中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳創意獎

040404

24 點球面

學校名稱：國立新竹科學工業園區實驗高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉謙凡	莊添丁
高二 林京民	
高二 鄭鉅翰	
高二 劉淳祐	

關鍵詞：九點圓　四面體　球面

24 點球面

摘要：我們證明了，四面體的四個面上的四個九點圓共球面的充要條件是此四面體爲「對直四面體」。此球面我們稱爲對直四面體的「24 點球面」。

並發現在對直四面體的條件下，九點圓的一些相關性質亦可以類推至三維空間。

我們也試著將此結果推廣到其他的多面體上。

壹、研究動機：

自從上了高二之後，學到許多關於三維空間上的數學概念。有人說立體是平面的推廣，一維的點，可以拉到二維變成線；二維的線，拉到三維變成面。再加上有一次數學老師在課堂上介紹有趣的定理－九點圓定理，於是我們就很好奇，當平面上三角形的九點圓被放到立體空間中的四面體的四個面上時，四個面上的四個九點圓是否會共球面？而具有這種球面的四面體又會有怎樣的性質？

貳、研究目的：

一、研究由四面體的四個面上的九點圓是否會共球面的條件。

二、三角形之九點圓的相關性質是否能推廣到上述的四面體。

三、三角形之九點圓的相關性質是否能推廣到其他的多面體。

参、研究器材：

白紙，電腦，GSP，Cabri 3D，筆（原子筆＋鉛筆＋自動筆），圓規，尺，橡皮擦。

肆、研究過程及方法：

一、九點圓定理及其相關性質

（一）九點圓（又名歐拉（Euler）圓）定理：

對任意三角形ABC，三角形的三邊的中點D，E，F，三高的垂足K，L，M，和頂點到垂心H的三條線段的中點P，Q，R，這九點必定共圓。

（二）對任何三角形，九點圓的圓心在歐拉線上，在垂心H到外心O的線段的中點。

（三）九點圓的半徑是三角形ABC 外接圓半徑的一半。

證明：

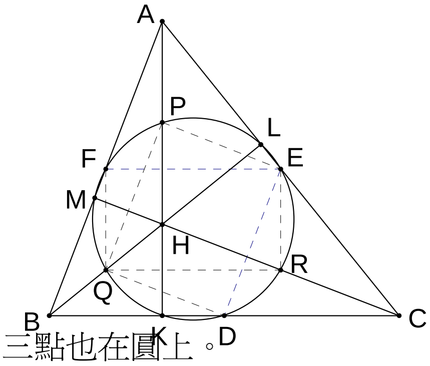
設 H 爲 ΔABC 的垂心，D 爲 $\overline{BC}$ 的中點，E 爲 $\overline{AC}$ 的中點，P 爲連結頂點 A 與垂心 H 之線段 $\overline{AH}$ 的中點，Q 爲連結頂點 B 與垂心 H 之線段 $\overline{BH}$ 的中點，則

$\overline{DE} // \overline{AB}$ ，$\overline{PQ} // \overline{AB}$ ，$\overline{DE} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ，

所以，$DEPQ$ 爲一矩形，D，E，P，Q 四點共圓。如圖（一）。

同理，E，F，Q，R 四點共圓。

又 $\angle PKD = \angle QLE = \angle RMF = 90^\circ$ ，K，L，M 三點也在圓上。



圖（一）

則 D，E，F，K，L，M，P，Q，R，這九點共圓。

設O為ΔABC的外心，G為重心，由尤拉線的性質知道，H，G，O 三點共線，且 $\overline{HG}=2\overline{GO}$，又 $\overline{AH}\,//\,\overline{OD}$，

則$\Delta AHG \sim \Delta DOG$，$\overline{AH}=2\overline{OD}$。如圖（二）。

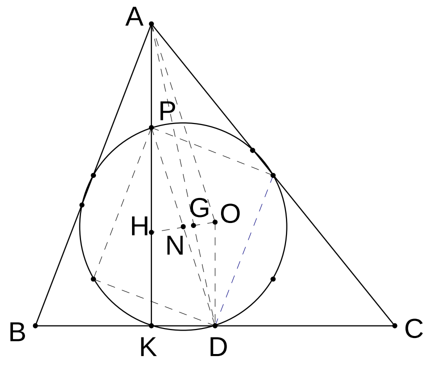
設九點圓圓心 N，$\overline{PH}=\overline{OD}$，

$\angle HPN=\angle ODN$，則$\Delta PHN \cong \Delta DON$，

N 為$\overline{OH}$的中點。

且 $\overline{PN}=\dfrac{1}{2}\overline{OA}$，

即九點圓的半徑是ΔABC外接圓半徑的一半。



圖（二）

二、關於四面體的一些定理

（一）重心定理

1.所謂四面體的中線是一頂點與其對面之重心的連線。

2.四面體的四條中線交於一點（稱為重心）。

3.頂點到重心之長為中線的$\dfrac{3}{4}$。

（二）外心定理

1.四面體六邊之垂直平分面共點，稱為外心。

2.外心到各頂點的距離相等。

3.外心到各面之垂足為各面的外心。

（三）垂心定理

1.若一四面體的三組對邊兩兩互相垂直，則此四面體稱為「對直四面體」。
例如，通過坐標空間第一卦限的平面，與三個坐標平面形成一四面體。此四面體的三組對邊兩兩互相垂直。

2.四面體的四條垂線共點的充要條件為三組對邊兩兩互相垂直（即對直四面體）

3.有垂心時，垂線之垂足就是對面之垂心。（亦即過一頂點之三垂面交於垂線）

（四）對直四面體的 Euler 線

對直四面體的垂心，重心，外心在一直線上。

三、24 點球面

現在，想要將此九點圓的性質推廣至三維空間，由三角形變為四面體。如圖（三）。

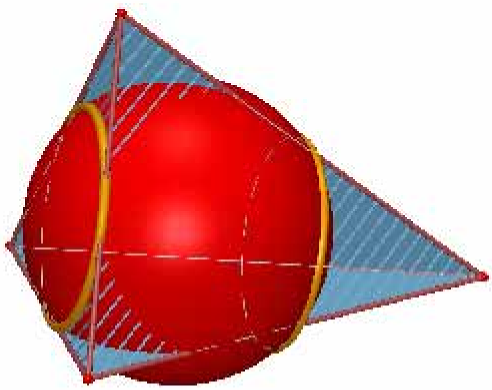
由於四面體的四個面上各有一個九點圓，則當四個九點圓上的點都相異時，總共有

36 個點。但是，假如這四個圓共球面時，因為一直線最多與球面交於二點，所以

在稜上的九點圓的點（垂足或中點）會重合，由四點重合為最多二點。因此，若

這四個九點圓共球面，則此球面最多包含四面體上的 24 個特殊點，即包含 12 個各面垂心至各面頂點之中點，6 個稜邊上的垂足和 6 個稜邊上的中點。

定義一：若四面體的四個面上的四個九點圓共球面，我們稱此球面爲此四面體的 24 點球面。

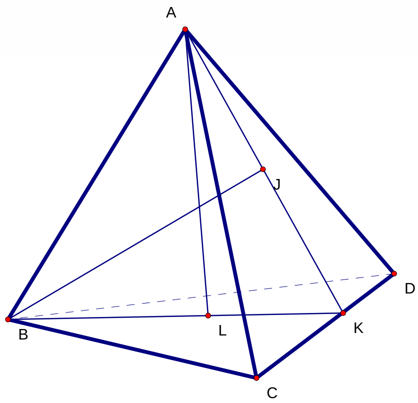


四、24 點球

引理一：

如圖（四）所示，並令其中二個面 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ADC$ 之垂心分別爲 J，L，四面體 $ABCD$ 之垂心爲 H。則 $\overleftrightarrow{AJ}$ 和 $\overleftrightarrow{BL}$ 交 $\overline{CD}$ 於同一點 K。

圖（三）



圖（四）

證明：

因爲對直四面體之垂心 H 爲各平面之垂心分別與其對頂點連線的交點，

所以，$\overline{AL}$ 和 $\overline{BJ}$ 交於四面體的垂心 H，

則 $\overline{AL}$ 和 $\overline{BJ}$ 共平面，$\overline{AJ}$ 和 $\overline{BL}$ 共平面，即 A，B，L，J 四點共平面。

因此，$\overleftrightarrow{AJ}$ 和 $\overleftrightarrow{BL}$ 交 $\overline{CD}$ 於一點 K，且 $\overline{BK} \perp \overline{CD}$，$\overline{AK} \perp \overline{CD}$。

引理二：(引理一的逆定理)

設四面體 $ABCD$ 中的二個面 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ADC$ 之垂心分別爲 J，L，四面體 $ABCD$ 之垂心爲 H。若 $\overleftrightarrow{AJ}$ 和 $\overleftrightarrow{BL}$ 交 $\overline{CD}$ 於同一點 K，則此四面體爲一對直四面體。

證明：

因爲$\overline{AJ}$交$\overline{BL}$於一點K，所以，A，B，L，J四點共平面。

又$\overline{AK}\perp\overline{CD}$，$\overline{BK}\perp\overline{CD}$，所以平面$ABLJ\perp\overline{CD}$，則$\overline{AB}\perp\overline{CD}$。

同理可得$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，

即四面體$ABCD$爲一對直四面體。

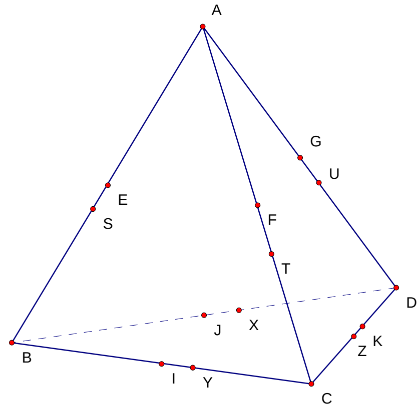
引理三：任一對直四面體皆有 24 點球面。

證明：

設四面體$ABCD$爲一對直四面體，如圖（五）所示。令四面體各稜邊中點分別爲E，F，G，I，J，K。

由引理一，得知在$\overline{AC}$上$\triangle ABC$的垂足和

$\triangle ACD$的垂足共點，稱此爲$\overline{AC}$上的垂足。



圖（五）

同理，可推至其他各稜邊上，令各稜邊垂足分別爲S，T，U，X，Y，Z。

又由九點圓定理，得知過$\triangle ACD$三邊中點F，G，K的圓也過三邊的垂足T，U，Z，

所以，F，T，Z，K，U，G，六點共圓，設此圓爲α。

同理，S，E，F，T，Y，I共圓β；J，X，K，Z，Y，I共圓γ；

S，E，G，U，X，J共圓τ。

因爲圓α交圓β於F，T兩點，一定可找到一球面K，使得K同時包含圓α和圓β。同理，必定可找到二球面L和M，使得L和M分別包含圓γ和圓β，圓γ和圓α。

因爲圓α和圓β共球面K，則球面K至少包含F，T，Z，Y四點，且這四點不共平面。

圓β和圓γ共球面L，則球面L也至少包含F，T，Z，Y四點，則球面K＝球面L，即圓α，圓β和圓γ共球面。

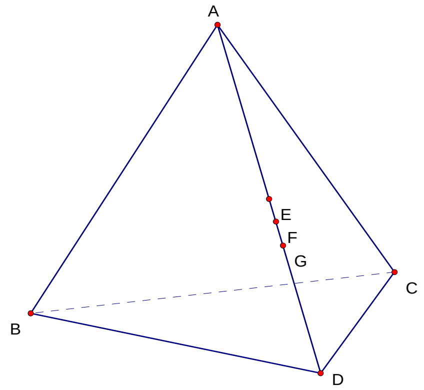
同理，球面K＝球面M，即圓α，圓γ和圓τ共球面。

所以，$K=L=M$。

也就是，F，T，Z，K，U，G，S，E，Y，I，J，X，12 點共球面，而此球面即爲此四面體之 24 點球面。

引理四：具有 24 點球面之四面體皆為對直四面體。

證明：



圖（六）

設一四面體 $ABCD$ 具有 24 點球面 K，如圖（六）所示。其中 E 點為稜邊 $\overline{AD}$ 之中點，點 F，G 分別為$\triangle ABD$ 和$\triangle ADC$ 在 $\overline{AD}$ 上之垂足。

該四面體 $ABCD$ 具有 24 點球面 K，

球面 K 過各稜邊之中點和各稜邊之垂足。

所以，球面 K 過 E，F，G 三點。

又一球面最多交一直線於兩點，則 E，F，G 三點中必有兩點重合。

設點 E，F 重合，因為點 E 為 $\overline{AD}$ 中點，F 為$\triangle ABD$ 在 $\overline{AD}$ 上之垂足，

則$\triangle ABD$ 上之九點圓 α 切 $\overline{AD}$ 於點 E。

$\triangle ADC$ 上之九點圓 β 交 $\overline{AD}$ 於 E，G，且 E，G 不是圓 β 之圓心。

又圓 α 和圓 β 皆包含於球面 K，

則球面 K 切直線 $\overline{AD}$ 於一點 E（由圓 α 來看），也交 $\overline{AD}$ 於兩點 E，G（由圓 β 來看），矛盾。故點 E，F 重合不成立。

同理，點 E，G 重合亦不成立。

由上述討論，我們得到點 F，G 重合，也就是$\triangle ABD$ 和$\triangle ADC$ 在 $\overline{AD}$ 上之垂足重合。

同理，其他各稜邊上的垂足都重合。

由引理二，可推得此四面體為對直四面體。

綜合前面的討論，我們得到下面的結果：

定理一：四面體具有 24 點球面之充要條件是此四面體為對直四面體。

五、24 點球面之球心與對直四面體之重心，外心與垂心的關係

有了 24 點球面的結果之後，我們想進一步討論 24 點球面的球心所在的位置，是否如同九點圓一樣，與三角形的垂心和外心共線？或是也具有類似的性質？

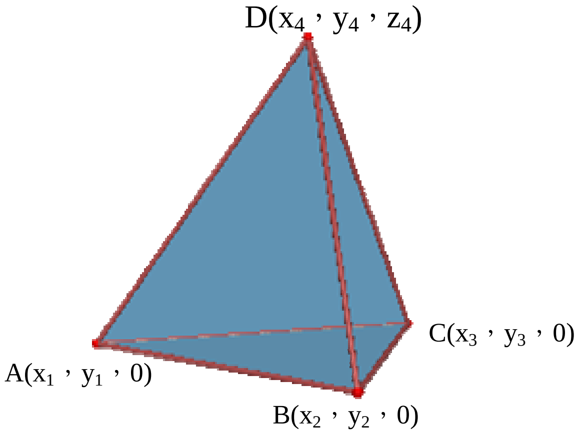
利用 Cabri 3D 進行觀察，我們發現下面的結果：

定理二：一個對直四面體的 24 點球面的球心為此對直四面體之重心。

證明：

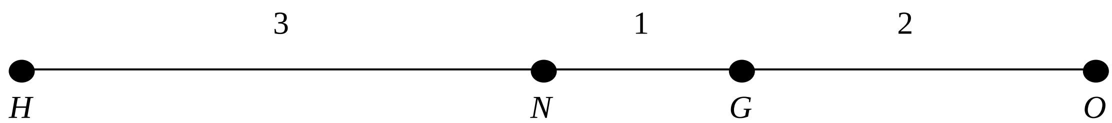
對於空間中任意四面體，不失其一般性，可將其中的三點 A，B，C 移至空間坐標系中的xy平面上。四個頂點之點坐標可設為$A(x_1，y_1，0)$，$B(x_2，y_2，0)$，$C(x_3，y_3，0)$，$D(x_4，y_4，z_4)$，如圖（七）所示。

又因具有 24 點球面之四面體爲對直四面體，因此 D 點投影至 xy 平面之點即爲 ΔABC 之垂心H，因此，H之坐標爲$(x_4，y_4，0)$。



圖（七）

此外，根據尤拉線及三角形九點圓圓心之性質，可得 ΔABC 之垂心 H，重心 G，外心 O，和九點圓圓心 N，皆位於尤拉線上，且線段長的比例如下：



可利用分點公式，求得九點圓圓心 N 點坐標爲

$$\left(\frac{3\times(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})+x_4}{4}，\frac{3\times(\frac{y_1+y_2+y_3}{3})+y_4}{4}，0\right)$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}，\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}，0\right)，$$

又設四面體$ABCD$之重心爲G_c，G_c之坐標爲四頂點坐標之算術平均，即

$$G_c\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}，\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}，\frac{z_4}{4}\right)$$

由此得知G_c位於N之垂直上方，因此，G_c至 ΔABC 的九點圓上各點之距離相等。

接著再看 $\overline{DA}$ ，$\overline{DB}$ 和 $\overline{DC}$ 三稜邊之中點坐標分別爲

$$\left(\frac{x_1+x_4}{2}，\frac{y_1+y_4}{2}，\frac{z_4}{2}\right)，\left(\frac{x_2+x_4}{2}，\frac{y_2+y_4}{2}，\frac{z_4}{2}\right)，\left(\frac{x_3+x_4}{2}，\frac{y_3+y_4}{2}，\frac{z_4}{2}\right)，$$

而 ΔABC 垂心$H(x_4，y_4，0)$到 ΔABC 頂點的中點坐標分別爲

$$\left(\frac{x_1+x_4}{2}，\frac{y_1+y_4}{2}，0\right)，\left(\frac{x_2+x_4}{2}，\frac{y_2+y_4}{2}，0\right)，\left(\frac{x_3+x_4}{2}，\frac{y_3+y_4}{2}，0\right)，$$

因此依距離公式即可知此六點與G_c之距離皆相等，又此六點都包含於 24 點球面中，且空間中不共平面相異四點決定一球面，故可得證：

對直四面體之重心G_c爲其此 24 點球面的球心。

定理三：24 點球面之球心G_c在該對直四面體之外心 O_c 與垂心 H_c 之連線上，並且 G_c點位於$\overline{O_cH_c}$之中點。

證明：

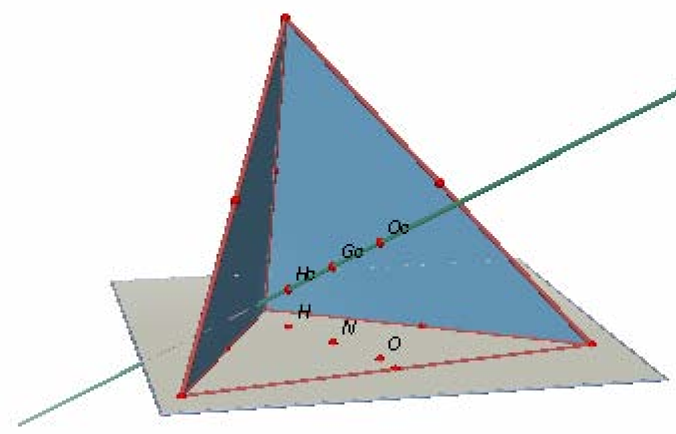
已知空間中也具有尤拉線，亦即對直四面體的垂心，重心，外心位於同一直線上。

又四面體的外心 O_c 在 ΔABC 上的投影爲 ΔABC 之外心 O，而對直四面體垂心 H_c 在 ΔABC 上的投影爲 ΔABC 之垂心 H。

根據定理二，對直四面體重心G_c在 ΔABC 上的投影爲 ΔABC 之九點圓圓心N，故依相似可得：

$$\overline{HN}:\overline{NO}=\overline{H_cG_c}:\overline{G_cO_c}=1:1\text{，}$$

因此得知，**對直四面體中，重心恰爲垂心與外心的中點**。如圖（八）。



圖（八）

六、對直四面體之 24 點球面，外接球面兩者的半徑關係之探討

平面上的九點圓，其半徑正好爲外接圓半徑的一半，因此我們也問：在空間中，24 點球面的半徑與四面體之外接球半徑是否也有一定比例？

我們以兩個特例：「正四面體」與「垂直四面體」地情形來做計算。(所謂「垂直四面體」爲具有相鄰三邊兩兩垂直之四面體)

（一）正四面體：

設邊長爲 a，則外接圓半徑 R 爲 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$，而 24 點球半徑 r 以畢氏定理可算出

$$r=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{12}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2}=\sqrt{\frac{18}{144}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$ ，因此 $R：r=\sqrt{3}：1$。

（二）垂直四面體：

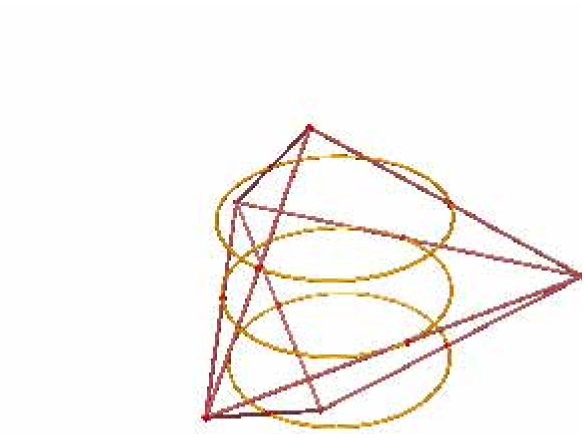
設四頂點坐標為 $(0,0,0)$ ， $(a,0,0)$ ， $(0,b,0)$ ， $(0,0,c)$ ，因外接球球心 O 為 $x=\frac{a}{2}$ ， $y=\frac{b}{2}$ ， $z=\frac{c}{2}$ 三個平面之交點，因此 $O(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ 。另外，已知 24 點球球心為四面體之重心 G_c ，故 $G_c(\frac{a}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4})$ ，由此可知 R：r＝2：1。

所以 24 點球面半徑與外接球面半徑並無簡單的比例關係。

七、凸五，六，七面體是否有類似的結果？

由於前提是各面上有九點圓，故各面皆為三角形，但是各面皆為三角形的話，五、七面體無法成立，而六面體則無法將各中點置於同一球面。

依圖（九）可知，六面體的情形會出現三個等圓，而三個面平行的等圓無法做出一球，故得知六面體無類似 24 點球面之結果。

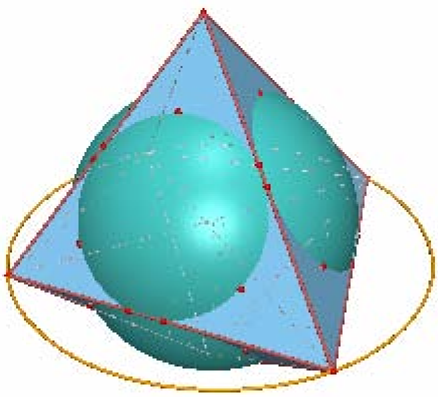


圖（九）

八、凸八面體中，48 點球面存在的必要條件

以下我們討論關於各面皆為三角形的凸八面體，是否存在一個球面同時包含各面的九點圓？(目前所取的八面體為：任取兩條對角線能成一平面。)

定義二：若凸八面體的八個面上的八個九點圓共球面，我們稱此球面為此八面體的 48 點球面。如圖（十）所示。



圖（十）

引理五：設一四邊形 *ABCD*，若存在一圓過該四邊形之各邊中點 *M*，*N*，*O*，*P*，則此四邊形的對線角互相垂直。如圖（十一）所示。

證明：

因△CNO～△CBD，所以 NO // BD。

同理 MP // BD，MN // AC // PO，

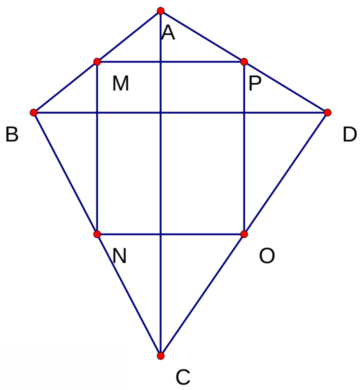
所以，四邊形 $MNOP$ 為平行四邊形。

因 M，N，O，P 共圓，

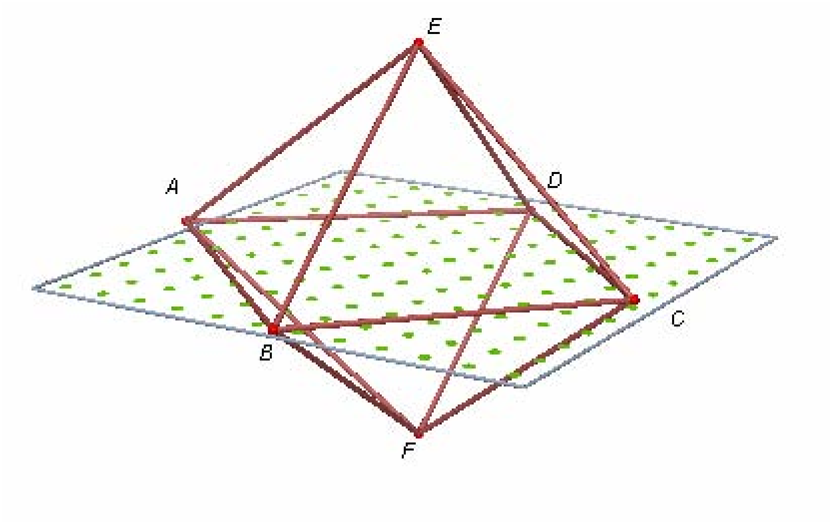
四邊形 $MNOP$ 對角互補，

四邊形 $MNOP$ 為矩形，

則 $AC \perp BD$。



圖（十一）



圖（十二）

定理四：一凸八面體中，已知 *A*，*B*，*C*，*D* 和 *A*，*E*，*C*，*F* 和 *B*，*E*，*D*，*F* 等四點皆共平面，如圖（十二）。
若存在 48 點球面，則三條對角線 *AC*，*BD* 和 *EF* 相交於一點且兩兩相互垂直。

證明：

設 A，B，C，D 和 A，E，C，F 和 B，E，D，F 分別共平面 α，β，γ，

所以，四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC，BD 分別為平面 α，β 及 α，γ 的交線，

即四邊形 $ABCD$ 的對角線交點為三平面 α，β，γ 之交點。

同理，可推得四邊形 $AECF$ 和 $BEDF$ 的情形。

所以，四邊形 $ABCD$，$AECF$，$BEDF$ 之對角線交於同一點，該點為平面 α，β，γ 之交點。

假使 48 點球面存在，各稜邊中點必共球面，

則四邊形 $ABCD$ 之各邊中點共圓。

由引理五可得，$AC \perp BD$。

同理，$AC \perp EF$，$EF \perp BD$。

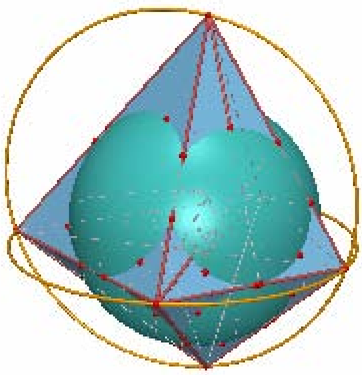
即三條對角線 AC，BD 和 EF 兩兩相互垂直。

定理五：如定理四條件中的八面體，若存在 48 點球面，則有一外接球面同時通過八面體的六個頂點。

證明：由定理四可知，八面體中，A，B，C，D 和 A，E，C，F 和 B，E，D，F 分別共圓。

又三條對角線 AC，BD 和 EF 對角線兩兩成一平面，故六個頂點能形成兩相交且不同平面之圓（交點位於頂點）。如圖（十三）。

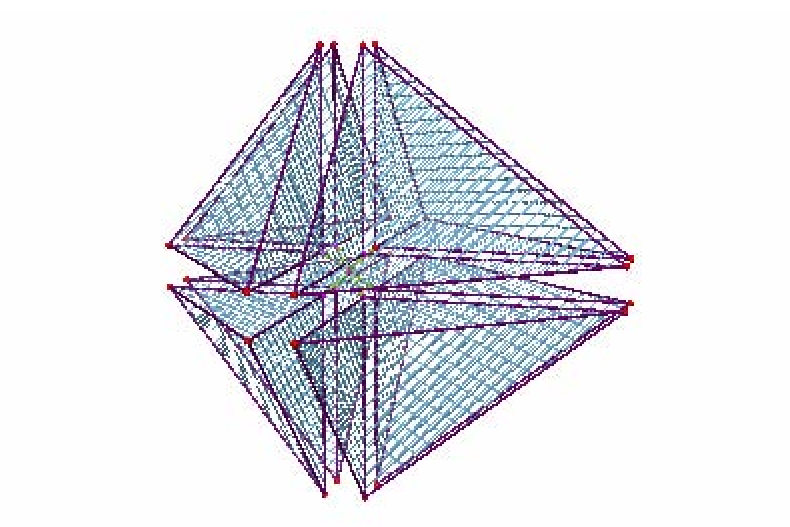
而不共線三點決定一圓，不共平面四點決定一球面，因此兩相交且不同平面之圓恰決定一球面，即此八面體的六個頂點同時通過一外接球面。



圖（十三）

定理六：此八面體有垂心，且此垂心位於三對角線交點。(垂心為自各面三角形垂心作法線交的一點)

證明：由前述八面體存在條件其一有：三條對角線兩兩互相垂直，故今將八面體以對角線分為八份，則得八個四面體(如圖十四)，又此四面體為先前所述之垂直四面體，即其垂心位於原八面體的對角線交點，故可得知，自八面體各面的垂心做垂直於各面的法線，會交於原八面體的對角線交點，而此點為八面體的垂心。



圖（十四）

伍、結論

我們證明了下列結果：

一、四面體具有 24 點球面之充要條件是此四面體為對直四面體。

二、一個對直四面體的 24 點球面的球心為此對直四面體之重心。

三、24 點球面之球心在該對直四面體之外心與垂心之連線上，並且位於外心與垂心之線段中點。

四、24 點球面之半徑與對直四面體外接球半徑無固定的比例關係。

五、六面體無類似 24 點球面之結果。

六、一凸八面體中，已知 A，B，C，D 和 A，E，C，F 和 B，E，D，F 等四點皆共平面。若存在 48 點球面，則三條對角線 AC，BD 和 EF 相交於一點且兩兩相互垂直。並且此八面體的六個頂點共球面。

陸、討論與展望

一、我們希望可以將八面體具有 48 點球面的充分條件找出來。

二、利用 Cabri 3D，我們也發現一些具有 48 點球面的八面體的相關性質，例如：

(一)此八面體的外心與垂心中點為 48 點球球心，且球心到八面體的外心與垂心距離與球心到四邊形外心相等。

(二)此八面體球心與重心交疊，即重心位於垂心與外心中點，１：１尤拉線成立。

但是，以上皆尚未證明。

三、利用 Cabri 3D，我們能夠具體觀察一些立體圖形，希望能夠找到更多類似 24 點球面的好玩性質，並將這些發現具體證明出來。

四、猜想：(利用四面體以及八面體的共有性質做出推廣猜想)

(一)當一以三角形構成之多面體有垂心時，此多面體各面上 9 點圓可共形成一球。且此球球心位於多面體重心。

(二)當有以多面體各面皆為三角形且每頂點所接面數相同時，其垂心的存在與九點圓聯立球面存在為充要條件。

(三)當多面體的九點圓聯立球面存在時，此多面體的尤拉線成立，且垂心－重心距與重心－外心距等長。

柒、參考文獻

1、幾何明珠　黃家禮 編著　九章出版社。

2、幾何探索　曹亮吉 著　南一書局。

3、平面幾何中的小花　單墫 著　上海教育出版社。

4、高中數學課本　第三冊　南一書局。

【評　語】　　040404　24 點球面

1) 動態幾何軟體 Cabri 3D 提供了立體幾何實驗的理想環境。然而作者未能掌握到該軟體的特性，看版及口頭報告中只呈現出兩幅缺乏動態訊息的靜態圖片。

2) 24 點球面視爲平面幾何中 9 點圓在立體幾何中的延伸由於條件相當不自然而顯得略爲牽強。

3) 參考資料的 4 篇論文/專書與本作品的關係不夠密切，請作者加強文獻探討的功夫。