# 中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

高中組　數學科

第三名

040406

Hofstadter-Conway $10000 數列

學校名稱：國立宜蘭高級中學

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 高二 蘇哲民 | 李維昌 |


關鍵詞：出現次數　巴斯卡三角形

# 壹、摘要


某一次在 YLL 數學網站看到一串數列如下:
1,1,2,2,3,4,4,4,5,6, □------------□爲多少?這可讓我想破頭了，最後得知□爲 7。我當時並不知道爲什麼，但是看了解釋之後，得知數列剛開始爲 1,1，那第三項怎麼來?數列最後一個數爲”1”，表示由數列數來第”一”個數加上數列由後數來第”一”個數，所以第三個爲 2，數列變爲 1,1,2，第四項怎麼來?數列最後一個數爲”2”，表示數列第”二”個數加上由後數來第”二”個數，所以 $a_4$ =1+1=2。因此有此關係:

$$a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}}$$

其中 $a_1$ =1, $a_2$ =1。後來我去網路上，發現此數列曾經上過紐約時代雜誌科學頭版，是什麼原因能夠上美國時代雜誌科學頭版，在此不詳述。
在 mathworld 網站查此數列，結果發現真的有這種數列，名稱爲
Hofstadter-Conway $10,000 Sequence。


# 貳、研究動機

當初此數列被提出來是因爲 Conway 先生要別人證明出 $\lim_{n\to\infty} a_n / n = \frac{1}{2}$ 。即可得到美金一萬元，雖然已經被證明出來了，但是我認爲還有其他可以值得研究的。這種數列我是第一次看過，老師也沒教過，這又有點像費氏數列，又像遞迴數列，高中第一冊第三章曾經學過「數列與級數」，但是此數列項數裡面又有 $a_n$ 項，感覺更複雜了，所以我想知道是不是這種數列也有一般的 $a_n$ 的公式在，便決定深入研究它。

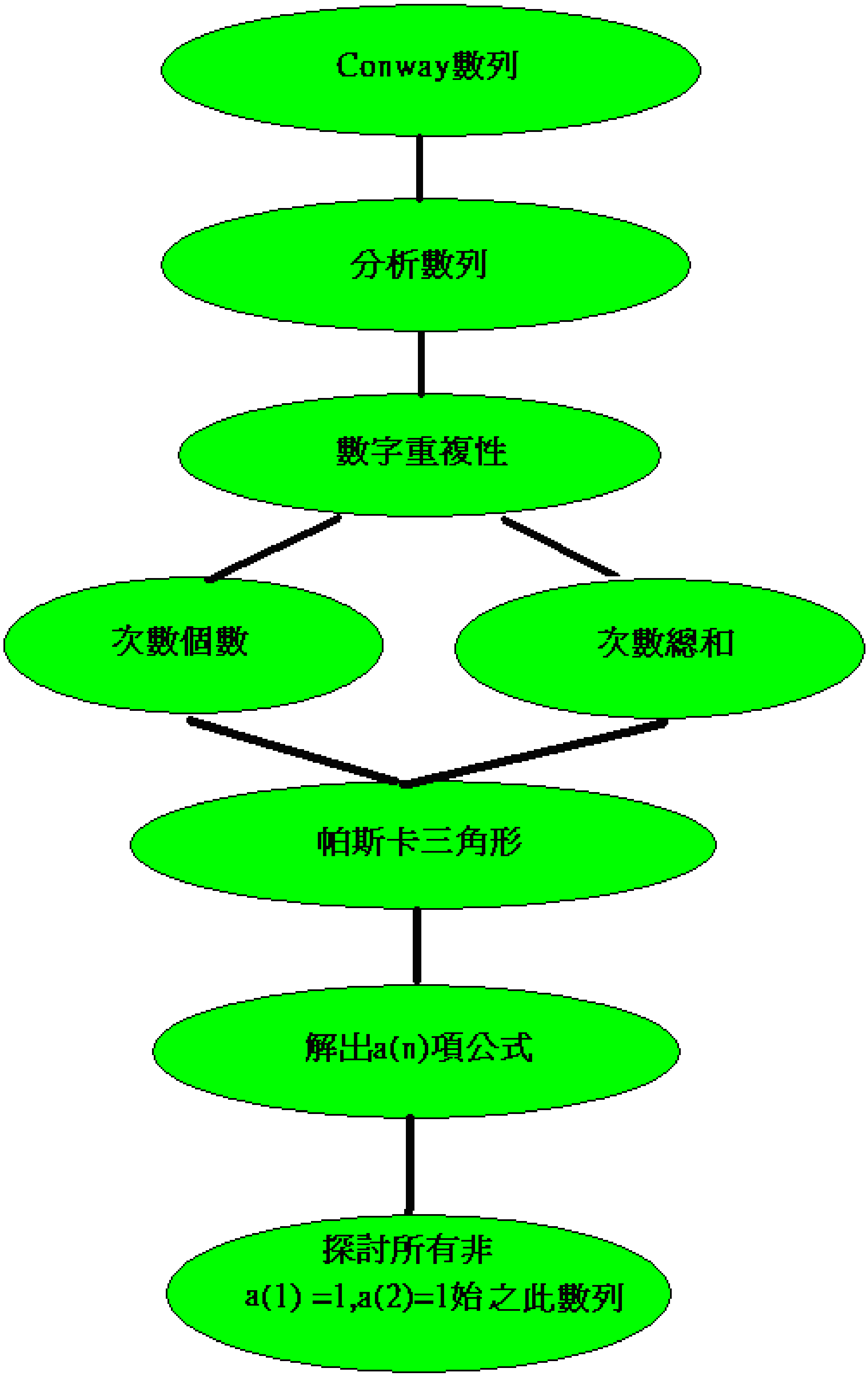
# 參、研究目的

1.觀察此數列之基本性質
2.研究如何造成數列會有此性質
3.是否能推導出 $a_n$ 一般項之方法
4.數列開始值不是 1,1 之狀況

# 肆、研究設備及器材

電腦、C 語言、網路、紙、筆、WORD

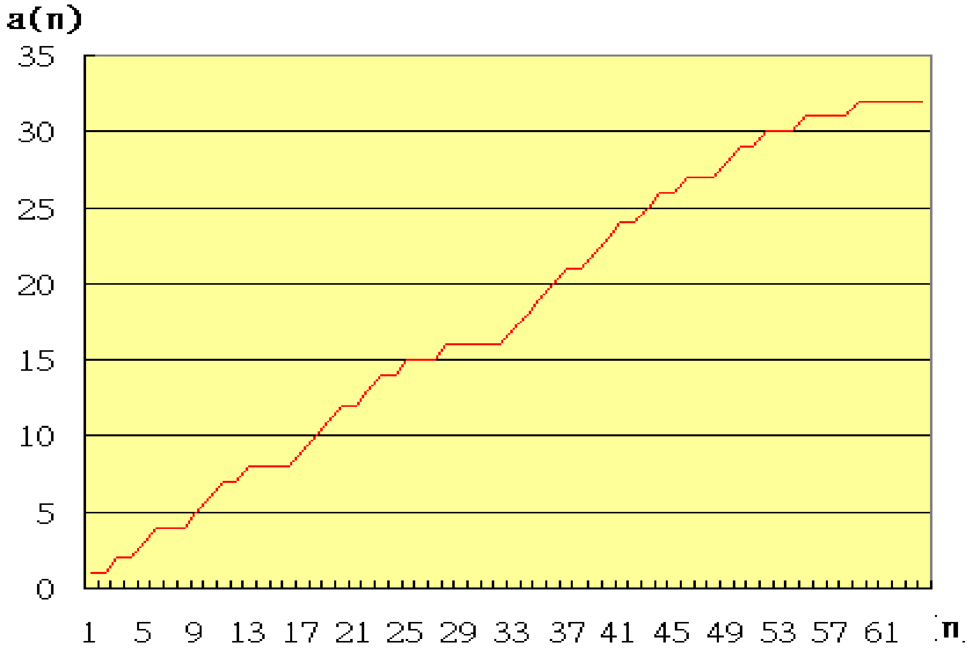
## 伍、研究過程或方法


Conway數列
分析數列
數字重複性
次數個數
次數總和
帕斯卡三角形
解出a(n)項公式
探討所有非
a(1) =1,a(2)=1始之此數列

## 一.基本性質

在此列出一些數列出始值:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $a_n$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| n | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| $a_n$ | 12 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 21 | 22 | 23 |




觀察發現竟然有$a_{2^n} = 2^{n-1}$這個驚人的巧合，稍後再做說明。

## 二、分析數列

### (一)、出現次數

因爲當 n 不相同時，$a_n$ 有可能相同，例如: $a_n$ =4 時，有 $a_6$ , $a_7$ 跟 $a_8$ ，次數就是 3， $a_n$ =3 時，只有 $a_5$ ，次數就是 1，我利用 C 程式跑出 $a_n$ 和每一種 $a_n$ 值出現的次數，將之列於下頁表:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 次數 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 | 1 | 1 |
| $a_n$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| 次數 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

將每個 $2^{k-1} < a_n \le 2^k$ 之間的次數一一列出來，例如當 k=2 時，有 $a_n$ =3 和 $a_n$ =4， $a_n$ =3 有次數一次， $a_n$ =4 有次數 3 次，則排出”1,3”

$2^0 < a_n \le 2^1$ $a_n$ 出現次數排列:2

$2^1 < a_n \le 2^2$ $a_n$ 出現次數排列:1,3

$2^2 < a_n \le 2^3$ $a_n$ 出現次數排列:1,1,2,4

$2^3 < a_n \le 2^4$ $a_n$ 出現次數排列:1,1,1,2,1,2,3,5

$2^4 < a_n \le 2^5$ $a_n$ 出現次數排列:1,1,1,1,2,1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,6

我定義 $P_k$ 數列爲 $2^{k-1} < a_n \le 2^k$ 之出現次數排列

所以， $P_1$={2}， $P_2$={1,3}， $P_3$={1,1,2,4}……以此類推，但注意數列首項 1,1 出現次數 2 並沒有加入 $P_n$ 的數列裡面。

又定義 $P_n$ 之”數列總和”爲裡面的每個項數的值相加，”項數”爲數列裡的個數，例:

$P_3$={1,1,2,4}之總和爲 1+1+2+4=8，有 1,1,2,4 所以項數爲 4

下列列出一些 $P_n$ 的總和、項數

$P_1$={2}總和爲 2，項數爲 1

$P_2$={1,3}總和爲 4，項數爲 2

$P_3$={1,1,2,4}總和爲 8，項數爲 4

$P_4$={1,1,1,2,1,2,3,5}總和爲 16，項數爲 8

$P_5$={1,1,1,1,2,1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,6}總和爲 32，項數爲 16

經過觀察發現有這些性質:

1. $P_k$ 總和爲 $2^k$ 。2. $P_k$ 項數爲 $2^{k-1}$ 。性質 1 後續再做說明，性質 2 其實是由定義

   $2^{k-1} < a_n \le 2^k$ 之出現次數排列，其中有 $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ 個項數

## (二)、巴斯卡三角形

在網路上查到了有一個叫 Kubo 的人說此數列跟巴斯卡三角形有關，我只查到了相關事情，但他卻無解釋，最後我發現是出現次數的數字可以組合成巴斯卡三角形:

2

13

1124

11121235

1111211212312346

11111211121121231121231234123457

現在將每列最右邊的數字減去一，其中再經過適當的分組，出現了一個跟巴斯卡三角形類似的圖形，

1

1 2

1 12 3

1 112 123 4

1 1112 112123 1234 5

1 11112 1112112123 1121231234 12345 6

我定義此圖形爲”出現次數”的巴斯卡三角形，。其中每一列最左邊爲 1，每一列最右邊爲 2,3,4,5,6……由第二列的 1，2 可產生第三列的 $\boxed{12}$，跟巴斯卡三角形類似，依此類推可一直產生下一列的 $P_n$ 。現在定義此圖形爲 E，E(h,k)即代表第 h 列第 k 串，如 E(4,3)=123。

現在我將它們之中由空白分隔的每串數列項數出來如下頁，例如 112123 中有 6 個數字，在相對的巴斯卡三角形就寫上 6，之後把此定義爲”次數個數”的巴斯卡三角形

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

顯示次數個數的巴斯卡三角形

也爲一個巴斯卡三角形，因爲我就是將前面的幾串數列串在一起，所以當然爲巴斯卡三角形。另外，再把原先巴斯卡三角形的每串數字的總和加起來，例如 112123 總和爲 1+1+2+1+2+3=10，將之前的相對位置就寫上 10，之後定義爲”次數總和”的巴斯卡三角形，再此之前，我曾經在最右邊的數字把它減去一，現在把它加回去，如下圖:

1+1

1 2+1

1 3 3+1

1 4 6 4+1

1 5 10 10 5+1

1 6 15 20 15 6+1

顯示次數總和的巴斯卡三角形

也是一個巴斯卡三角形，而每一列正是二項式係數，所以 $P_1$ 總和=2= $2^1$ ， $P_2$ 總和 =1+2+1=(1+1) $^1$ ， $P_3$ 總和=1+3+3+1=(1+1) $^2$ ，

$P_4$ 總和=1+4+6+4+1=(1+1) $^4$ ……

推出了 $P_n$ 總和爲 $2^n$ ，正說明了之前提過的性質 1， $P_k$ 總和爲 $2^k$ 。

(三)比較次數總和圖形與次數個數圖形:

| 次數個數 | 次數總和 |
|---|---|
| 1 | 1+1 |
| 1　1 | 1　2+1 |
| 1　2　1 | 1　3　3+1 |
| 1　3　3　1 | 1　4　6　4+1 |
| 1　4　6　4　1 | 1　5　10　10　5+1 |
| 1　5　10　10　5　1 | 1　6　15　20　15　6+1 |

令次數總和圖形爲 S，次數個數圖形爲 T，T(h,k)表示 T 圖形的第 h 列第 k 個，例如 T(4,3)=3，其中有 T(h,1)=T(h,h)=S(h,1)=1。S(h,h)=h+1。而巴斯卡三角形中間的部分，有 T(h,k)= $\begin{pmatrix} h-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ ，

S(h,k)= $\begin{pmatrix} h \\ k-1 \end{pmatrix}$ ，其中 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{x!}{y!(x-y)!}$ 。

現在只要能掌握住每個 $a_n$ 值有多少個相同，便能利用此知道 n 跟 $a_n$ 之關係。

利用此兩個巴斯卡三角形 S 和 T，可證明之前提過的 $a_{2^n} = 2^{n-1}$

已知 S 代表次數總和，現在定義 $S_n$ 爲 S 的第 n 列之數字和，因爲每個數字都有自己出現次數:

例如”4”的值有 $a_6, a_7$ 跟 $a_8$ ，爲 3 次。而若把同一種 $a_n$ 次數相加起來，項數 n 就一直增加，但是都表示同一個 $a_n$ 值。

現在考慮若有一數字 x，它是出現次數的巴斯卡三角形第 n 列的最後一個，所以它的項數正是他之前的每一列和，可是數列的首項 $a_1$ =1, $a_2$ =1，它的出現次數爲 2，但並沒有記錄在 $P_n$ 裡面，所以並沒有列在次數總和的巴斯卡三角形裡面，但他的次數總和爲 2，必須把它加進去。

若 x=2+ $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots\cdots + S_n$ =2+ $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots + P_n$ ( $P_n$ 代表 $P_n$ 之數列和)

$= 2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^n = 2 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1}$

那他的 $a_n$ 是多少呢?已知 T 是數字個數，代表數字出現次數的個數，定義 $T_n$ 為 T 的第 n 列之數字和，每一個數都有自己的次數，而每個次數的個數是 1，就代表了 $a_n$ 的值，例如次數為 3，其中一個次數為 3 的有 $a_n$ =4，是 $a_6$ , $a_7$ 跟 $a_8$ ，但它們都代表同一個值 4，所以若把次數個數加 1， $a_n$ 就加 1，

所以相對應的 x 若是第 n 列最後一個數，它的 $a_n$ 之值等於次數個數和

之前沒將數列的首項 1,1 的出現的數字個數加入在 $P_n$ ，它的次數個數為 1，做總和時要加起來，

相對應的 $a_x$ 之值=$1+T_1+T_2+T_3+\cdots\cdots+T_n$

$=1+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n$ (此 $P_n$ 代表 $P_n$ 個數總和)

$=1 + 2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + \ldots\ldots + 2^{n-1} = 1 + 1(2^{n-1} - 1) = 2^n$

所以若有一項數 x= $2^{n+1}$ ，有 $a_{2^{n+1}} = 2^n$ ，這正是之前的性質(4)

$$a_{2^n} = 2^{n-1}$$

(四)、我們已經利用 T 跟 S 來證明 n 跟 $a_n$ 的少部份關係，現在，再利用 T 跟 S 來求出一般項 $a_n$ 。

下面以”次數總和”的巴斯卡三角形，放上相對應的 $a_n$ 值:

22

3 444

5 677 8888

9 10111212 131414151515 1616161616

17 1819202121 22232424 252626272727 28292930303031313131 323232323232

以□和　　　　框住代表分隔每一個數字，以空格分隔開的互為一串，其被框住的數字個數，

等同於 T 的圖形，再將對應的數字填入，這裡定義此圖形爲 A，A(h,k,g)代表 A 圖形的第 h 列，第 k 串，第 g 個，A(h,k)代表第 h 列的第 k 串，例如 A(4,3,4)爲 15，A(4,3)= $\boxed{13}\boxed{1414}\boxed{151515}$，而它的項數個數也就是次數總和 S(h,k)，

我們之前已經證明了 $a_{2^n} = 2^{n-1}$ ，利用這個性質，我們可以將給定的項數 n 表示成 $2^k$ +p，其中: $2^{k+1} > n \geq 2^k$ ，也就是 $k = [\log_2 n]$ ，其中 $2^k > p \geq 0$ ，

則 $a_n = 2^{k-1} + q$， $2^{k-1} >$ q≧0，但是，p 跟 q 有什麼關係呢？如果解開此關係，則給定任何 n 值我們都可以求得相對的 $a_n$ ，現在，我們可以再利用 T 跟 S 的關係，揭發出 p 跟 q 的關係來。

已知 T 是次數個數，可用來代表 $a_n$ 的值，S 是次數總和，可代表 n。現在只要知道 n 在 A 的哪一個位子上(知 h,k,g)，即可利用將 S 轉爲 T 的方式求出 $a_n$ ，若給定 n，先將他表示成 $2^k$ +p，例如 n=26，n=16+10，所以 $a_n$ =8+q。觀察上面的巴斯卡三角形，n=26 對應的 $a_n$ 值爲 A(4,3,5)，所以 26 經過了第三列最後一個數字，此時 n=16，而 n=26，須再加 10，走十格，經過了 A(4,1)，經過的數目=次數總和=S(4,1)= $\binom{4}{0}$ =1，再經 A(4,2)，經過了 S(4,2)= $\binom{4}{1}$ =4 個

現在只要將經過的片段 n 值轉換成增加的 $a_n$ ，最後相加即可。要怎麼加上去呢?

已知 T(h,k)= $\binom{h-1}{k-1}$，S(h,k)= $\binom{h}{k-1}$，利用 S 總和代表的 n 轉換成 T 總和代表的值 $a_n$ 即可，所以到目前 n= $2^4 + \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + p$ ，可知 $a_{26} = 2^3 + \binom{3}{0} + \binom{3}{1}$ +q，

到了 A(4,3)不能全部走完，(因爲 10- $\binom{4}{0}$ - $\binom{4}{1} < \binom{4}{2}$ =S(4,3)=A(4,3)項數數目)，現在 $\binom{4}{2}$ 太大，那剩下的 p 要直接加去 $a_n$ 嗎?當然不可以，必須要知道再來 A(4,3)裡面有幾個數字重複，才可以在知道 q 跟 p 之間的關係。

那該怎麼辦呢？既然我們可以將 $P_n$ 數列排成巴斯卡三角形，所以每一串都是由上一列的兩串組合而成的，因此，我們可以利用這個性質將每一串分裂成好幾個小部份，而到了某一些我們可以確定的列，就解開了每一列哪一串有幾個數字，第幾個重複的問題了。現在要利用出現次數的巴斯卡三角形的分解，下面顯示所有的串 E(h,k)分解爲 E(h-1,k-1)和 E(h-1,k)(E 爲第 5 頁的巴斯卡三角形)，例如 E(5,3)= $\boxed{112123}$ = $\boxed{112}$ + $\boxed{123}$ =E(4,2)+E(4,3)，若其中給定的 n 可以分解之後讓 E(h-1,k-1)足夠加上不會超過，則會到 E(h-1,k)，而 E(h-1,k)也照同樣的步驟繼續分解，若不足夠，再分解成上一列的兩串，最後會持續分解到某個 E(u,u-1)和 E(u,u)。但若是所求的 n

值剛好可以拆解成完整的兩項，則可結束不用再繼續分解。

1

1 2

1 12 3

1 112 123 4

1 1112 112123 1234 5

1 11112 1112112123 1121231234 12345 6

出現次數的巴斯卡三角形

例如: $\boxed{1112112123} \rightarrow \boxed{1112} + \boxed{112123}$

↓ ↓

1+$\boxed{112}$ $\boxed{112}$ + $\boxed{123}$

↙ ↓ ↓ ↘

1 1 + $\boxed{12}$ 1+ $\boxed{12}$ $\boxed{12}$+$\boxed{3}$=E(3,2)和 E(3,3)

↘ ↙

$\boxed{1}$+$\boxed{2}$=E(2,1)和 E(2,2)

顯示會分解到 E(u,u-1)和 E(u,u)

1

1 2

1 12 3

1 112 123 4

1 1112 112123 1234 5

1 11112 1112112123 1121231234 12345 6

除了剛好爲兩串組合而成，每一個串都可以分解到每個 E(u,u)跟 E(u,u-1)

利用分解，知 E(h,k)=E(h-1,k-1)+E(h-1,k)，所以若有一 n 值分解到最後剩餘 p，p＜S(h,k)，則分解成 E(h-1,k-1)和 E(h-1,k)，如果 p 又小於 S(h-1,k-1)，再分解，變爲 E(h-2,k-2)和 E(h-2,h-1)…以此類推。

因爲對於 E(h,k)都可以一直分解，一直分解到最右邊的的兩串數列最後會變成 E(u,u-1)和 E(u,u)，當中若 E(u,u-1)足夠加上( 足夠加上 S(u,u-1) )不會超過項數 n，此時會還有剩餘 t，則此 t 會進入下一串變成 E(u,u)，但是 E(u,u)皆爲同一個數，所以 t 代表那一串的第 t 個數，但其實值都爲同樣的。

所以當分解到 S(k,k-1)，也就是加到$\binom{k}{k-2}$，此時剩下就不用再分解。

n=26 時在 E(4,3,3)，可分解爲 E(3,2)+E(3,3)，其中 E(3,3)都是同一個數字

所以 n=26= $2^4+\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+5$，$\binom{4}{2}$太多，所以現在將 S(4,3)拆解成 S(3,2)+2=$\binom{3}{1}$+2=3+2，到此

n=26= $2^4+\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{1}$+2。其中有寫到了$\binom{3}{3-2}$，所以其餘剩下的 t 不論是任何數，在那一串代表的都是同一數，所以轉換成次數個數之後都是 1，利用 S(h,k)=T(h-1,k)轉換，所以

n=26= $2^4+\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{1}$+2 推出 $a_{26}=2^3+\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{2}{1}$+1=15--第二個 15(因爲 t=2)

而當剛好 n 爲爲每一串的最後一個數的時候，t 爲 0，那它是第 0 個數嗎？不是的，當 t=0 的時候，就得看當時加到哪一個，若

n= $2^k+\binom{b}{c}+\binom{b_1}{c_1}+\binom{b_2}{c_2}+\cdots\cdots+\binom{b_n}{c_n}$+0，此時爲第 $c_n+1$ 個數，因爲 E(h,k)的最後一個數便是 k，

所以當加到 S(h,k)= $\binom{k}{k-1}$，t=0 時，則爲第 k 個數。

再做一次，當 n=52 時

52= $2^5+\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$+p 這邊都可以寫出來，再來$\binom{5}{3}$太多，只好到

$\binom{4}{2}$，但$\binom{4}{2}$又太多，再到上一列$\binom{3}{1}$，3 跟 1 相差爲 2，停止。

n=52= $2^5+\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{3}{1}$+1

$a_{52}=2^4+\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{2}{1}$+1=30~第一個出現的 30

再列出一些 $a_n$ 的算法:

n=21= $2^4+\binom{4}{0}+\binom{4}{1}$----------- $a_{21}=2^3+\binom{3}{0}+\binom{3}{1}$=12—(第 1+1=第 2 個 12)

n=43= $2^5+\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{1}+\binom{2}{0}$------ $a_{43}=2^4+\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{1}+\binom{1}{0}$=25(第 0+1 個 25)

n=1001= $2^9+\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{7}{5}$+2

$a_{1001}=2^8+\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{6}{5}$+1=510(第 2 個 510)

現在可以很容易推出公式，當給定 n，將 n 化成

$$n=2^k+\sum_{c_1=0}^{b_1}\binom{k}{c_1}+\sum_{c_2=b_1}^{b_2}\binom{k-1}{c_2}+\sum_{c_3=b_2}^{b_3}\binom{k-2}{c_3}\ldots\ldots+\sum_{c_{j+1}=b_j}^{b_j}\binom{k-j}{c_{j+1}}+t$$

當 $k-j=c_j+2$ 時，須停止，其中 $k=[\log_2 n]$，而 $b_1,b_2\cdots\cdots b_n$ 也由達到的最大數來決定，

若某一項無符合的 $b_i$ 值，也就是加上去會太大了，則此項爲 0，且定 $b_i=b_{i-1}-1$。而對應的

$$a_n = 2^{k-1} + \sum_{c_1=0}^{b_1}\binom{k-1}{c_1} + \sum_{c_2=b_1}^{b_2}\binom{k-2}{c_2} + \sum_{c_3=b_2}^{b_3}\binom{k-3}{c_3} \cdots + \sum_{c_{j+1}=b_j}^{b_j}\binom{k-j-1}{c_{j+1}} + 1$$

其中 $a_n$ 爲第 t 個出現跟 $a_n$ 一樣的數。若 t=0，則爲第 $c_{j+1}+1$ 個。

(五).廣談 $a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}}$

其實對於 $a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}}$ ，只要有一個 $a_1$ =1，就可以求出

$a_2$ =2， $a_3$ =3⋯...因此 $a_n$ =n。

而若 $a_1$ =1， $a_2$ =1，則正是 Hofstadter-Conway $10,000 數列。

若是 $a_1$ =1， $a_2$ =1， $a_3$ =1 而求出 $a_4$ =2, $a_5$ =2⋯⋯在此列出一些數值來

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| n | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| $a_n$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 | 18 |

再像之前一樣，列出每一種 $a_n$ 的出現次數

$a_n$ =1 有 3 次， $a_n$ =2 有 2 次， $a_n$ =3 有 3 次⋯⋯我將它列出來

| $a_n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 次數 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 2 | 5 | 1 | 1 | 2 | 3 | 6 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| $a_n$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| 次數 | 4 | 7 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 1 | 1 | 1 | 2 |

其中有些次數會忽然跳很大，例如 $a_n$ =3 有 3 次， $a_n$ =5 有 4 次，

將一一排到數列的最右邊並且分段，由 $a_n$ =2 的出現次數開始排列

2
3
1 4
1 2 5
1 1 2 3 6
1 1 2 1 2 3 4 7
1 1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 5 8
1 1 1 2 1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 1 2 3 4 5 6 9

現在又定義 $P_1=\{2\}$，$P_2=\{3\}$，$P_3=\{1,4\}$，$P_4=\{1,2,5\}$

跟之前一樣，將 $P_k$ 項數總和，和他的項數個數列出來

$P_1=\{2\}$總和爲 2，項數爲 1
$P_2=\{3\}$總和爲 3，項數爲 1
$P_3=\{1,4\}$總和爲 5，項數爲 2
$P_4=\{1,2,5\}$總和爲 8，項數爲 3
$P_5=\{1,1,2,3,6\}$總和爲 13，項數爲 5

發現了 $P_k$ 其實跟費氏數列有關係！以下 $F_n$ 代表費氏數列的第 n 項，且 $F_1=1$，$F_2=1$，有下列性質，$P_k$ 總和爲 $F_{k+2}$，$P_k$ 項數爲 $F_k$， 發現有 $a_{F_k}=F_{k-2}$，這邊簡短證明:

已知若將從頭打尾的出現次數相加就代表了 n，而將從頭到尾的出現次數個數相加就代表了 $a_n$，之前的首項 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1$，它的次數爲 3，項數爲 1，並沒有考慮在 $P_k$ 裡面，做總和時必須將它加進去，

所以若有一項數 j 爲 $3+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n$ (此邊 $P_n$ 代表 $P_n$ 次數總和)

$3+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n=3+F_3+F_4+F_5+\cdots\cdots+F_{n+2}$

$=1+F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots+F_{n+2}=F_{n+4}$

而相對應的 $a_j$ 值是多少呢?，

爲 $1+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n$ (此邊 $P_n$ 代表 $P_n$ 個數總和)

$1+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n = 1+F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots+F_n=F_{n+2}$

所以若有項數爲 $F_n$，有 $a_{F_n}=F_{n-2}$。

再進一步，若 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1$，$a_4=1$，再按照剛剛的方法列出 $a_n$ 值:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| n | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| $a_n$ | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 113 | 113 | 13 | 13 | 13 | 13 |

再將每個 $a_n$ 值的出現次數列於下表

| $a_n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 次數 | 4 | 2 | 3 | 4 | 1 | 5 | 1 | 2 | 6 | 1 | 2 | 3 | 7 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 |
| $a_n$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| 次數 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 9 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 |

再將出現次數分隔開來，將出現的最大值排在右邊，並且分隔開來

2
3
4
1 5
1 2 6
1 2 3 7
1 1 2 3 4 8
1 1 2 1 2 3 4 5 9

現在又定義 $P_1=\{2\}$，$P_2=\{3\}$，$P_3=\{4\}$，$P_4=\{1,5\}$

跟之前一樣，將 $P_k$ 項數總和，和他的項數個數列出來

$P_1=\{2\}$總和為 2，項數為 1
$P_2=\{3\}$總和為 3，項數為 1
$P_3=\{4\}$總和為 4，項數為 1
$P_4=\{1,5\}$總和為 6，項數為 2
$P_5=\{1,2,6\}$總和為 9，項數為 3
$P_6=\{1,2,3,7\}$總和為 13，項數為 4
$P_7=\{1,1,2,3,4,8\}$總和為 19，項數為 6
其中總和跟項數又有一個數列出現，為 1,1,1,2,3,4,6,9,13……
發現跟費茲數列又有相關，我定義它為 U 數列，他是由

$U_n = U_{n-1} + U_{n-3}$，$U_1 = 1$，$U_2 = 1$，$U_3 = 1$，發展而來，

而跟之前的數列性質幾乎一模一樣的，又有

$P_n$ 總和爲 $U_{n+3}$，$P_n$ 項數爲 $U_n$，且有 $a_{U_n} = U_{n-3}$，

然而之前的 $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 1$ 之數列是由

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 發展出來的，所以我認爲 Hofstadter-Conway \$10,000 數列之次數之所以呈 2 的冪次排列是由 $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1}$ 發展而來的。

現在則可以推論，當 $a_j = 1$，$1 \le j \le N$，他們的出現次數經排列之後的 $P_n$ 之項數個數會有一數列，此數列定爲 K 數列，會有下列關係:

$K_n = K_{n-1} + K_{n-N+1}$ 且有 $a_{K_n} = K_{n-N+1}$，但尚無法證明出來。

(六)通性:由觀察發現，如果給定某前幾項爲 1 之狀況，似乎都有 $a_n \le n$ 和 $a_n - a_{n-1} = 0$ 或 1。在此證明此兩個性質，證明性質 1:利用數學歸納法，已知 $a_1 = 1 \le 1$，而 $a_2 = 1$ 或 2，皆是 $a_2 \le 2$，設若有 $a_j \le j$，其中 $1 \le j \le n$，若 $j = n+1$ 而 $a_{n+1} = a_{a_n} + a_{n+1-a_n}$，我令 $a_n = k$，$1 \le k \le n$，$a_{n+1} = a_{a_n} + a_{n+1-a_n} = a_k + a_{n+1-k} \le k + n + 1 - k = n+1$，所以 $a_{n+1} \le n+1$，知若 $n \in N$ 時皆成立。

證明性質 2:由觀察發現 $a_2 - a_1 = 0$ 或 1，$a_3 - a_2 = 0$ 或 1，利用反證法，現在假設 $a_j - a_{j-1} = 0$ 或 1，其中 $2 \le j \le n$，設若有 $a_{n+1} - a_n = 2$，則

$a_{n+1} - a_n = a_{a_n} + a_{n+1-a_n} - a_{a_{n-1}} - a_{n-a_{n-1}} = a_{a_n} - a_{a_{n-1}} + a_{n+1-a_n} - a_{n-a_{n-1}} = 2$ 而 $a_{a_n}$ 和 $a_{a_{n-1}}$ 它的項數 $a_n$ 跟 $a_{n-1}$ 之値相等或差 1，所以有可能有 $a_n = a_{n-1}$ 所以 $a_{a_n} = a_{a_{n-1}}$，而或 $a_n = a_{n-1} + 1$ 所以 $a_{a_n} = a_{a_{n-1}}$ 或 $a_{a_n} = a_{a_{n-1}} + 1$ (由題所設)，而 $a_{n+1-a_n}$ 它的項數 $n + 1 - a_n \le n$，$a_{n-a_{n-1}}$ 它的項數 $n - a_{n-1} < n$，它們的項數差爲 $1 + a_{n-1} - a_n$，而 $a_{n-1} - a_n$ 爲 0 或-1，故它們的項數差爲 0 或 1，所以也有可能爲 $a_{n+1-a_n} = a_{n-a_{n-1}}$ 或 $a_{n+1-a_n} = a_{n-a_{n-1}} + 1$

而$a_{a_n}-a_{a_{n-1}}+a_{n+1-a_n}-a_{n-a_{n-1}}=2$的條件爲$a_{a_n}=a_{a_{n-1}}+1$和$a_{n+1-a_n}=a_{n-a_{n-1}}+1$才可能造成等式成立，所以$a_{a_n}\neq a_{a_{n-1}}$，$a_{n+1-a_n}\neq a_{n-a_{n-1}}$，依照此兩不等式，得知它們的項數必不相等

$$a_{a_n}\neq a_{a_{n-1}}\longrightarrow a_{n-1}\neq a_n\longrightarrow a_n-a_{n-1}\neq 0$$

$$a_{n+1-a_n}\neq a_{n-a_{n-1}}\longrightarrow n+1-a_n\neq n-a_{n-1}\longrightarrow a_n-a_{n-1}\neq 1$$

此兩性質與所設矛盾，故數列之後必也爲$a_{n+1}-a_n=0$或 1

## 陸、研究結果

1.Hofstadter-Conway $10,000 數列之一般項，將 n 化成

$$n=2^k+\sum_{c_1=0}^{b_1}\binom{k}{c_1}+\sum_{c_2=b_1}^{b_2}\binom{k-1}{c_2}+\sum_{c_3=b_2}^{b_3}\binom{k-2}{c_3}\ldots\ldots+\sum_{c_{j+1}=b_j}^{b_j}\binom{k-j}{c_{j+1}}+t$$

當$k-j=c_j+2$時，須停止，

其中$k=[\log_2 n]$，而$b_1,b_2\cdots\cdots b_n$由可達到的最大數來決定，若某一項無符合的$b_i$值，則此項爲 0，且定$b_i=b_{i-1}-1$。而對應的$a_n$：

$$a_n=2^{k-1}+\sum_{c_1=0}^{b_1}\binom{k-1}{c_1}+\sum_{c_2=b_1}^{b_2}\binom{k-2}{c_2}+\sum_{c_3=b_2}^{b_3}\binom{k-3}{c_3}\ldots+\sum_{c_{j+1}=b_j}^{b_j}\binom{k-j-1}{c_{j+1}}+1$$

其中$a_n$爲第 t 個出現跟$a_n$一樣的數。若 t=0，則爲第$c_{j+1}+1$個。

2.$a_n=a_{a_{n-1}}+a_{n-a_{n-1}}$之數列若當$a_j=1$，$1\leq j\leq N$，都有性質

n≧$a_n$，$a_n-a_{n-1}=0$或 1，且某些$a_n$若有特定的 n，會特定值出現。

## 柒、討論

一、所列的目的大部份達到了，基本性質除了較平常的大部分都證明了，雖然說還有很多的東西我證明不出來。而爲了找出 n 與$a_n$之關係也利用了一些基本性質，其中巴斯卡三角形幫了很大的忙，讓我們找出每個出現次數其實是有規律的，恰是巴斯卡三角形，還利用巴斯卡三角形來連結 n 跟$a_n$的關係

二、此次研究只著眼在求 $a_n$ 之方法，其實還有很多可以研究，例如每個 $a_n$ 的出現次數爲什麼會有巴斯卡三角形，費茲數列這些關係?我認爲必定跟數列的本身 $a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}}$ 有些關聯，能不能利用數列本身去研究出給定任何首項都可適用的一般項。

3.能否利用我給定的一般項證明出 Hofstadter-Conway $10,000 數列的 $\lim_{n\to\infty} a_n / n = \frac{1}{2}$，雖然當初已經被別人證明了。

4.還有很多著名的數列，如 Mollow 數列 $a_n = a_{a_{n-2}} + a_{n-a_{n-2}}$

，是否跟 Hofstadter-Conway $10,000 數列有一樣的性質?

# 捌、結論

從剛開始研究此數列時，感覺這個數列很特別，要產生下一項還必須觀察前面幾項的值，因此認爲此數列一定有些巧妙的事情，最後竟然發現有”巴斯卡三角形”在裡面，真的很神奇，而且如果不是從開始的 1,1 出發，還會有費氏數列……和類似費氏數列等出現，真的是數列裡面有數列，我認爲這是個迷人的挑戰，雖然說我只是接觸這個數列的一小部份而已，希望以後能夠在更深入研究它！！

# 玖、參考資料及其他


Mathworld:

http://mathworld.wolfram.com/Hofstadter-Conway10000-DollarSequence.html

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences:

http://www.research.att.com/~njas/sequences/A004001

East as 11223:

http://el.media.mit.edu/logo-foundation/pubs/papers/easy_as_11223.html

NewsVille:

http://www.newsville.com/cgi-bin/getfaq?file=news.answers/puzzles/archive/arithmetic/part1

【評　語】　　040406　Hofstadter-Conway $10000 數列

1) 這是一篇新鮮程度極高，數學內涵極爲豐碩，極有 Conway 味道的科展研究。作者應該多下點功夫尋找數學學術期刊、電子資料庫中相關的資料及 Hofstadter-Conway $10000 數列的簡短歷史。

2) Hofstadter-Conway $10000 數列可以透過如 Excel 之試算表作列表。