中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040401

你倒沒？還是我倒楣

學校名稱：桃園縣私立新興高級中學

作者：	指導老師：
高二 林思萍	賴申洲
高二 簡偉任	彭富榮
高二 呂家勳	
高二 陳元豪	

關鍵詞：重心　疊疊樂　不等式

壹、　摘要

以生活中的小遊戲—疊疊樂爲出發點，來討論在不同的情況下，積木所能堆疊的最大數目。有就是說，當我們將這些積木做水平移動時，在移動間距與堆疊個數間是否存在某些關係？以及，當我們將這些積木以固定頂點爲軸，來做旋轉時，這些旋轉的角度與堆疊的個數又存在些什麼關係？甚至推廣到，面對不同的對稱幾何圖形以及質心位置非固定時(如：質心位於$\frac{1}{3}$處時)，其關係又爲何？

貳、　研究動機

在孩時的記憶中，我們玩積木堆疊的遊戲，常常是在挑戰堆疊積木的最高點，然而每當達到另一個高峰時，這份雀躍心情，就是這個遊戲所得到的最大成就，這似乎永遠是這項遊戲不變的本質。進入高中之後，在教科書中得到有關質心的觀念，讓我們知道，小遊戲也有大學問。且對於質心的定義：「一個對稱且質量分布均勻的系統，它的質心就是它的幾何中心。」以及質心的觀念：「一個物體，若同時受到幾個力的作用，其受力效果是由這幾個力共同產生。」使我們對積木的堆疊是否會有極限，產生了疑問！如果有？那應該是多少？影響的因素又是什麼？而這些因素之間是否存在著某種關連性！因爲一份好奇心，讓我們對這個議題進行探討。

參、　研究目的

一、水平移動：

(一)以長方形積木進行水平堆疊，逐步探討每增加一塊積木時，該塊積木所能夠允許的最大間距。

(二)以長方形積木進行水平移動時，在固定間距的情形下，積木堆疊的最大數目爲何。

(三)探討某些積木，即便該積木符合對稱幾何圖形，在重心位置可能有變的情況之下，我們所能夠允許的最大間距。(如：正三角形的重心在高的 1:2 位置上)

(四)探討某些積木，即便該積木符合對稱幾何圖形，在重心位置可能有變且固定間距的情況之下，我們所能夠允許的最大數目。

二、定點旋轉：

(一)以正方形積木的一個頂點爲支點(軸)進行旋轉，每增加一塊積木時，所能夠允許的最大角度。

(二)以正方形積木的一個頂點爲支點(軸)進行旋轉，當我們固定旋轉角度時，所能夠允許的最大堆疊量。

(三)探討某些積木，即便該積木符合對稱幾何圖形，在重心位置可能有變的情況之下，旋轉角度與積木個數之間的關係。

(四)探討以正多邊形固定一頂點爲支點進行旋轉時，當我們固定旋轉角度時，所能夠允許的最大堆疊量。

肆、 研究器材、設備

一、紙、筆

二、個人電腦

三、Microsoft Word 軟體

四、PhotoImpact12 軟體

五、C#程式軟體

伍、 研究過程與方法

名詞說明：

(一)【質心】

一物體的質量可視爲集中在一點，我們稱此點爲質心，且此點的運動可代表整個物體的運動。一物體的總質量 $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$，其中 m_i 爲此物體組成的小系統質量；且 x_i 爲各系統至某一支點距離，則質心的位置被定義成：$X = \dfrac{m_1 \times x_1 + m_2 \times x_2 + \cdots + m_n \times x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$。因質心可代表此整個物體，故以質心做爲分析整體運動狀況的代表。

(二)【不倒塌的原則】

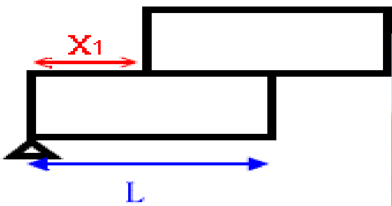
這裡所謂不倒塌的原則爲每一次增加一個積木之後，整個物體依然呈現平衡的狀態而不倒塌。不論從那一層的積木來看，其上方所有積木的質心位置不能超過該層的邊界，否則在力矩不平衡的狀況下(順時針力矩大於逆時針力矩)，就會倒塌。關於力矩的計算式，我們從課本上得知爲<u>力矩=力臂 × 作用力</u>，而力臂必需垂直於作用力。

一、水平移動的討論

有關水平移動這部分的討論，我們探討的主軸是放在質心的水平移動，因此是否會倒塌，也只要評估一個維度(dimension)的變化，不需要從每一個部分來分析。

(一)以長方形積木進行水平堆疊，逐步探討每增加一塊積木時，該塊積木所能夠允許的最大間距。我們首先以長方形積木進行堆疊，每一次的堆疊，皆朝同一方向水平移動，且每一塊堆疊上去的水平平移量，必須是可容許平移的最大值（恰不造成積木的倒塌），則堆疊的積木數目和間距有何關係？我們利用質心的概念及不倒塌的原則，分別逐一增加積木來觀察規則：

情況一：當堆疊第一塊積木時，其最大間距 X_1 為何？



(圖 1)　　(圖 1-1)

依據質心公式，我們得到：

$$m\,(X_1 + \frac{L}{2}) \le m\,L$$

$$\Rightarrow X_1 \le \frac{L}{2} \quad -----(式1)$$

情況二：當堆疊第二塊積木時，第二塊積木所能夠允許的最大間距 X_2 為何？

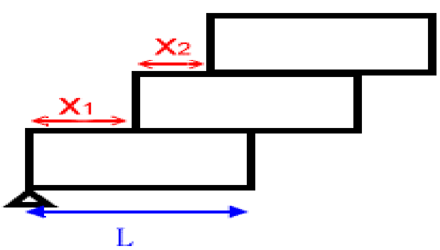
以情況一的結果為前提下，我們堆疊第二塊積木。在此分為兩種情況討論：

討論 1：向上堆疊一塊積木(圖 2)

$$m(X_1 + X_2 + \frac{L}{2}) + m(X_1 + \frac{L}{2}) \le 2mL$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 + \frac{L}{2} + X_1 + \frac{L}{2} \le 2L$$

$$\Rightarrow 2X_1 + X_2 \le L \quad -----(式1')$$



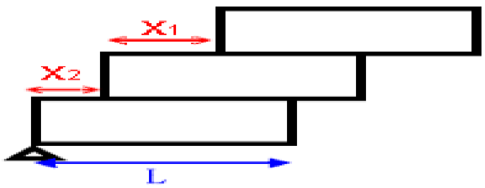
(圖 2)　　(圖 2-1)

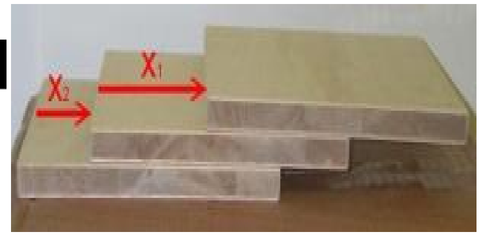
$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \le L & -----(式1') \\ X_1 \le \dfrac{L}{2} & ----(式1) \end{cases}$$

$(式1')-2\times(式1)$

$\Rightarrow X_2 \le 0 --------(式2'')$

討論 2：向下堆疊一塊積木(圖 3)。





(圖 3)　　　　　　　　　　(圖 3-1)

$$m\left(X_1+X_2+\frac{L}{2}\right)+m\left(X_2+\frac{L}{2}\right)\le 2mL$$

$$\Rightarrow X_1+2X_2\le L ----(式\ 2')$$

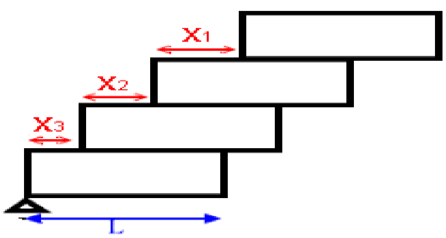
$$\begin{cases} X_1+2X_2\le L & ------(式\ 2') \\ X_1\le \dfrac{L}{2} & ------(式\ 1) \end{cases}$$

$(式\ 2')-(式\ 1)$

$$\Rightarrow X_2\le\frac{L}{4} \quad ------(式2)$$

由上述的式子中，當向上堆疊時，只能堆疊一個積木，如果加上第二個積木之後，水平位移就不行有任何移動，否則就會倒塌。如此一來，向上增加積木就沒有討論的空間。<u>因此後面的討論將全部以向下堆疊的方式來探討間距的規則 。</u>

情況三：當堆疊第三塊積木時，第三塊積木所能夠允許的最大間距 X_3 為何？



(圖 4)　　　　　　　　　　(圖 4-1)

$$m(X_1+X_2+X_3+\frac{L}{2})+m(X_2+X_3+\frac{L}{2})+m(X_3+\frac{L}{2})\le 3mL$$

$$\Rightarrow X_1+2X_2+3X_3\le\frac{L}{2} ------(式3')$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le \dfrac{3L}{2} & ------(\text{式}3') \\ X_2 \le \dfrac{L}{4} & ------(\text{式}2) \\ X_1 \le \dfrac{L}{2} & ------(\text{式}1) \end{cases}$$

$$(\text{式}3') - 2\times(\text{式}2) - (\text{式}1)$$

$$\Rightarrow 3X_3 \le \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow X_3 \le \frac{L}{6} \qquad ------(\text{式}3)$$

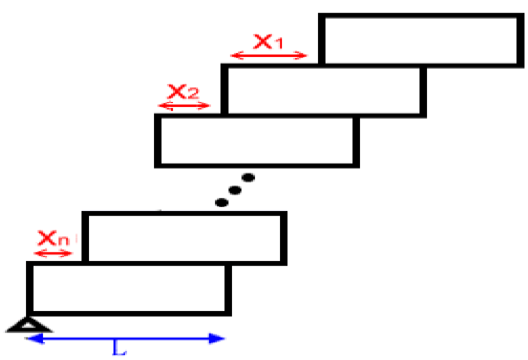
由以上三個的情況證明，我們大膽的假設，當積木的堆疊數爲 n 個時，此時的最大間距爲 $\frac{L}{2n}$，如下表(1)所示：

堆疊數	1	2	3	………	n
長度	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{4}$	$\frac{L}{6}$	………	$\frac{L}{2n}$

(表 1)

【推論】當積木的堆疊數爲 n 個時，此時的最大間距爲 $X_n = \frac{L}{2n}$ 。

證明：



(圖 5)

$$m(X_1 + X_2 + \ldots X_n + \frac{L}{2}) + m(X_2 + X_3 + \ldots + X_n + \frac{L}{2}) + \ldots + m(X_n + \frac{L}{2}) \le nmL$$

$$\Rightarrow nX_n + (n-1)X_{n-1} + \ldots + 3X_3 + 2X_2 + X_1 + \frac{nL}{2} \le nL$$

$$\Rightarrow nX_n + (n-1)X_{n-1} + \ldots + 3X_3 + 2X_2 + X_1 \le \frac{nL}{2} ------(\text{式}n')$$

$$\begin{cases} nX_n+(n-1)X_{n-1}+...+3X_3+2X_2+X_1\le\dfrac{nL}{2} & ------(\text{式}\ n') \\ X_n-1\le\dfrac{L}{2(n-1)} & ------(\text{式}\ n-1) \\ \vdots & \\ X_2\le\dfrac{L}{4} & -----(\text{式}\ 2) \\ X_1\le\dfrac{L}{2} & \end{cases}$$

$$(\text{式}n')-(n-1)\times(\text{式}n-1)-......-2\times(\text{式}2)-(\text{式}1)$$

$$\Rightarrow nX_n\le\frac{nL}{2}-\frac{(n-1)L}{2}$$

$$\Rightarrow X_n\le\frac{L}{2n}\qquad -----(\text{式}\ n)$$

故得証

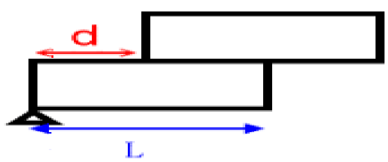
由這項証明，我們可以得到以下定理：

[定理 1]：當我們以長方形積木從下方進行水平堆疊時，若積木的長度爲 L，且每一塊積木的平移量爲 $X_1, X_2, X_3,..., X_n$，則第 n 塊積木所能夠允許的最大間距爲 $X_n\le\dfrac{L}{2n}$。

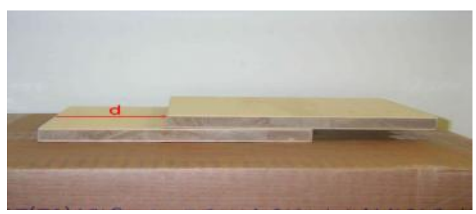
（二）、以長方形積木進行水平移動時，在固定間距的情形下，積木堆疊的最大數目爲何？

利用每一塊積木的平移量都是固定的的情況下（即 $X_1=X_2=...=X_n=d$），來觀察討論堆疊塊數的最大值：

情況一：間距 d=$\dfrac{L}{2}$時，其最大堆疊數爲何？



(圖 6)



(圖 6-1)

(1)順力矩=$m(\frac{L}{2}+\frac{L}{2})=mL$

逆力矩=mL

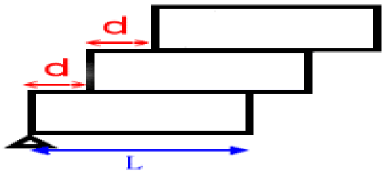
$\Rightarrow$順力矩=逆力矩---堆疊 1 塊

(2)順力矩=$m(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L}{2})+m(\frac{L}{2}+\frac{L}{2})=\frac{5}{2}mL$

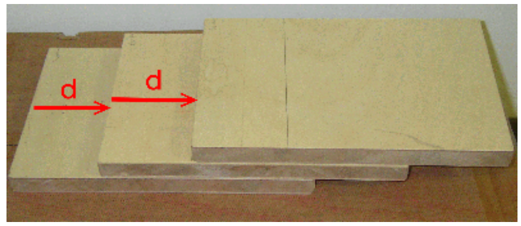
逆力矩=$2mL$

$\Rightarrow$順力矩>逆力矩---(倒塌)

情況二：間距 d=$\frac{L}{3}$時，其最大堆疊數爲何？



(圖 7)



(圖 7-1)

(1)順力矩=$m(\frac{L}{3}+\frac{L}{2})=\frac{5}{6}mL$ 　　逆力矩=mL

$\Rightarrow$順力矩 ＜ 逆力矩---堆疊 1 塊

(2)順力矩=$m(\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{2})+m(\frac{L}{3}+\frac{L}{2})=2mL$ 　　逆力矩=2mL

$\Rightarrow$順力矩=逆力矩---堆疊 2 塊

(3)順力矩=$m(\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{2})+m(\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{2})+m(\frac{L}{3}+\frac{L}{2})=\frac{7}{2}mL$

$\Rightarrow$逆力矩=3mL

$\Rightarrow$順力矩>逆力矩---(倒榻)

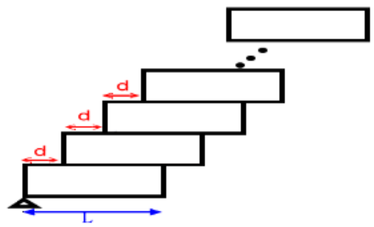
我們將上述二個情況，整理如下(表 2)，並大膽的假設當間距爲$\frac{L}{n}$，則堆疊的個數爲$n-1$。

堆疊塊數\間距	1			2			3			4				最大堆疊個數
	順時針力矩	逆時針力矩	是否倒塌	順時針力矩	逆時針力矩	是否倒塌	順時針力矩	逆時針力矩	是否倒塌	順時針力矩	逆時針力矩	是否倒塌		
$\frac{1}{2}$L	mL	mL	否	$\frac{5}{2}$mL	2mL	是	$\frac{9}{2}$mL	3mL	是	$\frac{14}{2}$mL	4mL	是	…	1
$\frac{1}{3}$L	$\frac{5}{6}$mL	mL	否	2mL	2mL	否	$\frac{7}{2}$mL	3mL	是	$\frac{16}{3}$mL	4mL	是		2
$\frac{1}{4}$L	$\frac{3}{4}$mL	mL	否	$\frac{7}{4}$mL	2mL	否	3mL	3mL	否	$\frac{9}{2}$mL	4mL	是		3
							…							
$\frac{1}{n}$L	$(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})$mL	mL	否	$(\frac{3}{n}+1)$mL	2mL	否	$(\frac{6}{n}+\frac{3}{2})$mL	3mL	否	$(\frac{10}{n}+2)$mL	4mL	否		(n-1)

(表 2)

【推論】當積木的堆疊間距固定爲 $\frac{L}{n}$ 時，則堆疊的最大個數爲 $n-1$。

證明：



(圖 8)

假設我們固定的間距爲 d，且最多可以堆疊 p 塊積木，則：

$$(d+\frac{L}{2})m+(2d+\frac{L}{2})m+(3d+\frac{L}{2})m+.......+(pd+\frac{L}{2})m \le mpL$$
$$\Rightarrow (d+\frac{L}{2})+(2d+\frac{L}{2})+(3d+\frac{L}{2})+....+(pd+\frac{L}{2}) \le pL$$
$$\Rightarrow (d+2d+3d+4d+........+pd)+(\underbrace{\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+........+\frac{L}{2}}_{p}) \le pL$$

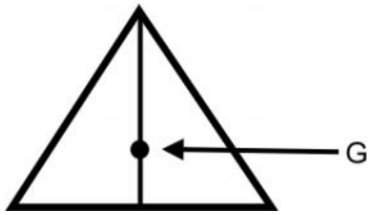
$$\Rightarrow \frac{p(p+1)d}{2}+\frac{pL}{2} \le pL$$
$$\Rightarrow (p+1)d \le L$$
$$\Rightarrow p \le \frac{L}{d}-1$$

當 $d=\frac{L}{n}$ 時，代入上述的不等式時得到 $p \le n-1$， 故得證

由這項証明，我們可以得到以下定理：

[定理 2]：當長方形積木從下方進行水平堆疊時，若積木的長度爲 L，且每一塊積木的平移間距固定爲 d，當最大堆疊數目爲 p 時，則關係式爲 $p \le \frac{L}{d}-1$。又當平移間距固定爲 $\frac{L}{n}$ 時，則最大堆疊數目爲 $n-1$。

(三)、探討某些積木，即便該積木符合對稱幾何圖形，在重心位置可能有變的情況之下，我們所能夠允許的最大間距。(如：正三角形的重心在高的 1：2 位置上)

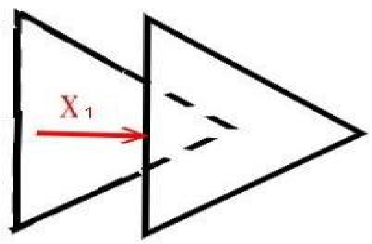


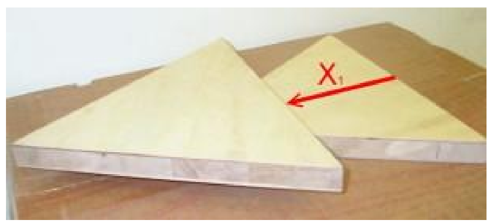
(圖 9)

已知正三角形的高為 R，邊長為 L，其重心 G 位正三角形的高上且距離底邊 $\frac{R}{3}$ 的地方。由於正三角形的重心並不位於高的中點，因此堆疊的方式分別以支點在底邊和支點在頂點的兩種型態討論之。

討論 1：當支點在三角形的底邊時

情況一：當堆疊第一塊積木時，其最大間距 X_1 為何？





(圖 10) (圖 10-1)

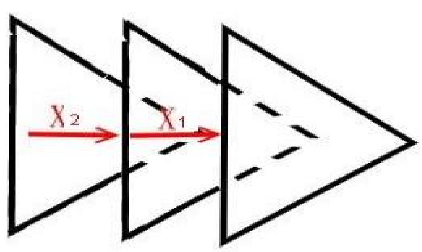
則 X_1 最大的長度為：

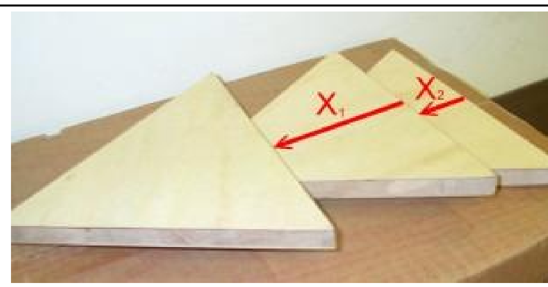
$$\Rightarrow m(X_1+\frac{R}{3})\leq mR$$

$$\Rightarrow X_1+\frac{R}{3}\leq R$$

$$\Rightarrow X_1\leq\frac{2R}{3}\quad -----(式1)$$

情況二：當堆疊第二塊積木時，第二塊積木所能夠允許的最大間距 X_2 為何？





(圖 11) (圖 11-1)

則 X_2 最大的長度爲：

$$\Rightarrow m(X_2+X_1+\frac{R}{3})+m(X_2+\frac{R}{3})\le 2mR$$

$$\Rightarrow X_2+X_1+\frac{R}{3}+X_2+\frac{R}{3}\le 2R$$

$$\Rightarrow X_1+2X_2\le\frac{4}{3}R \quad ---------(式2')$$

$$\begin{cases} X_1+2X_2\le\dfrac{4R}{3} \quad ---------(式2') \\ X_1\le\dfrac{2R}{3} \quad ------------(式1) \end{cases}$$

$$(式2')-(式1)$$

$$\Rightarrow X_2\le\frac{R}{3} \quad ------------(式2)$$

將上述二個情況，整理如下(表 3)，並大膽的假設當當支點在正三角形的底邊時，若每一次堆疊上去的積木其間距必須是最大值時 ，則 $X_n=\dfrac{2R}{3n}$ 。

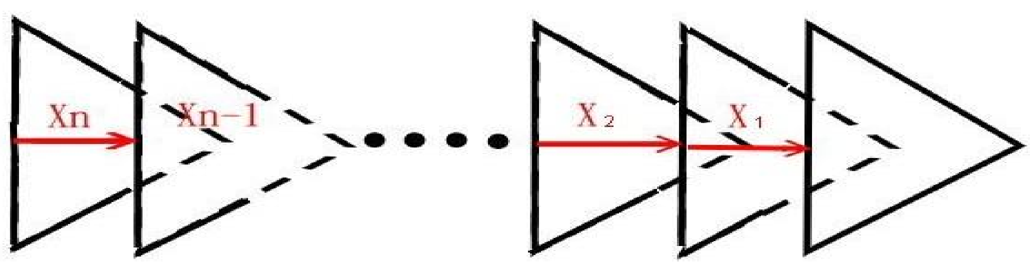
堆疊個數	1	2	3	4	………	n
最大長度(以高爲單位)	$\frac{2}{3}R$	$\frac{R}{3}$	$\frac{2R}{9}$	$\frac{R}{6}$	………	$\frac{2R}{3n}$
最大長度(以邊長爲單位)	$\frac{\sqrt{3}}{3}L$	$\frac{\sqrt{3}}{6}L$	$\frac{\sqrt{3}}{9}L$	$\frac{\sqrt{3}}{12}L$	………	$\frac{\sqrt{3}}{3n}L$

(表 3)

【推論】當支點在正三角形的底邊時，若每一次堆疊上去的積木其間距必須是最大值時，

則 $X_n=\dfrac{2R}{3n}$ 。

證明：



(圖 12)

推導當 n 塊堆疊時的證明：

$$m(X_n+X_{n-1}+...+X_2+X_1+\frac{R}{3})+m(X_n+X_{n-1}+...+X_2+\frac{R}{3})+...+m(X_n+\frac{R}{3})\le nmR$$

$$\Rightarrow\ nX_n+(n-1)X_{n-1}+......+2X_2+X_1\le\frac{2n}{3}R\quad ------------(式n')$$

$$\begin{cases} nX_n+(n-1)X_{n-1}+......+2X_2+X_1\le\frac{2n}{3}R & ------------(式\ n') \\ X_{n-1}\le\frac{2}{3n-3}R & ------------(式\ n-1) \\ \vdots & \\ X_2\le\frac{1}{3}R & ------------(式\ 2) \\ X_1\le\frac{2}{3}R & ------------(式\ 1) \end{cases}$$

$$(式n')-(n-1)\times(式n-1)-......-2\times(式2)-(式1)$$

$$\Rightarrow nX_n=\frac{2}{3}R\quad\Rightarrow X_n=\frac{2R}{3n}\quad ----------(式n)$$

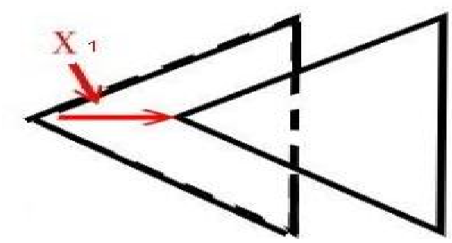
故得証

由這項証明，我們可以得到以下定理：

[定理 3]：當我們以正三角形積木從下方進行水平堆疊時，且當支點在正三角形的底邊時，若每一次堆疊上去的積木其間距必須是最大值時，則 $X_n=\frac{2R}{3n}$，其中 X_n 表堆疊第 n 個的間距。

討論 2：當支點在三角形的頂點時

情況一：當堆疊第一塊積木時，其最大間距 X_1 為何？



(圖 13)

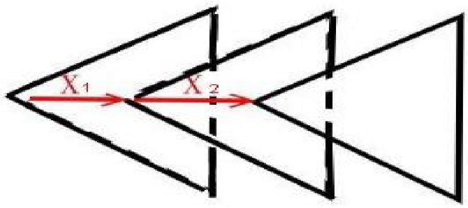
(圖 13-1)

$$m(X_1+\frac{2}{3}R)\le mR$$

$$\Rightarrow X_1+\frac{2}{3}R\le R$$

$$\Rightarrow X_1\le\frac{1}{3}R\quad ------(式1)$$

情況二：當堆疊第二塊積木時，第二塊積木所能夠允許的最大間距 X_2 爲何？



(圖 14)

(圖 14-1)

$$m(X_1+X_2+\frac{2}{3}R)+m(X_2+\frac{2}{3}R)\le 2mR$$

$$\Rightarrow X_1+2X_2\le\frac{2}{3}R \quad ------(式2')$$

$$\begin{cases} X_1+2X_2\le\frac{2}{3}R \quad ------(式2') \\ X_1\le\frac{1}{3}R \qquad ------(式1) \end{cases}$$

$$(式2')-(式1)$$

$$\Rightarrow 2X_2\le\frac{1}{3}R$$

$$\Rightarrow X_2\le\frac{1}{6}R \qquad -------(式2)$$

我們將上述二個情況，整理如下(表 4)，並大膽的假設當我們以正三角形積木從下方進行水平堆疊時，且當支點在正三角形的頂點時，若第 n 塊間距爲 X_n，則 $X_n=\frac{R}{3n}$。

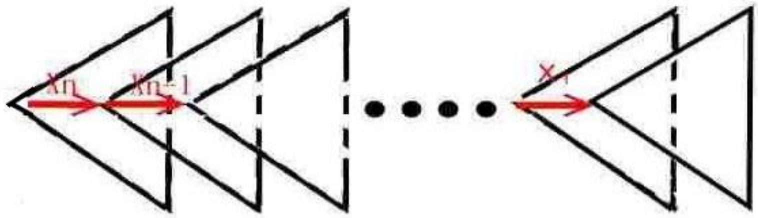
堆疊個數	1	2	3	4	………	N
最大長度 (以高爲單位)	$\frac{1}{3}R$	$\frac{R}{6}$	$\frac{R}{9}$	$\frac{R}{12}$	………	$\frac{R}{3n}$
最大長度 (以邊長爲單位)	$\frac{\sqrt{3}}{6}L$	$\frac{\sqrt{3}}{12}L$	$\frac{\sqrt{3}}{18}L$	$\frac{\sqrt{3}}{24}L$	………	$\frac{\sqrt{3}}{6n}L$

(表 4)

【推論】當我們以正三角形積木從下方進行水平堆疊時，且當支點在正三角形的頂點時，

若第 n 塊間距爲 X_n，則 $X_n=\frac{R}{3n}$。

證明：



(圖 15)

$$m(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n+\frac{2}{3}R)+m(X_2+X_3+\cdots+X_n+\frac{2}{3}R)+m(X_n+\frac{2}{3}R)\le nmR$$

$$\Rightarrow nX_n+(n-1)X_{n-1}+\cdots+3X_3+2X_2+X_1\le\frac{nR}{3} \quad ----------(\text{式}\,n')$$

$$\begin{cases} nX_n+(n-1)X_{n-1}+\cdots+3X_3+2X_2+X_1\le\frac{nR}{3} & ----------(\text{式}\,n') \\ \quad\vdots & \\ X_2\le\frac{1}{6}R & -------(\text{式}\,2) \\ X_1\le\frac{1}{3}R & ------(\text{式}1) \end{cases}$$

$$(\text{式}\,n')-(n-1)\times(\text{式}\,n-1)-\cdots-2\times(\text{式}\,2)-(\text{式}1)$$

$$\Rightarrow nX_n\le\frac{R}{3}$$

$$\Rightarrow X_n\le\frac{R}{3n}$$

故得證

由這項証明，我們可以得到以下定理：

定理 4：當我們以正三角形積木從下方進行水平堆疊時，且當支點在正三角形的頂點時，若每一次堆疊上去的積木其間距必須是最大值時，則 $X_n=\frac{R}{3n}$ ，其中 X_n 表堆疊第 n 個的間距。

討論 3：當質心的位置將高分為 3：2

設某一對稱的積木，其對稱軸長度為 R，當質心位置位於軸的位置為 3：2 時，也就是說支點到質心的距離：質心到端點的距離比為 3：2 時，此時質心的位置將在軸長的 $\frac{3}{5}R$。

情況一：當堆疊第一塊積木時，其最大間距 X_1 為何？

$$m(X_1+\frac{3}{5}R)\le mR$$

$$\Rightarrow X_1\le\frac{2}{5}R \qquad ------(式1)$$

情況二：當堆疊第二塊積木時，第二塊積木所能夠允許的最大間距 X_2 為何？

$$m(X_1+X_2+\frac{3}{5}R)+m(X_2+\frac{3}{5}R)\le 2mR$$

$$\Rightarrow X_1+X_2+\frac{3}{5}R+X_2+\frac{3}{5}R\le 2R$$

$$\Rightarrow X_1+2X_2\le\frac{4}{5}R \quad -----(式2')$$

$$\begin{cases} X_1+2X_2\le\frac{4}{5}R & ------(式2') \\ X_1\le\frac{2}{5}R & ------(式1) \end{cases}$$

$$(式2')-(式1)$$

$$\Rightarrow 2X_2\le\frac{2}{5}R$$

$$\Rightarrow X_2\le\frac{1}{5}R \qquad --------(式2)$$

我們將上述二個情況，整理如下(表 5)，並大膽的假設當支點到質心的距離：質心到端點的距離比為 3：2 時，若第 n 塊間距為 X_n，則 $X_n=\frac{2R}{5n}$。

疊堆個數	1	2	3	4	……	n
距離	$\frac{2}{5}R$	$\frac{1}{5}R$	$\frac{2}{15}R$	$\frac{1}{10}R$	……	$\frac{2}{5n}R$

(表 5)

【推論】當支點到質心的距離：質心到端點的距離比為 3：2 時，若第 n 塊間距為 X_n，

則 $X_n=\frac{2R}{5n}$。

證明:

$$m(X_n+X_{n-1}+\ldots+X_2+X_1+\frac{3}{5}R)+m(X_n+X_{n-1}+\ldots+X_2+\frac{3}{5}R)+\ldots m(X_n+\frac{3}{5}R)\le nmR$$

$$\Rightarrow nX_n+(n-1)X_{n-1}+\ldots\ldots+2X_2+X_1\le\frac{2n}{5}R \qquad \text{———(式}n')$$

$$\begin{cases} nX_n+(n-1)X_{n-1}+\ldots\ldots+2X_2+X_1\le\frac{2n}{5}R & \text{———(式}n') \\ X_{n-1}\le\frac{2}{5n-5}R & \text{———(式}n-1) \\ \vdots & \\ X_2\le\frac{1}{5}R & \text{———(式2)} \\ X_1\le\frac{2}{5}R & \text{———(式1)} \end{cases}$$

$$(\text{式 }n')-(n-1)\times(\text{式 }n-1)-\ldots\ldots-2\times(\text{式 }2)-(\text{式 }1)$$

$$\Rightarrow nX_n=\frac{2R}{5}$$

$$\Rightarrow X_n=\frac{2R}{5n}$$

故得証

由這項証明，我們可以得到以下定理：

> [定理 5]：當我們以對稱的積木從下方進行水平堆疊時，且當支點到質心的距離：質心到端點的距離比爲 3：2 時，若第 n 塊間距爲 X_n ，則 $X_n=\frac{2R}{5n}$ 。

討論 4：當質心的位置將對稱軸長分爲 2：3

此時將堆疊的方向相反，即支點到質心的距離：質心到端點的距離比爲 2：3。

情況一：當堆疊第一塊積木時，其最大間距 X_1 爲何？

$$m(X_1+\frac{2}{5}R)\le mR$$

$$\Rightarrow X_1\le\frac{3}{5}R \qquad ------(\text{式}1)$$

情況二：當堆疊第二塊積木時，第二塊積木所能夠允許的最大間距 X_2 爲何？

$$m(X_1+X_2+\frac{2}{5}R)+m(X_2+\frac{2}{5}R)\le 2mR$$
$$\Rightarrow X_1+X_2+\frac{2}{5}R+X_2+\frac{2}{5}R\le 2R$$
$$\Rightarrow X_1+2X_2\le\frac{6}{5}R \qquad ------(式2')$$
$$\begin{cases} X_1+2X_2\le\frac{6}{5}R & ------(式2') \\ X_1\le\frac{3}{5}R & ------(式1) \end{cases}$$
$$(式2')-(式1)$$
$$\Rightarrow 2X_2\le\frac{3}{5}R$$
$$\Rightarrow X_2\le\frac{3}{10}R \qquad ---------(式2)$$

我們將上述二個情況，整理如下(表 6)，並大膽的假設當我們以對稱的積木從下方進行水平堆疊時，且當支點到質心的距離：質心到端點的距離比為 2：3 時，若第 n 塊間距為 X_n，則 $X_n=\frac{3R}{5n}$。

疊堆個數	1	2	3	4	……	N
距離	$\frac{3R}{5}$	$\frac{3R}{10}$	$\frac{1}{5}R$	$\frac{3}{20}R$	……	$\frac{3R}{5n}$

(表 6)

【推論】當我們以對稱的積木從下方進行水平堆疊時，且當支點到質心的距離：質心到端點的距離比為 2：3 時，若第 n 塊間距為 X_n，則 $X_n=\frac{3R}{5n}$。

證明：

$$m(X_n+X_{n-1}+...+X_2+X_1+\frac{2}{5}R)+m(X_n+X_{n-1}+...+X_2+\frac{2}{5}R)+..m(X_n+\frac{2}{5}R)\le nmR$$
$$\Rightarrow(X_n+X_{n-1}+...+X_2+X_1+\frac{2}{5}R)+(X_n+X_{n-1}+...+X_2+\frac{2}{5}R)+...+(X_n+\frac{2}{5}R)\le nR$$
$$\Rightarrow nX_n+(n-1)X_{n-1}+.....+2X_2+X_1\le\frac{3n}{5}R \qquad --(式n')$$

$$\begin{cases} nX_n+(n-1)X_{n-1}+.....+2X_2+X_1\le\frac{3n}{5}R & --(式n') \\ X_{n-1}\le\frac{3}{5n-5}R & --(式n-1) \\ \vdots & \\ X_2\le\frac{3}{10}R & --(式2) \\ X_1\le\frac{3}{5}R & ---(式1) \end{cases}$$

$$(式n')-(n-1)\times(式n-1)-......3\times(式3)-2\times(式2)-(式1)$$

$$\Rightarrow nX_n=\frac{3}{5}R$$

$$\Rightarrow X_n=\frac{3R}{5n}-------(式 n)$$

故得證

由這項証明，我們可以得到以下定理：

> [定理 6]：當我們以對稱的積木從下方進行水平堆疊時，且當支點到質心的距離：質心到端點的距離比為 2：3 時，若第 n 塊間距為 X_n，則 $X_n=\frac{3R}{5n}$ 。

討論 5：當質心的位置將對稱軸分為 a：b

我們將上面的例子整理成如下的表格，並且大膽的猜測，若質心所在的位置將對稱軸的長度分為 a：b，此時的 a：b 為支點到質心的距離：質心到邊界的距離，所得到的堆疊的規則應為 $\frac{bR}{n(a+b)}$ 。

質心比	1：2	2：1	3：2	2：3	a：b
個數	距離	距離	距離	距離	距離
1	$\frac{2}{3}R$	$\frac{1}{3}$R	$\frac{2}{5}R$	$\frac{3R}{5}$	$\frac{bR}{(a+b)}$
2	$\frac{R}{3}$	$\frac{R}{6}$	$\frac{2}{10}R$	$\frac{3R}{10}$	$\frac{bR}{2(a+b)}$
3	$\frac{2R}{9}$	$\frac{R}{9}$	$\frac{2}{15}R$	$\frac{3}{15}R$	$\frac{bR}{3(a+b)}$
：	：	：	：		：
N	$\frac{2R}{3n}$	$\frac{R}{3n}$	$\frac{2}{5n}R$	$\frac{3R}{5n}$	$\frac{bR}{n(a+b)}$

(表 7)

【推論】若質心所在的位置將高的長度分為 a：b，此時的 a：b 為支點到質心的距離：質心到邊界的距離，所得到的堆疊的規則應為 $\frac{bR}{n(a+b)}$ 。

證明：

$$m(X_1+X_2+\dots+X_n+\frac{aR}{a+b})+m(X_2+X_3+\dots+X_n+\frac{aR}{a+b})+\dots+m(X_n+\frac{aR}{a+b})\le mn$$

$$\Rightarrow (X_1+X_2+\dots+X_n+\frac{aR}{a+b})+(X_2+X_3+\dots+X_n+\frac{aR}{a+b})+\dots+(X_n+\frac{aR}{a+b})\le n$$

$$\Rightarrow nX_n+(n-1)X_{n\text{-}1}+(n-2)X_{n-2}+\dots+3X_3+2X_2+X_1\le\frac{bRn}{a+b}\quad ----------(\text{式 } n')$$

$$\begin{cases} nX_n+(n-1)X_{n\text{-}1}+(n-2)X_{n-2}+\dots+3X_3+2X_2+X_1\le\dfrac{bRn}{a+b} & ----------(\text{式 } n') \\ \quad\vdots & \\ X_2\le\dfrac{bR}{2(a+b)} & -----------------(\text{式 } 2) \\ X_1\le\dfrac{bR}{a+b} & -----------------(\text{式 } 1) \end{cases}$$

$X_n\le\dfrac{bR}{(a+b)n}$　　　　故得證

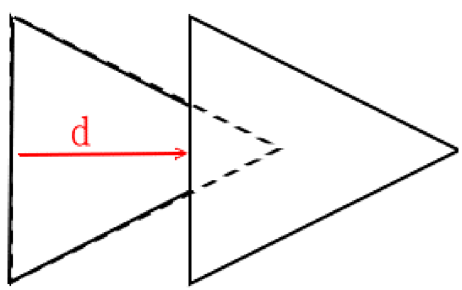
由這項證明，我們可以得到以下定理：

> [定理 7]：當我們以正三角形積木從下方進行水平堆疊時，且當原點到質心的距離：質心到端點的距離比爲 a：b 時，若第 n 塊間距爲 X_n，則 $X_n=\dfrac{bR}{(a+b)n}$。

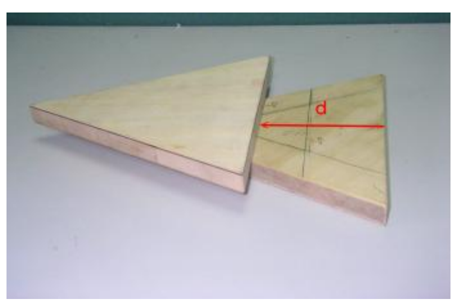
(四)、探討某些積木，即便該積木符合對稱幾何圖形，在重心位置可能有變且固定間距的情況之下，我們所能夠允許的最大數目。

討論 1：當支點在三角形的底邊時

> 情況一：當堆疊距離固定爲 d=$\dfrac{2R}{3}$ 時，則最大堆疊數 X_1 爲多少？



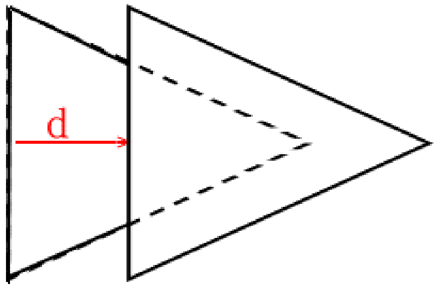
(圖 16)



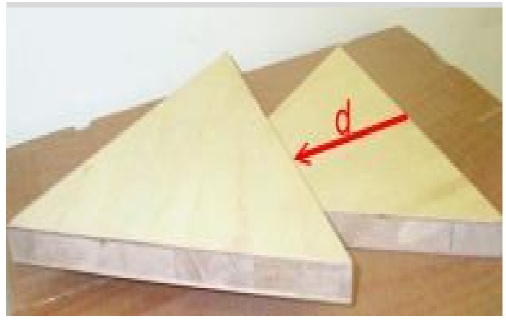
(圖 16-1)

$$m(\frac{2R}{3}+\frac{R}{3})$$
$$=mR$$
$$\Rightarrow X_1\le 1$$

情況二：當堆疊距離固定為 d=$\frac{R}{2}$時，則最大堆疊數 X_2為多少？



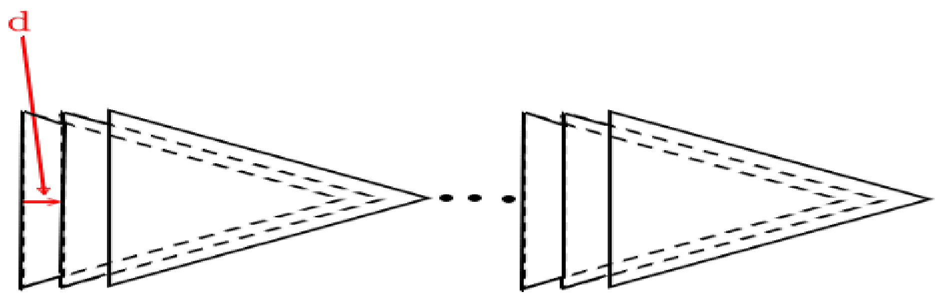
(圖 17)



(圖 17-1)

$$(1) m(\frac{R}{2}+\frac{R}{3})$$
$$=\frac{5mR}{6}\leq mR$$
$$(2) m(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+\frac{R}{3})+m(\frac{R}{2}+\frac{R}{3})$$
$$=\frac{8mR}{6}+\frac{5mR}{6}$$
$$=\frac{13mR}{6}\geq 2mR(\text{倒塌})$$
$$\Rightarrow X_2\leq 1$$

假設固定間距為 d 時，最多可以堆疊 p 塊積木，則二者的關係如下：



(圖 18)

$$m(pd+\frac{R}{3})+m[(p-1)d+\frac{R}{3}]+m[(p-2)d+\frac{R}{3}]+\cdots+m(d+\frac{R}{3})\leq mpR$$
$$\Rightarrow [pd+(p-1)d+(p-2)d+\cdots+d]+\frac{pR}{3}\leq pR$$
$$\Rightarrow [pd+(p-1)d+(p-2)d+\cdots+d]\leq\frac{2pR}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{p(p+1)}{2}d \le \frac{2pR}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(p+1)d}{2} \le \frac{2R}{3}$$

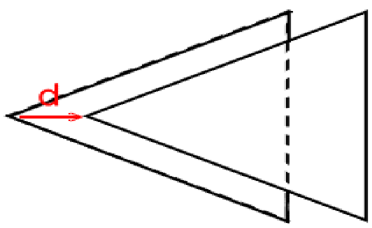
$$\Rightarrow (p+1)d \le \frac{4R}{3}$$

$$\Rightarrow p+1 \le \frac{4R}{3d}$$

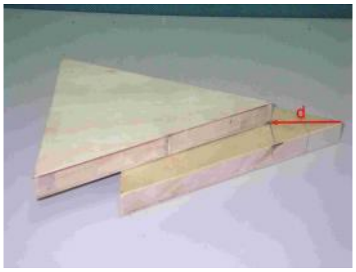
$$\Rightarrow p \le \frac{4R}{3d} - 1$$

討論 2：當支點在三角形的頂點時

情況一：當堆疊距離固定爲 d=$\frac{R}{3}$時，則最大堆疊數 Y_1 爲多少？



(圖 19)

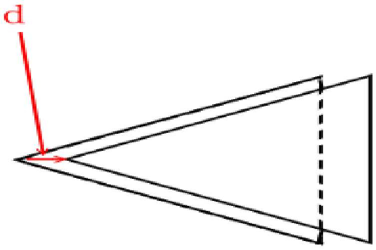


(圖 19-1)

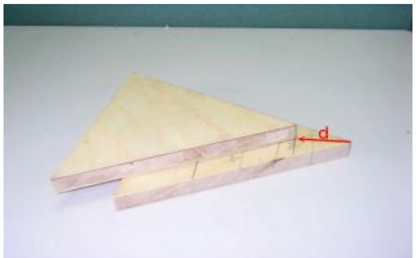
$$m(\frac{R}{3}+\frac{2R}{3}) = mR \le mR$$

$$\Rightarrow Y_1 \le 1$$

情況二：當堆疊距離固定爲 d=$\frac{R}{4}$時，則最大堆疊數 Y_2 爲多少？



(圖 20)



(圖 20-1)

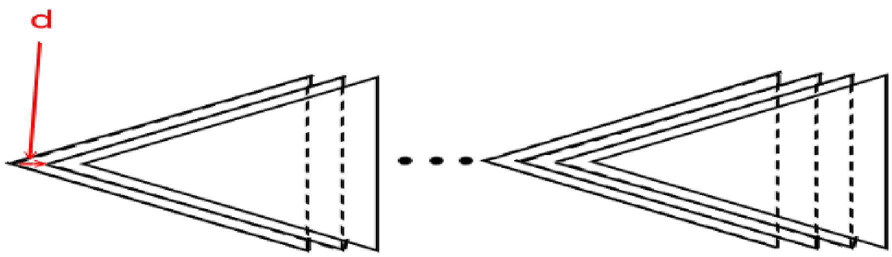
$$(1) m(\frac{R}{4}+\frac{2R}{3}) = \frac{11mR}{12} \le mR$$

$$(2)\ m(\frac{R}{4}+\frac{R}{4}+\frac{2R}{3})+m(\frac{R}{4}+\frac{2R}{3})$$

$$=\frac{25mR}{12}\text{(倒塌)}$$

$$\Rightarrow Y_2 \le 1$$

假設固定間距爲 d 時，最多可以堆疊 p 塊積木，則二者的關係如下：



(圖 21)

$$m(pd+\frac{2R}{3})+m[(p-1)d+\frac{2R}{3}]+m[(p-2)d+\frac{2R}{3}]+\cdots+m(d+\frac{2R}{3})\le mpR$$

$$\Rightarrow [pd+(p-1)d+(p-2)d+\cdots+d]+\frac{2pR}{3}\le pR$$

$$\Rightarrow [pd+(p-1)d+(p-2)d+\cdots+d]\le \frac{pR}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{p(p+1)}{2}d\le\frac{pR}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(p+1)}{2}d\le\frac{R}{3}$$

$$\Rightarrow (p+1)d\le\frac{2R}{3}$$

$$\Rightarrow p+1\le\frac{2R}{3d}$$

$$\Rightarrow p\le\frac{2R}{3d}-1$$

【推論】藉由以上的討論，我們猜測若(原點至質心的距離)：(質心至邊界的距離)=a：b，

則積木所能夠堆疊的最大數目 $p\le\frac{2b}{a+b}\times\frac{R}{d}-1$

證明：

$$m[pd+\frac{a}{a+b}R]+m[(p-1)d+\frac{a}{a+b}R]+m[(p-2)d+\frac{a}{a+b}R]+\cdots+m[d+\frac{a}{a+b}R]\le m\,pR$$

$$\Rightarrow [p+(p-1)+(p-2)+\cdots+1]d+\frac{a}{a+b}pR\le pR$$

$$\Rightarrow [\frac{(p+1)p}{2}]d\le\frac{b}{a+b}pR$$

$$\Rightarrow (p+1)d\le\frac{2b}{a+b}R$$

$$\Rightarrow p+1\le\frac{2b}{a+b}\times\frac{R}{d}$$

$$\Rightarrow p\le\frac{2b}{a+b}\times\frac{R}{d}-1$$

由這項証明，我們可以得到以下定理：

[定理 8]：設積木符合對稱幾何圖形，在重心位置可能有變(如正三角形的質心位於高的 $\frac{2}{3}$ 處)且固定間距的情況之下，若 (原點至質心的距離)：(質心至邊界的距離)= a：b，則積木所能夠堆疊的最大數目 p $\le\frac{2b}{a+b}\times\frac{R}{d}-1$ 爲我們所能夠允許的最大數目。

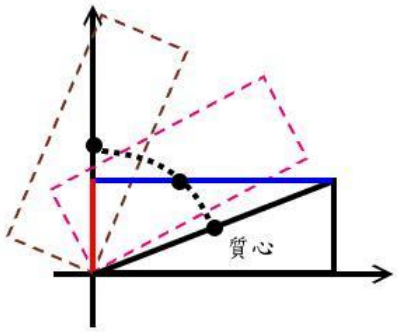
二、定點旋轉：

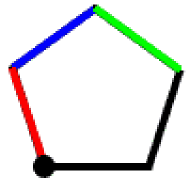
(一) 以正方形積木的一個頂點爲旋轉點進行旋轉，每增加一塊積木時，能允許的最大角度。

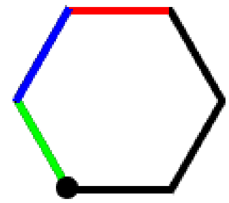
於上述的討論皆以水平移動爲主軸，故只需要討論一個邊的力矩平衡即可。若固定某一個頂點爲旋轉點進行旋轉，而堆疊積木進行逆時針方向旋轉。然而在這個議題的討論下，不同的圖形所要考慮的邊所造成的力矩平衡也將會不同 。

由下圖說明，堆疊積木進行逆時針方向旋轉 ，以原點爲旋轉點所在。以長方形爲例(圖 22)，令我們所堆疊的積木其整體的質心位置我們稱他爲共質心 ，其共質心只要不超過紅色及藍色的邊即可；對於五邊形(圖 22-1)，其共質心只要不超過紅 、藍、綠色的邊；而六邊形(圖 22-2)上堆疊的積木所造的共質心不要超過紅 、藍、綠三邊就可以了。換言之，n 多邊形所要考慮不行超過的邊爲 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ 個。

對於物體的旋轉而言，其質心的移動不單單只有水平部分，同時還包含了垂直的部分。爲了讓旋轉的堆疊討論更有結構性，我們將正方形積木的旋轉討論放置於直角坐標系中，支點(軸)定於原點(0,0)，水平的部分利用 X 軸的坐標進行觀察，而垂直的部分則利用 Y 軸來表示，並且利用三角函數所定義的標準象限角來討論。

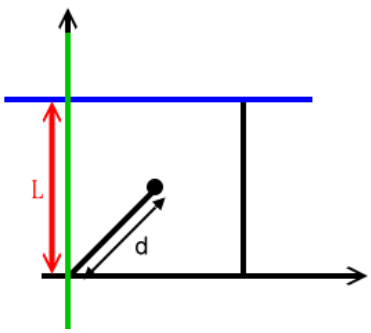


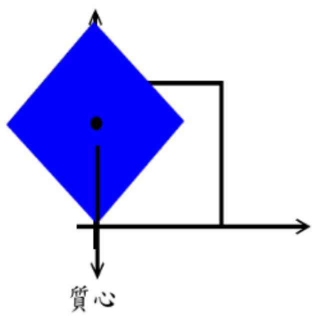


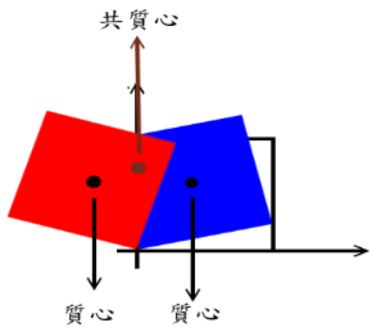


(圖 22)　　　　(圖 22-1)　　　　(圖 22-2)

當我們進行正方形旋轉時，在旋轉過程中，堆疊積木的共同質心不能夠超越最上面的那條線(藍色線)，並且也不能超越左邊那條線(綠色線)，如圖(23)所示。也就是說質心到原點的長度(d)不能大於 L，否則將會倒塌。然而，在旋轉時會產生的水平力矩以及垂直力矩，因正方形質心到原點距離長度必小於邊長 L，故在旋轉的過程中，垂直方向不會超過藍色的邊界。因此以下的正方形旋轉皆不考慮垂直力矩，僅就水平力矩加以判斷。



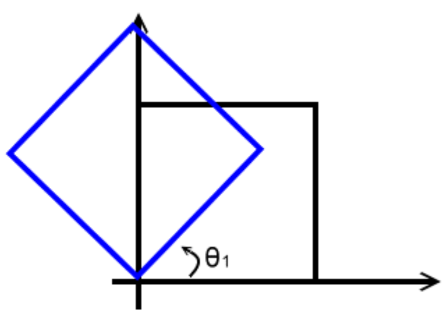




(圖 23)　　　　(圖 24)　　　　(圖 24-1)

在正方形積木中，其質心位於中心，也就是位於 45 度角位置上。當我們進行旋轉時，只要堆疊的積木，其共質心在 45 度~90 度以內(包含 90 度)(圖 24)皆可達成平衡而不倒場（圖 24-1）。

情況一：當堆疊第一塊積木時，其所能夠旋轉的最大角度 θ_1 爲多少？



(圖 25)　　　　(圖 25-1)

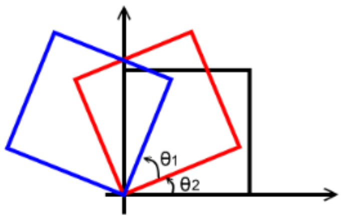
$$m \times \cos(45^\circ + \theta_1) \ge 0$$

$$\Rightarrow \cos(45^\circ + \theta_1) \ge 0 = \cos(90^\circ)$$

$$\Rightarrow (45^\circ + \theta_1) \le 90^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_1 \le 45^\circ \quad ---------- (式1)$$

情況二：當堆疊第二塊積木時，該積木所能夠旋轉的最大角度θ_2爲多少？



(圖 26)

(圖 26-1)

$$m \times [\, \cos(45^\circ + \theta_1 + \theta_2) + \cos(45^\circ + \theta_2) \,] \ge 0$$

$$\Rightarrow \cos(45^\circ + \theta_1 + \theta_2) + \cos(45^\circ + \theta_2) \ge 0$$

令$\theta_1 = 45^\circ$

$$\cos(90^\circ + \theta_2) + \cos(45^\circ + \theta_2) \ge 0$$

$$\Rightarrow -\sin(\theta_2) + \cos(45^\circ + \theta_2) \ge 0$$

$$\Rightarrow \cos(45 + \theta_2) \ge \sin(\theta_2)$$

$$\Rightarrow \sin(45^\circ - \theta_2) \ge \sin(\theta_2)$$

$$\Rightarrow 45^\circ - \theta_2 \ge \theta_2$$

$$\therefore \theta_2 \le 22.5^\circ$$

當堆疊第三塊積木之後，所得到的角度就無特定的規則呈現，利用程式將角度的呈現。(圖 27)

(圖 27)

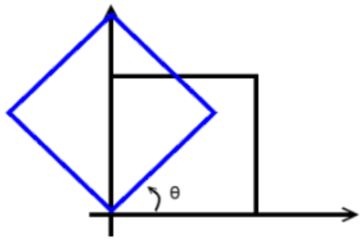
(二)以正方形積木的一個頂點為支點(軸)進行旋轉，當我們固定旋轉角度時，所能夠允許的最大堆疊量。

情況一：當旋轉角度 θ 定為 $45^\circ(\frac{\pi}{4})$時，其所能夠堆疊的最大數量為多少？

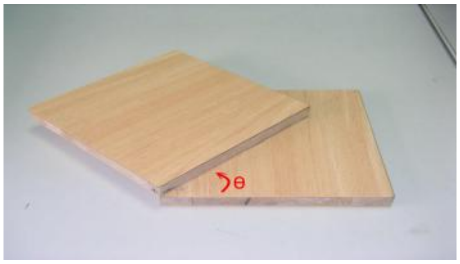
(1) $\cos(45^\circ+45^\circ)\geq 0 \rightarrow$ 堆疊一塊

(2) $\cos(45^\circ+45^\circ+45^\circ)+\cos(45^\circ+45^\circ)\geq 0$

$\Rightarrow -\sin 45^\circ \geq 0$ (不合) $\rightarrow$ 倒塌

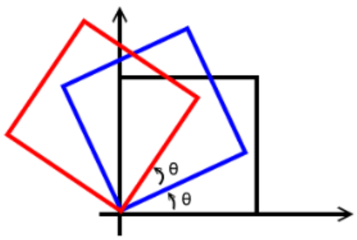


(圖 28)



(圖 28-1)

情況二：當旋轉角度 θ 定為 $30^\circ(\frac{\pi}{6})$時，其所能夠堆疊的最大數量為多少？



(圖 29)

(圖 29-1)

(1) $\cos(30^\circ+45^\circ)\geq 0$
$\Rightarrow \sin 15^\circ \geq 0$ $\rightarrow$ 堆疊一塊

(2) $\cos(30^\circ+30^\circ+45^\circ)+\cos(30^\circ+45^\circ)\geq 0$
$\Rightarrow -\sin 15^\circ+\sin 15^\circ \geq 0$ $\rightarrow$ 堆疊二塊

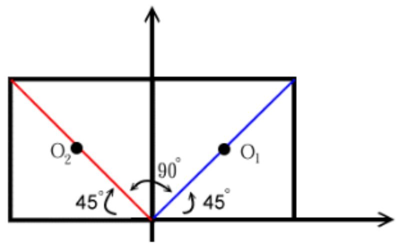
(3) $\cos(30^\circ+30^\circ+30^\circ+45^\circ)+\cos(30^\circ+30^\circ+45^\circ)+\cos(30^\circ+45^\circ)\geq 0$

$\Rightarrow -\sin 45^\circ-\sin 15^\circ+\sin 15^\circ \geq 0$

$\Rightarrow -\sin 45^\circ \geq 0$ (不合) $\rightarrow$ 倒塌

【推論】若旋轉角度固定為 θ，且所能夠旋轉堆疊的積木為 n 個，則 $(n+1)\theta \leq 90^\circ$。

證明：



(圖 30)

在旋轉堆疊正方形積木時，正方形積木一開始質心位於 45°，且當旋轉堆疊到質心位於 O $_2$ (135°)的地方則它們的共同質心會在 Y 軸上而達成平衡，所以我們可以得知質心旋轉所能移動的範圍是在中間 90°內(亦即 180°－2×45°的範圍)，所以我們假設，在 90°範圍內旋轉角度 θ ，能夠旋轉堆疊的積木爲 n 個，而角度爲 n+1 個間距，可以得知 $(n+1)\theta \le 90^\circ$ 。

故我們得到以下定理：

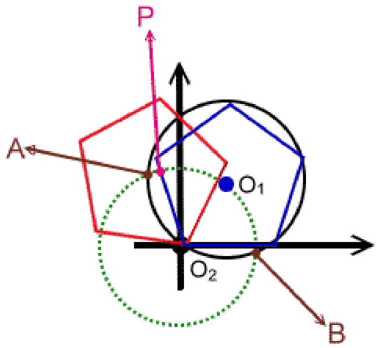
[定理 9]：以正方形積木討論固定一頂點爲支點(軸)進行旋轉時，若旋轉的角度大小爲 θ ，最大堆疊個數爲 n，則 θ 與 n 的關係式爲 $(n+1)\theta \le 90^\circ$ 。

(三)探討某些積木，即便該積木符合對稱幾何圖形，在重心位置可能有變的情況之下，旋轉角度與積木個數之間的關係。

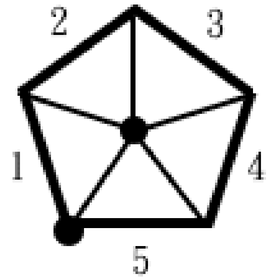
若是堆疊的形狀爲長方形，在質心距離原點的距離不會大於 Y 軸上的邊長的情況下，其旋轉的角度 θ ，最大的堆疊數爲 n，其關係式改爲 $(n+1)\theta \le 180^\circ - 2\alpha$ ，其中 α 爲長方形質心與原點之連線與 X 軸正向之夾角。

(四)探討以正多邊形固定一頂點爲支點進行旋轉時，當我們固定旋轉角度時，所能夠允許的最大堆疊量。

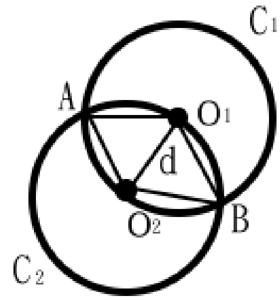
爲了方便說明概念，我們以正五邊形爲例，如（圖 31）所示，當固定頂點 O_2 爲旋轉點時，所堆疊在上面的積木重心所形成的即爲綠色的圓弧形，而 p 點即爲臨界點，依據前面所利用的概念(長方形固定旋轉角的討論)，而 $\angle PO_1O_2$ 就是決定堆疊量的重要因素，因此，以下兩個情況即爲對臨界點 P 的討論，(1)對於不同的正多邊形，P 點出現在位置爲何？(2) $\angle PO_1O_2$ 該如何取得？



(圖 31)



(圖 31-2)



(圖 31-3)

討論 1：任一正 m 多邊形以某頂點爲旋轉點進行逆時針方向旋轉時，以此旋轉點爲開頭，以順時針方向對邊進行編號，如(圖 31-2)，分別爲 $1,2,\cdots,m$，則臨界點 p 所在的邊爲第$\left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil$個。

證明：

任一正多邊形當中，都存在一個外接圓(C_1)，而其正多邊形的重心位置恰位於外接圓的圓心(O_1)上，設外接圓的半徑爲 r，如(圖 31-3)。將正多邊形放置於直角坐標系中，使頂點位於原點上，而其中一邊重疊於 x 軸上。因此，這些堆疊在上面的正多邊形其質心所成的軌跡，即形成圓 C_2 的部分弧長，此圓以原點爲圓心，r 爲半徑所成的圓。設兩圓 C_1 及 C_2 的交點爲 A、B，連接 $\overline{AO_1}$ 、 $\overline{BO_1}$ 、 $\overline{AO_2}$ 、 $\overline{BO_2}$ 及 $\overline{O_1O_2}$

$\because \overline{O_1A} = \overline{O_1B} = \overline{O_1O_2} = r$ 爲圓 O_1 的半徑

且 $\overline{O_2A} = \overline{O_2B} = \overline{O_2O_1} = r$ 爲圓 O_2 的半徑

$\therefore \overline{O_1A} = \overline{O_1B} = \overline{O_1O_2} = \overline{O_2A} = \overline{O_2B} = r$

$\Rightarrow \Delta O_1AB$ 及 ΔO_2AB 爲正三角形

因此 $\angle PO_1O_2 \geq \angle AO_1O_2 = 60°$

利用以上結果我們將問題簡化爲 P 應位於那個邊使得 $\angle \mathrm{PO_1O_2} \leq 60^\circ$

設 x 爲臨界點所在邊的編號

$$\frac{360°}{m} \times X \geq 60° \Rightarrow X \geq \frac{m}{6}$$

故得證

在我們得到通過邊的關係之後，就是第二個問題，$\angle PO_1O_2$ 該如何取得？，以下分爲兩種情況討論，一爲當 $m = 6k$ 及 $m \neq 6k, k \in \mathrm{N}$

討論 2－1：對於任一正多邊形其邊數為 m，若 $m=6k, k\in \mathrm{N}$，其固定旋轉的角度 θ，最大的堆疊數為 n，關係式為 $(n+1)\theta \le 2\beta$，其中 $\beta = \dfrac{180^\circ(m-2x)}{2m}$，x 為臨界點所在邊的編號

證明：

當 m=6k 時，重心形成的軌跡會通過多邊形的頂點，因此所得到 β 角的取得為

$$\frac{(m-2)180^\circ}{2m}-\frac{1}{2}\left[(x-1)180^\circ-\frac{(x-1)(m-2)180^\circ}{m}\right]$$
$$=\frac{(m-2)180^\circ}{2m}-\left[\frac{m(x-1)180^\circ-(x-1)(m-2)180^\circ}{2m}\right]$$
$$=\left(\frac{(m-2)180^\circ-180^\circ(x-1)[m-m+2]}{2m}\right)=\left(\frac{(m-2)180^\circ-180^\circ(x-1)2}{2m}\right)$$
$$=\left(\frac{180^\circ[(\mathrm{m}-2)-2(x-1)]}{2m}\right)=\left(\frac{180^\circ(m-2x)}{2m}\right)$$

將前面所提及長方形的旋轉的概念用於此，即可得上述的關係式

討論 2－2：對於任一正多邊形的邊數為 m，若 $6k<m<6(k+1), k\in \mathrm{N}$，其固定旋轉的角度為 θ，最大的堆疊數為 n，關係式為 $(n+1)\theta \le 2\beta$，其中 $\dfrac{180°(6k-x-1)}{6k}<\beta<\dfrac{180°(6k-x+5)}{6(k+1)}$，x 為臨界點所在邊的編號

證明：

由討論二－1 中知，當 $\mathrm{m}\ne 6\mathrm{k}, \mathrm{k}\in \mathrm{N}$時，所求得的 β 為近似值而 $\dfrac{180°(6k-x-1)}{6k}<\beta<\dfrac{180°(6k-x+5)}{6(k+1)}$，因此在我們採用內插法求得逼進值。

《利用內插法求近似值》令 $h=m-6k, h\in N$

$$\left(\frac{180^\circ(m-x-1)}{2m}\right)+\left[\frac{180^\circ(m-x+5)}{2m}-\frac{180^\circ(m-x-1)}{2m}\right]\frac{h}{6}$$
$$=\left(\frac{180^\circ(m-x-1)}{2m}\right)+\left[\frac{180^\circ(m-x+5-m+x+1)}{2m}\right]\frac{h}{6}$$
$$=\left(\frac{180^\circ(m-x-1+h)}{2m}\right)$$

討論至此我們得到兩項結論：

一、任正多邊形以某定點進行旋轉時，其所通過邊的編號為$\left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil$

二、其所得到堆疊個數關係為 $(n+1)\theta \le 2\beta$ ，若 $m = 6k, k \in N$ ，則

$\beta = \frac{180^\circ(m-2x)}{2m}$ ，若 $m \ne 6k, k \in N$ 時， $\frac{180^\circ(6k-x-1)}{6k} < \beta < \frac{180^\circ(6k-x+5)}{6(k+1)}$

陸、 討論與結論

在我們的研究過程中，我們得到了下列結果：

一、當我們以對稱的積木進行水平方向的堆疊，在不固定間距的情況下，我們得到三個關係式：

(一)當我們設定(支點到質心的距離)：(質心到端點的距離)的比為 a：b 時，則

$X_n = \frac{aR}{(a+b)n}$，其中 X_n 代表第 n 個堆疊積木間距的最大值，R 為對稱軸的長度。

(二) X_1 與 X_n 的關係(首項與末項的關係)：當我們設定質心比為 a：b 時，即第 1 個堆疊積木的間距值為 $X_1 = \frac{a}{a+b}R$ ，則第 n 個堆疊積木的間距值必為

$X_n = \frac{a}{a+b}R \times \frac{1}{n}$ 。

(三) X_m 與 X_{m+1} 的關係(前後項差異的關係)：當我們設定質心比為 a：b 時，即第 m 個堆疊積木的間距值為 $X_m = \frac{a}{a+b}R \times \frac{1}{m}$ ，則第 m+1 個堆疊積木的間距值必為

$X_{m+1} = X_m \times \frac{m}{m+1}$ 。

二、當我們以對稱的積木進行水平方向的堆疊，在固定間距的情況下，若設定(支點到質心的距離)：(質心到端點的距離)的比為 a：b 時，堆疊上去的積木最大值為 p，則

$p \le \frac{2b}{a+b} \times \frac{R}{d} - 1$ ，其中 R 為對稱軸的長度，d 為間距長度

三、當我們以對稱的積木進行固定點以逆時針方向旋轉時，在不固定角度的情況下，我們利用程式的結果，得到了它不具有規則性的結果。

四、但是，當我們以矩形的積木進行固定點以逆時針方向旋轉時，在固定角度且 d≤L 的情況下，其中 d 為質心到支點的距離，L 為矩形的寬，得到下面的關係式：

$n \le \frac{180^\circ - 2\alpha}{\theta} - 1$ ，其中 n 為最大堆疊積木塊數，α 為積木質心所在的夾角，θ 為一積木固定旋轉角度。

五、延伸討論正 m 多邊形以某定點進行旋轉時，其所通過邊的編號爲$\left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil$，其所得到堆疊個數關係爲$(n+1)\theta \le 2\beta$，若$m = 6k, k \in N$，則$\beta = \frac{180^\circ(m-2x)}{2m}$，若$m \ne 6k, k \in N$時，$\frac{180^\circ(6k-x-1)}{6k} < \beta < \frac{180^\circ(6k-x+5)}{6(k+1)}$。

柒、　參考資料

一、物質科學物理篇(上) 主編：褚德三教授 龍騰出版社

二、高中數學(甲)　　編著：林福來等　　南一書局企業股份有限公司

三、高中數學第二冊　　編著：李虎雄等　　康熙圖書網路股份有限公司

四、高中數學第一冊　　編著：李虎雄等　　康熙圖書網路股份有限公司

【評　語】　　040401　你倒沒？還是我倒楣

1) 本團隊作品有四名作者，未能凸顯其團隊合作策略。

2) 本作品可以引導學習調和級數的發散性，應該強調其概念上所能引發的想像而非木工製作。

3) 部份解說可以採用電腦展示，然而卻要留意小數浮動點架構下的先天限制。