中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040402

降出原形吧！－建構內積方陣的對應向量

學校名稱：國立新竹女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 王韻婷	陳冬霖
高二 林庭瑄	蔡敏娟
高二 邱司杰	
高二 黃乃珊	

關鍵詞：向量　內積方陣　行列式

摘　要

在 n 維空間中，若已知 m 個向量的坐標表示法，則可輕易地計算出這些向量兩兩之間的內積並寫成 m 階內積方陣。但反過來說，若已知一個 m 階的內積方陣，該如何建構其所對應之 m 個 n 維空間向量呢？本文將利用 m 階對稱行列式的特殊降階展開之方式，擬定其元素與若干子行列式間的恆等關係，並利用此恆等關係與內積方陣之特性，完整模擬其所對應之各向量。

壹、研究動機

在二維、三維空間中，若已知 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 兩向量之 $\left|\overrightarrow{a}\right|$、$\left|\overrightarrow{b}\right|$ 與 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，則三個值的關係必滿足柯西不等式：$-\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \le \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \le \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$，也就是$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \end{vmatrix} \ge 0$，此時透過適當的數字配置可將 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的坐標表示法寫出(表法不唯一)。

但若將已知條件增為 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 三向量之$\left|\overrightarrow{a}\right|$、$\left|\overrightarrow{b}\right|$、$\left|\overrightarrow{c}\right|$、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$，則兩兩向量間的內積值與長度間關係除了仍須滿足柯西不等式外，是否三者之間仍有其它特殊關係？為了方便探討三個向量長度與內積之間的關係，我們模仿兩個向量的方式將這些值寫為內積方陣$\begin{bmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{bmatrix}$之型式，希望試著藉由探討行列式$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{vmatrix}$發現內積方陣的性質，並且試著在已知內積值與長度的情況下還原三個向量的坐標表示法。

而從幾何意義的觀點來看：在三維空間中，由兩個向量內積所組成的行列式$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \end{vmatrix}$，與三個向量內積所組成的行列式$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{vmatrix}$，各有其幾

何意義，前者為所張平行四邊形面積的平方，後者為所張平行六面體體積的平方，兩者之值皆**大於或等於 0**，這樣的不等式也同時引起我們想要延伸探討：是否 m 個向量所組成之內積方陣仍具備行列式值**大於或等於 0** 的性質？若將想法推廣至 n 維空間中，該如何建構內積方陣所對應的各個 n 維空間中的向量呢？

貳、研究目的

利用 m 階對稱行列式的特殊降階展開之方式，擬定其元素與若干子行列式間的恆等關係，再將此恆等關係與內積方陣之特性，完整模擬其於 n 維空間中所對應之各向量，並加以應用。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦軟體(Maple)。

肆、研究過程與方法

一、對稱行列式的降階模式探討：

設 A_m 為 m 階對稱方陣，且 $A_m=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$，其中 $a_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,m$。

(一)定義：

1. $D_{123\ldots(p-1)k}$：自 A_m 中取出左上角 $(p-1)\times(p-1)$ 之元素，再加入取第 k 列、第 k 行的部分元素所組成之 p 階行列式，其中 $k\geq p$，如下所示。

$$D_{12\cdots(p-1)k}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(p-1)} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(p-1)} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(p-1)1} & a_{(p-1)2} & \cdots & a_{(p-1)(p-1)} & a_{(p-1)k} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k(p-1)} & a_{kk} \end{vmatrix}$$，而令 $D_1=a_{11}$。

2. $D_{123\ldots(p-1)\binom{i}{j}}$：自 A_m 中取出左上角 $(p-1)\times(p-1)$ 之元素，再加入取第 i 列、第 j 行的部分元素所組成之 p 階行列式，其中 $i\,,j\geq p$，如下所示。

$$D_{123\ldots(p-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(p-1)} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(p-1)} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(p-1)1} & a_{(p-1)2} & \cdots & a_{(p-1)(p-1)} & a_{(p-1)j} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(p-1)} & a_{ij} \end{vmatrix}$$，而令 $D_0\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = a_{ij}$。

(二)降階模式：依前述定義

1. 在 $m \ge 3$ 之下，若 $D_1 = a_{11} \neq 0$ 時：

在 $D_{123\cdots m}$ 中，以第 1 行為基準，適當的以乘一數加到其他各行中，可將第 1 列中從第 2 行至第 m 行所有元素變成 0，降階展開後得一個(m－1)階行列式：

$$D_{123\cdots m} = \frac{1}{D_1^{m-2}} \begin{vmatrix} D_{12} & D_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \cdots & D_1\begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix} \\ D_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & D_{13} & \cdots & D_1\begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} & D_1\begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix} & \cdots & D_{1m} \end{vmatrix}$$

證明：

$$D_{123\cdots m} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{21}\times\dfrac{-a_{12}}{a_{11}}+a_{22} & \cdots & a_{21}\times\dfrac{-a_{1m}}{a_{11}}+a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1}\times\dfrac{-a_{12}}{a_{11}}+a_{m2} & \cdots & a_{m1}\times\dfrac{-a_{1m}}{a_{11}}+a_{mm} \end{vmatrix}$$

此區元素皆可用 $a_{i1}\times\dfrac{-a_{1j}}{a_{11}}+a_{ij} = \dfrac{a_{11}a_{ij}-a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} = \dfrac{1}{D_1}\cdot D_1\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ 表達

且 $D_{1j} = D_1\begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix}$，其中 $2\le i , j \le m$

從第 2 列到第 m 列共(m－1)列，每一列皆可提出 $\dfrac{1}{D_1}$，與原有的一個 D_1 約去後，共有(m－2)個 $\dfrac{1}{D_1}$

故可得 $D_{123\cdots m}=\dfrac{1}{D_1^{\,m-2}}\begin{vmatrix} D_{12} & D_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} & \cdots & D_1\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}\\ D_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} & D_{13} & \cdots & D_1\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix} & D_1\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix} & \cdots & D_{1m}\end{vmatrix}$

2. 若假設 $D_{12}\neq 0$ 時：則依相同方法可得 $D_{123\cdots m}=\dfrac{1}{D_{12}^{\,m-3}}\begin{vmatrix} D_{123} & D_{12}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} & \cdots & D_{12}\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix}\\ D_{12}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} & D_{124} & \cdots & D_{12}\begin{pmatrix}4\\m\end{pmatrix}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{12}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix} & D_{12}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix} & \cdots & D_{12m}\end{vmatrix}$

證明：依 1.之結果，以第 1 行為基準，適當的以乘一數加到其他各行中，可將第 1 列中從第 2 行至第 m 行所有元素變成 0，降階展開後得一個$(m-2)$階行列式：

$$D_{123\cdots m}=\frac{1}{D_1^{\,m-2}}\begin{vmatrix} D_{12} & 0 & \cdots & 0\\ D_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} & D_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\times\dfrac{-D_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{D_{12}}+D_{13} & \cdots & D_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\times\dfrac{-D_1\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}}{D_{12}}+D_1\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ D_1\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix} & D_1\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}\times\dfrac{-D_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{D_{12}}+D_1\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix} & \cdots & D_1\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}\times\dfrac{-D_1\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}}{D_{12}}+D_1\begin{pmatrix}m\\m\end{pmatrix}\end{vmatrix}$$

此區元素皆可以 $\dfrac{-D_1\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}D_1\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}}{D_{12}}+D_1\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}$ 表示，其中 $3\le i\,,j\le m$

$$\frac{-D_1\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}D_1\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}}{D_{12}}+D_1\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{D_{12}}[D_{12}\cdot D_1\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}-D_1\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}D_1\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}]$$

$$=\frac{1}{D_{12}}[a_{11}\cdot D_{12}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}]$$

$$=D_1\times\frac{D_{12}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}}{D_{12}}$$

從第 2 列到第$(m-1)$列共$(m-2)$列，每一列皆可提出 D_1，與原有的$\frac{1}{D_1^{\,m-2}}$恰完全約去。從第 2 列到第$(m-1)$列，每一列皆可提出$\frac{1}{D_{12}}$，與原有的一個 D_{12} 約去後，共有$(m-3)$個$\frac{1}{D_{12}}$。

故可得 $$D_{123\cdots m}=\frac{1}{D_{12}^{\,m-3}}\begin{vmatrix} D_{123} & D_{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \cdots & D_{12}\begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix} \\ D_{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & D_{124} & \cdots & D_{12}\begin{pmatrix} 4 \\ m \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{12}\begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix} & D_{12}\begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix} & \cdots & D_{12m} \end{vmatrix}$$

3. 若繼續假設 $D_{123}\neq 0$，……，採同樣方法$(m-2)$次，最後可以化簡為：

$$D_{123\cdots m}=\frac{1}{D_{12\cdots(m-2)}}\begin{vmatrix} D_{12\cdots(m-2)(m-1)} & D_{12\cdots(m-2)}\begin{pmatrix} m-1 \\ m \end{pmatrix} \\ D_{12\cdots(m-2)}\begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix} & D_{12\cdots(m-2)m} \end{vmatrix}$$

二、對稱行列式中的恆等式：

在前述之對稱行列式特殊降階模式中，我們可以清楚看到對稱行列式的子行列式皆可被層層表達，因此對稱行列式各元與子行列式間應有某些恆等關係，經過許多嘗試與歸納，我們得到以下兩個重要的定理。

【定理一】：在對稱方陣 A_m 中取 $D_{12\cdots(p-1)k}$，其中 $k\geq p\geq 2$，若 $D_1,D_2,\cdots,D_{12\cdots(p-1)}$ 皆不為 0

則 $$\frac{D_0\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}^2}{D_1}+\frac{D_1\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}^2}{D_1D_{12}}+\cdots+\frac{D_{12\cdots(p-2)}\begin{pmatrix} p-1 \\ k \end{pmatrix}^2}{D_{12\cdots(p-2)}D_{12\cdots(p-1)}}+\frac{D_{123\cdots(p-1)k}}{D_{123\cdots(p-1)}}=a_{kk}$$

且 a_{kk} 之表法因 p 而有不同，而當 p 取愈大時更能符合我們的需要。

證明：(1)當 p＝2 時：

$$\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}^2}{D_1}+\frac{D_{1k}}{D_1}=\frac{a_{1k}{}^2+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{1k}\\ a_{k1} & a_{kk}\end{vmatrix}}{a_{11}}=\frac{a_{1k}{}^2+a_{11}a_{kk}-a_{k1}a_{1k}}{a_{11}}=\frac{a_{1k}{}^2-a_{k1}a_{1k}}{a_{11}}+a_{kk}=a_{kk}$$

(2)利用降階模式，最末兩項可化簡為：

$$\frac{D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}^2}{D_{12\ldots(p-2)}D_{12\ldots(p-1)}}+\frac{D_{123\ldots(p-1)k}}{D_{12\ldots(p-1)}}$$

$$=\frac{D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}^2}{D_{12\ldots(p-2)}D_{12\ldots(p-1)}}+\frac{1}{D_{12\ldots(p-1)}}\times\frac{\begin{vmatrix}D_{12\ldots(p-2)(p-1)} & D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}\\ D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}k\\p-1\end{pmatrix} & D_{12\ldots(p-2)k}\end{vmatrix}}{D_{12\ldots(p-2)}}$$

$$=\frac{D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}^2+D_{12\ldots(p-2)(p-1)}D_{12\ldots(p-2)k}-D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}k\\p-1\end{pmatrix}D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\ldots(p-2)}D_{12\ldots(p-1)}}$$

$$=\frac{D_{123\ldots(p-2)k}}{D_{12\ldots(p-2)}}$$

(3)因為每化簡一次，皆可往前縮一項，所以最後將會剩下 $\dfrac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}^2}{D_1}+\dfrac{D_{1k}}{D_1}=a_{kk}$

【定理二】：在對稱方陣 A_m 中取 $D_{12\cdots(p-1)}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}$，其中 $2\le p\le i\le j$，

若 $D_1,D_{12},\cdots,D_{12\cdots(p-1)}$ 皆不為 0，則：

$$\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}D_0\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}}{D_1}+\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\i\end{pmatrix}D_1\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}}{D_1D_{12}}+\ldots+\frac{D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\i\end{pmatrix}D_{12\ldots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\j\end{pmatrix}}{D_{12\ldots(p-2)}D_{12\ldots(p-1)}}+\frac{D_{123\ldots(p-1)}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}}{D_{123\ldots(p-1)}}=a_{ij}$$

證明：(1)當 p＝2 時：$\dfrac{D_0\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}D_0\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}}{D_1}+\dfrac{D_1\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}}{D_1}=\dfrac{a_{1i}a_{1j}+a_{11}a_{ij}-a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}=a_{ij}$

(2)最末兩項可化簡為：

$$\frac{D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{i}D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{j}}{D_{12\ldots(p-2)}D_{12\ldots(p-1)}}+\frac{D_{123\ldots(p-1)}\binom{i}{j}}{D_{123\ldots(p-1)}}$$

$$=\frac{D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{i}D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{j}}{D_{12\ldots(p-2)}D_{12\ldots(p-1)}}+\frac{1}{D_{123\ldots(p-1)}}\times\frac{\begin{vmatrix} D_{12\ldots(p-2)(p-1)} & D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{j} \\ D_{12\ldots(p-2)}\binom{i}{p-1} & D_{12\ldots(p-2)}\binom{i}{j} \end{vmatrix}}{D_{12\ldots(p-2)}}$$

$$=\frac{D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{i}D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{j}+D_{12\ldots(p-2)(p-1)}D_{12\ldots(p-2)}\binom{i}{j}-D_{12\ldots(p-2)}\binom{p-1}{j}D_{12\ldots(p-2)}\binom{i}{p-1}}{D_{12\ldots(p-2)}D_{12\ldots(p-1)}}$$

$$=\frac{D_{12\ldots(p-2)}\binom{i}{j}}{D_{12\ldots(p-2)}}$$

(3)因為每化簡一次，皆可往前縮一項，最後將會剩下$\dfrac{D_0\binom{1}{i}D_0\binom{1}{j}}{D_1}+\dfrac{D_1\binom{i}{j}}{D_1}=a_{ij}$

觀察【定理一】與【定理二】之結論，可知當【定理二】之$i=j=k$時，即為【定理一】之結果，因此可說【定理一】為【定理二】之特例。

三、內積方陣的性質：

在【定理一】與【定理二】中，恆等式的分母$D_1, D_{12}, \cdots, D_{12\cdots(p-1)}$若為正數，則有助於我們後續討論，而怎樣的對稱方陣$A_m$之元素所組成的行列式具有如此性質呢？

在n維空間中，設$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_m}$為$m$個向量，以其兩兩內積$\overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{x_j}=a_{ij}$組成內積方陣$A_m$，依內積交換律$\overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{x_j}=\overrightarrow{x_j}\cdot\overrightarrow{x_i}$可知$A_m$必為對稱方陣，如下所示。

$$A_m=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_m}\\ \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}$$，其中 $a_{ij}=a_{ji}$

利用下列兩個引理，我們可以證明內積方陣的性質。

【引理一】：設 $A=[a_{ij}]_{m\times m}$， $X=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}_{m\times 1}$ ， $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}_{m\times 1}$ 給定 A、B，方程式 $AX=B$

(1)當 $\det A\neq 0$，X 有唯一解。(克拉馬公式)

(2)若 $B=0$，X 有不為 0 之解 $\Leftrightarrow \det A=0$。(齊次方程組)

【引理二】：在對稱方陣 A_m 中：

(1)當 $D_{12\cdots p}>0$，則存在唯一的一組實數 α_i $(i=1,2,\cdots,p)$ 使得

$$\left(\sum_{j=1}^{p}\alpha_j a_{ij}\right)+a_{ip}=0$$，其中 $i=1,2,\cdots,p$

(2)若存在一組不全為 0 的實數 α_i $(i=1,2,\cdots,p)$，使得 $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{x_i}=\overrightarrow{0}$，

則 $D_{12\cdots p}=0$

【引理二】可利用【引理一】得到。

【內積方陣的性質】：設 $A_m=[a_{ij}]_{m\times m}=\begin{bmatrix}\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_m}\\ \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}$

性質 1：若 $D_{12\cdots p}>0$，則 $D_{12\cdots pk}\geq 0$，其中 $k>p\geq 2$。

且當 $D_{12\cdots pk}=0$ 時，則 $D_{12\cdots pk(k+1)}=D_{12\cdots pk(k+1)(k+2)}=\cdots=D_{12\cdots pk(k+1)\cdots m}=0$，其中 $m\geq k+1$

性質 2：$\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_m}$ (其中 $m\geq 2$)線性相關的充要條件為 $D_{12\cdots m}=0$。

性質 3：當 $m>n$ 時，$\det A_m=D_{12\cdots m}=0$。

證明：

性質 1：$\because D_{12\cdots p}>0$

$$\therefore D_{12\cdots pk}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} & a_{kk} \end{vmatrix} \overset{\text{引理二(1)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} & a_{kk}+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j a_{kj} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{kk}+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j a_{kj})\times D_{12\cdots p}$$

$$\text{由}\begin{cases} \alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{12}+\cdots+\alpha_p a_{1p}+a_{1k}=0\cdots\cdots(1) \\ \alpha_1 a_{21}+\alpha_2 a_{22}+\cdots+\alpha_p a_{2p}+a_{2k}=0\cdots\cdots(2) \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{p1}+\alpha_2 a_{p2}+\cdots+\alpha_p a_{pp}+a_{pk}=0\cdots\cdots(p) \end{cases}$$

計算：

$$(\alpha_1\overrightarrow{x_1}+\alpha_2\overrightarrow{x_2}+\cdots+\alpha_p\overrightarrow{x_p}+\overrightarrow{x_k})\cdot(\alpha_1\overrightarrow{x_1}+\alpha_2\overrightarrow{x_2}+\cdots+\alpha_p\overrightarrow{x_p}+\overrightarrow{x_k})$$
$$=\alpha_1{}^2 a_{11}+\alpha_2{}^2 a_{22}+\cdots+\alpha_p{}^2 a_{pp}+a_{kk}+2\sum_{1\leq i,j\leq p}^{i<j}\alpha_i\alpha_j a_{ij}+2(\alpha_1 a_{1k}+\alpha_2 a_{2k}+\cdots+\alpha_p a_{pk})\cdots\cdots(*)$$

將 $(1)\times\alpha_1+(2)\times\alpha_2+\cdots+(p)\times\alpha_p$ 可得：

$$\alpha_1{}^2 a_{11}+\alpha_2{}^2 a_{22}+\cdots+\alpha_p{}^2 a_{pp}+2\sum_{1\leq i,j\leq p}^{i<j}\alpha_i\alpha_j a_{ij}+(\alpha_1 a_{1k}+\alpha_2 a_{2k}+\cdots+\alpha_p a_{pk})=0\cdots\cdots(**)$$

將(**)代入(*)得到：

$$(\alpha_1\overrightarrow{x_1}+\alpha_2\overrightarrow{x_2}+\cdots+\alpha_p\overrightarrow{x_p}+\overrightarrow{x_k})\cdot(\alpha_1\overrightarrow{x_1}+\alpha_2\overrightarrow{x_2}+\cdots+\alpha_p\overrightarrow{x_p}+\overrightarrow{x_k})=a_{kk}+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j a_{jk}$$

$$\text{故 } D_{12\cdots pk}=(a_{kk}+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j a_{kj})\times D_{12\cdots p}=\left|\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\overrightarrow{x_j}+\overrightarrow{x_k}\right|^2\times D_{12\cdots p}\geq 0$$

性質 2：利用性質 1，藉由調整 p 的大小，可知線性獨立之向量所組成的內積方陣，其行列式值必為正；線性相關之向量所組成的內積方陣，其行列式值必為 0。(性質 1 已蘊涵判斷向量獨立或相關之方法。)

性質 3：由 n 維空間中線性獨立的向量數目最多為 n 可知此性質必然成立。

四、給定一個 m 階對稱方陣 $A_m=[a_{ij}]$，$a_{ij}=a_{ji}$，欲使其成為內積方陣，應如何賦予簡明的條件？而在 R^n 中其所對應向量為何？以下我們找出了一些條件與方法，建構了內積方陣所對應的向量。

在 n 維空間中，m 階對稱方陣 $A_m=[a_{ij}]_{m\times m}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$

【定理三】當 $m=n$ 時，若對稱方陣 A_m 具備 $D_1, D_{12}, D_{123}, \cdots, D_{12\cdots(n-1)}, D_{12\cdots(n-1)n}$ 皆為正數之條件，則 A_m 為 n 維空間中的內積方陣，且其所對應的向量可設定為：

(1) $\overrightarrow{x_1}=\left(\dfrac{D_1}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0,0\right)$，後面$(n-1)$個分量為 0。

(2)當 $2\le k\le n-1$ 時：

$$\overrightarrow{x_k}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{12\cdots(k-2)}\begin{pmatrix}k-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(k-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12\cdots(k-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0\right)$$

，後面$(n-k)$個分量為 0。

(3) $$\overrightarrow{x_n}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\n\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{123\cdots(n-2)}\begin{pmatrix}n-1\\n\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}},\pm\frac{D_{123\cdots n}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}}\right)$$

討論過程：將【定理一】中

$$\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}^2}{D_1}+\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}^2}{D_1D_{12}}+\cdots+\frac{D_{12\cdots(p-2)}\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}^2}{D_{12\cdots(p-2)}D_{12\cdots(p-1)}}+\frac{D_{123\cdots(p-1)k}}{D_{123\cdots(p-1)}}=a_{kk}$$

取 $p=k$，則必有 $\dfrac{D_0\binom{1}{k}^2}{D_1}+\dfrac{D_1\binom{2}{k}^2}{D_1D_{12}}+\cdots+\dfrac{D_{12\cdots(k-2)}\binom{k-1}{k}^2}{D_{12\cdots(k-2)}D_{12\cdots(k-1)}}+\dfrac{D_{123\cdots(k-1)k}}{D_{123\cdots(k-1)}}=a_{kk}$

將此式改寫為：

$$\left[\frac{D_0\binom{1}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}}\right]^2+\left[\frac{D_1\binom{2}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}}\right]^2+\cdots+\left[\frac{D_{12\cdots(k-2)}\binom{k-1}{k}}{D_{12\cdots(k-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}}\right]^2+\left[\frac{D_{123\cdots(k-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{123\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}}\right]^2=a_{kk}\quad(2\le k\le n)$$

(1)當 $2\le k\le n-1$ 時，依下列方式定義 $\overrightarrow{x_k}$ 的前 k 個分量，而後面 $(n-k)$ 個分量皆定為 0。

$$\overrightarrow{x_1}=\left(\frac{D_1}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0,0\right),\quad \overrightarrow{x_2}=\left(\frac{D_0\binom{1}{2}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}^{\frac{1}{2}}}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0,0\right),\quad\cdots,$$

$$\overrightarrow{x_k}=\left(\frac{D_0\binom{1}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\binom{2}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{12\cdots(k-2)}\binom{k-1}{k}}{D_{12\cdots(k-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12\cdots(k-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0\right)$$

(2) $\overrightarrow{x_n}=\left(\dfrac{D_0\binom{1}{n}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\dfrac{D_1\binom{2}{n}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\dfrac{D_{123\cdots(n-2)}\binom{n-1}{n}}{D_{12\cdots(n-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}},\pm\dfrac{D_{123\cdots n}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}}\right)$

(3)依上述設定各向量之方式，必可使得 $\overrightarrow{x_j}\cdot\overrightarrow{x_j}=a_{jj}$ (其中 $1\le j\le n$)。

而當 $1\le i<j\le n$ 時：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{x_j} &= \frac{D_0\binom{1}{i}}{D_1^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{D_0\binom{1}{j}}{D_1^{\frac{1}{2}}}+\frac{D_1\binom{2}{i}}{D_1^{\frac{1}{2}}\cdot D_{12}^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{D_1\binom{2}{j}}{D_1^{\frac{1}{2}}\cdot D_{12}^{\frac{1}{2}}}+\cdots \\ &\quad+\frac{D_{12\cdots(i-2)}\binom{i-1}{i}}{D_{12\cdots(i-2)}^{\frac{1}{2}}\cdot D_{12\cdots(i-1)}^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{D_{12\cdots(i-2)}\binom{i-1}{j}}{D_{12\cdots(i-2)}^{\frac{1}{2}}\cdot D_{12\cdots(i-1)}^{\frac{1}{2}}}+\frac{D_{12\cdots i}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(i-1)}^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{D_{12\cdots(i-1)}\binom{i}{j}}{D_{12\cdots(i-1)}^{\frac{1}{2}}\cdot D_{12\cdots i}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{D_0\binom{1}{i}D_0\binom{1}{j}}{D_1}+\frac{D_1\binom{2}{i}D_1\binom{2}{j}}{D_1\cdot D_{12}}+\cdots+\frac{D_{12\cdots(i-2)}\binom{i-1}{i}D_{12\cdots(i-2)}\binom{i-1}{j}}{D_{12\cdots(i-2)}\cdot D_{12\cdots(i-1)}}+\frac{D_{12\cdots(i-1)}\binom{i}{j}}{D_{12\cdots(i-1)}} \\ &\overset{\text{由定理二}}{=} a_{ij}\end{aligned}$$

【定理四】當 $m>n$ 時，若對稱方陣 A_m 具備下列條件

1. $D_1, D_{12}, D_{123}, \cdots, D_{12\cdots(n-1)}, D_{12\cdots n}$ 皆為正數。
2. $D_{12\cdots(n-1)k}\geq 0$，其中 $k\geq n+1$
3. $D_{12\cdots nk}=0$，其中 $k\geq n+1$
4. $D_{12\cdots nij}=0$，其中 $j>i\geq n+1$

則 A_m 為內積方陣，且其所對應的向量可設定為：

(1) $\overrightarrow{x_1}=\left(\dfrac{D_1}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0,0\right)$，後面($n-1$)個分量為 0。

(2)當 $2\leq k\leq n-1$ 時：$\overrightarrow{x_k}=\left(\dfrac{D_0\binom{1}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\dfrac{D_1\binom{2}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\dfrac{D_{12\cdots(k-2)}\binom{k-1}{k}}{D_{12\cdots(k-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},\dfrac{D_{12\cdots(k-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0\right)$，

後面($n-k$)個分量為 0。

(3)當 $n\leq k\leq m$ 時：

$$\overrightarrow{x_k}=\left(\frac{D_0\binom{1}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\binom{2}{k}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{12\cdots(n-2)}\binom{n-1}{k}}{D_{12\cdots(n-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}},\pm\frac{D_{123\cdots(n-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}}\right)$$

當$k>n$時，$\overrightarrow{x_k}$ 的第 n 個分量之正負符號取法稱為「符號法則」，如下：

①若$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=0$，則$\overrightarrow{x_k}$ 的第 n 個分量為 0。

②若$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}>0$，則$\overrightarrow{x_k}$ 與$\overrightarrow{x_n}$ 的第 n 個分量同號。

③若$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}<0$，則$\overrightarrow{x_k}$ 與$\overrightarrow{x_n}$ 的第 n 個分量異號。

討論過程：

(1)與(2)承襲【定理三】之設定。

(3)承【定理三】當$n\le k\le m$時：

$$\overrightarrow{x_k}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{12\cdots(n-2)}\begin{pmatrix}n-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}},\pm\frac{D_{123\cdots(n-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}}\right)$$

其中$\overrightarrow{x_n}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\n\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{12\cdots(n-2)}\begin{pmatrix}n-1\\n\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}},\pm\frac{D_{123\cdots(n-1)n}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}}\right)$

由條件 3.：$D_{12\cdots nk}=\dfrac{1}{D_{12\cdots(n-1)}}\left[D_{12\cdots n}\cdot D_{12\cdots(n-1)k}-D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}^2\right]=0$

得：$D_{12\cdots n}\cdot D_{12\cdots(n-1)k}=D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}^2\cdots\cdots$(式1)

$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\left[\pm D_{12\cdots n}^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\pm D_{12\cdots(n-1)k}^{\frac{1}{2}}\right]$

故可訂定符號法則如下：

①若$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=0$，則$\overrightarrow{x_k}$ 的第 n 個分量為 0。

②若$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}>0$，則$\overrightarrow{x_k}$ 與$\overrightarrow{x_n}$ 的第 n 個分量同號。

③若$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}<0$，則$\overrightarrow{x_k}$ 與$\overrightarrow{x_n}$ 的第 n 個分量異號。

接下來檢驗(1)　(3)的設定是否符合原內積方陣：

(4)當 $k \geq n+1$，$1 \leq j \leq n-1$ 時：必符合 $\overrightarrow{x_k} \cdot \overrightarrow{x_k} = a_{kk}$

而：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x_j} \cdot \overrightarrow{x_k} &= \frac{D_0\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{D_1\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}} D_{12}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}} D_{12}^{\frac{1}{2}}} + \cdots \\
&+ \frac{D_{12\cdots(j-2)}\begin{pmatrix}j-1\\j\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(j-2)}^{\frac{1}{2}} D_{12\cdots(j-1)}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{D_{12\cdots(j-2)}\begin{pmatrix}j-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(j-2)}^{\frac{1}{2}} D_{12\cdots(j-1)}^{\frac{1}{2}}} + \frac{D_{12\cdots(j-1)j}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(j-1)}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{D_{12\cdots(j-1)}\begin{pmatrix}j\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(j-1)}^{\frac{1}{2}} D_{12\cdots j}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{D_0\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix} D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1} + \frac{D_1\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix} D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1 D_{12}} + \frac{D_{12\cdots(j-2)}\begin{pmatrix}j-1\\j\end{pmatrix} D_{12\cdots(j-2)}\begin{pmatrix}j-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(j-2)} D_{12\cdots(j-1)}} + \frac{D_{12\cdots(j-1)}\begin{pmatrix}j\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(j-1)}} \\
&\overset{\text{定理二}}{=} a_{jk}
\end{aligned}
$$

符合我們期待的結果。

(5)當 $k \geq n+1$ 時：

由(式 1)可得：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x_n} \cdot \overrightarrow{x_k} &= \frac{D_0\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix} D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1} + \frac{D_1\begin{pmatrix}2\\n\end{pmatrix} D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1 D_{12}} + \cdots + \frac{D_{12\cdots(n-2)}\begin{pmatrix}n-1\\n\end{pmatrix} D_{12\cdots(n-2)}\begin{pmatrix}n-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-2)} D_{12\cdots(n-1)}} + \frac{D_{123\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-1)}} \\
&\overset{\text{定理二}}{=} a_{nk}
\end{aligned}
$$

(6)由條件 4.知：$D_{123\cdots nij} = \dfrac{1}{D_{123\cdots n}} \begin{vmatrix} D_{12\cdots ni} & D_{12\cdots n}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} \\ D_{12\cdots n}\begin{pmatrix}j\\i\end{pmatrix} & D_{12\cdots nj} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{D_{123\cdots n}} \begin{vmatrix} D_{12\cdots ni} & D_{12\cdots n}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} \\ D_{12\cdots n}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} & D_{12\cdots nj} \end{vmatrix} = 0$

$\because D_{12\cdots ni} = D_{12\cdots nj} = 0 \qquad \therefore D_{12\cdots n}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} = 0$

又 $D_{123\cdots n}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} = \dfrac{1}{D_{12\cdots(n-1)}} \begin{vmatrix} D_{12\cdots n} & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\j\end{pmatrix} \\ D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}i\\n\end{pmatrix} & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{D_{12\cdots(n-1)}} \begin{vmatrix} D_{12\cdots n} & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\j\end{pmatrix} \\ D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\i\end{pmatrix} & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} \end{vmatrix} = 0$

$D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\i\end{pmatrix} \cdot D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\j\end{pmatrix} = D_{12\cdots n} \cdot D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}$……(式2)

兩邊平方後 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}^2 \cdot D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}^2 = D_{12\cdots n}{}^2 \cdot D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}^2$

再由(式 1)與上式可得：$[D_{12\cdots n} \cdot D_{12\cdots(n-1)i}][D_{12\cdots n} \cdot D_{12\cdots(n-1)j}] = D_{12\cdots n}{}^2 \cdot D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}^2$

故 $D_{12\cdots(n-1)i}D_{12\cdots(n-1)j} = D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}^2$

則 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \pm D_{12\cdots(n-1)i}{}^{\frac{1}{2}} \cdot D_{12\cdots(n-1)j}{}^{\frac{1}{2}}$ ……(式3)

而 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ 與 $D_{12\cdots(n-1)i} \cdot D_{12\cdots(n-1)j}$ 必同號

依符號法則：

(1)當 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ 與 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ 同號，則在 $\overrightarrow{x_i}$ 與 $\overrightarrow{x_j}$ 的第 n 個分量必同號，此時由

(式 3)可得 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} > 0$

(2)當 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ 與 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ 異號，則在 $\overrightarrow{x_i}$ 與 $\overrightarrow{x_j}$ 的第 n 個分量必異號，此時由

(式 3)可得 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} < 0$

使用(式 2)與(式 3)，則在 $\overrightarrow{x_i}$ 與 $\overrightarrow{x_j}$ 的第 n 個分量乘積必為 $\dfrac{D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-1)}}$

故當 $i > n$ 且 $j > n$ 時，$\overrightarrow{x_i} \cdot \overrightarrow{x_j} = a_{ij}$ 亦成立。

【性質】在【定理四】的設定下，當 $k \geq n+1$ 時，$\overrightarrow{x_k}$ 的分量有下列性質：

若 $D_{12\cdots(p-1)k} = 0$，其中 $2 \leq p \leq n$，

則 $D_{12\cdots(p-1)}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = D_{12\cdots p}\begin{pmatrix} p+1 \\ k \end{pmatrix} = \cdots = D_{12\cdots(n-2)}\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} = D_{12\cdots(n-1)k} = 0$

(意即當 $D_{12\cdots(p-1)k} = 0$ 時，$\overrightarrow{x_k}$ 的第 p 個分量起至第 n 個分量皆為 0)

證明：(1)當 $p = n$ 時，則 $D_{12\cdots(n-1)k} = D_{12\cdots(p-1)k} = 0$，$\overrightarrow{x_k}$ 的第 n 個分量為 0。

(2)當 $p<n$ 時，由 $D_{12\cdots(p-1)p}>0$ 知

$$D_{12\cdots(p-1)pk}=\frac{1}{D_{12\cdots(p-1)}}\begin{vmatrix} D_{12\cdots(p-1)p} & D_{12\cdots(p-1)}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \\ D_{12\cdots(p-1)}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} & D_{12\cdots(p-1)k} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{D_{12\cdots(p-1)}}\left[D_{12\cdots(p-1)p}\cdot D_{12\cdots(p-1)k}-D_{12\cdots(p-1)}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}^2\right]=0$$

而當 $D_{12\cdots(p-1)k}=0$ 時，則 $D_{12\cdots(p-1)pk}=0$ 且 $D_{12\cdots(p-1)}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}=0$

再由 $D_{12\cdots(p-1)pk}=0$ 且 $D_{12\cdots p(p+1)k}=\dfrac{1}{D_{12\cdots p}}\left[D_{12\cdots p(p+1)}\cdot D_{12\cdots(p-1)pk}-D_{12\cdots p}\begin{pmatrix} p+1 \\ k \end{pmatrix}^2\right]=0$

得到 $D_{12\cdots p(p+1)k}=0$ 且 $D_{12\cdots p}\begin{pmatrix} p+1 \\ k \end{pmatrix}=0$

繼續推理即得 $D_{12\cdots(p-1)}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}=D_{12\cdots p}\begin{pmatrix} p+1 \\ k \end{pmatrix}=\cdots=D_{12\cdots(n-2)}\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}=D_{12\cdots(n-1)k}=0$

五、設 $m>n$，在 n 維空間中，若 m 個向量 $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_m}$ 所構成的內積方陣為

$$A_m=[a_{ij}]_{m\times m}=\begin{bmatrix} \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_m} \\ \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_2} & \cdots & \overrightarrow{x_m}\cdot\overrightarrow{x_m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

且已知其中 $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_n}$ 為線性獨立的向量，依前述降階模式並將分母的行列式值去除，則有運算過程如下：

$$\det A_m=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} D_{12} & D_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} & \cdots & D_1\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix} \\ D_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} & D_{13} & \cdots & D_1\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix} & D_1\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix} & \cdots & D_{1m} \end{vmatrix} \quad (D_{1k}>0\,,\,2\le k\le n\,;\,D_{1t}\ge 0\,,\,t\ge n+1)$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} D_{123} & D_{12}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} & \cdots & D_{12}\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix} \\ D_{12}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} & D_{124} & \cdots & D_{12}\begin{pmatrix}4\\m\end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{12}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix} & D_{12}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix} & \cdots & D_{12m} \end{vmatrix} \quad (D_{12k}>0\,,\,3\le k\le n\,;\,D_{12t}\ge 0\,,\,t\ge n+1)$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} D_{12\cdots n} & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\n+1\end{pmatrix} & \cdots & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix} \\ D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n+1\\n\end{pmatrix} & D_{12\cdots(n-1)(n+1)} & \cdots & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n+1\\m\end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix} & D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}m\\n+1\end{pmatrix} & \cdots & D_{12\cdots(n-1)m} \end{vmatrix} \quad (D_{12\cdots n}>0\,,\,D_{12\cdots(n-1)k}\ge 0\,,\,k\ge n+1)$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$ 為$(m-n)$階元素皆為零的行列式。

在以上過程中，若 $D_{12\cdots(p-1)k}=0\,(2\le p\le n\,,\,k\ge n+1)$，則由【性質】知其所屬的行與列的所有元皆必為 0。而以上的運算過程及出現的現象可作為 $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_m}$ 中以 $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_n}$ 為線性獨立向量所構成之內積方陣的辨識方法。

但若是在內積方陣 A_m 中線性獨立的向量並非 $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_n}$，也就是不滿足【定理四】的所有條件，則可依下列六、七之討論來還原向量。

六、在 n 維空間中，當 m 階內積方陣 A 中線性獨立的向量並非前 n 個向量 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_n}$ 時，也就是不滿足【定理四】的所有條件，則此時應另找一組線性獨立向量，並以其為基礎建構完整的對應向量，如下列步驟進行：

1. 將 m 階內積方陣 A 中對角線 a_{kk} (其中 k＝1 , 2 ,⋯, m)為 0 之元所在的行與列所有元素去除後，以第一個對角線非零之元 $a_{t_1t_1} = D_{t_1}$ 為基準並依前述之特殊降階模式得一行列式 $\det(A_1)$ 及其對應方陣 A_1，其階數最少降一階。
2. 在新的行列式 $\det(A_1)$ 或對應方陣 A_1 中，再去除對角線為 0 之元所在的行與列所有元素，然後以第一個對角線非零(大於 0)之元素設為 $D_{t_1t_2}$ $(1 \le t_1 < t_2 \le m)$為基準，繼續進行降階模式。
3. 設反覆進行 r 次後得對角線元 $D_{t_1t_2\cdots t_r}$ $(1 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_r \le m)$，若此值仍大於 0 且再降階展開後得 $D_{t_1t_2\cdots t_rk} = D_{t_1t_2\cdots t_r}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = 0$ (其中 $t_r < k \le m$， $t_r < i < j \le m$)，則此時之新行列式或對應新方陣中的元素呈現全為 0 之狀態。在此過程中我們找到線性獨立的向量為原內積方陣所對應之第 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 個向量。
4. 對應向量的寫法：
   在得知第 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 個向量為線性獨立的向量後，我們可以將原始的內積方陣元素順序加以調整，使得調整後的前 r 個向量 $\overrightarrow{x_1}', \overrightarrow{x_2}', \cdots, \overrightarrow{x_r}'$ 為線性獨立，則此時調整後的內積方陣 A' 所對應的行列式必可滿足【定理四】的四個條件，因此可以利用【定理四】的方式還原向量。(以上過程請參閱八、實例討論之例題(二)之操作方法。)

七、若在 n 維空間中，m 個向量 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_m}$ 當中線性獨立的個數少於 n，則仍可依上述六.之討論，先找出其中線性獨立的 r 個，即 $\overrightarrow{x_{t_1}}, \overrightarrow{x_{t_2}}, \cdots, \overrightarrow{x_{t_r}}$，其中 r＜n，再依【定理四】之方式先還原為 m 個 r 維向量，再將各向量之第(r＋1)至 n 維分量補為 0，即可還原為 m 個 n 維向量。(或說在已知內積方陣 A_m 情況下，即可找出其中線性獨立的 r 個，依【定理四】之方式還原為 m 個 r 維向量，以線性獨立個數決定還原之維度亦可。)

八、實例討論：

例題(一)：在五維空間中，有一個 8 階對稱方陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & -2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 8 & 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 14 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 2 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 3 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 2 & -2 & 7 & 6 & 6 & 14 \end{bmatrix}$

檢查：

1. $D_1=5$，$D_{12}=24$，$D_{123}=160$，$D_{1234}=176$，$D_{12345}=576$，皆為正數。
2. $D_{12346}=64$，$D_{12347}=0$，$D_{12348}=144$，皆非負。
3. $D_{123456}=D_{123457}=D_{123458}=0$
4. $D_{1234567}=D_{1234568}=D_{1234578}=0$

符合 4 個條件。

還原 8 個向量：

$$\overrightarrow{v_1}=(\frac{D_1}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,0,0,0)=(\sqrt{5},0,0,0,0)$$

$$\overrightarrow{v_2}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}^{\frac{1}{2}}}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,0,0)=(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{30}}{5},0,0,0)$$

$$\overrightarrow{v_3}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{123}^{\frac{1}{2}}}{D_{12}^{\frac{1}{2}}},0,0)=(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{30}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{3},0,0)$$

$$\overrightarrow{v_4}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}{D_{12}^{\frac{1}{2}}D_{123}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{1234}^{\frac{1}{2}}}{D_{123}^{\frac{1}{2}}},0)=(\frac{-2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{30}}{30},\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{110}}{10},0)$$

$$\overrightarrow{v_5}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}}{D_{12}^{\frac{1}{2}}D_{123}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{123}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}}{D_{123}^{\frac{1}{2}}D_{1234}^{\frac{1}{2}}},\frac{\pm D_{12345}^{\frac{1}{2}}}{D_{1234}^{\frac{1}{2}}})=(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{30}}{10},\frac{-\sqrt{15}}{5},\frac{27\sqrt{110}}{110},\frac{\pm 6\sqrt{11}}{11})$$

$\because D_{1234}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=-192<0$ $\therefore$則 $\overrightarrow{v_6}$ 與 $\overrightarrow{v_5}$ 的第 5 個分量異號

$$\overrightarrow{v_6}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}}{D_{12}^{\frac{1}{2}}D_{123}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{123}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}}{D_{123}^{\frac{1}{2}}D_{1234}^{\frac{1}{2}}},\frac{\mp D_{12346}^{\frac{1}{2}}}{D_{1234}^{\frac{1}{2}}})=(0,\frac{\sqrt{30}}{3},\frac{-8\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{110}}{55},\frac{\mp 2\sqrt{11}}{11})$$

$\because D_{1234}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}=0$ $\therefore$則 $\overrightarrow{v_7}$ 的第 5 個分量為 0

$$\overrightarrow{v_7}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}}{D_{12}^{\frac{1}{2}}D_{123}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{123}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}}{D_{123}^{\frac{1}{2}}D_{1234}^{\frac{1}{2}}},0)=(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{30}}{5},0,0,0)$$

$\because D_{1234}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}=288>0$ $\therefore \overrightarrow{v_8}$ 與 $\overrightarrow{v_5}$ 的第 5 個分量同號

$$\overrightarrow{v_8}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}}{D_{12}^{\frac{1}{2}}D_{123}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{123}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}}{D_{123}^{\frac{1}{2}}D_{1234}^{\frac{1}{2}}},\frac{\pm D_{12348}^{\frac{1}{2}}}{D_{1234}^{\frac{1}{2}}})=(\sqrt{5},\frac{\sqrt{30}}{2},\frac{-\sqrt{15}}{5},\frac{-3\sqrt{110}}{110},\frac{\pm 3\sqrt{11}}{11})$$

例題(二)：在三維空間中，有一個 5 階對稱方陣 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&2&-1&3&0\\0&-1&2&0&-1\\0&3&0&6&-1\\0&0&-1&-1&1\end{bmatrix}$

$\because$方陣 A 的第一列與第一行之元皆為 0 $\therefore$5 個向量中必有一個零向量。

為方便計算與還原向量，我們先把向量的順序調換，讓零向量變成第 5 個向量，將 A 改寫成 $A'=\begin{bmatrix}2&-1&3&0&0\\-1&2&0&-1&0\\3&0&6&-1&0\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，並不會改變本質。

檢查 A'：

1. $D_1=2$，$D_{12}=3$，$D_{123}=0$，並非皆為正。
2. $D_{124}=1$，$D_{125}=0$，皆非負。
3. $D_{1234}=D_{1235}=0$
4. $D_{12345}=0$

其中 1.並不符合【定理四】的要求。

以 a_{11} 其所屬行為基準適當乘以一數加到其他各行使其所屬列除 a_{11} 外全為 0，並展開後成為 4 階行列式，如此進行下去，如下所示。

$$\det A'=\begin{vmatrix}2&-1&3&0&0\\-1&2&0&-1&0\\3&0&6&-1&0\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&0&0\\-1&1.5&1.5&-1&0\\3&1.5&1.5&-1&0\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}1.5&1.5&-1&0\\1.5&1.5&-1&0\\-1&-1&1&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$=2\times\begin{vmatrix}1.5&0&0&0\\1.5&0&0&0\\-1&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}=2\times1.5\times\begin{vmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0\end{vmatrix}=2\times1.5\times\frac{1}{3}\times\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}$$

在化簡過程中我們也發現了在 A' 中線性獨立的是第 1、2、4 個向量，故若想要依【定理四】之方式還原 5 個向量，則將 5 個向量的順序調整至前 3 個為線性獨立，而 A' 再重新改寫為：$A''=\begin{bmatrix}2&-1&0&3&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&1&-1&0\\3&0&-1&6&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

檢查 A''：

1. $D_1=2$，$D_{12}=3$，$D_{123}=1$，皆為正。
2. $D_{124}=D_{125}=0$，皆非負。
3. $D_{1234}=D_{1235}=0$
4. $D_{12345}=0$

符合 4 個條件。

還原 5 個向量：

$$\overrightarrow{v_1}=(\frac{D_1}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,0)=(\sqrt{2},0,0)$$

$$\overrightarrow{v_2}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12}^{\frac{1}{2}}}{D_1^{\frac{1}{2}}},0)=(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},0)$$

$$\overrightarrow{v_3}=(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\frac{\pm D_{123}^{\frac{1}{2}}}{D_{12}^{\frac{1}{2}}})=(0,\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{\pm\sqrt{3}}{3})$$

$\because D_{12}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=0$ $\quad\therefore \overrightarrow{v_4}$ 的第 3 個分量為 0

$$\overrightarrow{v_4}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},0\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$$

$\because D_{12}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=0$ $\therefore \overrightarrow{v_5}$ 的第 3 個分量為 0

$$\overrightarrow{v_5}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},0\right)=(0,0,0)$$

九、實際應用：

(一)對稱行列式的降階模式與內積方陣性質之應用：可用來證明下列結果

若三維空間中三向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 之間的夾角分別為：$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角 α、$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 夾角 β、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 夾角 γ，則：

1. 三個夾角總和不大於 2π，即：$\alpha+\beta+\gamma\le 2\pi$
2. 任兩個夾角之和不小於第三個夾角，即：$\alpha+\beta\ge\gamma$，$\beta+\gamma\ge\alpha$，$\alpha+\gamma\ge\beta$

證明：在不失一般性的情況下，我們可以假設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{c}\right|=1$

內積方陣為：$A=\begin{bmatrix}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cos\alpha & \cos\beta\\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma\\ \cos\beta & \cos\gamma & 1\end{bmatrix}$

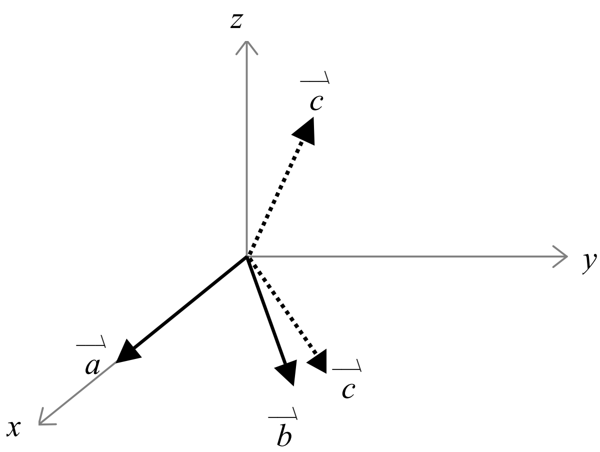
當 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行時，依前述定理還原三個向量可得：

$\overrightarrow{a}=(1,0,0)$

$\overrightarrow{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha,0)$

$$\overrightarrow{c}=\left(\cos\beta,\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha},\pm\frac{\sqrt{1+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}{\sin\alpha}\right)$$

其中 $\overrightarrow{c}$ 的第三個分量之分子為 $\sqrt{D_{123}}=[\det(A)]^{\frac{1}{2}}$，由此可知 $\det(A)$ 直接展開的樣子並不容易看出 α、β、γ 的關係，但可將還原的三個向量畫圖如下，我們可以看見向量被定出坐標的感覺：



若兩兩向量所組成的內積方陣其所對應之行列式依本文特殊的降階模式展開：

$$\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\gamma \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \cos\beta \\ \cos\beta & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\cos^2\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta \\ \cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta & 1-\cos^2\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta \\ \cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta \end{vmatrix}$$

$= \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2 \geq 0$　**(內積方陣的性質)**

則：$-\sin\alpha\cdot\sin\beta \leq \cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta \leq \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) \leq \cos\gamma \leq \cos|\alpha-\beta|$

1. $\because 0 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq \pi$　　$\therefore 0 \leq |\alpha-\beta|, \gamma \leq \pi$

由 $\cos\gamma \leq \cos|\alpha-\beta|$ 可知：$\gamma \geq |\alpha-\beta| \Rightarrow -\gamma \leq \alpha-\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha+\gamma \geq \beta$，$\beta+\gamma \geq \alpha$

2. 由 $\cos(\alpha+\beta) \leq \cos\gamma$，可分下列兩種情況討論：
   (1)當 $0 \leq \alpha+\beta \leq \pi$ 時：可得 $\alpha+\beta \geq \gamma$，當然此時亦符合 $\alpha+\beta+\gamma \leq 2\pi$
   (2)當 $\pi < \alpha+\beta \leq 2\pi$ 時：
   必可得 $\alpha+\beta \geq \gamma$
   另有 $0 \leq 2\pi-(\alpha+\beta) < \pi$
   而 $\cos(\alpha+\beta) = \cos(2\pi-\alpha-\beta) \leq \cos\gamma \Rightarrow 2\pi-\alpha-\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \leq 2\pi$

利用對稱行列式的降階模式與內積方陣性質之應用，我們輕易證明了三維空間中三個向量之間夾角的大小關係。

(二)以內積方陣還原向量之應用：

若空間中有一已知邊長的四面體，空間中的四面體可以視為是三個不共平面的向量所張出，以其邊長可計算三向量之間的兩兩內積、構成內積方陣，再以內積方陣還原向量，就可順利將四面體的四個頂點坐標化(其中一個必為原點)，此結果將有助於對於整個四面體的各項資訊了解。(當然也可以應用在其它角錐體。)

伍、研究結果與討論

我們利用特殊的行列式降階模式，在已知 n 維空間中 m 個向量所構成的內積方陣之下，成功地找到合理還原向量的方法如下。並且在討論的過程中也發現了內積方陣的特性與辨識方法。

一、當 $m=n$ 時，若對稱方陣 A_m 具備 $D_1, D_{12}, D_{123}, \cdots, D_{12\cdots(n-1)}, D_{12\cdots(n-1)n}$ 皆為正數之條件，則 A_m 為 n 維空間中的內積方陣，且其所對應的向量可設定為：

1. $\overrightarrow{x_1}=\left(\dfrac{D_1}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0,0\right)$，後面$(n-1)$個分量為 0。

2.當 $2\le k\le n-1$ 時：

$$\overrightarrow{x_k}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{12\cdots(k-2)}\begin{pmatrix}k-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(k-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12\cdots(k-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0\right)$$

，後面$(n-k)$個分量為 0。

3. $$\overrightarrow{x_n}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\n\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{123\cdots(n-2)}\begin{pmatrix}n-1\\n\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}},\pm\frac{D_{123\cdots n}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}}\right)$$

二、當 $m>n$ 時，若對稱方陣 A_m 具備下列條件

1. $D_1, D_{12}, D_{123}, \cdots, D_{12\cdots(n-1)}, D_{12\cdots n}$ 皆為正數。

2. $D_{12\cdots(n-1)k}\ge 0$，其中 $k\ge n+1$

3. $D_{12\cdots nk}=0$，其中 $k\ge n+1$

4. $D_{12\cdots nij}=0$，其中 $j>i\ge n+1$

則 A_m 為內積方陣，且其所對應的向量可設定為：

(1) $\overrightarrow{x_1}=\left(\dfrac{D_1}{D_1^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0,0\right)$，後面($n$－1)個分量為 0。

(2)當 $2\le k\le n-1$ 時：

$$\overrightarrow{x_k}=\left(\frac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\frac{D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{D_{12\cdots(k-2)}\begin{pmatrix}k-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(k-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},\frac{D_{12\cdots(k-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(k-1)}^{\frac{1}{2}}},0,\cdots,0\right)$$

，後面(n－k)個分量為 0。

(3)當 $n\le k\le m$ 時：$\overrightarrow{x_k}=\left(\dfrac{D_0\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}},\dfrac{D_1\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}}{D_1^{\frac{1}{2}}D_{12}^{\frac{1}{2}}},\cdots,\dfrac{D_{12\cdots(n-2)}\begin{pmatrix}n-1\\k\end{pmatrix}}{D_{12\cdots(n-2)}^{\frac{1}{2}}D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}},\pm\dfrac{D_{123\cdots(n-1)k}^{\frac{1}{2}}}{D_{12\cdots(n-1)}^{\frac{1}{2}}}\right)$

當 $k>n$ 時，$\overrightarrow{x_k}$ 的第 n 個分量之正負符號之「符號法則」為：

①若 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=0$，則 $\overrightarrow{x_k}$ 的第 n 個分量為 0。

②若 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}>0$，則 $\overrightarrow{x_k}$ 與 $\overrightarrow{x_n}$ 的第 n 個分量同號。

③若 $D_{12\cdots(n-1)}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}<0$，則 $\overrightarrow{x_k}$ 與 $\overrightarrow{x_n}$ 的第 n 個分量異號。

在建構對應向量的過程中，我們知道第 n 個向量的第 n 個分量值可能是正、負或零。當 m＞n 時，原本只有＋、－兩種可能的變化卻因符號法則的討論，更能確定第(n＋1)個向量至第 m 個向量的最末分量值之正、負或零。以上二種結論也是處理 A_m 中「線性獨立的並非前 n 個向量」，或是「線性獨立的向量數目少於 n」的重要依據。

陸、結論

內積方陣所對應的向量有很多可能，而我們找到一種方法：利用 m 階對稱行列式的特殊降階展開方式，擬定其元素與若干子行列式間有趣的恆等關係，還原了內積方陣所對應於 n 維空間中之向量。以行列式來處理向量內積的結果，使得行列式值不再只是單純的機械式計算，或是僅能作為解 n 元 n 式聯立方程組之工具，本文之討論賦予行列式另一層創新的意涵與應用。

柒、參考資料

1. 高中數學第三冊、數學甲上冊課本與教師手冊(各版本)。
2. 林義雄，初等線性代數(一)行列式(修訂一版)。台灣：九章出版社，1986 年 8 月。

【評　語】　　040402　降出原形吧！－建構內積方陣的對應向量

1) 科學發現的過程總是先有具體的特例，然後逐漸發展出一般性的抽象結論。本作品並未反映曾經遭受到挫折的痕跡。

2) 科展應該把握深入淺出的溝通原則，應該忠實的展示自己的發現，自己的體會。（先講給同學聽聽看，她們若聽不懂，請繼續努力。）

3) 本作品建立了龐大的工具而只能用來解決深度不高的問題，難以說服人們相信它是一門「不可思議的有效率的學科」。