中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040403

圓錐曲線的『平均』

學校名稱：國立新竹科學工業園區實驗高級中學

作者：	指導老師：
高二 何應佑	莊添丁

關鍵詞：圓錐曲線　極座標　平均

作品摘要

作品中，首先證明了下列命題：「一橢圓中心爲 O ，在橢圓上取多點 $P_1, P_2, ..., P_n \left(n \geq 3\right)$ ，使得 $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \ldots, \overline{OP_n}$ 將圓周角 n 等分，則 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{OP_n}^2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$ 。」

又利用極座標上圓錐曲線的標準型： $\Gamma : r(1 + e\cos\theta) = l$ ，嘗試以「平均（算術平均與幾何平均）」的概念，研究圓錐曲線圖形在此條件下的變換關係，並得到一些有趣的結果。

壹、研究動機

在上專題研究課時，老師提到了三十九屆科展中的一件作品（請參考附錄），它是從這個命題開始出發：

一橢圓中心爲O，在橢圓上取兩點使得$\overline{OA}\perp\overline{OB}$，則$\dfrac{1}{\overline{OA}^2}+\dfrac{1}{\overline{OB}^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$。

進而推得：

一橢圓中心爲O，在橢圓上取多點$P_1,P_2,\ldots,P_n\left(n\geq 3\right)$，

使得$\overline{OP_1},\overline{OP_2},\ldots,\overline{OP_n}$將圓周角$n$等分，則$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{OP_n}^2}=\frac{n}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$。

這個結果頗爲漂亮，然而證明過程不甚嚴謹，於是著手進行，發現將橢圓放在極座標上會容易許多，然而我所知極座標上圓錐曲線的標準型是：

$$\Gamma : r(1+e\cos\theta)=l$$

此標準型是曲線的焦點位在座標原點，但證明前述命題用到的是對稱中心位在原點的橢圓，這兩種不同的表示法或許存在某種關聯，於是嘗試以「平均」的概念去研究。

貳、研究目的

一、尋找對稱中心位在原點的圓錐曲線方程和標準型的關聯。
二、探討圓錐曲線方程的各種變換方式，以及變換所得新方程的圖形。

參、研究器材

筆、筆記本、計算紙、個人電腦、GSP 4.07、MS Word

肆、研究過程及方法

一、座標轉換

(一) 極座標系和直角座標系互轉

1. 考慮$(r,\theta)\rightarrow(x,y)$則有：

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

2. 考慮$(x,y)\rightarrow(r,\theta)$則有：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\begin{cases}\tan^{-1}\dfrac{y}{x} & if \quad x>0\wedge y\geq 0\\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x}+2\pi & if \quad x>0\wedge y<0\\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\pi & if \quad x<0 \qquad (0\leq\theta\leq 2\pi)\\ \dfrac{\pi}{2} & if \quad x=0\wedge y>0\\ \dfrac{3\pi}{2} & if \quad x=0\wedge y<0\end{cases}$$

(二) 極座標系上圖形的旋轉

1. 將$\Gamma:F(r,\theta)=0$以原點爲中心逆時針旋轉ϕ，可得$\Gamma':F(r,\theta-\phi)=0$，$\phi$取負值代表順時針旋轉$-\phi$。

2. $F(r,\theta)=0$和$F(-r,\theta-\phi)=0$代表相同的圖形。

證明：

考慮極座標轉直角座標：$(r,\theta)\to(r\cos\theta,r\sin\theta)$，

以及：$(-r,\theta-\pi)\to(-r\cos(\theta-\pi),-r\sin(\theta-\pi))=(r\cos\theta,r\sin\theta)$，

可知(r,θ)和$(-r,\theta-\pi)$代表同一點。

所以$\{(r,\theta)\mid F(r,\theta)=0\}=\{(-r,\theta-\pi)\mid F(-r,\theta-\phi)=0\}=\{(r,\theta)\mid F(-r,\theta-\phi)=0\}$

二、橢圓上等分角線長的倒數平方和

(一) 基本型

命題：

一橢圓中心爲O，在橢圓上取兩點使得$\overline{OA}\perp\overline{OB}$，則$\dfrac{1}{\overline{OA}^2}+\dfrac{1}{\overline{OB}^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$。

證明：

取一橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，在$\Gamma$上取一點$A(x_1,y_1)$使其在極座標中的$\theta$座標爲$\phi$，再取一點$B(x_2,y_2)$使其在極座標中的$\theta$座標爲$\phi+\dfrac{\pi}{2}$。

將A的座標以r,θ表示，可得$(x_1,y_1)=(r_1\cos\phi,r_1\sin\phi)$。

同理，$(x_2,y_2)=(r_2\cos(\phi+\dfrac{\pi}{2}),r_2\sin(\phi+\dfrac{\pi}{2}))=(-r_2\sin\phi,r_2\cos\phi)$。

分別代入$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得$\dfrac{r_1^2\cos^2\phi}{a^2}+\dfrac{r_1^2\sin^2\phi}{b^2}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{r_1^2}=\dfrac{\cos^2\phi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\phi}{b^2}$。

以及$\dfrac{1}{r_2^2}=\dfrac{\sin^2\phi}{a^2}+\dfrac{\cos^2\phi}{b^2}$，相加並整理即得$\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$。

(二) 多等分角線

命題：

一橢圓中心為O，在橢圓上取多點$P_1,P_2,...,P_n(n\geq 3)$，使得$\overline{OP_1},\overline{OP_2},...,\overline{OP_n}$將圓周角$n$等分，

則$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{OP_n}^2}=\frac{n}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$。

證明：

類似基本型，取$P_i\left(r_i\cos(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n}),r_i\sin(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})\right)$，代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得：

$$\frac{1}{r_i^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\cos^2(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})+\frac{1}{b^2}\sin^2(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})$$

因$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，所以有：

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\cos(2\phi+4\pi\cdot\frac{i-1}{n})\right]=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos(2\phi+4\pi\cdot\frac{i-1}{n})$$

由積化和差公式，知：$\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\cos(2\phi+4\pi\cdot\frac{i-1}{n})=\frac{1}{2}\left(\cos(2\phi+2\pi\cdot\frac{2i-1}{n})-\cos(2\phi+2\pi\cdot\frac{2i-3}{n})\right)$

所以：$\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\cos(2\phi+4\pi\cdot\frac{i-1}{n})=\frac{1}{2}\left(\cos(2\phi+2\pi\cdot\frac{2n-1}{n})-\cos(2\phi+2\pi\cdot\frac{-1}{n})\right)=0$

若$n\geq 3$，則$\sin\frac{2\pi}{n}\neq 0$，亦即$\sum_{i=1}^{n}\cos(2\phi+4\pi\cdot\frac{i-1}{n})=0$，可得：

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos(2\phi+4\pi\cdot\frac{i-1}{n})=\frac{n}{2}$$

同理，$\sum_{i=1}^{n}\sin^2(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})=\frac{n}{2}$。

代入$\frac{1}{r_i^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\cos^2(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})+\frac{1}{b^2}\sin^2(\phi+2\pi\cdot\frac{i-1}{n})$，於是有：

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)$，得證。

三、極座標系上的曲線方程：

(一) 以原點為圓心的圓

方程：$C:r=l$

*證明：*由圓的定義可得。

(二) 通過原點的直線

方程：$L:\theta=\phi$

*證明：*這是顯然的。

(三) 不通過原點的直線

標準型： $L: r\cos\theta = l$

旋轉型： $L: r\cos(\theta-\phi) = l$

*證明：*標準型代入$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$即得$\Gamma: x=l$。

(四) 以原點爲一焦點的圓錐曲線

1. 方程

標準型： $\Gamma: r(1+e\cos\theta)=l$，$e>0$

旋轉型： $\Gamma: r[1+e\cos(\theta-\phi)]=l$

證明：

考慮Γ上一點 P，具有極座標(r_0,θ_0)以及直角座標(x_0,y_0)。

展開標準式並代入$x=r\cos\theta$：

$r(1+e\cos\theta)=r+er\cos\theta=r+ex=l \Leftrightarrow r=l-ex$

得到 P 和原點的距離$\overline{OP}=|r_0|=|l-ex_0|$。

取直線$L: x=\dfrac{l}{e}$，則$d(P,L)=\left|\dfrac{l}{e}-x_0\right|$。

$\overline{OP}=e\cdot d(P,L)$，故$\Gamma$爲圓錐曲線，一焦點在原點，準線爲$L: x=\dfrac{l}{e}$。

2. 反轉

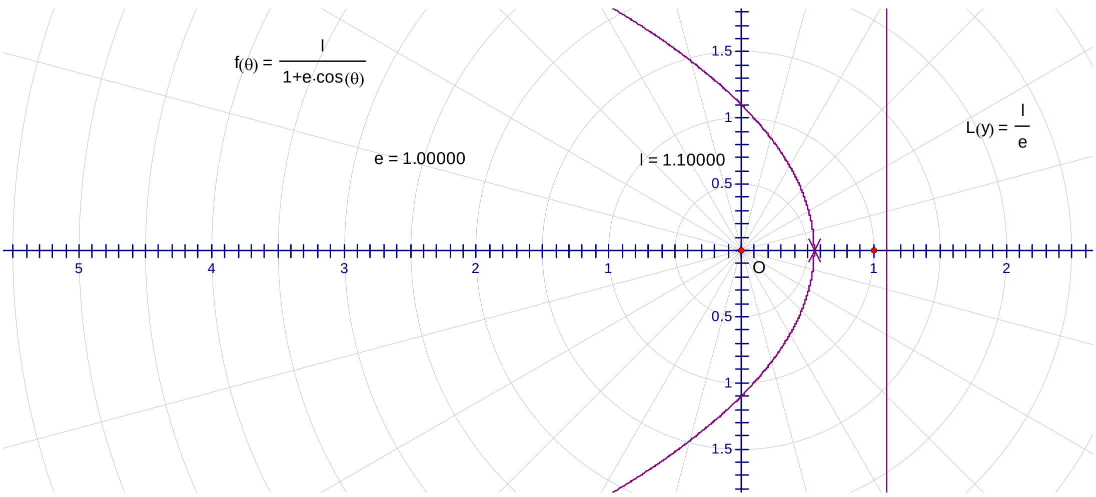
令圓錐曲線爲$F(r,\theta)=r(1+e\cos\theta)-l=0$，則將其繞原點旋轉$\pi$（此操作以下稱爲<u>反轉</u>）可得：

$F(r,\theta-\pi)=r[1+e\cos(\theta-\pi)]-l=r(1-e\cos\theta)-l=0$，亦即$r(1-e\cos\theta)=l$。

再由旋轉性質知，$r(1-e\cos\theta)=l$和$r(1+e\cos\theta)=-l$表示相同圖形。

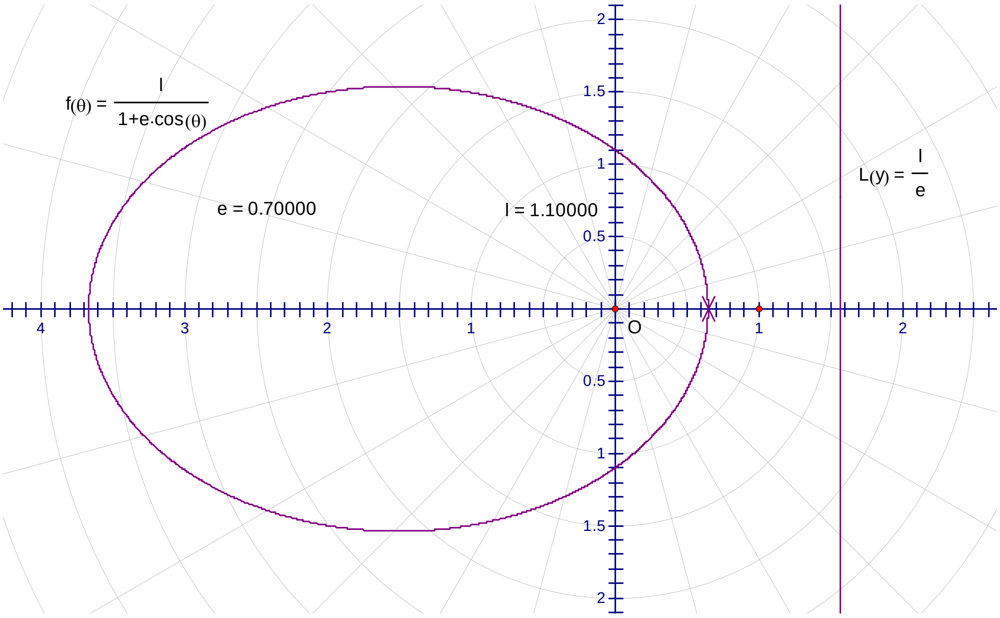
3. 拋物線

取$e=1$即得圖形如下：



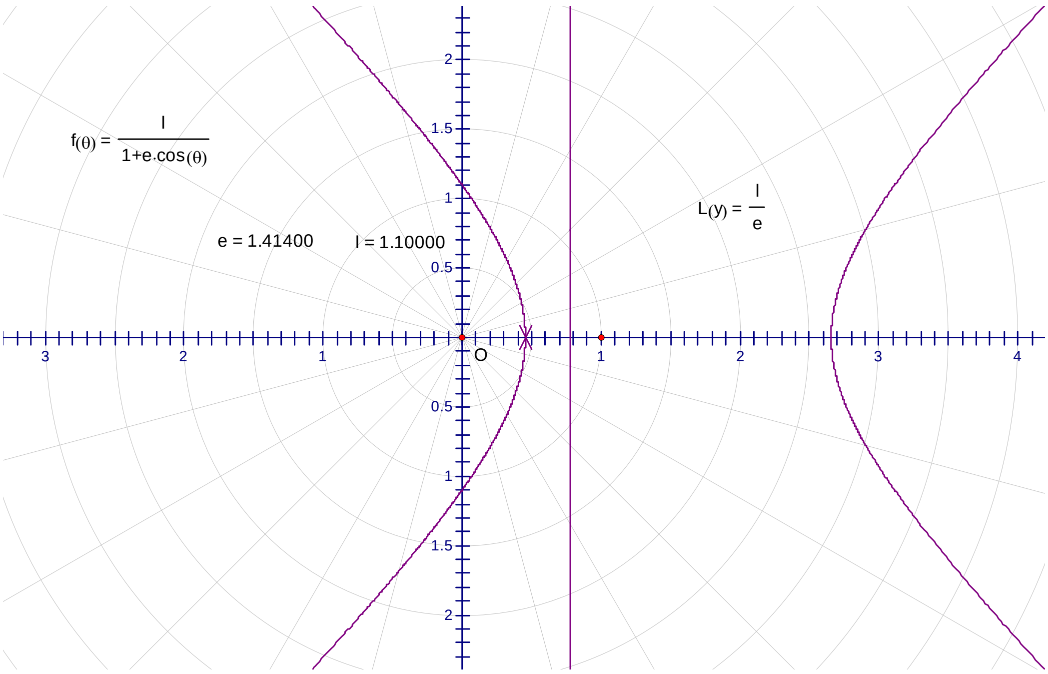
4. 橢圓

取$e<1$即得圖形如下：



5. 雙曲線

取$e>1$即得圖形如下：



6. 正焦弦

易知包含正焦弦的直線爲$\theta=\dfrac{\pi}{2}\vee\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，代入$r(1+e\cos\theta)=l$得到$r=\pm l$，

故正焦弦長爲$2|l|$。

7. 半長軸

若Γ為橢圓或雙曲線，易知包含長軸的直線為$\theta=0\vee\theta=\pi$，代入$r(1+e\cos\theta)=l$得到

$(r(0),0)=(\frac{l}{1+e},0)$，$(r(\pi),\pi)=(\frac{l}{1-e},\pi)=(\frac{-l}{1-e},0)$，

故半長軸為$a=\frac{1}{2}\left|\frac{l}{1+e}-\frac{-l}{1-e}\right|=\left|\frac{l}{1-e^2}\right|$。

8. 半短軸、共軛軸

若Γ為橢圓，設半短軸長為b，因為正焦弦長$2|l|=\frac{2b^2}{a}$，故$b=\frac{|l|}{\sqrt{1-e^2}}$。

若Γ為雙曲線，同理可得半共軛軸長$b=\frac{|l|}{\sqrt{e^2-1}}$。

四、幾何平均

(一) 正 GM 變換

考慮圓錐曲線$r_1(1+e\cos\theta)=l$，l取正值，反轉後得到另一圓錐曲線，取其方程為

$r_2(1-e\cos\theta)=l$，各自移項得$r_1=\frac{l}{1+e\cos\theta}$，$r_2=\frac{l}{1-e\cos\theta}$。

令$r_G=\sqrt{r_1r_2}=\frac{l}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}$，可得到新曲線$r_G\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}=l$，以下將此操作簡稱<u>**正GM變換**</u>。

(二) 共軛 GM 變換

考慮圓錐曲線$r_1(1+e\cos\theta)=l$，取其反轉曲線$r_2(1+e\cos\theta)=-l$。

令$r_G=\sqrt{r_1r_2}=\frac{l}{\sqrt{e^2\cos^2\theta-1}}$，可得到新曲線$r_G\sqrt{e^2\cos^2\theta-1}=l$，以下將此操作簡稱<u>**共軛GM變換**</u>。

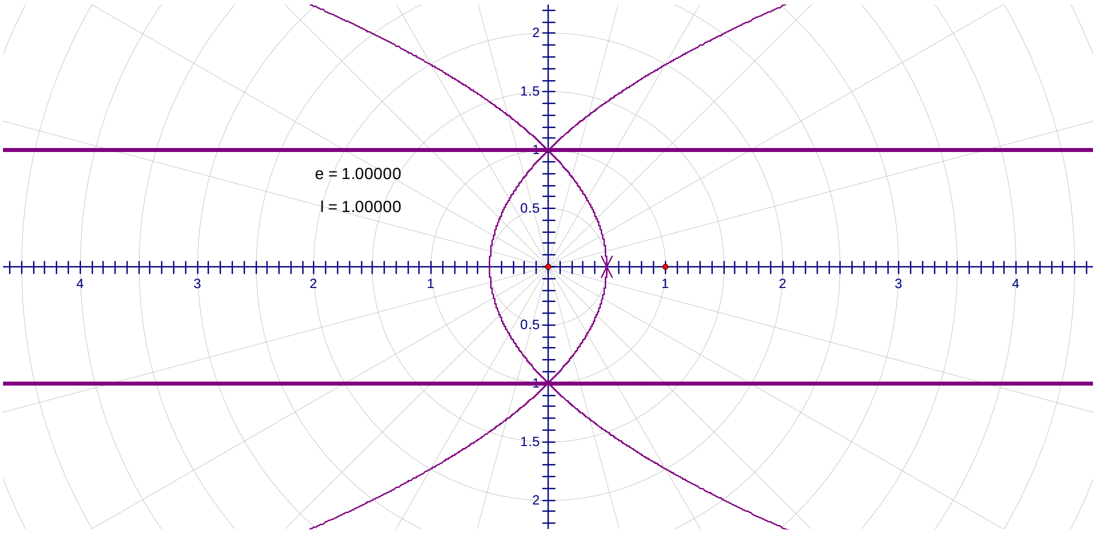
(三) 拋物線的 GM 變換

正GM 變換：

$r_G\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}=l$代入$e=1$，得到$r_G\sqrt{1-\cos^2\theta}=r_G|\sin\theta|=l$。

這相當於$r_G\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=l$和$r_G\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=l$的聯集，圖形為兩直線對稱於原點。

如圖中粗線標示者：



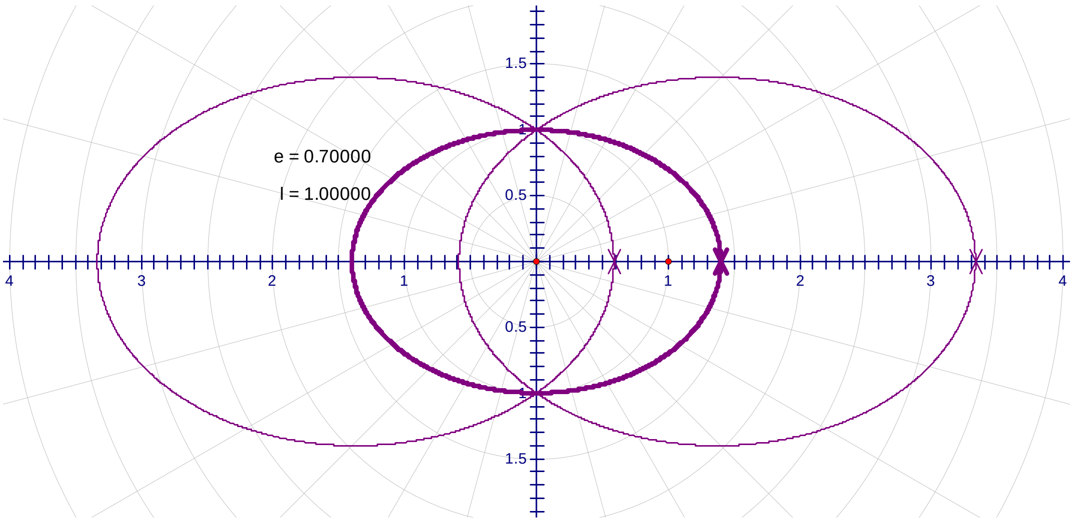
共軛 GM 變換：

因 r_1 、 r_2 恆爲異號所以得不到圖形。

(四) 橢圓的 GM 變換

正 GM 變換：

$r_G\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}=l$ ，如圖中粗線標示者：



推測此圖形可能爲一橢圓，假設此爲真，代入 $\theta=0$ 及 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 可得半長軸 $a_G=\dfrac{l}{\sqrt{1-e^2}}$ 和半短軸 $b_G=l$ ，故此假設橢圓應有方程 $\dfrac{1-e^2}{l^2}x^2+\dfrac{y^2}{l^2}=1$ 。

$$\frac{1-e^2}{l^2}x^2+\frac{y^2}{l^2}=1\Leftrightarrow x^2-e^2x^2+y^2=l^2\Leftrightarrow x^2+y^2\left(1-e^2\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=l^2$$

$\Leftrightarrow r_G\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}=l$ ，此假設爲真。

故標準型橢圓經正 GM 變換後得對稱於原點的橢圓。

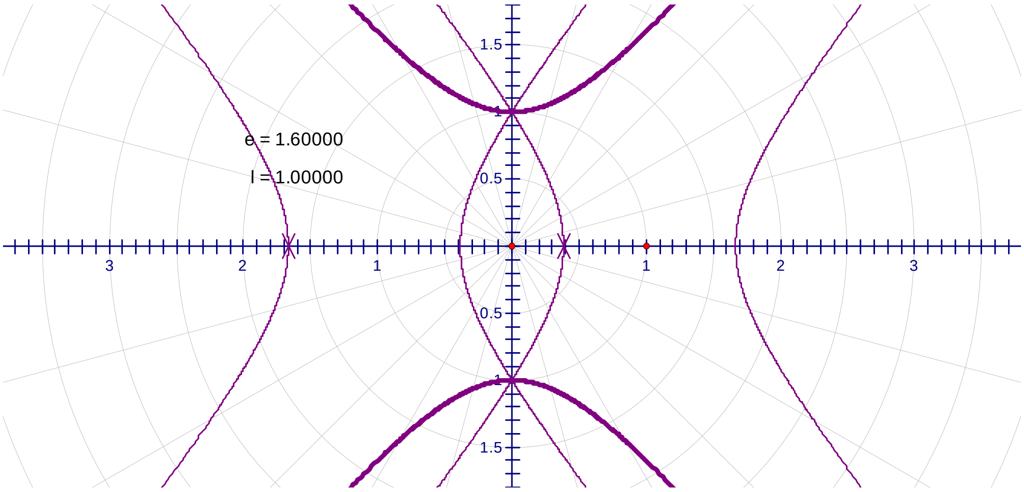
共軛 GM 變換：

因 r_1、r_2 恆為異號所以得不到圖形。

(五) 雙曲線的 GM 變換

正 GM 變換：

$r_G\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}=l$，如圖中粗線標示者：



類似橢圓正 GM 變換的推導過程並反向進行，即可從 $r_G\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}=l$ 推得

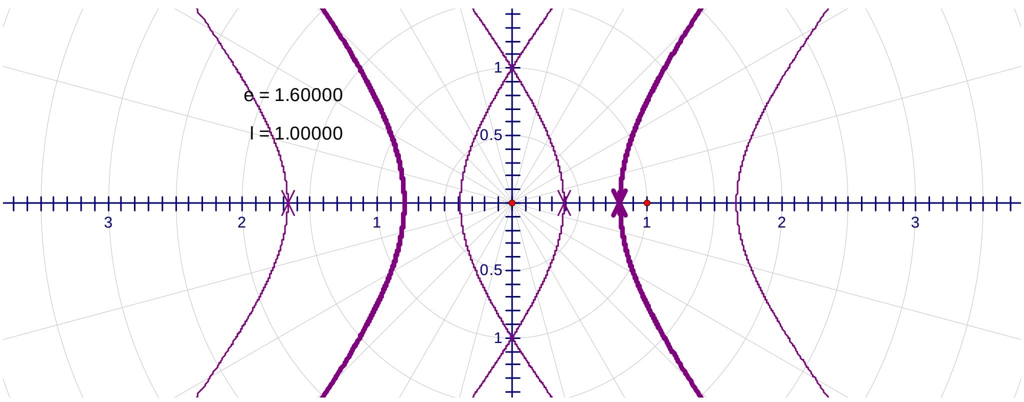
$\frac{1-e^2}{l^2}x^2+\frac{y^2}{l^2}=1$，亦即 $-\frac{e^2-1}{l^2}x^2+\frac{y^2}{l^2}=1$。

故標準型雙曲線經正 GM 變換得對稱於原點的雙曲線，半貫軸 $b_G=l$，

半共軛軸 $a_G=\frac{l}{\sqrt{e^2-1}}$。

共軛 GM 變換：

$r_G\sqrt{e^2\cos^2\theta-1}=l$，如圖中粗線標示者：



類似正 GM 變換，可得 $\dfrac{e^2-1}{l^2}x^2-\dfrac{y^2}{l^2}=1$ 。

故標準型雙曲線經共軛 GM 變換得對稱於原點的雙曲線，半貫軸 $a_G=\dfrac{l}{\sqrt{e^2-1}}$ ，半共軛軸 $b_G=l$ 。

標準型雙曲線經正 GM 變換和共軛 GM 所得的兩雙曲線互爲共軛雙曲線。

五、算術平均

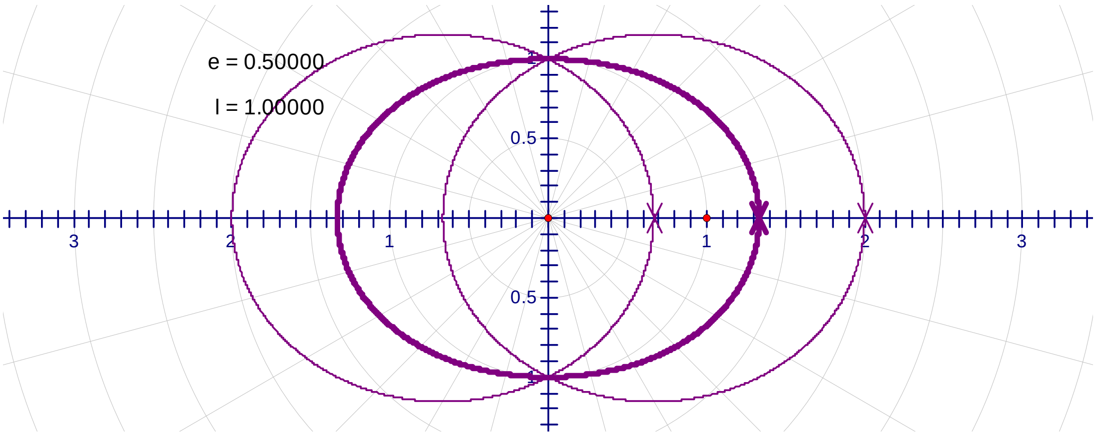
(一) AM 變換

考慮圓錐曲線 $r_1(1+e\cos\theta)=l$ ，反轉後得到另一圓錐曲線，取其方程爲 $r_2(1-e\cos\theta)=l$ ，各自移項得 $r_1=\dfrac{l}{1+e\cos\theta}$ ， $r_2=\dfrac{l}{1-e\cos\theta}$ 。

令 $r_A=\dfrac{r_1+r_2}{2}=\dfrac{l}{1-e^2\cos^2\theta}$ ，可得到新曲線 $r_A\left(1-e^2\cos^2\theta\right)=l$ ，以下將此操作簡稱**AM變換**。

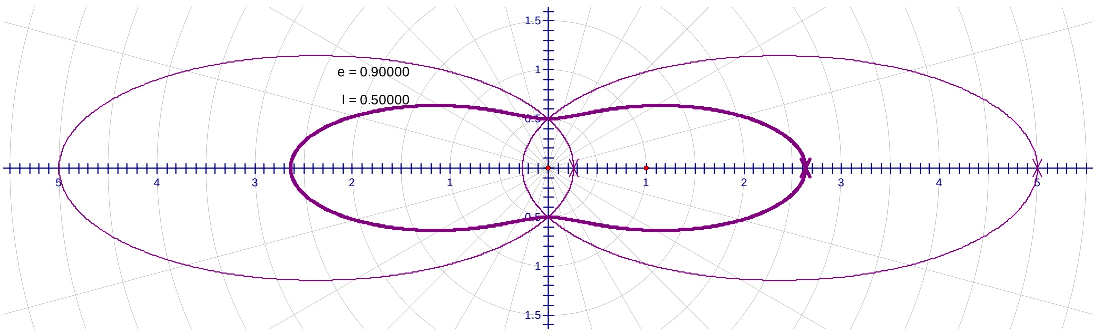
(二) 不同離心率的比較

取 $e=0.5$ 作 AM 變換的函數圖形以粗線標示如下：



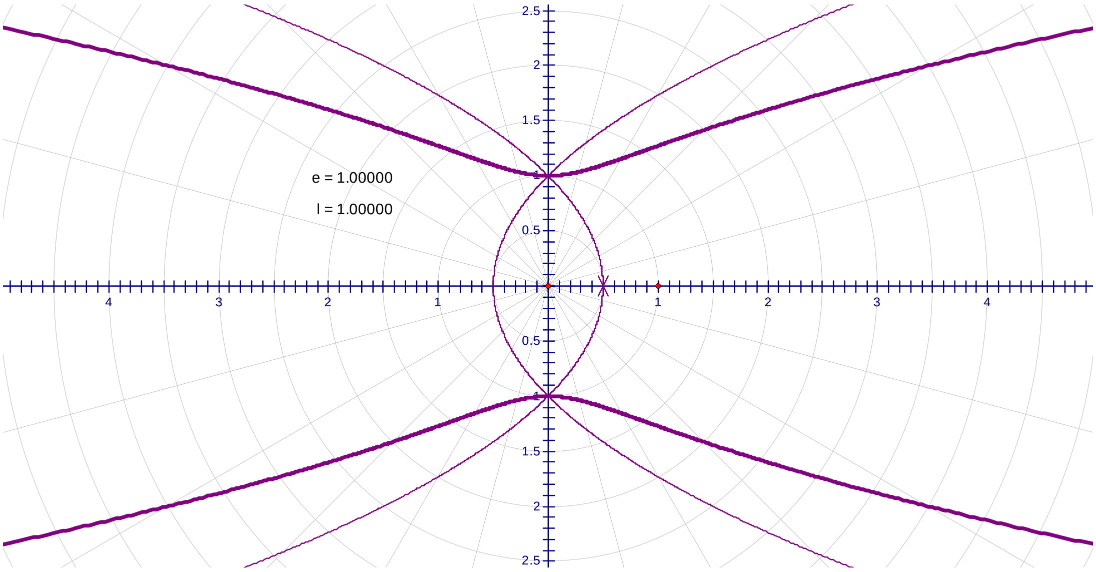
看起來還類似橢圓，但和正 GM 變換比較，推測應不是。

再取 $e=0.9$ 作 AM 變換：



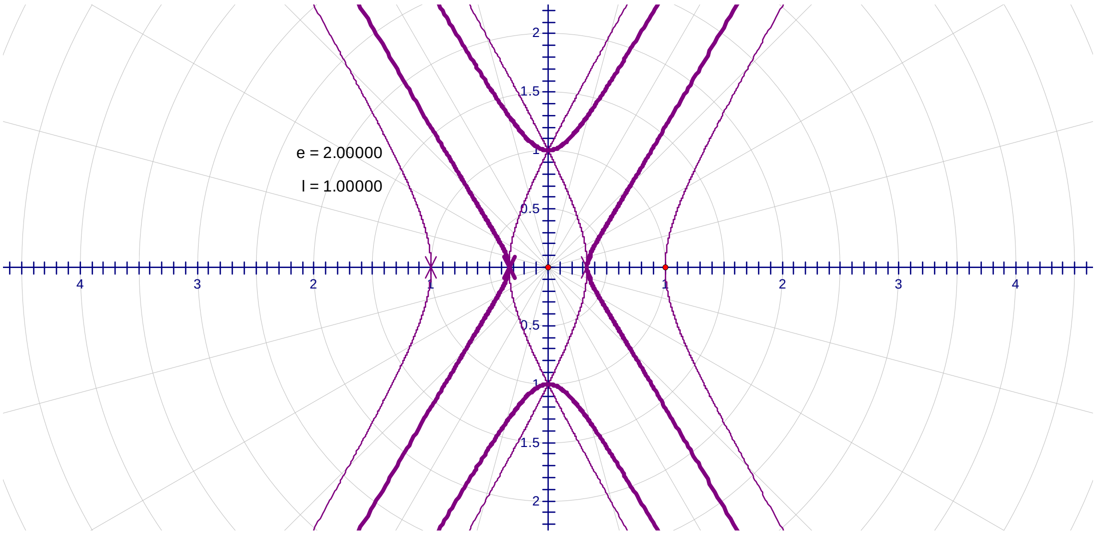
圖形在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ 的部份轉爲凹下，顯然不可能是橢圓。

增加離心率至$e=1$，成爲拋物線：



類似離心率較高的橢圓，但是左右沒有界限。

取$e=2.0$的雙曲線作 AM 變換：

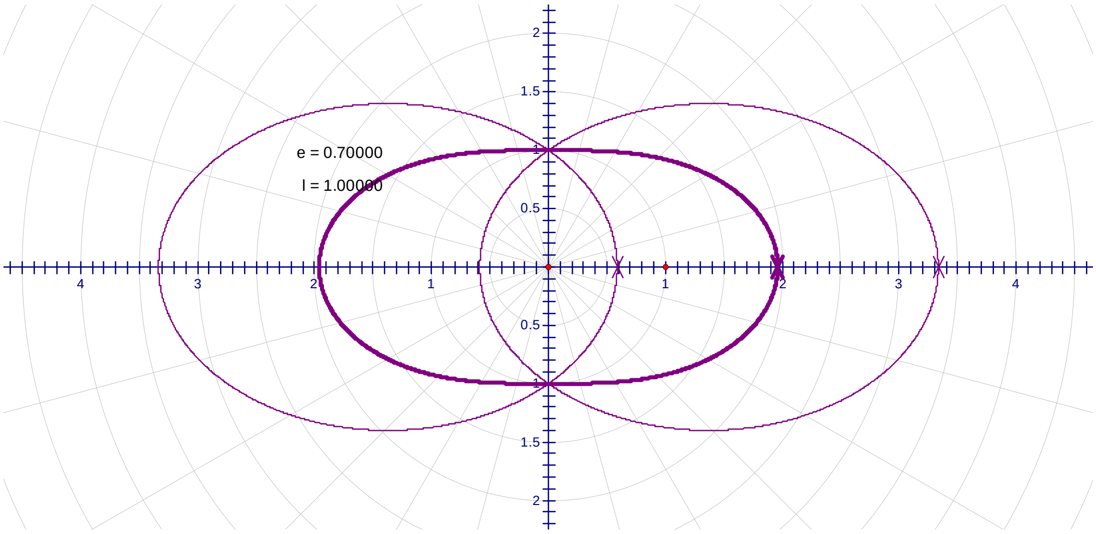


圖形中大略可以指出四條漸近線。

(三) 曲率變號的臨界點

當橢圓的離心率從 0.5 換成 0.9 時，AM 變換後的圖形，在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$及$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$的部份，彎曲方向有所轉變，取向內彎的曲率為正，則曲率在離心率增加時由正值轉為負值。

取$e=0.7$作 AM 變換的圖：



圖中$\theta=\dfrac{\pi}{2}$及$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$部份曲率接近 0，由幾何性質多與平方有關猜測，

此臨界值可能為$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

證明：

將$r_A\left(1-e^2\cos^2\theta\right)=l$改寫成$r_A=\dfrac{l}{1-e^2\cos^2\theta}$，並求$r_A$對$\theta$的二階導數：

$$\frac{dr_A}{d\theta}=l\cdot\frac{-2e^2\sin\theta\cos\theta}{\left(1-e^2\cos^2\theta\right)^2}$$

$$\frac{d^2r_A}{d\theta^2}=l\cdot\left[\frac{2e^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{\left(1-e^2\cos^2\theta\right)^2}-\frac{\left(2e^2\sin\theta\cos\theta\right)^2}{\left(1-e^2\cos^2\theta\right)^4}\right]$$

代入$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，得$\dfrac{d^2r_A}{d\theta^2}=2e^2l$。

取$r_A\left(1-e^2\cos^2\theta\right)=l$在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$時的切線$r\cos(\theta-\dfrac{\pi}{2})=l$，化簡得$r=\dfrac{l}{\sin\theta}$。

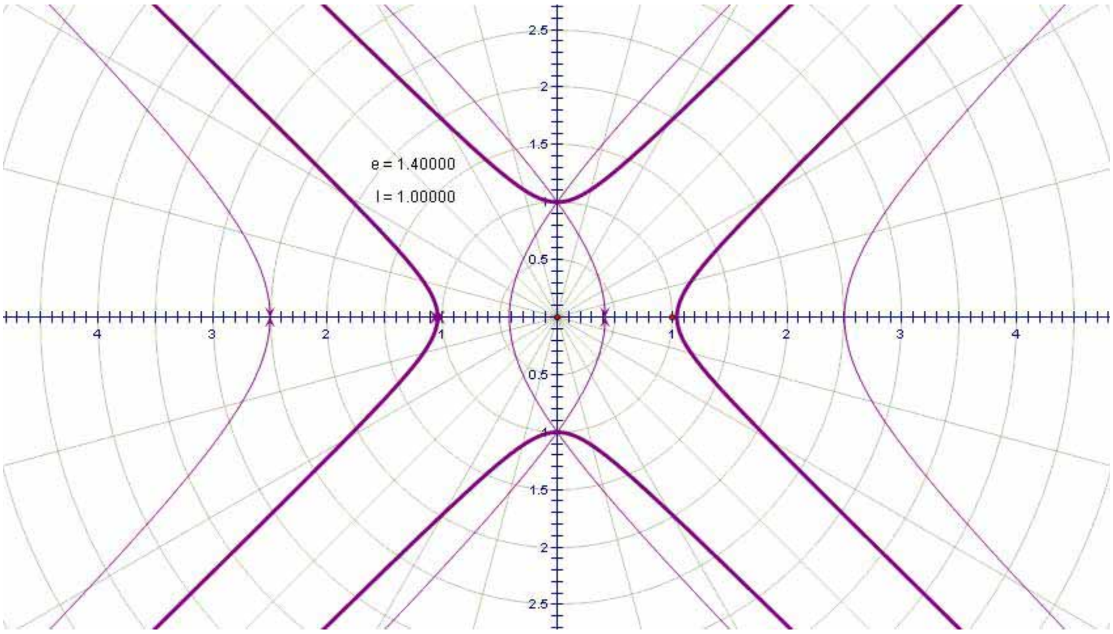
同樣求r對θ的二階導數：

$\dfrac{dr}{d\theta}=l\dfrac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}$，$\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=l\cdot\dfrac{1+\cos^2\theta}{\sin^3\theta}$，代入$\theta=\dfrac{\pi}{2}$得$\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=l$。

令$\dfrac{d^2r_A}{d\theta^2}=\dfrac{d^2r}{d\theta^2}$，則$2e^2l=l$，$e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

(四) C_4 對稱的臨界點

取 $e = 1.4$ 作 AM 變換的圖：



將圖形旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 之後接近重合，猜測 $e = \sqrt{2}$ 時會完全重合。

證明：

$r_A\left(1 - e^2\cos^2\theta\right) = l$ 改寫成 $r_A = \dfrac{l}{1 - e^2\cos^2\theta}$，代入 $e = \sqrt{2}$ 並化簡，得到：

$$r_A = \frac{l}{1 - 2\cos^2\theta} = \frac{l}{-\cos 2\theta}$$

改寫成 $F(r_A, \theta) = l + r_A\cos 2\theta = 0$，則：

$$F(r_A, \theta - \frac{\pi}{2}) = l + r_A\cos(2\theta - \pi) = l + (-r_A)\cos(2\theta - 2\pi)$$

$$= F(-r_A, \theta - \pi) = F(r_A, \theta) = 0$$

故此性質在 $e = \sqrt{2}$ 時成立。

伍、討論

一、由於算術平均、幾何平均、調和平均呈等比數列，應可以嘗試使用調和平均作變換。

二、可以將標準型曲線旋轉其他角度產生另一條曲線，再進行 GM 或 AM 變換，應可以產生一系列的變化。

陸、結論

一、一橢圓中心為O，在橢圓上取兩點使得$\overline{OA}\perp\overline{OB}$，則$\dfrac{1}{\overline{OA}^2}+\dfrac{1}{\overline{OB}^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$。

二、一橢圓中心為O，在橢圓上取多點$P_1,P_2,...,P_n\left(n\geq 3\right)$，使得$\overline{OP_1},\overline{OP_2},...,\overline{OP_n}$將圓周角$n$等分，則$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\overline{OP_n}^2}=\frac{n}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$。

三、標準型拋物線行正 GM 變換可得對稱原點的一對直線。

四、標準型橢圓行正 GM 變換可得對稱中心在原點的橢圓。

五、標準型拋物線或橢圓行共軛 GM 變換得到的圖形為空集合。

六、標準型雙曲線行正 GM 變換和共軛 GM 變換各可得一雙曲線，並且互為共軛雙曲線。

七、標準型圓錐曲線行 AM 變換得到的圖形不為圓錐曲線。

八、$e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$的標準型橢圓行 AM 變換得到的新圖形在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$及$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$之處曲率為 0。

九、$e=\sqrt{2}$的標準型雙曲線行 AM 變換得到的新圖形繞原點旋轉$\dfrac{\pi}{2}$之後圖形不變。

柒、參考資料

一、第三十九屆 中小學科學展覽會 高中組 數學科 作品：「二次函數中一個命題的推廣與研究」。

二、高中數學課本　第二、三、四冊　南一出版社版。

三、Calculus　Finney & Thomas　ADDISON-WESLEY。

【評　語】　　040403　圓錐曲線的『平均』

1) 文不對題：題目訂的是「平均」，內容完全在談「轉換」。

2) 內容雖然具有深度，然而海報之文字辭不達意：請作者多下功夫於數學作文。