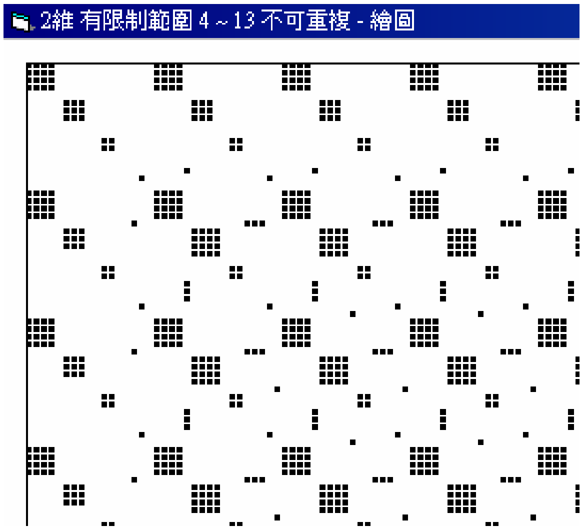



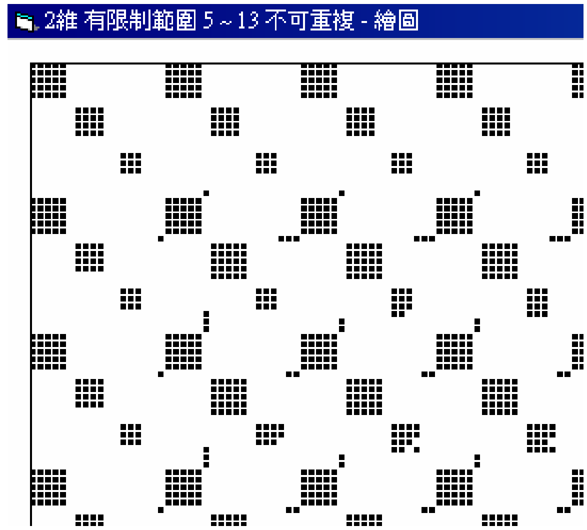



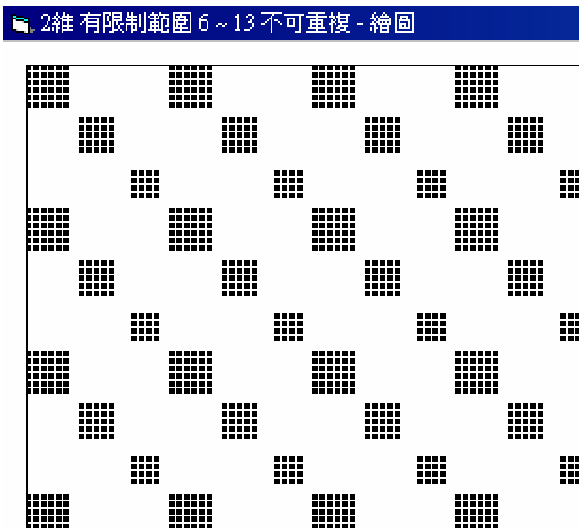

(4)固定 $n$=13，改變 $m$ 的值

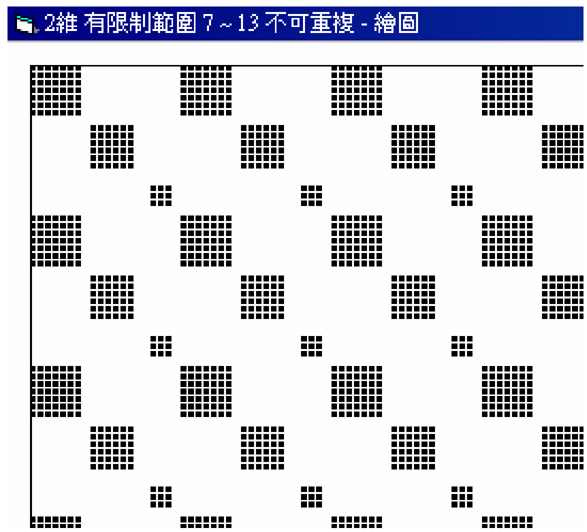





至於隱藏在這些圖形背後的數學規律，則有待繼續研究下去。

## 伍、研究結果

一、一維 Nim-like 遊戲〈$N$ , Cond(1) ; $X$ , $Y$〉的輸數集合 $L=\{\ k(n+1)\mid k\in\mathbb{N}\ \}$

二、一維 Nim-like 遊戲〈$N$ , Cond(2) ; $X$ , $Y$〉的輸數集合 $L=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} L_k$ ，其中

$L_k=\{\ k(n+m)\ ,\ k(n+m)+1\ ,\cdots,\ k(n+m)+(m\text{-}1)\ \}$，$\forall k\in\mathbb{N}^*$

三、一維 Nim-like 遊戲〈$N$ , Cond(1,4) ; $X$ , $Y$〉的輸數集合 $L$ 為

(一) 若 $n$ 為偶數，則 $L=\{k(n+1)\mid k\in\mathbb{N}\ \}$。

(二) 若 $n=8s+3$，$L=\{k(n+1)\mid k\in\mathbb{N}\ \}$

(三) 若 $n=8s+5$，$L=\{(n+2)+k(2n+3),(2n+3)+k(2n+3)\mid k\in\mathbb{N}^*\ \}$

(四) 若 $n=2^{2p}\cdot q$(其中 $q$ 為奇數)，則 $L=\{k(n+1)\mid k\in\mathbb{N}\ \}$

四、一維 Nim-like 遊戲 $\langle N, \mathrm{Cond}(2,4); X, Y\rangle$ 的輸數集合 $L=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} L_k$ ，其中

$L_k=\{\ k(n+m)\ ,\ k(n+m)+1\ ,\cdots,\ k(n+m)+(m-1)\ \}$，$\forall k\in\mathbb{N}^*$

五、二維 Nim-like 遊戲 $\langle (N_1, N_2), \mathrm{Cond}(1); X, Y\rangle$ 的輸數組集合

$L=\{(\ i(n+1)+u, j(n+1)+u\ )\mid u=0,1,\ldots,n; i,j\in\mathbb{N}^*\}$

即 $(N_1,N_2)\in L \Leftrightarrow N_1\equiv N_2 \mod (n+1)$。

六、二維 Nim-like 遊戲 $\langle (N_1, N_2), \mathrm{Cond}(2); X, Y\rangle$ 的輸數組集合

$L=\{(\ i(m+n)+km+r_1, j(m+n)+km+r_2\ )\mid r_1,r_2=0,1,\ldots,m-1;\ i,j,k\in\mathbb{N}^*;$

$km+r_1, km+r_2\le m+n-1\}$

七、二維 Nim-like 遊戲 $\langle (N_1, N_2), \mathrm{Cond}(1,4); X, Y\rangle$ 的輸數組集合

若 $n$ 為偶數，則 $L=\{(\ i(n+1), j(n+1)\ )\mid i,j\in\mathbb{N}^*\}$

# 陸、討論與展望

關於這次科展的主題，除了很完整的推導出一維Nim-like遊戲 $\langle N_1, \mathrm{Cond}; X, Y\rangle$ 的公式，並利用將二維問題轉化成一維模式的方式，成功的推廣至若干二維之情形，我們相信此種想法也同樣可以用在其他二維的情形，甚至三維空間的情形是否也可以以此類推呢？由於時間有限，我們期待將來能夠繼續完成它。

# 柒、參考資料


一、高級中學數學課本 第一冊 第三章 數列與級數 南一出版社

二、許志農教授網站"http://math.ntnu.edu.tw/~maco/arith.htm"：《算術講義》-第 11 單元「兩則算術遊戲」

三、Boon-Beng Gan and Yeong-Nan Yeh,*A Nim-like Game and Dynamic Recurrence Relations*,pp. 213-228,Studies in Applied Mathematics,1995.

四、數學歸納法，夏興國 著，九章出版社

五、精通 Visual Basic 6.0 中文版，洪錦魁 著，文魁資訊

【評　語】　　040408　致勝密碼

1) 口頭報告當中無法掌握計算的硬體或軟體的性能，難以看出電腦對於本作品發揮何等的功能。

2) 團隊合作不夠理想，無法凸顯需要三人來完成本作品的必要性。