中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040407

Wiener 數，再現江湖(二)

學校名稱：臺北縣私立光仁高級中學

作者：	指導老師：
高二 廖偉傑	翁立衛
高二 洪至平	林麗卿
高二 尚宗承	
高一 陳冠輔	

關鍵詞：Wiener 數　Σ　遞迴關係

Wiener數，再現江湖(二)

摘要

這件作品是經歷兩年的努力所得，第一年我們著重在多種柱形、多面體及化學中的鏈狀圖形之 Wiener 數計算，第二年我們將原有的圖形再做增廣，並發展 Johnson 多面體和蜘蛛網圖形，總共有八大類，約 80 多個圖形的 Wiener 數計算。而計算方法：則多以「步數法」及「遞迴法」來計算，中間並常以數學歸納法證明。

壹、研究動機

2006 年，我們以《Wiener 數，再現江湖》參加北區科展獲得佳作，雖然歡欣研究獲得肯定，但我們知道作品還有許多探討空間，經過一年努力，我們充實許多內容，再次參展。

貳、研究問題

一、名詞定義

（一）Wiener 數

距離：圖形 G 中每一對相異頂點間的一條路徑若經過圖形 G 中其他 k 個頂點，則這條路徑所決定的步數為 k+1 (k 為正整數或零)，一對頂點間所有可能路徑之步數的最小值稱為這對頂點間的距離。

Wiener 數：圖形 G 中每一對相異頂點間**距離的總和**。簡寫成 W(G)。

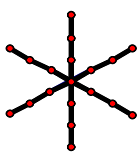
Wiener 數是由美國物化學家 Harold Wiener 在 1947 到 1948 年間所提出，他想要用這個數值作為描繪分子形狀的數學模式，研究發現這個值和鏈烷類(alkanes)的物化性質有很大關係。在化學上，大多數分子圖形都是多重循環的(polycyclic)，頂點多且連結情況相當複雜，在計算 Wiener 數時會遭遇許多困難，因此，還有許多問題沒被解出，如：找不出遞迴的方式來處理一般圖形的 Wiener 數，特別是多重循環的圖形(引自參考資料 5)。

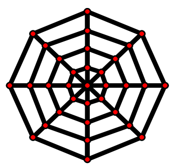
（二）天女散花圖

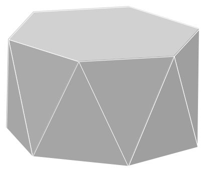
以某一點為中心，所畫出來的放射狀圖形，以 F(m,n)來表示 m 個分支，每個分支上皆有 n 個節點(不包含中心點)的天女散花圖（如圖一所示，以 F(6,3)為例）。

（三）蜘蛛網圖形

將天女散花圖同一層節點連接起來圖形則稱為蜘蛛網圖形，蜘蛛網圖形亦可視為 n 層 m 角柱投影圖，以 SW(m.n)來表示，SW 取自英文蜘蛛網 **Spider Web**。(如圖二所示，以 SW(8,4)為例)。


《圖一》 F(6,3)


《圖二》SW(8,4)


《圖三》反角柱

（四）反角柱

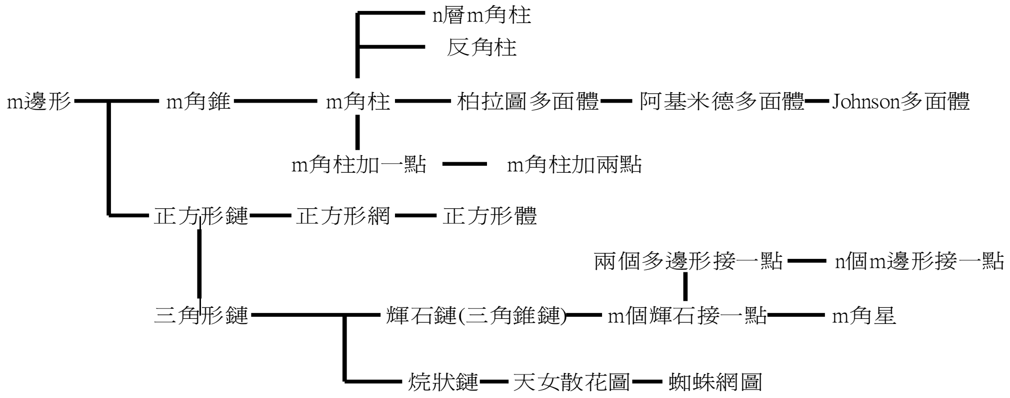
以等腰三角形連接上下兩個相同的正多邊形所形成的圖形(如圖三).

（五）Johnson 多面體

除正多面體、阿基米德多面體、角柱及反角柱之外，由一種正 3,4,5,6,8,10 邊形以上所組成的多面體稱為 Johnson 多面體。

二、研究問題

本研究擬計算下列圖形之 Wiener 數。



參、研究設備及器材

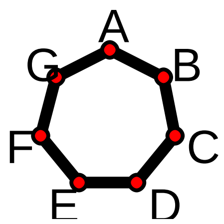
Microsoft Word、The Geometer's Sketchpad V4
Ulead Photoimpact 8.0、Poly v1.11

肆、研究過程

一、尋找表格規律性

1. 正 m 邊形 Wiener 數計算

I.奇數系：

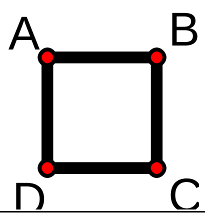
<table>
<tr><th>邊數</th><th>圖</th><th>距離</th><th>Wiener 數</th></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>C</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>D</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>E</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>F</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>G</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>$\dfrac{7(1+2+3+3+2+1)}{2}=42$</td></tr>
</table>

當 m=2k+1 邊形，最遠距離為 k，某一頂點到其他頂點距離和為

1+2+…+k+k+…+2+1=2(1+2+…+k)=2× $\dfrac{k(k+1)}{2}=k(k+1)$，

故 Wiener 數= $\dfrac{1}{2}\times m\times\left(\dfrac{m-1}{2}\right)\left(\dfrac{m-1}{2}+1\right)=\dfrac{m}{2}\left\{\dfrac{(m+1)(m-1)}{4}\right\}=\dfrac{m(m^2-1)}{8}$

II.偶數系：

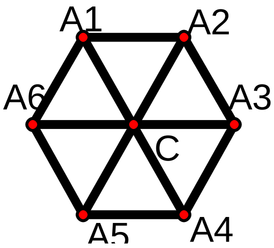
<table>
<tr><th>邊數</th><th>圖</th><th>距離</th><th>Wiener 數</th></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>C</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>D</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>$\dfrac{4(1+2+1)}{2}=8$</td></tr>
</table>

當 m=2k 邊形，最遠距離為 k，某一頂點到其他頂點距離數為 1+2+…+k+…+2+1=k^2，

故 Wiener 數= $\dfrac{2k\times k^2}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{m\times\left(\dfrac{m}{2}\right)^2\right\}=\dfrac{m^3}{8}$

結論：奇數邊形 Wiener 數一般式為 $\dfrac{m(m^2-1)}{8}$，偶數邊形 Wiener 數一般式為 $\dfrac{m^3}{8}$

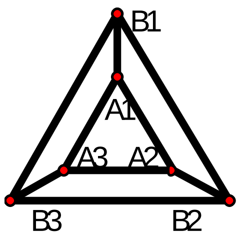
2. 以正多邊形爲底面錐體 Wiener 數計算(以 m=6 爲例)

底邊	圖	距離	Wiener 數
6		(見下表)	$6+\frac{6(1+3\times 2+1)}{2}=30$ 頂點到底面各頂點間有一條直達路線，底面頂點到相鄰兩點有直達路線，但有兩不相鄰頂點，要過兩步才能到達。

	C	A1	A2	A3	A4	A5	A6
C		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
A1			**1**	**2**	**2**	**2**	**1**
A2				**1**	**2**	**2**	**2**
A3					**1**	**2**	**2**
A4						**1**	**2**
A5							**1**
A6							

因此 m 角錐 Wiener 數計算爲= $m+\frac{m[1+2(m-3)+1]}{2}=m(m-1)$

3. 以正多邊形爲底面柱體 Wiener 數計算(以 m=3 爲例)

底邊	圖	距離	Wiener 數
3		(見下表)	$4\times 3+9=21$

	A1	A2	A3	B1	B2	B3
A1		**1**	**1**	1	2	2
A2			**1**	2	1	2
A3				2	2	1
B1					**1**	**1**
B2						**1**
B3						

m 角柱一般式：

當 m=2k+1， $m\in N$ ，$4W(m)+m^2=4\times\frac{m(m^2-1)}{8}+m^2=\frac{m(m^2+2m-1)}{2}$

當 m=2k， $m\in N$ ，$4W(m)+m^2=4\times\frac{m^3}{8}+m^2=\frac{m^2(m+2)}{2}$

4. 反角柱：Wiener 數差別在 m 角柱中間矩形增加線對上下兩多邊形相連關係。

奇數邊形反角柱：

m 邊形反角柱(m 爲奇數)，由 A_1 出發到 B 層距離會改變有 B_1、B_2、B_3、$B_4 \ldots B_k$，$k=\frac{m-1}{2}$ ，共 $\frac{m-1}{2}$ 點，A 層有 m 點，所以比 m 角柱少距離總和爲 $m\left(\frac{m-1}{2}\right)$ ，

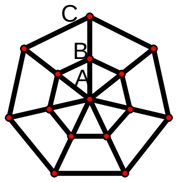
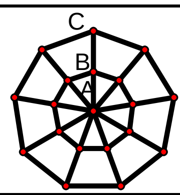
Wiener 數爲 $\frac{m(m^2+2m-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m^2(m+1)}{2}$ 。

偶數邊形反角柱：

同理，偶邊形反角柱之 Wiener 數爲 $\frac{m^2(m+2)}{2}-m\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{m^2(m+1)}{2}$

5. m 角柱上加一點：參考強森多面體 J07~ J09 並做推廣。

I.奇數系(m=2k+1)

M 角柱上加一點	7					9					
圖											
距離與個數關係	距離	0	1	2	3	距離	0	1	2	3	4
	A	1	7	7	0	A	1	9	9	0	0
	B	1	4	6	4	B	1	4	8	6	0
	C	1	3	5	6	C	1	3	5	8	2
Wiener 數	217					387					

關係：A： $1\times(2k+1)+2\times(2k+1)=6k+3$

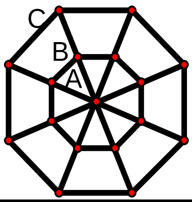
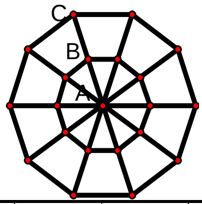
B： $(2k+1)\{1\times4+2\times2k+3(2k-2)\}=2(2k+1)(5k-1)$

C： $(2k+1)\{1\times3+2\times5+3\times2k+4(2k-6)\}=(2k+1)(14k-11)$

一般式： $\frac{1}{2}\{(6k+3)+(2k+1)(10k-2)+(2k+1)(14k-11)\}=(2k+1)(12k-5)$ ，又因 m=2k+1

故奇數 m 角柱上加一點 Wiener 數= $m(6m-11), m\geq7$ 。(註：m=3 時 Wiener=30，m=5 時 Wiener=100)

II.偶數系(m=2k)

M 角柱上加一點	8						10					
圖												
距離與個數關係	距離	0	1	2	3	4	距離	0	1	2	3	4
	A	1	8	8	0	0	A	1	10	10	0	0
	B	1	4	7	5	0	B	1	4	9	7	0
	C	1	3	5	7	1	C	1	3	5	9	3
Wiener 數	296						490					

關係：A： $1\times2k+2\times2k=6k$

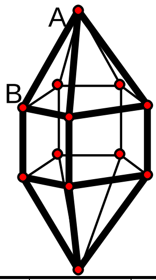
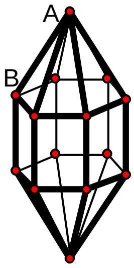
B： $2k\{1\times4+2\times(2k-1)+3(2k-3)\}=20k^2-14k$

C： $2k\{1\times3+2\times5+3(2k-1)+4(2k-7)\}=28k^2-36k$

一般式： $\frac{6k+(20k^2-14k)+(28k^2-36k)}{2}=24k^2-22k$ ，又因 m=2k

偶數 m 角柱上加一點 Wiener 數= $m(6m-11), m\geq8$ 。(註：m=4 時 Wiener=60，m=6 時 Wiener=153)

6. m 角柱上下加一點：參考 Johnson 多面體 J14~ J16 並做推廣

M 角柱上下加一點	5					6				
圖										
距離與數關係	距離	0	1	2	3	距離	0	1	2	3
	A	1	5	5	1	A	1	6	6	1
	B	1	4	5	2	B	1	4	6	3
Wiener 數	118					171				

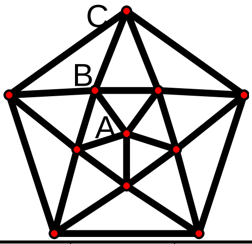
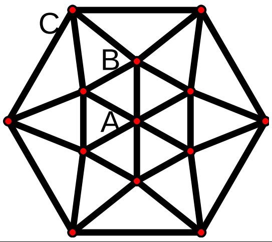
關係：A： $(1\times m+2\times m+3\times 1)=3m+3$ ，

B： $\{1\times 4+2\times m+3(m-3)\}=5m-5$

一般式： $\frac{1}{2}\{2(3m+3)+2m(5m-5)\}=5m^2-2m+3$

m 角柱上下加一點 Wiener 數= $5m^2-2m+3$

7. 反 m 角柱上加一點：參考 Johnson 多面體 J10~ J11 並做推廣。

反 m 角柱	5					6				
圖形 （投影）										
距離與個數關係	距離	0	1	2	3	距離	0	1	2	3
	A	1	5	5	0	A	1	6	6	0
	B	1	5	4	1	B	1	5	5	2
	C	1	4	5	1	C	1	4	5	3
Wiener 數	90					141				

關係：A： $1\times m+2\times m=3m$

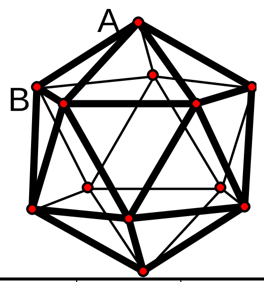
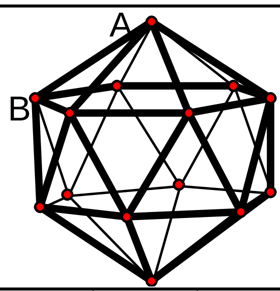
B： $1\times 5+2(m-1)+3(m-4)=5m-9$

C： $1\times 4+2\times 5+3(2m-9)=5m-13$

一般式： $\frac{1}{2}\{3m+m(5m-9)+m(6m-13)\}=\frac{\mathrm{m}(11\mathrm{m}-19)}{2}$

反 m 角柱上加一點之 Wiener 數= $\frac{1}{2}\{\mathrm{m}(11\mathrm{m}-19)\}, m\geq 4$(註：m=3 時 Wiener=27，m=4 時 Wiener=52)

8. 反 m 角柱上下加一點：參考 Johnson 多面體 J17 並做推廣

m 角柱加兩點	5					6				
圖形 （投影）										
距離與個數關係	距離	0	1	2	3	距離	0	1	2	3
	A	1	5	5	1	A	1	6	6	1
	B	1	5	5	1	B	1	5	6	2
Wiener 數	108					159				

關係：A：$(1\times m+2\times m+3\times 1)=3m+3$

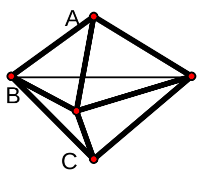
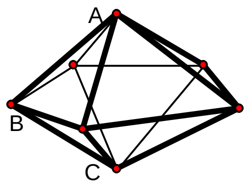
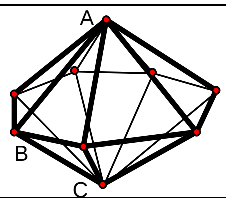
B：$1\times 5+2\times m+3(m-4)=5m-7$

反 m 角柱上下加一點 Wiener 數=$\frac{1}{2}\{2(3m+3)+2m(5m-7)\}=5m^2-4m+3$

9. 多邊形上下各加一點

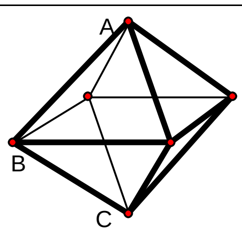
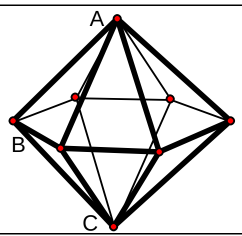
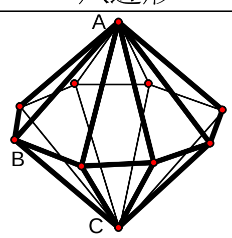
此部份圖形爲多邊形上下各加一點，我們將圖形分爲 A 點、B 層和 C 點，需計算 A→B、B→C、A→C、B→B 的步數關係。

奇數系(m)　　J13

	三邊形	五邊形	七邊形
圖			
A→B(B→C)	1×3＝3	1x5=5	1×7＝7
A→C	2	2	2
B→B	$3(1+1)\times\frac{1}{2}=3$	$5(1+2+2+1)\times\frac{1}{2}=15$	$7(1+2+2+2+1)\times\frac{1}{2}=35$

Wiener 數=$1\times m+1\times m+2+m(m-2)=m^2+2$

偶數系(m)　　J12

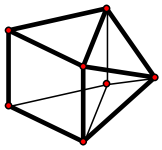
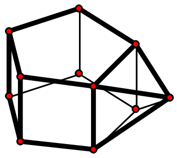
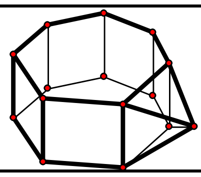
	四邊形	六邊形	八邊形
圖			
A→B(B→C)	１x4＝4	１x6＝6	１x8＝8
A→C	2	2	2
B→B	$4(1+2+1)\times\frac{1}{2}=8$	$6(1+2+2+2+1)\times\frac{1}{2}=24$	$8(1+2+2+2+2+2+1)\times\frac{1}{2}=48$

Wiener 數=$1\times m+1\times m+2+m(m-2)=m^2+2$

10. m 角柱側面加一點

因新增點不影響原柱體任兩點連通情形，只需計算新增點對原圖之步數關係。新增點對上層與下層的步數相同

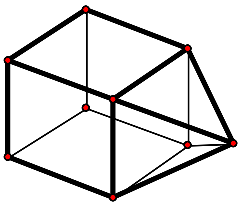
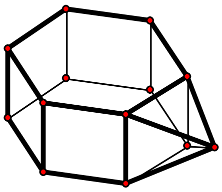
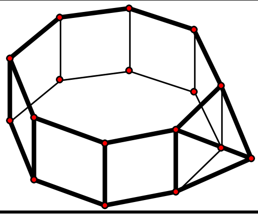
奇數系(J52)

m 角柱側面加一點	3	5	7
圖			
Wiener 數	$2(1+2+1)=8$	$2(1+2+3+2+1)=18$	$2(1+2+3+4+3+2+1)=32$

m 爲奇數，Wiener 數

$$=\frac{m\left(m^2+2m-1\right)}{2}+2\left(1+2+\cdots+\frac{m+1}{2}+\cdots+2+1\right)=\frac{m^3+3m^2+m+1}{2}$$

偶數系(J54)

m 角柱側面加一點	4	6	8
圖			
Wiener 數	$2(1+2+2+1)=12$	$2(1+2+3+3+2+1)=24$	$2(1+2+3+4+4+3+2+1)=40$

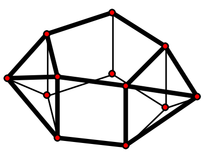
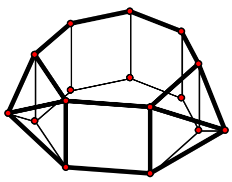
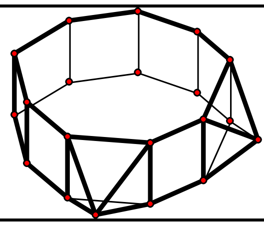
m 爲偶數，Wiener 數$=\frac{m^2(m+2)}{2}+2\left(1+2+\cdots+\frac{m}{2}+\frac{m}{2}\cdots+2+1\right)=\frac{m(m+1)(m+2)}{2}$

11. m 角柱相隔之兩側面各加一點

此部份圖形爲 m 角柱兩相隔一面之側面各加一點，因新增點不影響圖形任兩點間連通情形，所以只需計算新增點對原柱體的步數和新增點相互步數關係。新增的點對原柱體的步數關係在”m 角柱側面加一點”時已求出，所以只需計算新增兩點的步數關係。

奇數系 J53

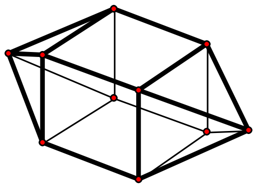
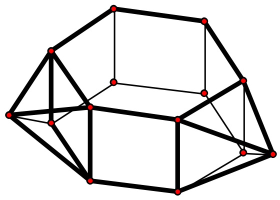
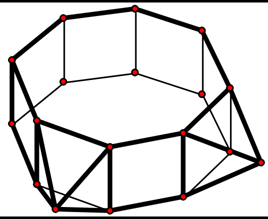
新增點對原柱體之步數爲 $2\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$，新增兩點間步數爲：

m 角柱	5	7	9
圖			
新增兩點間步數	3	3	3

Wiener 數$=\frac{m(m^2+2m-1)}{2}+2\left[2(\frac{m+1}{2})^2\right]+3=\frac{m^3+4m^2+3m+8}{2}$

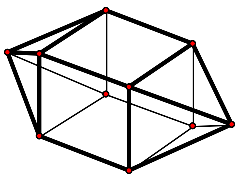
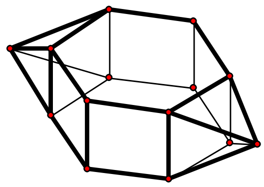
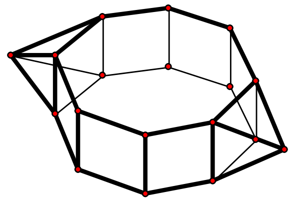
偶數系　　J56

新增點對原柱體之步數為 $\dfrac{m(m+2)}{2}$ ，新增兩點間步數為：

m 角柱	4	6	8
圖			
新增兩點間步數	3	3	3

Wiener 數= $\dfrac{m(m+2)}{2}+2\left[\dfrac{m(m+2)}{2}\right]+3=\dfrac{m^3+4m^2+4m+6}{2}$

12. 偶數角柱相對兩側面各加一點

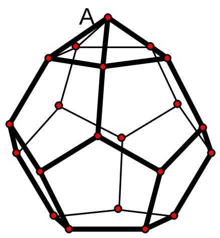
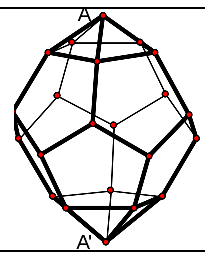
	四邊形	六邊形	八邊形
圖			
對原柱體步數	$\dfrac{4(4+2)}{2}=12$	$\dfrac{6(6+2)}{2}=24$	$\dfrac{8(8+2)}{2}=40$
新增點相對步數	3	4	5

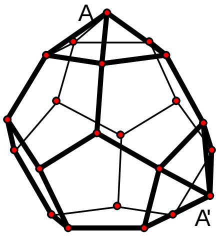
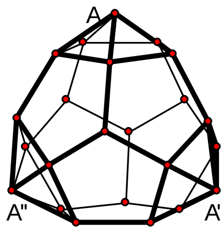
此部份圖形為偶數邊形柱m相對兩側面各加一點。此部份圖形包含 Johnson 多面體 J55 圖形。新增兩點不影響原圖形任兩點間的步數關係，所以只需計算新增點對原柱體的步數和兩點間的步數。其中新增的兩點對原柱體的步數關係在多邊形柱變形四中已求出，只需計算兩點間的步數關係即可。

Wiener 數= $\dfrac{m^2(m+2)}{2}+2\left[\dfrac{m(m+2)}{2}\right]+\dfrac{m+2}{2}=\dfrac{(m+1)^2(m+2)}{2}$

13. 十二面體加點：參考自 Johnson 多面體 J58~J61 並做推廣

12 面體外加點(A)，可看成 12 面體加 5 角錐，發現若外接的角錐 ≤ 5 便不會對原圖形產生捷徑，

多面體	J58	J59
圖形		
計算方法	W(J58)= W(12 面體)+2W(A→12 面體) = 500+(1x5+2x5+3x5+4x5) = 550	W(J59)= W(12 面體)+2W(A→12 面體)+W(A→A') = 500+2(1x5+2x5+3x5+4x5)+5 = 605

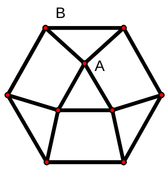
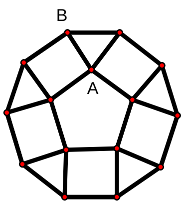
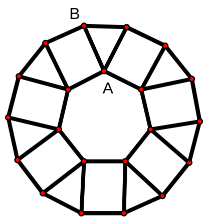
多面體	J60	J61
圖形		
計算方法	W(J60)=W(12 面體)+2W(A; A'→12 面體)+W(A→A') = 500+2(1x5+2x5+3x5+4x5)+4 = 604	W(J61)= W(12 面體)+3W(A; A'; A"→12 面體) + W(A→A'; A→A"; A'→A") = 500+2(1x5+2x5+3x5+4x5)+3x5 = 615

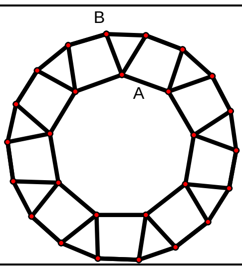
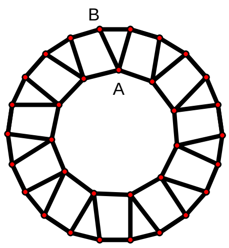
所以 W(J58~J61)=W(12 面體)+W(外加點→12 面體)+W(A 點之間距離)

14. m角柱變形一：

此圖形爲 m 邊形下方接 2m 邊形的圖形，圖形分成奇數邊與偶數邊。此圖形包含 J3,J4,J5。我們將圖形分爲上層 A 與下層 B，觀察兩層出發的步數，再乘上各層點數除二，計算各圖的 Wiener 數並推出其一般式。奇數邊的規律在九邊形後出現，偶數邊的規律在十邊形後出現。

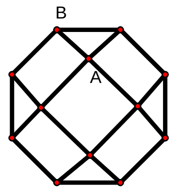
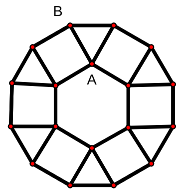
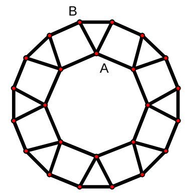
奇數系(J3,J5)

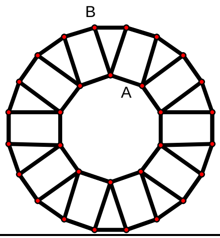
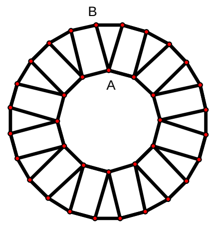
	三邊形	五邊形	七邊形
圖			
A 層	1x4+2x4=12	1x4+2x6+3x4=28	1x4+2x6+3x6+4x4=50
B 層	1x3+2x4+3x1=14	1x3+2x4+3x4+4x3=35	1x3+2x4+3x4+4x5+5x4=63

	九邊形	十一邊形
圖		
A 層	1x4+2x6+3x6+4x6+5x4=78	1x4+2x6+3x6+4x6+5x6+6x4=112
B 層	1x3+2x4+3x4+4x5+5x6+6x4=97	1x3+2x4+3x4+4x5+5x6+6x6+7x4=137

Wiener 數= $\left[\dfrac{m(3m-1)(m+3)}{4}+\dfrac{6m^3+40m^2-70m}{4}\right]\dfrac{1}{2}=\dfrac{m\left(9m^2+48m-73\right)}{8}$

偶數系　　　　J4

	四邊形	六邊形	八邊形
圖			
A 層	1x4+2x5+3x2=20	1x4+2x6+3x5+4x2=39	1x4+2x6+3x6+4x5+5x2=64
B 層	1x3+2x4+3x3+4x1=24	1x3+2x4+3x4+4x4+5x2=49	1x3+2x4+3x4+4x5+5x5+6x2=80

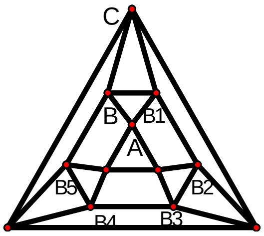
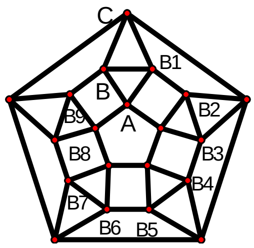
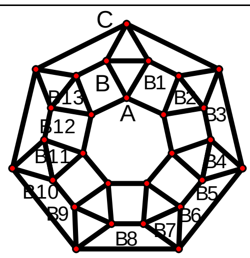
	十邊形	十二邊形
圖		
A 層	1x4+2x6+3x6+4x6+5x5+6x2=95	1x4+2x6+3x6+4x6+5x6+6x5+7x2=132
B 層	1x3+2x4+3x4+4x5+5x6+6x5+7x2=117	1x3+2x4+3x4+4x5+5x6+6x6+7x5+8x2=160

Wiener 數= $\left[\frac{m^2(3m+8)}{4}+\frac{2m(3m-4)(m+8)}{4}\right]\frac{1}{2}=\frac{m(9m^2+48m-64)}{8}$

15. m角柱變形二

此圖形爲 m 邊形下方接 2m 邊形再接 m 邊形的圖形，圖形分成奇數邊與偶數邊。此圖形包含 J27,J28,J30 圖形。我們將圖形分爲上層 A、中層 B 和下層 C，各層關係分爲 A→A、B→B、C→C、A→B、B→C 和 A→C 六種，計算各層間的步數關係並求出其一般式。

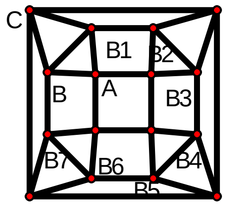
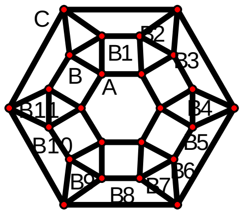
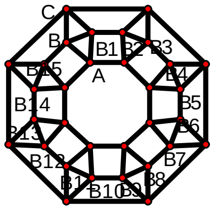
奇數系(J27,J30)

	三邊形	五邊形	七邊形
圖			
A→A(C→C)	$\frac{3(3^2-1)}{8}=3$	$\frac{5(5^2-1)}{8}=15$	$\frac{7(7^2-1)}{8}=42$
B→B(走 B 層)	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9
B→B(走 A 層和 B 層)	0	3+4+4+3=14	3+4+4+5+5+4+4+3=32
A→B (B→C)	$3(3^2+4\times3-1)=60$	$5(5^2+4\times5-1)=220$	$7(7^2+4\times7-1)=532$
A→C	$\frac{3(3^2+8\times3-1)}{4}=24$	$\frac{5(5^2+8\times5-1)}{4}=80$	$\frac{7(7^2+8\times7-1)}{4}=182$

Wiener 數= $\frac{m(m^2-1)}{8}+\frac{m(m^2+6m-9)}{2}+\frac{m(m^2-1)}{8}+m(m^2+4m-1)+\frac{m(m^2+8m-1)}{4}$

$=m(2m^2+9m-4)$

偶數系　　　J28

	四邊形	六邊形	八邊形
圖			
A→A(C→C)	$\frac{4^3}{8}=8$	$\frac{6^3}{8}=27$	$\frac{8^3}{8}=64$
B→B(走 B 層)	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9
B→B (走 A 層和 B 層)	3+4=7	3+4+4+5+5+4=25	3+4+4+5+5+6+6+5+5+4=47
A→B(B→C)	$4^2(4+4)=128$	$6^2(6+4)=360$	$8^2(8+4)=768$
A→C	$\frac{4^2(4+8)}{4}=48$	$\frac{6^2(6+8)}{4}=126$	$\frac{8^2(8+8)}{4}=256$

Wiener 數

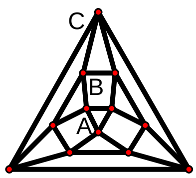
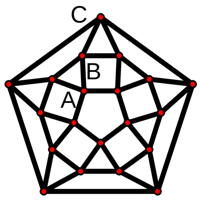
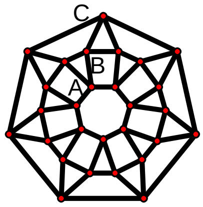
$$=\frac{m^3}{8}+\frac{m\left(m^2+8m-16\right)}{2}+\frac{m^3}{8}+m^2(m+4)+\frac{m^2(m+8)}{4}=2m\left(m^2+5m-4\right)$$

16.m 角柱變形三

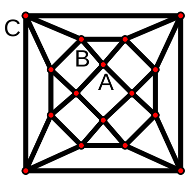
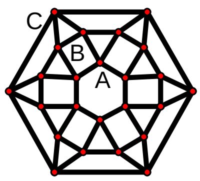
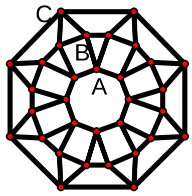
此部份圖形爲 m 邊形下方接 2m 邊形再接 m 邊形的圖形，與多邊形柱邊形二的差別在其中一個 m 邊形與 2m 邊形做了扭轉，因爲步數關係不同所以需分成奇數邊形與偶數邊形。此部份圖形包含 Johnson 多面體的第二十九和三十一號圖形。我們將圖形分爲上層 A、中層 B 和下層 C，各層關係分爲 A→A、B→B、C→C、A→B、B→C 和 A→C 六種，計算各層間的步數關係並求出其一般式。

A→A、B→B、C→C、A→B 和 B→C 在多邊形變形柱二中已求出。

奇數系　　　J31

	三邊形	五邊形	七邊形
圖			
A→A(C→C)	$\frac{3\left(3^2-1\right)}{8}=3$	$\frac{5\left(5^2-1\right)}{8}=15$	$\frac{7\left(7^2-1\right)}{8}=42$
B→B(走 B 層)	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9
B→B(走 A 層 和 B 層)	0	3+4+4+3=14	3+4+4+5+5+4+4+3=32
A→B(B→C)	$3\left(3^2+4\times3-1\right)=60$	$5\left(5^2+4\times5-1\right)=220$	$7\left(7^2+4\times7-1\right)=532$
A→C	$\frac{3\left(3^2+6\times3+1\right)}{4}=21$	$\frac{5\left(5^2+6\times5+1\right)}{4}=70$	$\frac{7\left(7^2+6\times7+1\right)}{4}=161$

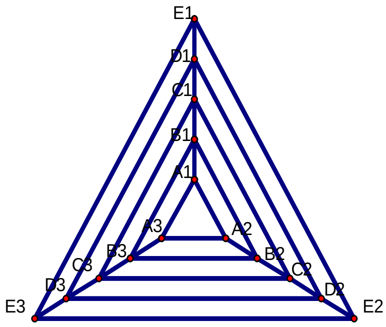
Wiener 數$=\frac{m\left(m^2-1\right)}{8}+\frac{m\left(m^2+6m-9\right)}{2}+\frac{m\left(m^2-1\right)}{8}+m\left(m^2+4m-1\right)+\frac{m\left(m^2+6m+1\right)}{4}=m\left(4m^2+17m-11\right)$

	四邊形	六邊形	八邊形
圖			
A→A(C→C)	$\frac{4^3}{8}=8$	$\frac{6^3}{8}=27$	$\frac{8^3}{8}=64$
B→B(走 B 層)	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9	1+2+3+2+1=9
B→B (走 A 層和 B 層)	3+4=7	3+4+4+5+5+4=25	3+4+4+5+5+6+6+5+5+4=47
A→B(B→C)	$4^2(4+4)=128$	$6^2(6+4)=360$	$8^2(8+4)=768$
A→C	$\frac{4^2(4+6)}{4}=40$	$\frac{6^2(6+6)}{4}=108$	$\frac{8^2(8+6)}{4}=224$

Wiener 數= $\frac{m^3}{8}+\frac{m(m^2+8m-16)}{2}+\frac{m^3}{8}+m^2(m+4)+\frac{m^2(m+6)}{4}=m(4m^2+19m-16)$

17.n 層 m 角柱

四層三角柱：Wiener 數計算分三部份，一是內圈各頂點間關係，二是外圈各頂點間關係，三是內外圈各頂點間關係。



四層三角柱各頂點關係表

	A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	D1	D2	D3	E1	E2	E3
A1		1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5
A2			1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5
A3				2	2	1	3	3	2	4	4	3	5	5	4
B1					1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
B2						1	2	1	2	3	2	3	4	3	4
B3							2	2	1	3	3	2	4	4	3
C1								1	1	1	2	2	2	3	3
C2									1	2	1	2	3	2	3
C3										2	2	1	3	3	2
D1											1	1	1	2	2
D2												1	2	1	2
D3													2	2	1
E1														1	1
E2															1
E3															

$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}3&4&4\\4&3&4\\4&4&3\end{pmatrix}$等矩陣會重複出現，

$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$表同一圈內各頂點間關係，$\begin{pmatrix}k&k+1&k+1\\k+1&k&k+1\\k+1&k+1&k\end{pmatrix}$表相差 k 層兩圈內各頂點間關係。

令 $S_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$表示 3 邊形**連結矩陣**，$k\cdot\Delta_3=\begin{pmatrix}k&k&k\\k&k&k\\k&k&k\end{pmatrix}$表示元素皆爲 k3×3 矩陣

則$\begin{pmatrix}k&k+1&k+1\\k+1&k&k+1\\k+1&k+1&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k&k&k\\k&k&k\\k&k&k\end{pmatrix}=S_3+S_3^T+k\Delta_3$，($S_3^T$表示 S_3 轉置矩陣)

S_3與S_3^TWiener 數相等，故將S_3^T可用S_3代替，上表簡化成：

	A 圈	B 圈	C 圈	D 圈	E 圈
A 圈	S_3	$2S_3+1\Delta_3$	$2S_3+2\Delta_3$	$2S_3+3\Delta_3$	$2S_3+4\Delta_3$
B 圈		S_3	$2S_3+\Delta_3$	$2S_3+2\Delta_3$	$2S_3+3\Delta_3$
C 圈			S_3	$2S_3+\Delta_3$	$2S_3+2\Delta_3$
D 圈				S_3	$2S_3+\Delta_3$
E 圈					S_3

n 層三角柱時(n+1)(n+1)表，其中第 i 行第 j 列元素為：$\begin{cases} i>j & 2S_3+(i-j)\Delta_3 \\ i=j & S_3 \\ i<j & 0 \end{cases}$

令 $W(S_3)$、$W(k\Delta_3)$分別表S_3與$k\Delta_3$Weiner 數，則 n 層三角柱 Weiner 數

(n+1)W(S3)+ (1+2+3+⋯+n)2W(S3)+[(n) 1+(n-1) ⋯

$= W(S_3)(n+1)^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\times 9= 3\times(n+1)^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\times 9= \frac{3(n^3+5n^2+6n+2)}{2}$

推廣到 n 層 m 角柱，發現上述討論模式仍可繼續用，只是S_3與Δ_3要改。

S_3改成 **m 邊形連結矩陣 S_m**，Δ_3改成元素皆為 1m×m 矩陣Δ_m，

故 Wiener 數= $(m+1)W(S_m)+(1+2+3\ldots\ldots+m)2W(S_m)+[(m)1+(m-1)2+(m-2)3\ldots\ldots 2(m-1)+1(m)]W(\Delta_m)$

$= W(S_m)(m+1)^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{6}\times m^2$

由於奇數與偶數 $W(S_m)$一般式不同，要分開討論：

m 為奇數：$W(S_m)=\frac{m(m^2-1)}{8}$,$W(\Delta\ \mathbf{m})=m^2$

Wiener 數

$$=\frac{m(m^2-1)(n+1)^2}{8}+\frac{n(n+1)(n+2)m^2}{6}=\frac{(m^3-m)(n+1)^2}{8}+\frac{nm^2(n+1)(n+2)}{6}$$

m 為偶數：$W(S_m)=\left(\frac{m}{2}\right)^3$，$W(\Delta\ \mathbf{m})=m^2$

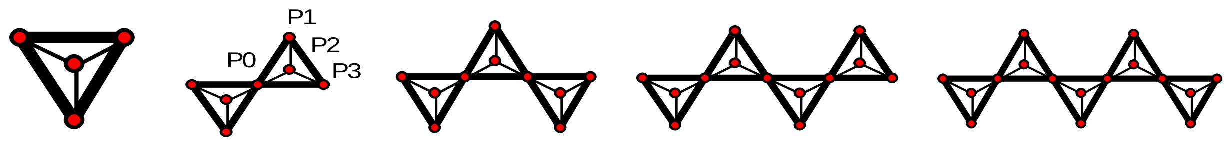
Wiener 數

$$=\left(\frac{m}{2}\right)^3(m+1)^2+\frac{n(n+1)(n+2)m^2}{6}=\frac{m^3(n+1)^2}{8}+\frac{nm^2(n+1)(n+2)}{6}$$

二、化學系列

1. 輝石家族:

令 A_m 表示 m 三角錐以鏈狀相連圖形 Wiener 數，前幾項為：



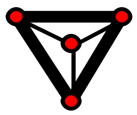
A_1 =6　　A_2 =30　　A_3 =81　　A_4 =168　　A_5 =300

A_1= 0+6
A_2= A_1+3×3(2)+6
A_3= A_2+3×3(2+3)+6
⋮
+)A_m= A_{m-1} +3×3[2+3+4+…+m]+6

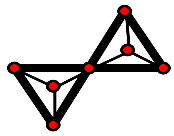
$A_m=3\times 3\frac{m(m+1)(m+2)}{6}-m+6m=\frac{3m^3+9m^2-12m+12m}{2}=\frac{3m^2(m+3)}{2}$

則 m 三角錐相連 Wiener 數為$\frac{3m^2(m+3)}{2}$

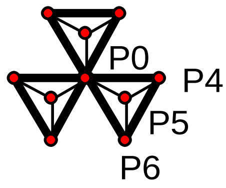
2. 輝石家族變形：考慮 m 三角錐交於同一點情況，前幾項爲：



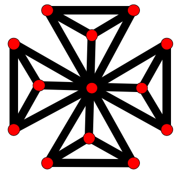
$A_1=6$



$A_2=30$



$A_3=72$



$A_4=132$

發現增加的距離數有兩部份：一部分爲新增三點對原圖各點之距離總和，另一部分爲新增部分之間的 Wiener 數，因此，遞迴式爲：

$A_1= 6$

$A_2= A_1+3\times3\times1\times2+6$

$A_3= A_2+3\times3\times2\times2+6$

⋮

$+)A_m = A_{m-1}+3\times3\times(m-1)\times2+6$

$$A_m = 3\times3\times2[1+2+\ldots+(m-1)]+6m=3\times3\times2\left[\frac{m(m-1)}{2}\right]+6m=3m(3m-1)$$

3. 輝石家族好朋友：m 角星

定義：在一個 m 邊形的邊上向外接三角形所形成的圖形。

將頂點分成外部頂點 A_i（1.2.3…m）與內部交點 B_i（1.2.3…m）兩類的話，則這兩類頂點會有以下的連接關係：

1. 每一個外部頂點 A_i 僅跟兩個 B 點（B_i，B_{i+1}）相連。
2. 每一個內部交點 B_i 均跟兩個外部頂點（A_{i-1}，A_i）及兩個內部交點（B_{i-1}，B_{i+1}）相連。

透過這個關係，可以分析每一類頂點之間的連接狀況並計算 Wiener 數。

奇數 m 角星連接關係：

外部頂點 A→內部交點 B：$1\times2+2\left(2+3+\ldots+\frac{m-1}{2}\right)+\frac{m+1}{2}$

→外部頂點 A：$\left(2+3+\ldots+\frac{m+1}{2}\right)\times2$

內部交點 B→內部交點 B：$\left(1+2+\ldots+\frac{m-1}{2}\right)\times2$

→外部頂點 A：$1\times2+2\left(2+3+\ldots+\frac{m-1}{2}\right)+\frac{m+1}{2}$

則奇數 m 角星 Wiener 數$=\frac{m}{2}\left\{4\left(2\left(1+2+\ldots+\frac{m-1}{2}\right)\right)+\left(4\times\frac{m+1}{2}\right)-2\right\}=\frac{m\left(m^2+2m-1\right)}{2}$

偶數 m 角星連接關係：

外部頂點 A→內部交點 B：$\left(1+2+\ldots+\frac{m}{2}\right)\times2$

→外部頂點 A：$\left(2+3+\ldots+\frac{m}{2}\right)\times2+\frac{m+2}{2}$

內部交點 B→內部交點 B：$\left(1+2+\ldots+\frac{m-2}{2}\right)\times2+\frac{m}{2}$

→外部頂點 A：$\left(1+2+\ldots+\frac{m}{2}\right)\times2$

偶數 m 角星 Wiener 數$=\frac{m}{2}\left\{4\left(2\left(1+2+\ldots+\frac{m}{2}\right)\right)-2-\frac{m}{2}+\frac{m+2}{2}\right\}=\frac{m\left(m^2+2m-1\right)}{2}$

結論：奇數 m 角星與偶數 m 角星雖結構上有不同，Wiener 數都是 $\frac{m\left(m^2+2m-1\right)}{2}$

4. 從輝石延伸——多個多邊形接於一點 Wiener 數之計算

說明：令其中一個 m 邊形頂點爲 $P_1, P_2, P_3, \ldots P_m$，另一個 n 邊形頂點爲 $Q_1Q_2Q_3\ldots Q_n$，且 $P_1 = Q_1$。

連接圖形的 wiener 數分爲兩部份計算：

第一部份：爲多邊形內部的距離總和，即爲各多邊形本身之 wiener 數。

第二部份：兩多邊形之間相互距離總和。

由於對稱性，只需計算 m 邊形的點到 n 邊形的點的距離數 $\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left|P_i - Q_j\right|$，這部分可再細分爲**基本距離**加上**新增加的距離**。基本距離爲由 $P_1(Q_1)$出發至 n 邊形各點距離和，新增加的距離則爲由 $P_1(Q_1)$出發至 m 邊形各點距離和。由於於多邊形之 Wiener 數和邊數的奇偶性有關，因此分成三種情況討論：

(1).兩偶數邊形相接一點

基本距離爲 $\left(1+2+\ldots+\left(\frac{n}{2}\right)+\ldots+2+1\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^2$，有 $(m-1)$ 點，則距離和爲 $(m-1)\left(\frac{n}{2}\right)^2$

新增加距離爲 $\left(1+2+\ldots+\left(\frac{m}{2}\right)+\ldots+2+1\right)=\left(\frac{m}{2}\right)^2$ 有 $(n-1)$ 點，距離和爲 $\left(\frac{m}{2}\right)^2(n-1)$

故 Wiener 數爲：$\left(\frac{m}{2}\right)^3+\left(\frac{n}{2}\right)^3+(m-1)\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2(n-1)$

(2).兩奇數邊形相接一點

基本距離爲 $2\left(1+2+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)=\frac{n^2-1}{4}$，有 $(m-1)$ 點，則距離和爲 $(m-1)\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$

新增加距離爲 $2\left(1+2+\ldots+\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)=\left(\frac{m^2-1}{4}\right)$，有 $(n-1)$ 點，距離和爲 $\left(\frac{m^2-1}{4}\right)(n-1)$

故 Wiener 數爲：$\left(\frac{m^3-m}{8}\right)+\left(\frac{n^3-n}{8}\right)+(m-1)\left(\frac{n^2-1}{4}\right)+\left(\frac{m^2-1}{4}\right)(n-1)$

(3).一奇數邊形與一偶數邊形相接一點

基本距離爲 $\left(1+2+\ldots+\left(\frac{n}{2}\right)+\ldots+2+1\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^2$ 有 $(m-1)$ 點，則距離和爲 $(m-1)\left(\frac{n^2}{4}\right)$

新增加距離爲 $2\left(1+2+\ldots+\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)=\left(\frac{m^2-1}{4}\right)$ 有 $(n-1)$ 點，距離和爲 $\left(\frac{m^2-1}{4}\right)(n-1)$

故 Wiener 數爲：$\left(\frac{m^3-m}{8}\right)+\left(\frac{n^3}{8}\right)+(m-1)\left(\frac{n^2}{4}\right)+\left(\frac{m^2-1}{4}\right)(n-1)$

n 個 m 邊形交於同一點圖形可化成多組兩 m 邊形交於同一點情況，根據以上結論，得 **n 個 m 邊形交於同一點圖形 Wiener 數**：

m 爲偶數：

任選兩個 m 邊形爲一組，共有 C_2^n 組，

每組距離總和爲 $\left\{(m-1)\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2(m-1)\right\}$

Wiener 數爲 $n\left(\frac{m}{2}\right)^2\left\{\frac{m}{2}+(n-1)(m-1)\right\}$

m 爲奇數：

任選兩 m 邊形爲一組，共有 C_2^n 組，每組距離總和爲

$\left\{(m-1)\frac{(m^2-1)}{4}+\frac{(m^2-1)}{4}(m-1)\right\}$，

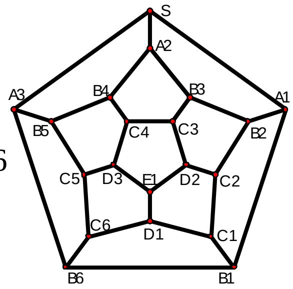
Wiener 數爲 $n\frac{(m^2-1)}{4}\left\{\frac{m}{2}+(n-1)(m-1)\right\}$

三、立體世界——走一步算一步

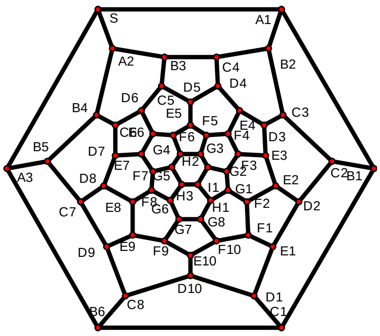
柏拉圖正多面體

計算方式：以柏拉圖 12 面體爲例（由於正多面體頂點都有一致性：不同頂點出發路徑都一樣。）

距離	0	1	2	3	4	5
個數	1	3	6	6	3	1



從 S 點出發，距離一步的點有 3 個，距離兩步的點有 6 個，距離三步的點有 6 個，距離四步的點有 3 個，距離五步的點有 1 個，出發的頂點數有 20 個，而頂點之間的連線關係會有重複，所以總距離和除以 2，故 Wiener 數爲 500。



阿基米德正多面體

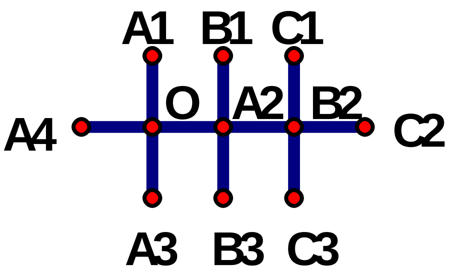
計算方式：以截二十面體（巴克球）爲例（阿基米德體頂點都有一致性，故由不同頂點出發路徑都一樣。）

從 S 點出發，距離一步的點有 3 個，距離兩步的點有 6 個，距離三步的點有 8 個，距離四步的點有 10 個，距離五步的點有 10 個，距離六步的點有 10，距離七步的點有 10 個，距離八步的點有 10 個，距離九步的點有 10 個，距離十步的點有 10 個，而頂點之間的連線關係會有重複，所以總距離和除以 2，故 Wiener 數爲 10890。

四、牽一髮而動全身遞迴

（一）鏈狀系列

1.烷狀鏈圖形 Wiener 數計算：



類似丙烷

	O	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	C1	C2	C3
O		1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
A1			2	2	2	3	3	3	4	4	4
A2				2	2	1	1	1	2	2	2
A3					2	3	3	3	4	4	4
A4						3	3	3	4	4	4
B1							2	2	3	3	3
B2								2	1	1	1
B3									3	3	3
C1										2	2
C2											2
C3											

令甲烷 Wiener 數爲 a_1、乙烷 Wiener 數爲 a_2、丙烷 Wiener 數爲 a_3

$$a_1=16$$

$$a_2=a_1+3(2+3)+3\{(3+1+3)\}+2\times 3$$

$$a_3=a_2+3(3+4)+3\{(3+1+3)+(4+2+4)\}+2\times 3$$

$$\vdots$$

$$+\ a_n=a_{n-1}+3\{n+(n+1)\}+3\{7+10+\cdots+(3n+1)\}+2\times 3$$

$$a_n=16+3\{5+7+\cdots+(2n+1)\}+3\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(3k+8)(k-1)}{2}\right\}+6(n-1)=1+\frac{3n(n^2+6n+3)}{2}$$

2.天女散花圖形 F(m,n)之 Wiener 數計算

令 F(m,n)Wiener 數為 a_n，以遞迴計算原有點與新增點間距離總和，發現：

1.向外 m 方向加 n 點，各點往中心處距離數之總和為：m(1+2+3+…….n)

2.向外 m 方向加 n 點，各點至其他方向原有點之距離數總和為：

(m-1)[(n+1)+(n+2)+(n+3)+…….(2n-1)]

3.向外 m 方向加 n 點，各點間相互距離數總和為：$[\frac{m(m-1)}{2}]\times 2\times n$

$$a_1=\mathbf{m[(1)]}+\frac{m(m-1)}{2}\times\mathbf{2}$$

$$a_2=a_1+\mathbf{m[(1+2)+(m-1)(3)]}+\frac{m(m-1)}{2}\times\mathbf{4}$$

$$a_3=a_2+\mathbf{m[(1+2+3)+(m-1)(4+5)]}+\frac{m(m-1)}{2}\times\mathbf{6}$$

$$\vdots$$

$a_n=a_{n-1}+\mathbf{m\{(1+2+\ldots n)+(m-1)[(n+1)+(n+2)+\ldots(2n-1)]\}}+\frac{m(m-1)}{2}\times\mathbf{2n}$ 則 $a_n=\frac{mn(n+1)(3mn-2n+2)}{6}$

（二）正方形鏈→網→體

1.直鏈狀

考慮共線 m 點，將 m 點放在(1,0),(2,0),(3,0),…..,(m,0)等位置上。

考慮此 m 點之 Wiener 數，m 點之 Wiener 數先前已求過：

$$(m-1)\times 1+(m-2)\times 2+(m-3)\times 3+.....+2\times(m-2)+1\times(m-1)=\frac{m(m+1)(m-1)}{6}$$

以絕對值表座標化後 m 點之 Wiener 數，則共線 m 點 Wiener 數=$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|i-j|$

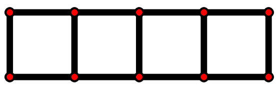
2.正方形鏈

將 2m 頂點所成集合定義為 S，$(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S$，$1\le x_i,x_j\le m, 1\le y_i,y_j\le 2$

故正方形鏈之 Wiener 數$=\frac{1}{2}\sum_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S}(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|)$，而其中此式每一組頂點間距離均可拆成水平方向距離$|x_i-x_j|$和垂直方向距離$|y_i-y_j|$。

$\boxed{a}$:當$|x_i-x_j|$固定，則$|y_n-y_m|$有 4 種組合$(|y_1-y_1|,|y_1-y_2|,|y_2-y_1|,|y_2-y_2|)$

$\boxed{b}$:當$|y_n-y_m|$固定，則$|x_i-x_j|$有 m^2 種組合(如下所示)



$$\begin{cases}|x_1-x_1|,|x_1-x_2|,|x_1-x_3|......|x_1-x_m| \\ |x_2-x_1|,|x_2-x_2|,|x_2-x_3|......|x_2-x_m| \\ \vdots \\ |x_m-x_1|,|x_m-x_2|,|x_m-x_3|......|x_m-x_m|\end{cases}$$ 共 m^2 種

故 $\sum_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S}(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|)$ 可表成

$$4\sum_{1\le x_i,x_j\le m}|x_i-x_j|+m^2\sum_{1\le y_i,y_j\le 2}|y_i-y_j|=\frac{4(m^3-m)}{3}+2m^2=\frac{4m^3+6m^2-4m}{3}$$，

故正方形鏈 Wiener 數$=\frac{1}{2}\sum_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S}(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|)=\frac{m(2m^2+3m-2)}{3}$

(1.)正方形鏈變形一(正方形鏈有斜對角線)

令 $W(S_m)$表 m 正方形所形成鏈 Wiener 數

$W(DS_m)$表 m 有斜對角線正方形所形成鏈 Wiener 數

發現：$W(DS_1)$比 $W(S_1)$少 1 步，爲(O_1,A_1)間步數

$W(DS_2)$比 $W(S_2)$少(1+2)步，爲$(O_1,A_1)(O_1,A_2),(O_2,A_2)$間步數

$W(DS_3)$比 $W(S_3)$少(1+2+3)步，爲$(O_1,A_1)(O_1,A_2),(O_2,A_2)(O_1,A_3),(O_2,A_3),(O_3,A_3)$間步數

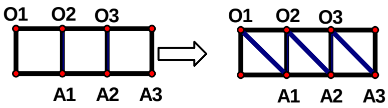
$W(DS_m)$比 $W(S_m)$少(1+2+3+…+m)步爲(O_1,A_1)

$(O_1,A_2),(O_2,A_2)$

$(O_1,A_3),(O_2,A_3),(O_3,A_3)$

⋮

$(O_1,A_m),(O_2,A_m),(O_3,A_m)\ldots\ldots(O_m,A_m)$間步數



故 $W(DS_m)=W(S_m)-(1+2+\ldots+m)=\dfrac{(m+1)(m+3)(2m+1)}{3}-\dfrac{m(m+1)}{2}=\dfrac{(m+1)(m+2)(4m+3)}{6}$

(2)正方形鏈變形二(正方形鏈有兩斜對角線)

令 $W(WS_m)$表 m 有兩斜對角線正方形所形成鏈 Wiener 數

從一條爲角線與兩對角線圖形中，發現 $W(WS_m)$和 $W(DS_m)$間步數減少規則：

$W(WS_m)$比 $W(DS_m)$少(1+2+3+…+m)步，

其步數爲(O_1,A_1)

$(O_1,A_2),(O_2,A_2)$

$(O_1,A_3),(O_2,A_3),(O_3,A_3)$

$(O_1,A_m),(O_2,A_m),(O_3,A_m)\ldots\ldots(O_m,A_m)$間步數

則 Wiener 數$=W(DS_m)-(1+2+\ldots+m)=\dfrac{(m+1)(m+2)(4m+3)}{6}-\dfrac{m(m+1)}{2}=\dfrac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$

3.鏈狀→網狀

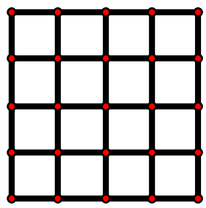
將 mn 頂點所成集合定義爲 S，$(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S$，$1\le x_i,x_j\le m,1\le y_i,y_j\le n$

x 軸上 m 點 wiener 數$=\dfrac{m(m+1)(m-1)}{6}$，y 軸上 n 點 wiener 數$=\dfrac{n(n+1)(n-1)}{6}$。

故正方形鏈之 Wiener 數$=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S}(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|)$，而其中此式每一組項點間距離均可拆成水平方向距離$|x_i-x_j|$和垂直方向距離$|y_i-y_j|$。

$\boxed{a}$:當$|x_i-x_j|$固定時，則$|y_i-y_j|$有 n^2 種不同組合

$\boxed{b}$:當$|y_i-y_j|$固定時，則$|x_i-x_j|$有 m^2 種不同組合

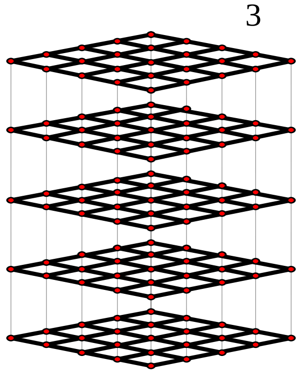


故 $\sum\limits_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S}(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|)$可表成

$$n^2\sum_{1\le x_i,x_j\le m}|x_i-x_j|+m^2\sum_{1\le y_i,y_j\le n}|y_i-y_j|=\frac{n^2m(m^2-1)}{3}+\frac{nm^2(n^2-1)}{3}$$

故正方形網 Wiener 數$=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\in S}(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|)=\dfrac{nm(n+m)(mn-1)}{6}=\dfrac{nm(n+m)(mn-1)}{3}$

4.網狀→立體



將 mnk 頂點所成集合定義爲 S

$(x_i,y_i,z_i),(x_j,y_j,z_j)\in S$，$1\le x_i,x_j\le m,1\le y_i,y_j\le n,1\le z_i,z_j\le k$

有上述經驗，可順利化簡正方形立體

$$n^2k^2\sum_{1\le x_i,x_j\le m}|x_i-x_j|+m^2k^2\sum_{1\le y_i,y_j\le n}|y_i-y_j|+n^2m^2\sum_{1\le z_i,z_j\le k}|z_i-z_j|$$

$$=n^2k^2\left\{\frac{m(m^2-1)}{3}\right\}+m^2k^2\left\{\frac{n(n^2-1)}{3}\right\}+n^2m^2\left\{\frac{k(k^2-1)}{3}\right\}$$

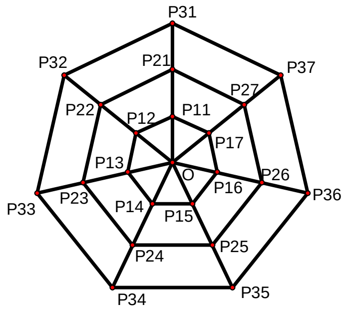
$$=\frac{nkm\{nk(m+1)(m-1)+mk(n+1)(n-1)+nm(k+1)(k-1)\}}{3}$$ 故

$$\frac{1}{2}\sum_{(x_i,x_j),(y_i,y_j),(z_i,z_j)\in S}(|x_i-x_j|+|y_i-y_j|+|z_i-z_j|)$$

$$=\frac{nkm\{nk(m+1)(m-1)+mk(n+1)(n-1)+nm(k+1)(k-1)\}}{6}$$

（三）蜘蛛網圖形（Spider's web）

以分支數爲 7n 層蜘蛛網圖形爲例：



將天女散花同一層鄰邊相連，同層距離數減少狀況如下：

P_{11} 至 P_{12}、P_{13}、P_{14}、P_{15}、P_{16}、P_{17} 分別減少 1、0、0、0、0、1 步 →簡記爲(1,0,0,0,0,1)

P_{21} 至 P_{22}、P_{23}、P_{24}、P_{25}、P_{26}、P_{27} 分別減少 3、2、1、1、2、3 步 →簡記爲(3,2,1,1,2,3)，…………….

P_{n1}至P_{n2}、P_{n3}、P_{n4}、P_{n5}、P_{n6}、P_{n7} 分別減少 2n-1、2n-2、2n-3、2n-3、2n-2、2n-1 步→簡記爲(2n-1, 2n-2, 2n-3, 2n-3,2n-2,2n-1)

第 n 層 P_{n1} 至第 k 層(k=1,2,3,……,n-1)P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, P_{k4}, P_{k5}, P_{k6} ,P_{k6} 間距離數減少狀況如下：

P_{21}至P_{11}、P_{12}、P_{13}、P_{14}、P_{15}、P_{16}、P_{17} 分別減少 0、1、0、0、0、0、1 步→簡記爲(0,1,0,0,0,0,1)

P_{31}至P_{11}、P_{12}、P_{13}、P_{14}、P_{15}、P_{16}、P_{17} 分別減少 0、1、0、0、0、0、1 步→簡記爲(0,1,0,0,0,0,1)

至P_{21}、P_{22}、P_{23}、P_{24}、P_{25}、P_{26}、P_{27} 分別減少 0、3、2、1、1、2、3 步→簡記爲(0,3,2,1,1,2,3)

P_{n1}至P_{11}、P_{12}、P_{13}、P_{14}、P_{15}、P_{16}、P_{17} 分別減少 0、1、0、0、0、0、1 步→簡記爲(0,1,0,0,0,0,1)

至P_{21}、P_{22}、P_{23}、P_{24}、P_{25}、P_{26}、P_{27} 分別減少 0、3、2、1、1、2、3 步→簡記爲(0,3,2,1,1,2,3)

至P_{31}、P_{32}、P_{33}、P_{34}、P_{35}、P_{36}、P_{37} 分別減少 0、5、4、3、3、4、5 步→簡記爲(0,5,4,3,3,4,5)

至$P_{(n-1)1}$、$P_{(n-1)2}$、$P_{(n-1)3}$、$P_{(n-1)4}$、$P_{(n-1)5}$、$P_{(n-1)6}$、$P_{(n-1)7}$ 分別減少 0、2n-3、2n-4、2n-5、2n-5、2n-4、2n-3 步→簡記爲(0,2n-3,2n-4,2n-5, 2n-5,2n-4,2n-3)

分支數爲 7，n 層蜘蛛網圖形 Wiener 數計算如下：

令 $a_n=W(SW(7,n))-W(F(7,n))$

$$a_1=(0+1+0+0+0+0+1)\times 7\times\frac{1}{2}$$

$$a_2=a_1(3+2+1+1+2+3)\times 7\times\frac{1}{2}+(0+1+0+0+0+0+1)\times 7$$

$$a_3=a_2(5+4+3+3+4+5)\times 7\times\frac{1}{2}+\{(0+1+0+0+0+0+1)+(0+3+2+1+1+2+3)\}\times 7$$

$$\therefore a_n=a_n+(12n-12)\times 7\times\frac{1}{2}+\{2+12+24+36+\cdots+(12n-24)\}$$

$$a_n=\frac{7}{2}\left\{2+\sum_{k=1}^{n}(12k-12)\right\}+\left\{2(n-1)+\sum_{k=1}^{n}(6k-6)(k-2)\right\}\times 7=7(2n^3-3n^2+3n-1)$$

結論：$W(SW(7,n))=W(F(7,n))-7(2n^3-3n^2+3n-1)=\frac{1}{6}(49n^3+273n^2-112n+42)$

推廣

分支數爲 m 的 n 層蜘蛛網圖形

我們已發現 4k+1 邊形蜘蛛網圖形之 Wiener 數通式，其他形式的通式，尚待努力。

分支數爲 4k+1 的 n 層蜘蛛網圖形

將天女散花同一層鄰邊相連

(1)討論同層間距離數減少之和$\left(\dfrac{4k+1}{2}\right)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$

分支數 5(k=1)	分支數 9(k=2)
$b_1=1+0+0+1$ $b_2=3+2+2+3$ $b_3=5+4+4+5$ $b_4=7+6+6+7$:	$b_1=1+0+0+0+0+0+0+1$ $b_2=3+2+1+0+0+1+2+3$ $b_3=5+4+3+2+2+3+4+5$ $b_4=7+6+5+4+4+5+6+7$:

分支數 13(k=3)
$b_1=1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+1$ $b_2=3+2+1+0+0+0+0+0+0+1+2+3$ $b_3=5+4+3+2+1+0+0+1+2+3+4+5$ $b_4=7+6+5+4+3+2+2+3+4+5+6+7$:

依此規律，可以寫出$\sum b_n$ 之通式

$$\begin{aligned}\sum b_n &= 2\{[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+[1+3+5+\cdots+(2n-3)]+\cdots+[1+3+5+\cdots+(2n-2k+1)]+\\&\quad 2[1+2+\cdots+(n-1)]+2[1+2+\cdots+(n-2)]+\cdots+2[1+2+\cdots+(n-k)]\}\\&=2\left\{n^2+(n-1)^2+\cdots+(n-k+1)^2+2\left[\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\cdots+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}\right]\right\}\\&=\frac{1}{3}[n(n+1)(4n-1)-(n-k)(n-k+1)(4n-4k-1)]\end{aligned}$$

因此，$\dfrac{(4k+1)}{2}\sum b_n=\dfrac{(4k+1)}{2}\left\{\dfrac{1}{3}[n(n+1)](4n-1)-(n-k)(n-k+1)(4n-4k-1)\right\}$

(2)討論第 n 層的 P_{n1} 至第 s 層(s=1,2,3,……,n-1)間距離數減少之和

發現第 n 層的 P_{n1} 至第 s 層(s=1,2,3,……,n-1)間距離數減少之和，就是將$\sum b_n$ 之通式再加總一次後乘上分支數，變爲$(4k+1)\times\dfrac{1}{3}\sum\{t(t+1)(4t-1)-(t-k)(t-k+1)(4t-4k-1)\}$，

但因 n=1 時 s=0，所以將 t 改爲(t-1)，則第 n 層的 P_{n1} 至第 s 層(s=1,2,3,……,n-1)間距離數減少之和

$$=(4k+1)\times\frac{1}{3}\sum\{t(t-1)(4t-5)-(t-k)(t-k-1)(4t-4k-5)\}$$

$$=(4k+1)\times\frac{1}{3}\left\{\sum_{t=1}^{n}t(t-1)(4t-5)-\sum_{t=k}^{n}(t-k)(t-k-1)(4t-4k-5)\right\}$$

分支數爲 4k+1 的 n 層蜘蛛網圖形 Wiener 數計算如下：

令 $a_n=W(F(4k+1,n))-W(SW(4k+1,n))$

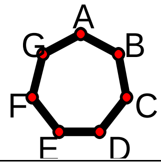
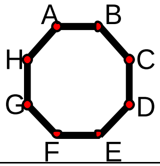
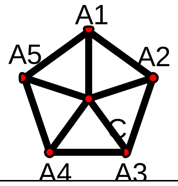
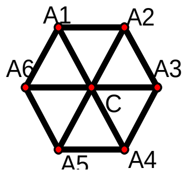
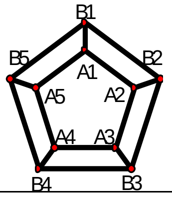
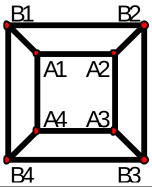
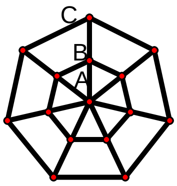
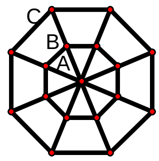
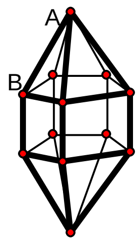
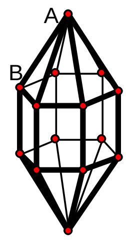
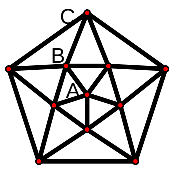
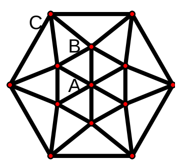
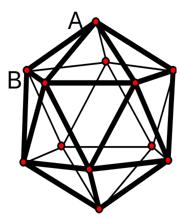
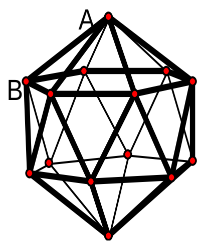
$$a_n=\frac{(4k+1)}{2}\left\{\frac{1}{3}[n(n+1)](4n-1)-(n-k)(n-k+1)(4n-4k-1)\right\}+$$
$$(4k+1)\left\{\frac{1}{3}\left[\sum_{t=1}^{n}t(t-1)(4t-5)-\sum_{t=k}^{n}(t-k)(t-k-1)(4t-4k-5)\right]\right\}$$

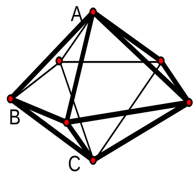
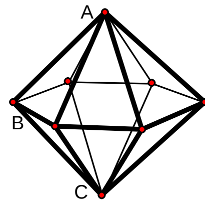
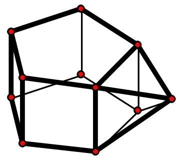
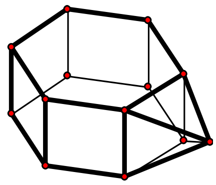
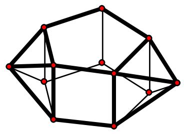
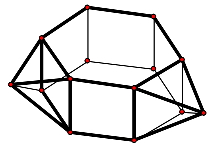
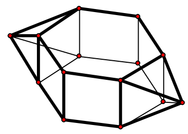
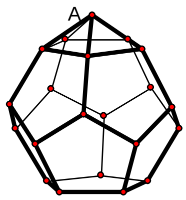
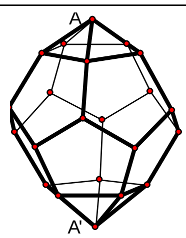
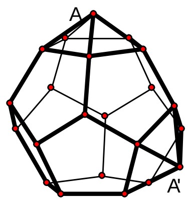
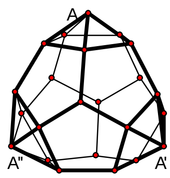
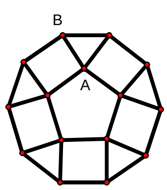
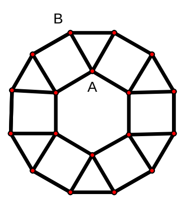
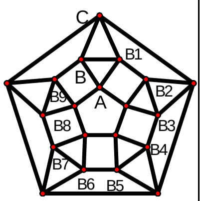
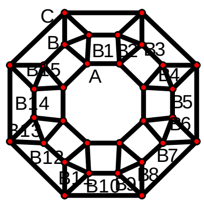
所以 $W(SW(4k+1,n))=W(F(4k+1,n))-a_n$

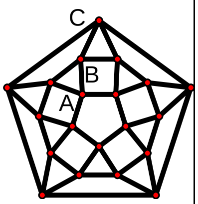
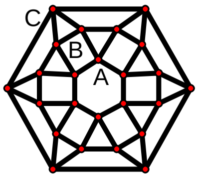
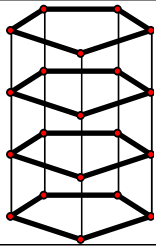
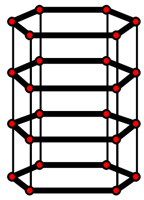
$$=\frac{4k+1}{6}\{(n+1)[12kn^2-n(n-1)(2n+1)]+n(n+1)[(2n^2+1)-2k(4n-1)]+k(k-1)[(2k^2+1)-2n(4k+1)]+6kn(2kn-1)\}$$

伍、研究成果

第一部分：「正多邊形系列」，發現正邊形、正 m 角柱與 n 角柱加一點圖形需分奇偶數討論，正 m 角錐與 n 角柱加兩點圖形則有共同一般式，相關結果如下表所示：

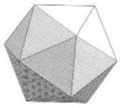
名稱	m 爲奇數		m 爲偶數	
正m邊形	$\frac{m(m^2-1)}{8}$		$\frac{m^3}{8}$	
正m角錐	$m(m-1)$		同左	
正m角柱	$\frac{m(m^2+2m-1)}{2}$		$\frac{m^2(m+2)}{2}$	
m角柱上加一點	m≧7 一般式爲 $m(6m-11)$ 而 m=3 Wiener 數爲 30 m=5 Wiener 數爲 100		m≧8 一般式爲 $m(6m-11)$ 而 m=4Wiener 數爲 60 m=6Wiener 數爲 153	
m角柱上下加一點	$5m^2-2m+3$		同左	
反角柱上加一點	$m\geq4$ 一般式 $\frac{1}{2}\{m(11m-19)\}$ 而 m=3 Wiener 數爲 27		一般式　同左 而 m=4 Wiener 數爲 52	
反角柱上下加一點	$5m^2-4m+3$		同左	

多邊形上下加一點	m^2+2		同左	
J52 J54 + 變化	$\frac{m^3+3m^2+m+1}{2}$		$\frac{m^3+4m^2+3m+8}{2}$	
J53 J56 + 變化	$\frac{m^3+4m^2+3m+8}{2}$		$\frac{m^3+4m^2+4m+6}{2}$	
J55 + 變化			$\frac{(m+1)^2(m+2)}{2}$	
十二面體加點	J58：550		J59：605	
	J60：604		J61：615	
m角柱變形一	$\frac{m(9m^2+48m-73)}{8}$		$\frac{m(9m^2+48m-64)}{8}$	
m角柱變形二	$m(2m^2+9m-4)$		$2m(m^2+5m-4)$	

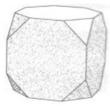
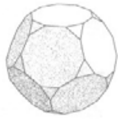
m角柱變形三	$m\left(4m^2+17m-11\right)$		$m\left(4m^2+19m-16\right)$	
n層m角柱	$\frac{(m^3-m)(n+1)^2}{8}+\frac{nm^2(n+1)(n+2)}{6}$		$\frac{m^3(n+1)^2}{8}+\frac{nm^2(n+1)(n+2)}{6}$	

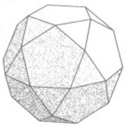
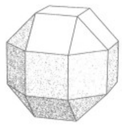
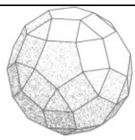
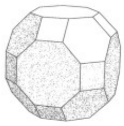
第二部分：「正多面體」，研究結果如下表所示：

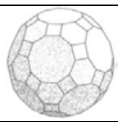
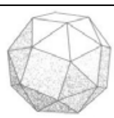
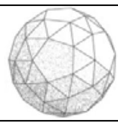
柏拉圖多面體：

名稱	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
圖					
Wiener 數	6	48	18	500	108

阿基米德立體：

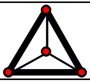
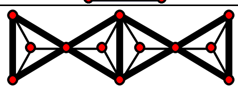
名稱	截四面體	截八面體	截二十面體	截立方體	截十二面體
圖					
Wiener 數	144	864	10890	888	9420

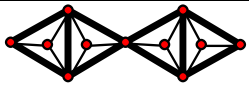
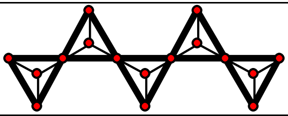
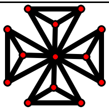
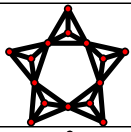
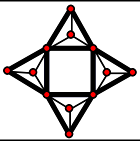
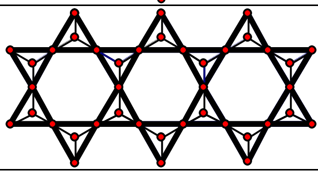
名稱	截半立方體	截半二十面體	削稜截八面體	削稜截二十面體	大削稜截八面體
圖					
Wiener 數	114	1215	720	7200	5184

名稱	大削稜截二十面體	扭稜面立方體	扭稜面十二面體
圖			
Wiener 數	54000	648	6750

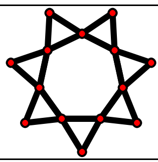
以上多面體圖，引自【典雅幾何】第.93、138 頁

第三部分：「化學系列」，結果如下表所示：

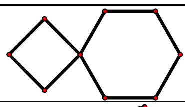
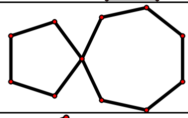
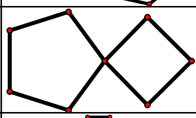
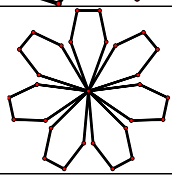
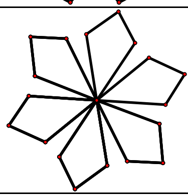
名稱		圖	Wiener 數
橄欖石			6
矽酸鈣礦	（第一型）		$\frac{5m(m+1)(5m+4)}{3}$

	（第二型）		$\frac{m\left(25m^2+30m+2\right)}{3}$
輝石			$\frac{3m^2\left(m+3\right)}{2}$
輝石家族	在平面上 m 最多等於 5		$3m\left(3m-1\right)$
綠柱石系列	m 爲奇數		$\frac{3m(m+3)\left(3m-1\right)}{8}$
	m 爲偶數		$\frac{m\left(9m^2+24m-8\right)}{8}$
石綿			1630

第四部分：「星形系列」，發現與奇偶數無關，研究結果如下：

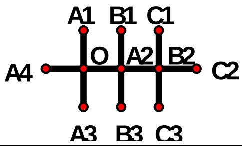
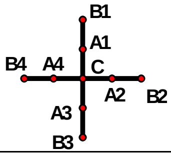
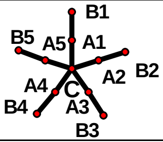
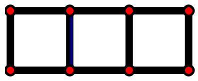
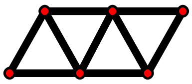
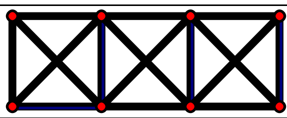
名稱	圖	一般式
m 角星		$\frac{m\left(m^2+2m-1\right)}{2}$

第五部份：共點多邊形

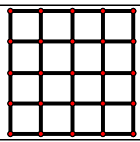
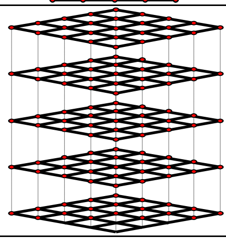
名稱		圖	一般式
兩偶			$\left(\frac{m}{2}\right)^3+\left(\frac{n}{2}\right)^3+(m-1)\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2(n-1)$
兩奇			$\left(\frac{m^3-m}{8}\right)+\left(\frac{n^3-n}{8}\right)+(m-1)\left(\frac{n^2-1}{4}\right)+\left(\frac{m^2-1}{4}\right)(n-1)$
一奇一偶			$\left(\frac{m^3-m}{8}\right)+\left(\frac{n^3}{8}\right)+(m-1)\left(\frac{n^2}{4}\right)+\left(\frac{m^2-1}{4}\right)(n-1)$
n 個 m 邊形接一點	m爲奇數		$n\frac{\left(m^2-1\right)}{4}\left[\frac{m}{2}+\left(n-1\right)\left(m-1\right)\right]$
	m爲偶數		$n\left(\frac{m}{2}\right)^2\left[\frac{m}{2}+\left(n-1\right)\left(m-1\right)\right]$

第六部分：「鏈狀系列」

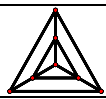
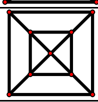
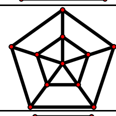
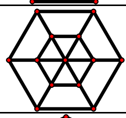
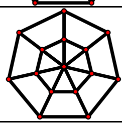
引遞迴關係式，解決「鏈」問題，其中把三角形鏈定義成一次加兩三角形（為正方形鏈變形）。

名稱		圖	一般式
烷狀鏈	【以丙烷為例】		$1+\frac{3n\left(n^2+6n+3\right)}{2}$
天女散花	F(4,n)		$\frac{4n(5n+1)(n+1)}{3}$
	F(m,n) m 分支每分支上有 n 節點		$\frac{mn(n+1)(3mn-2n+2)}{6}$
正方形鏈	正方形鏈		$\frac{(m+1)(m+3)(2m+1)}{3}$
	正方形鏈變形之一 ＜三角形鏈＞		$\frac{(m+1)(m+2)(4m+3)}{6}$
	正方形鏈變形之二		$\frac{(m+1)\left(2m^2+4m+3\right)}{3}$

第七部分：「正方形鏈→網→體」，相關結果如下表所示：

名稱		圖	一般式
正方形網	m 和 n 表示頂點數		$\frac{nm(n+m)(nm-1)}{6}$
正立方體	m、n 和 k 表示頂點數		$\frac{nkm[nk(m+1)(m-1)+mk(n+1)(n-1)+nm(k+1)(k-1)]}{6}$

第八部分：蜘蛛網圖形：

名稱		圖	一般式
三分支	以(3, 2)為例		$\frac{3n^2(n+3)}{2}$
四分支	以(4, 2)為例		$\frac{2}{3}n(4n^2+15n-1)$
五分支	以(5, 2)為例		$\frac{5}{6}\mathrm{n}(5\mathrm{n}^2+21-2)$
六分支	以(6, 2)為例		$6n^3+30n^2-9n+3$
七分支	以(7, 2)為例		$\frac{1}{6}(49\mathrm{n}^3+273\mathrm{n}^2-112\mathrm{n}+42)$
m=4k+1			請見 p.20

陸、討論與結論

這次科展是經過兩年努力而得到的成果，第一年我們專注於：柱、多邊形、多面體與化學有關的鏈狀圖形，第二年增補：Johnson 多面體和蜘蛛網圖形，總共有八大類，約 80 多個圖形，我們推納出兩大類計算方法：一、多面體與其變形，則多以「步數法」來計算。二、網鏈狀的圖形，如：化學系列、蜘蛛網…以「遞迴法」來計算。由於課業壓力及其他緣故，我們不再多做圖形的推廣，而專注於想法、計算及公式的統整，希望有一個統一的觀點，來處理 Johnson 多面體的 Wiener 數的問題，至於蜘蛛網的問題，我們突破了關鍵的 4k+1 型，相信在不久將來我們也能夠將剩下的三個類型一一處理完畢。

柒、參考資料

1. 葉偉文(2002)譯，典雅的幾何。台北：天下遠見，pp.92~171
2. 高級中學，物質科學，化學篇，上冊。台南：南一書局，pp.117、132
3. 高級中學，物質科學，化學篇，下冊。台南：南一書局，pp.132、138
4. 王昌銳(民 59)譯，圖形及用途。台北：徐式基金會出版部，pp.2、118
5. Lam & Gutman(1997)，Wiener Number of Hexagonal Bitrapeziums and Trapeziums，引自 http://citeseer.ist.psu.edu/379008.html。

6.參考自維基百科(Wikipedia)

柏拉圖多面體(http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94&variant=zh-tw)

阿基米德多面體(http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%8D%8A%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94&variant=zh-tw)

Johnson 多面體(http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=Johnson%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94&variant=zh-tw)

【評　語】　　040407　Wiener 數，再現江湖(二)

1) 精彩的科學發現總能夠尋找到與主流研究互相結合的管道。本研究成果多達八部分，然而不幸這八部分看來彼此毫無關係。

2) 作品當中充滿立體圖形，然而這些圖形都取材於軟體 Poly v1.11 當中。由於該多面體圖形都是現成的，所以本研究範圍不幸受限於資料庫中的特例。