中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030424

點點滴滴～立體格子點探討

學校名稱：臺北市立敦化國民中學

作者：	指導老師：
國二 杜力明	傅淑婷
國二 周帝霖	

關鍵詞：格子點　Pick 定理

點點滴滴

壹、摘要

將原本只適用於平面的 Pick 定理：$A=N+\frac{L}{2}-1$，透過幾何圖形（包括平面、立體）的觀察及架構、座標系的輔助及代數運算的應用，一步步推廣到立體空間：先建構長方體，記錄數據後再觀察其規律，歸納出一個小公式；接著討論柱體，最後再研究錐體，嘗試找出能夠適用於任一格子點多面體的通式。

貳、研究動機

在數學課上到直角座標系時，老師補充了「Pick 定理」，讓我們可以很快的算出格子點多邊形的面積。學到了這個方法之後，我們便想要將它推廣到立體，因此，我們將立體格子點當作我們研究的主題，尋找立體格子點中規則立體或甚至任意立體的格子點通式，讓我們能夠快速地計算多面體的體積。

參、研究目的

我們想要找出立體格子點中規則立體或甚至任意立體的格子點通式。

肆、研究設備及器材

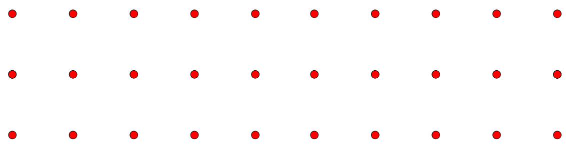
電腦（GSP）、Magnetix（磁鐵組合玩具）、紙、筆。

伍、研究過程或方法

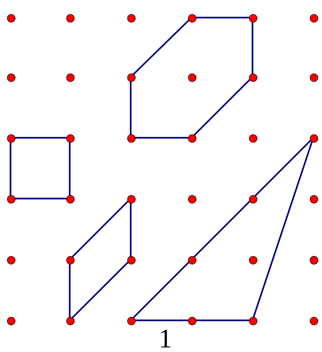
首先，我們要介紹一下我們研究的主題。因爲我們主要研究的是立體的格子點，所以必須先介紹平面格子點。

一、什麼是格子點和格子點多邊形

「格子點」是在無限大的平面上，由組成單位正方形的 4 個頂點所組成的陣列，如下圖所示。此圖案可往上下左右再無限延伸。

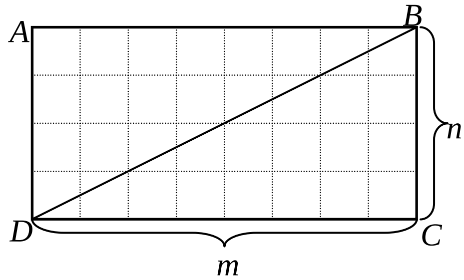


一個「格子點多邊形」就是一個頂點都在格子點上的多邊形。下圖中這些圖形都是格子點多邊形。



二、Pick 定理

Georg Alexander Pick 在 1899 年正式發表一個關於計算格子點上多邊形面積的簡易公式：$A = N + \frac{L}{2} - 1$。其中 A 爲格子點多邊形之面積，N 爲格子點多邊形內部的格子點數目，L 爲格子點多邊形邊上的格子點數目（包括頂點）。現在我們要來證明 Pick 定理。先考慮兩邊平行於座標軸的格子點矩形 $ABCD$，如右圖。假定這矩形的長寬分別是 m 和 n，容易從右圖看出，這時，面積 A、內部格子點數 N 和邊上格子點數 L 分別是



$A = mn$

$N = (m-1)(n-1)$

$L = 2(m+1) + 2(n-1) = 2(m+n)$

代入 $N + \frac{L}{2} - 1 = (m-1)(n-1) + \frac{2(m+n)}{2} - 1 = mn = A$

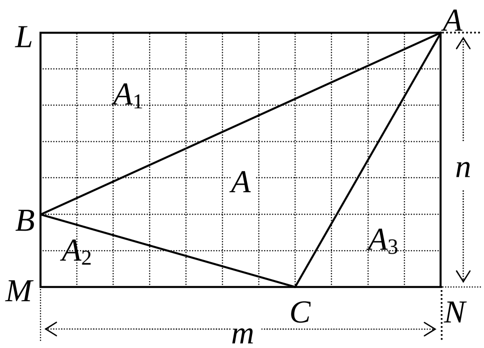
可知 $A = N + \frac{L}{2} - 1$ 對這種矩形成立。

再來討論兩腰分別和兩座標軸平行的格子點直角三角形。例如上圖中的 ΔABD 或 ΔBCD。由於圖形的對稱性，容易看出 ΔBCD 和 ΔABD 的面積，內部格子點數和邊上格子點數都是分別相等的。（事實上，如果把矩形 $ABCD$ 繞它的中心，即對角線的交點旋轉 $180°$，那麼 ΔABD 就和 ΔCDB 重合，而且格子點也都一一重合。）如果用 L_1 表示 BD 線段內部格子點數（即不包含端點的格子點數），那麼，除去這 L_1 個格子點以後，矩形內部的格子點就平均分配在 ΔABD 和 ΔBCD 的內部。又前面已經算出，矩形內部的格子點數是 $(m-1)(n-1)$，所以這兩個三角形內部都有 $N = \frac{(m-1)(n-1) - L_1}{2}$ 個格子點；又容易看出，這兩個三角形邊上的格子點數都是 $L = m + n + 1 + L_1$，而面積顯然都是 $A = \frac{mn}{2}$。因此

$$N + \frac{L}{2} - 1 = \frac{(m-1)(n-1) - L_1}{2} + \frac{m + n + 1 + L_1}{2} = \frac{mn}{2} = A$$

所以 $A = N + \frac{L}{2} - 1$ 對於這種直角三角形是正確的。

再繼續討論一般的格子點三角形。ΔABC是一個格子點三角形，如右圖。方格紙上通過三頂點的直線圍成一個矩形 $ALMN$，ΔALB、ΔBMC、ΔCNA都是直角三角形，因此都滿足 $A = N + \frac{L}{2} - 1$。現在把圖中四個三角形的面積、內部格子點數和邊上格子點數，分別用不同的記號表示出來：



三角形	面積	內部格子點數	邊上格子點數
ΔABC	A	N	L
ΔALB	A_1	N_1	L_1
ΔBMC	A_2	N_2	L_2
ΔCNA	A_3	N_3	L_3

利用前面所得到的關於矩形面積和格子點的公式，由前頁的圖容易看出：

$$A + A_1 + A_2 + A_3 = mn$$
$$N + N_1 + N_2 + N_3 + L - 3 = (m-1)(n-1)$$
$$L_1 + L_2 + L_3 - L = 2(m+n)$$

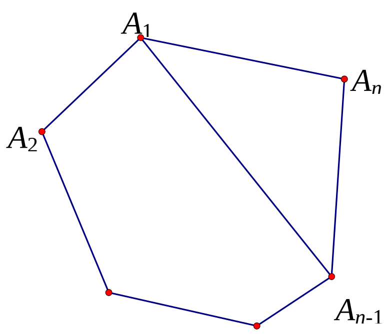
依序用1、-1、$-\frac{1}{2}$乘上式的三個式子，然後相加，就得到

$$A - \left(N + \frac{L}{2}\right) + \left[A_1 - \left(N_1 + \frac{L_1}{2}\right)\right] + \left[A_2 - \left(N_2 + \frac{L_2}{2}\right)\right] + \left[A_3 - \left(N_3 + \frac{L_3}{2}\right)\right] + 3 = -1$$

我們之前已經知道 $A = N + \frac{L}{2} - 1$對於直角三角形是成立的，因此，上式中有中括號的各項都等於-1，所以由上式得 $A - (N + \frac{L}{2}) = -1$。這表明對於格子點三角形，$A = N + \frac{L}{2} - 1$是正確的。

最後，討論一般的具有n個頂點的格子點多邊形 $A_1 A_2 \ldots A_n$，如下圖所示。我們可以用數學歸納法。當$n = 3$時，$A = N + \frac{L}{2} - 1$已經證明；現在假設這個公式對於$n-1$邊形成立，要證明公式對於n邊形也成立。連接 $A_{n-1}A_1$，我們就把這個n邊形分成一個格子點三角形和一個$n-1$邊格子點多邊形。用 A_1、A_2、A；N_1、N_2、N；L_1、L_2、L 分別表示這個三角形、$n-1$邊形和原來的n邊形的面積、內部格子點數和邊上格子點數，再用L_0表示 $A_{n-1}A_1$上的格子點數（包含A_1、A_{n-1}兩點），我們就會得到：

$$A = A_1 + A_2$$
$$N = N_1 + N_2 + L_0 - 2$$
$$L = L_1 + L_2 - 2L_0 + 2$$



因此，根據歸納法的假設

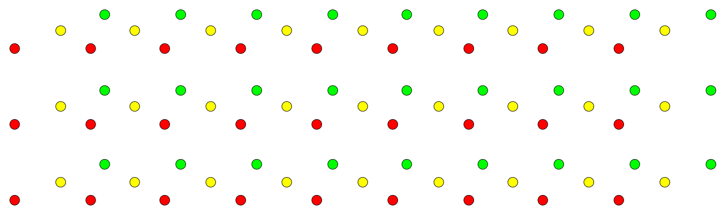
$$N+\frac{L}{2}=\left(N_1+\frac{L_1}{2}\right)+\left(N_1+\frac{L_2}{2}\right)-1=A_1+1+A_2+1-1=A+1$$

這就證明了 $A=N+\frac{L}{2}-1$ 對於 n 邊形也成立。

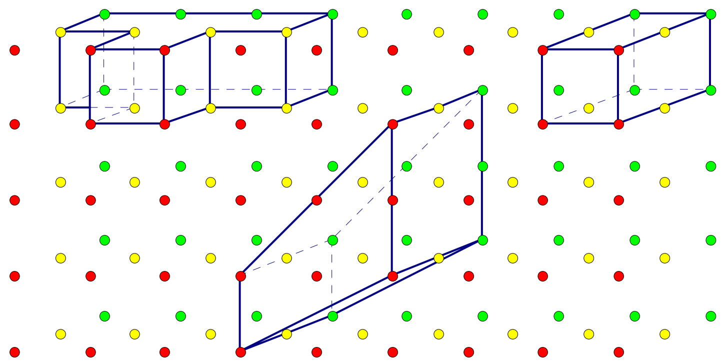
在了解 Pick 定理後，我們想要把 Pick 定理推廣至三維的空間，看看能不能也找出一個通式，並且以這個式子表示出任意立體的格子點與體積的關係。

三、什麼是立體格子點和格子點多面體

「立體格子點」是在無限大的空間內，由組成單位立方體的 8 個頂點所組成的陣列，如下圖所示。(綠色在最後排，黃色在中間，紅色在最前排)。此圖案可以往上下左右前後再無限延伸。

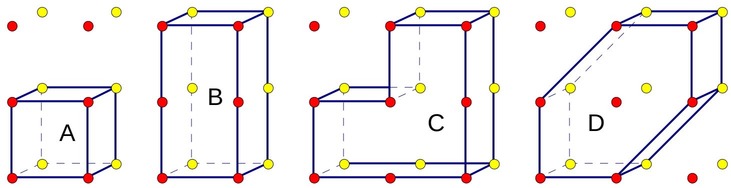


一個格子點多面體是一個所有頂點都在立體格子點上的多面體，如下圖這些多面體。



四、初步尋找立體圖形的公式

在 Pick 定理中，用到的變數是面積、內部格子點數和邊上格子點數，所以我們覺得會用到的變數就會是 Pick 定理當中用到的變數的立體版，也就是體積 Volume(V)、內部格子點數 Interior(I)、面上格子點數 Face(F)和邊上格子點數 Edge(E)。我們首先畫了很多圖形，並且試著找出它們之間的規律。

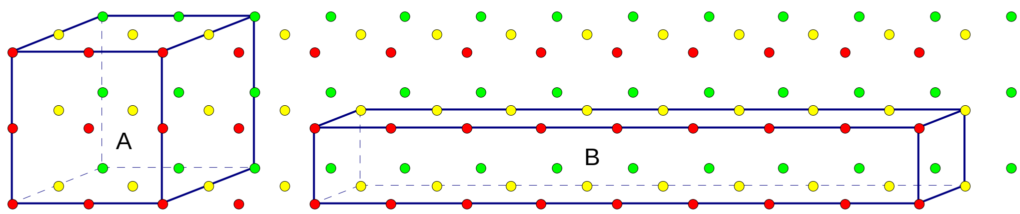


根據上述圖形，可列表如下：

	圖形 A	圖形 B	圖形 C	圖形 D
體積V	1	2	3	3
內部I	0	0	0	0
面上F	0	0	0	2
邊上E	8	12	16	12

由圖形 ABC 的數據發現，V 每多 1，E 就多 4。所以可猜測公式的其中一部份是$V=\frac{E}{4}$。再由圖形 CD 發現，F 多 2，E 就少 4，所以F 的係數會是E 的兩倍，得到$V=\frac{F}{2}+\frac{E}{4}$。但是把$V=\frac{F}{2}+\frac{E}{4}$代回去，會發現兩邊總是差 1，所以修正為$V=\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1$。

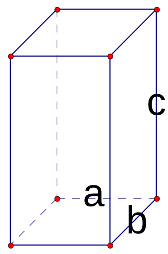
接下來就是處理I（內部）的問題了。於是我們又畫了一些圖形：



	圖形 A	圖形 B	B’
V	8	8	8
I	1	0	0
F	6	0	6
E	20	36	24

因爲之前發現F多 2，E就少 4；也就是說 2 個E可以換 1 個F。所以我們把圖形 B 的資料調整成 B'，再比較 A 和 B'，發現I多 1，E就少 4，再綜合前面的公式，得到$V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1$。可惜的是，後來發現這個公式其實只適用於長方體而已，並不是全部的立體都適用。現在我們來證明這個公式適用於長方體。

設一個長方體的三邊長分別爲a、b和c。則可推得：



$V=abc$
$I=(a-1)(b-1)(c-1)$
$F=2(a-1)(b-1)+2(a-1)(c-1)+2(b-1)(c-1)$
$E=4(a-1)+4(b-1)+4(c-1)+8$

代入$I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1$：

$=(a-1)(b-1)(c-1)+(a-1)(b-1)+(a-1)(c-1)+(b-1)(c-1)+a-1+b-1+c-1+2-1$
$=abc-ab-ac+a-bc+b+c-1+ab-a-b+1+ac-a-c+1+bc-b-c+1+a-1+b-1+c-1+1$
$=abc$
$=V$，證明完畢。

伍、尋找柱體的公式

後來，我們想到用代數的方法找公式。設以下這幾個變數：

A爲柱體底面之面積。
N爲柱體底面內部的格子點數目。
L爲柱體底面邊上的格子點數目（包括頂點）。
V爲柱體之體積。
I爲柱體內部格子點的數目。
F爲柱體各面格子點的數目。
E爲柱體邊上格子點的數目（包括頂點）。
h爲柱體的高。
n爲柱體底面的邊數。

則我們可以推得：

$V=Ah$
$I=N(h-1)$
$F=2N+(L-n)(h-1)$
$E=2L+n(h-1)$

我們先把它代入長方體公式：

$$V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1$$

$$\Rightarrow Ah=N(h-1)+\frac{2N+(L-n)(h-1)}{2}+\frac{2L+n(h-1)}{4}-1$$

$$\Rightarrow Ah=N(h-1)+N+\frac{(L-n)(h-1)}{2}+\frac{L}{2}+\frac{n(h-1)}{4}-1$$

$$\Rightarrow Ah = Nh + \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1$$

$$\Rightarrow Nh + \frac{Lh}{2} - h = Nh + \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{Lh}{2} - h = \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{Lh}{2} = \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1 + h$$

$$\Rightarrow \frac{Lh}{2} = \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} + (h-1)$$

$$\Rightarrow 2Lh = 2(L-n)(h-1) + 2L + n(h-1) + 4(h-1)$$

$$\Rightarrow 2Lh - 2L = 2(L-n)(h-1) + n(h-1) + 4(h-1)$$

$$\Rightarrow 2L(h-1) = 2(L-n)(h-1) + n(h-1) + 4(h-1)$$

$$\Rightarrow 2L = 2(L-n) + n + 4$$

$$\Rightarrow 2L = 2L - 2n + n + 4$$

$$\Rightarrow 0 = -n + 4$$

故在等號右側加上$(n-4)$使此式成爲恆等式，並逆推回去。這樣所得到的公式，一定是對所有柱體都適用的正確公式。

$$\Rightarrow 0 = -n + 4 + (n-4)$$

$$\Rightarrow 2L = 2L - 2n + n + 4 + (n-4)$$

$$\Rightarrow 2L = 2(L-n) + n + 4 + (n-4)$$

$$\Rightarrow 2L(h-1) = 2(L-n)(h-1) + n(h-1) + 4(h-1) + (n-4)(h-1)$$

$$\Rightarrow 2Lh - 2L = 2(L-n)(h-1) + n(h-1) + 4(h-1) + (n-4)(h-1)$$

$$\Rightarrow 2Lh = 2(L-n)(h-1) + 2L + n(h-1) + 4(h-1) + (n-4)(h-1)$$

$$\Rightarrow \frac{Lh}{2} = \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} + (h-1) + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{Lh}{2} = \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1 + h + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{Lh}{2} - h = \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1 + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow Nh + \frac{Lh}{2} - h = Nh + \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1 + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow Ah = Nh + \frac{(L-n)(h-1)+L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1 + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow Ah = N(h-1) + N + \frac{(L-n)(h-1)}{2} + \frac{L}{2} + \frac{n(h-1)}{4} - 1 + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow Ah = N(h-1) + \frac{2N + (L-n)(h-1)}{2} + \frac{2L + n(h-1)}{4} - 1 + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow V = I + \frac{F}{2} + \frac{E}{4} - 1 + \frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

我們現在已經知道$V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1+\frac{(n-4)(h-1)}{4}$為正確的公式，現在要盡量簡化這個式子。

已知$E=2L+n(h-1)$，所以$h-1=\frac{E-2L}{n}$。則：

$$V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1+\frac{(n-4)(h-1)}{4}$$

$$\Rightarrow V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1+\frac{(n-4)}{4}\times\frac{E-2L}{n}$$

$$\Rightarrow V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1+\frac{n}{4}\times\frac{E-2L}{n}-1\times\frac{E-2L}{n}$$

$$\Rightarrow V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1+\frac{E-2L}{4}-\frac{E-2L}{n}$$

$$\Rightarrow V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1+\frac{E-2L}{4}-(h-1)$$

$$\Rightarrow V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{4}-1+\frac{E}{4}-\frac{L}{2}-h+1$$

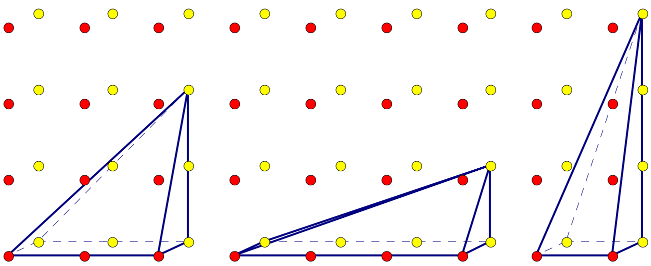
$$\Rightarrow V=I+\frac{F}{2}+\frac{E}{2}-\frac{L}{2}-h$$

$$\Rightarrow V=I+\frac{F+E-L}{2}-h$$

所以我們得到：對任何格子點柱體而言，$V=I+\frac{F+E-L}{2}-h$都是成立的。

六、尋找錐體的公式（座標）

解決了長方體和柱體之後，接下來就是要研究錐體了。我們決定先從垂直的四角錐開始研究，也就是角錐的高和角錐其中一邊平行的四角錐。舉例來說，以下這幾個圖形都是垂直的四角錐：



以下是我們列出的錐體資料。a,b 代表底面的長和寬。(因爲錐體體積是等底等高柱體的三分之一，可能出現分數，所以爲了簡化資料，將 V 用 3V 表示)

a.b	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.2	2.3	2.4	2.5	3.3	3.4	3.5	4.4	4.5	5.5
3V	1	2	3	4	5	4	6	8	10	9	12	15	16	20	25
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	6	8	9	12	16
E	5	7	9	11	13	9	10	13	15	13	15	17	17	19	21
h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

a.b	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.2	2.3	2.4	2.5	3.3	3.4	3.5	4.4	4.5	5.5
3V	2	4	6	8	10	8	12	16	20	18	24	30	32	40	50
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	2	4
F	0	0	0	1	2	1	1	5	8	2	9	11	3	17	20
E	6	9	11	13	14	13	16	17	17	18	17	20	21	21	22
h	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

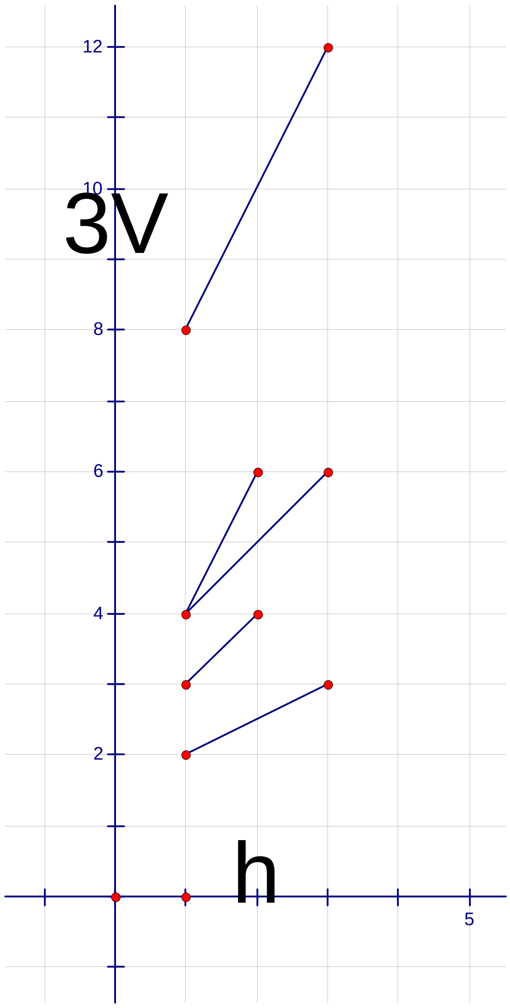
a.b	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.2	2.3	2.4	2.5	3.3	3.4	3.5	4.4	4.5	5.5
3V	3	6	9	12	15	12	18	24	30	27	36	45	48	60	75
I	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	2	2	5	7	10
F	0	1	3	3	3	3	5	7	8	8	13	15	15	19	24
E	7	9	11	13	15	11	17	15	17	21	19	21	19	21	23
h	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

a.b	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.2	2.3	2.4	2.5	3.3	3.4	3.5	4.5	5.5
3V	4	8	12	16	20	16	24	32	40	36	48	60	80	100
I	0	0	0	0	0	1	2	2	3	5	5	8	8	14
F	0	1	3	3	6	3	7	9	14	10	15	17	17	28
E	8	11	12	17	16	15	15	21	18	16	21	20	25	24
h	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

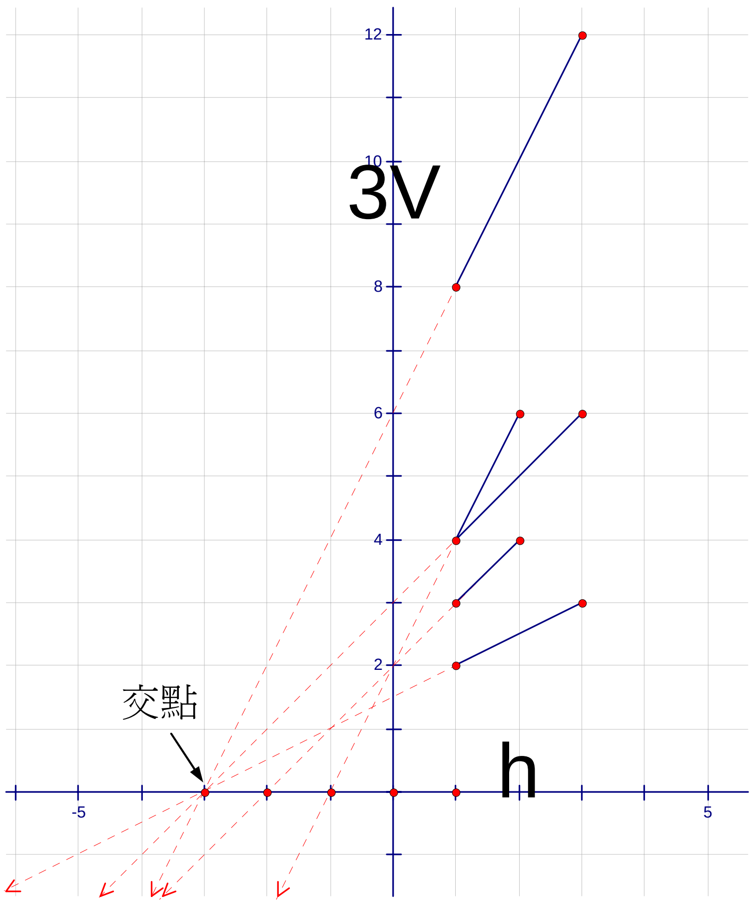
首先，我們想到：如果真的存在一個聯繫 3V、I、F、E、h 之間的關係的公式的話，若有兩個圖形的這五項數值的其中四項相同，則它們的第五項數值也一定會相同。所以我們就在以上的數據中，尋找兩個圖形，使得它們五項資料中有三項是相同的，而另外兩項是不同的，來找出這兩項數值之間的關係。舉例來說，我們現在找到

a.b	1.3	1.2
3V	3	4
I	0	0
F	0	0
E	9	9
h	1	2

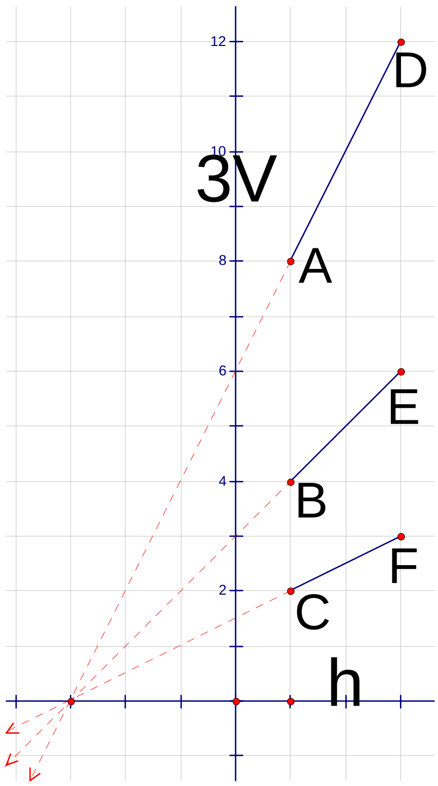
可以發現，它們的 IFE 均相同，但是 V 和 h 不同。於是我們找出數組 IFE 相同、Vh 不同的圖形，並把 3V 當縱座標、h 當橫座標，畫在座標圖上，如右所示。



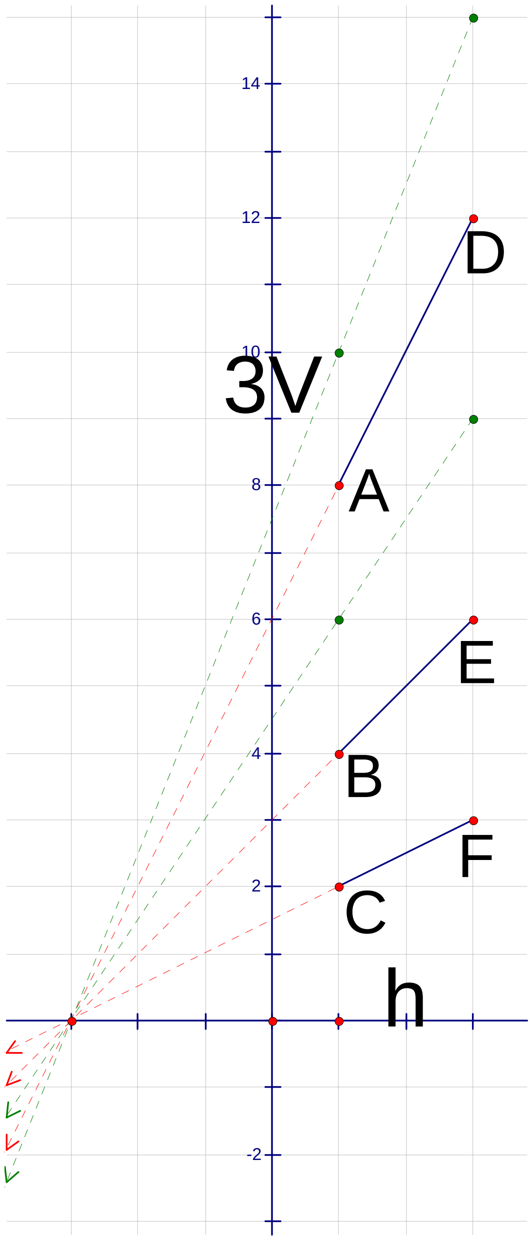
起初，我們並不知道這個座標圖代表什麼意義。但是，後來發現，將這些線段延長之後，它們與 X 軸交點的座標都是整數，而且還有多條線同時交於一點的情況發生。如下頁圖：



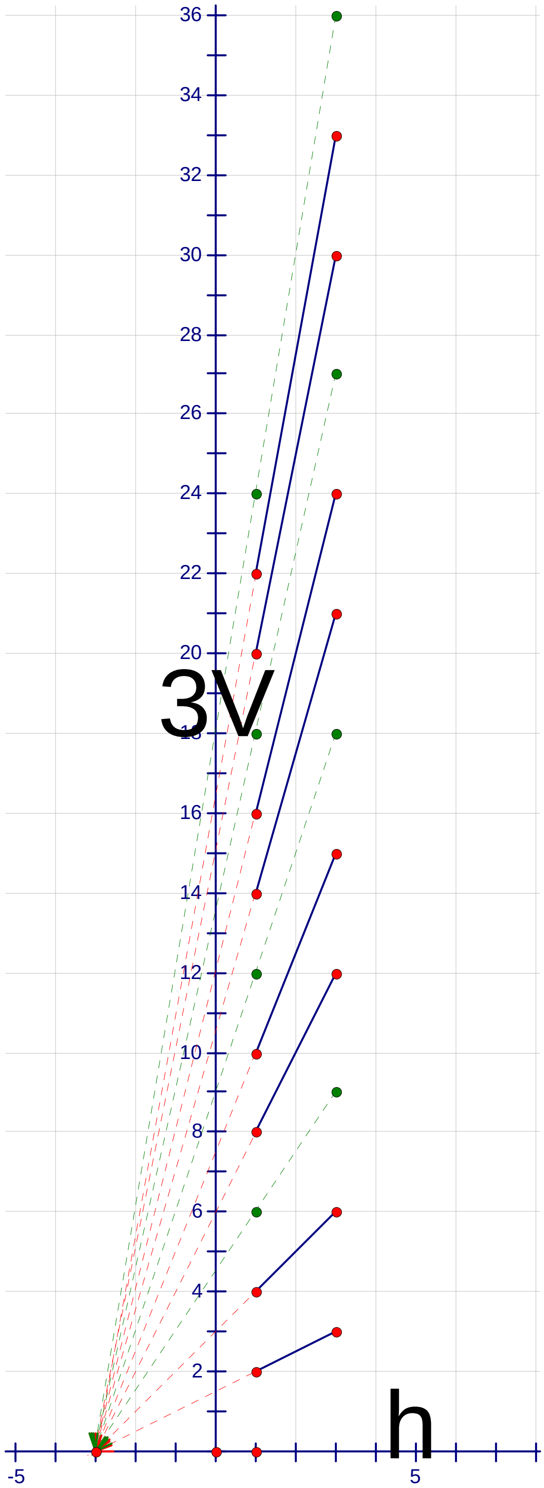
不難發現，圖中有一個三條紅虛線交會的點。於是我們便想：爲什麼會產生這樣子的交點？雖然還是想不通，但是我們把思路逆轉過來，反過來用這個交點來推出錐體的資料。於是我們先排除跟這個交點無關的點和線，結果如右圖。又發現 ABC 都位在 $h=1$ 的直線上，DEF 在 $h=3$ 直線上，而且 ABC 的 Y 座標都是偶數，同時 A 的 Y 座標是 D 的 Y 座標的 $\frac{2}{3}$，B 的 Y 座標也是 E 的 Y 座標的 $\frac{2}{3}$，CF 關係亦然。



我們試著畫出更多符合上列規律的端點和線段，綠色部分是我們自己畫出來的。但是，當我們想要驗證這個規律的時候，發現(1,10)和(3,15)這組成功，也就是說確實存在兩個 IFE 都一樣的圖形，而且其 3V 和 h 分別為 1、10 和 3、15。但是，我們卻發現並沒有符合(1,6)和(3,9)的錐體，也就是說不存在兩個 IFE 都一樣的圖形，而且其 3V 和 h 分別為 1、6 和 3、9。後來，經過幾番嘗試，又畫出了更多預測的線，這之中有些成功、有些失敗，但是我們得到了一個結論：當一個點的(3V,h)為(6n,1)（n 為正整數）時，找不到另外一個 IFE 相同，而且(3V,h)為(9n,3)的圖形。換句話說，在所有符合 3V=6n，h=1 的垂直的四角錐和 3V=9n，h=3 的垂直的四角錐中，沒有 IFE 完全相同者。下頁列出我們最後畫出的座標圖。



在右邊座標圖中，綠色的虛線與點是失敗、無法做成的；而藍色線則是成功的。我們預測接下來也會符合這個規律，但是我們不知道原因，也不知道這規律是否永遠適用。未來，我們會繼續探討這背後所隱含的意義，並且找出適用於所有圖形的公式。

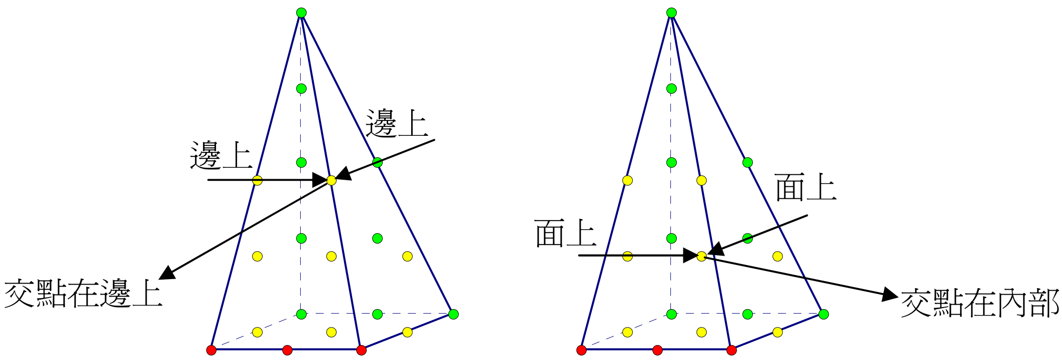


七、尋找錐體的公式（代數）

當我們研究過座標之後，我們便想試試看有沒有別種方法可以繼續研究。之前做了許多模型，也求出許多數據。在利用磁鐵棒架設模型，並算出有幾個內部格子點、面上格子點、邊上格子點的過程中，我們發現一個快速且簡便的判別法：在垂直的四角錐中，垂直的那兩面（以後簡稱側面）內部格子點延伸的交會處，會在立體的內部；內部和邊上的交點，會在立體的面上；邊上和邊上的交點，會在邊上。舉例來說：

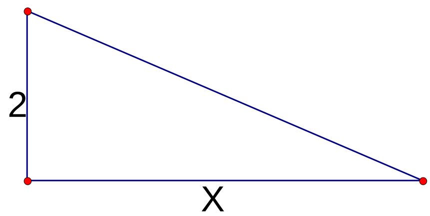
（一）高爲 1 的四角錐

我們先試著討論高爲 1 的垂直的四角錐。在這種圖形中，它內部格子點數都是 0，因爲兩個側面上都沒有面上的點。而這個圖形的總面上點數，就只有底面才會有了。所以它的 $F=(a-1)(b-1)$。而這個圖形的邊上點數，是底面的邊上點數加上垂直於底面的那一邊的邊上點數，也就是底面的邊上點數加上高。又底面的邊上點數爲 $2(a+b)$，所以它的 $E=2(a+b)+1$。



（二）高爲 2 的四角錐

接下來，觀察高爲 2 的垂直的四角錐。首先觀察其中一個側面，並列出該側面的底邊長 X 和該面上的 F、E 的關係，結果如下表：



X	1	2	3	4	5	6	7	8
F	0	0	1	1	2	2	3	3
E	0	1	0	1	0	1	0	1

發現當 X 爲奇數時，$F=\dfrac{X-1}{2}$，且 $E=0$；

當 X 爲偶數時，$F=\dfrac{X-2}{2}$，且 $E=1$。

所以把高爲 2 的公式分爲三種情況討論：

1. a,b 均為奇數，則把 a 和 b 分別代入上面的「X 為奇數」式子：

$$I=\frac{a-1}{2}\times\frac{b-1}{2}=\frac{(a-1)(b-1)}{4}$$

$$F=\frac{a-1}{2}+\frac{b-1}{2}+(a-1)(b-1)=\frac{a-1+b-1+2ab-2a-2b+2}{2}=\frac{2ab-a-b}{2}$$

$$E=2(a+b)+2$$

2. a 為奇數，b 為偶數，不只代入上式，還因為底面是 b 的那面（簡稱 B 面）斜邊上有一個點，所以還要把底面是 a 的那面（簡稱 A 面）面上的點再加一遍。

$$I=\frac{a-1}{2}\times\frac{b-2}{2}=\frac{(a-1)(b-2)}{4}$$

$$F=\frac{a-1}{2}+\frac{b-2}{2}+(a-1)(b-1)+\frac{a-1}{2}=\frac{a-1+b-2+2ab-2a-2b+2+a-1}{2}$$

$$=\frac{2ab-b-2}{2}$$

$$E=2(a+b)+3$$

3. a,b 均為偶數

$$I=\frac{a-2}{2}\times\frac{b-2}{2}=\frac{(a-2)(b-2)}{4}$$

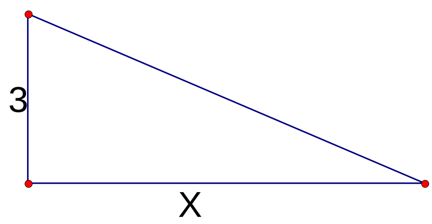
$$F=\frac{a-2}{2}+\frac{b-2}{2}+(a-1)(b-1)+\frac{a-2}{2}+\frac{b-2}{2}$$

$$=a-2+b-2+ab-a-b+1=ab-3$$

$$E=2(a+b)+4$$

（三）高為 3 的四角錐

接著，再看高為 3 的垂直四角錐。我們發現只要將同一層（同一高度）的兩側面上的面上的點數量相乘即得到內部的點數，同理其中一側面上的邊上的點數量乘以另一側面面上點數即得到面上點數……等等。所以我們在推導高為 3 的錐體公式時，不同橫截面上的面上點數由下往上分別以E_i示（i表高度，如E_1代表高度為 1 的側面上點數）；不同橫截面上的邊上點數由下往上分別以F_i示。



和討論高為 2 時一樣，我們先看單一側面的X與E_i、F_i的關係。得到下表：

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
F_1	0	1	1	2	3	3	4	5	5
E_2	0	0	1	0	0	1	0	0	1
E_1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

由上表可觀察出：（n 爲正整數）

當 X 爲 3n+1 型時，$F_2=\dfrac{X-1}{3}$ ，$F_1=\dfrac{2X-2}{3}$ ，$E_2=E_1=0$ 。

當 X 爲 3n+2 型時，$F_2=\dfrac{X-2}{3}$ ，$F_1=\dfrac{2X-1}{3}$ ，$E_2=E_1=0$ 。

當 X 爲 3n 型時，$F_2=\dfrac{X-3}{3}$ ，$F_1=\dfrac{2X-3}{3}$ ，$E_2=E_1=1$ 。

仿照前面做法，分爲 6 種情況討論。

1. a,b 均爲 3n 型

$$I=\frac{a-3}{3}\times\frac{b-3}{3}+\frac{2a-3}{3}\times\frac{2b-3}{3}=\frac{ab-3a-3b+9+4ab-6a-6b+9}{9}$$

$$=\frac{5ab-9a-9b+18}{9}=\frac{5ab}{9}-a-b+2$$

$$F=2\left(\frac{a-3}{3}+\frac{b-3}{3}+\frac{2a-3}{3}+\frac{2b-3}{3}\right)+(a-1)(b-1)$$

$$=\frac{6a+6b-24+3ab-3a-3b+3}{3}=\frac{3ab+3a+3b-21}{3}=ab+a+b-7$$

$$E=2(a+b)+3+6=2(a+b)+9$$

2. a 爲 3n 型，b 爲 3n+1 型

$$I=\frac{a-3}{3}\times\frac{b-1}{3}+\frac{2a-3}{3}\times\frac{2b-2}{3}=\frac{ab-3b-a+3+4ab-4a-6b+6}{9}$$

$$=\frac{5ab-5a-9b+9}{9}=\frac{5a(b-1)}{9}-b+1$$

$$F=\frac{a-3}{3}+\frac{2a-3}{3}+2\left(\frac{b-1}{3}+\frac{2b-2}{3}\right)+(a-1)(b-1)$$

$$=\frac{3a-6+2b-2+4b-4}{3}+(a-1)(b-1)=\frac{3a+6b-12}{3}+(a-1)(b-1)$$

$$=a+2b-4+ab-a-b+1=ab+b-3$$

$$E=2(a+b)+3+2=2(a+b)+5$$

3. a 爲 3n 型，b 爲 3n+2 型

$$I=\frac{a-3}{3}\times\frac{b-2}{3}+\frac{2a-3}{3}\times\frac{2b-1}{3}=\frac{ab-3b-2a+6+4ab-6b-2a+3}{9}$$

$$=\frac{5ab-4a-9b+9}{9}=\frac{5ab-4a}{9}-b+1$$

$$F=\frac{a-3}{3}+\frac{2a-3}{3}+2\left(\frac{b-2}{3}+\frac{2b-1}{3}\right)+(a-1)(b-1)$$

$$=\frac{3a-6+2b-4+4b-2}{3}+(a-1)(b-1)=\frac{3a+6b-12}{3}+(a-1)(b-1)$$

$$=a+2b-4+ab-a-b+1=ab+b-3$$

$$E=2(a+b)+3+2=2(a+b)+5$$

4. a,b 均爲 3n+1 型

$$I=\frac{a-1}{3}\times\frac{b-1}{3}+\frac{2a-2}{3}\times\frac{2b-2}{3}=\frac{ab-a-b+1+4ab-4a-4b+4}{9}$$

$$=\frac{5ab-5a-5b+5}{9}=\frac{5}{9}(ab-a-b+1)=\frac{5}{9}(a-1)(b-1)$$

$$F=\frac{a-1}{3}+\frac{b-1}{3}+\frac{2a-2}{3}+\frac{2b-2}{3}+(a-1)(b-1)$$

$$=\frac{3a+3b-6}{3}+(a-1)(b-1)=a+b-2+ab-a-b+1=ab-1$$

$$E=2(a+b)+3$$

5. a 爲 3n+1 型，b 爲 3n+2 型

$$I=\frac{a-1}{3}\times\frac{b-2}{3}+\frac{2a-2}{3}\times\frac{2b-1}{3}=\frac{ab-2a-b+2+4ab-2a-4b+2}{9}$$

$$=\frac{5ab-4a-5b+4}{9}=\frac{5b(a-1)-4(a-1)}{9}=\frac{(a-1)(5b-4)}{9}$$

$$F=\frac{a-1}{3}+\frac{b-2}{3}+\frac{2a-2}{3}+\frac{2b-1}{3}+(a-1)(b-1)=\frac{3a+3b-6}{3}+(a-1)(b-1)$$

$$=a+b-2+ab-a-b+1=ab-1$$

$$E=2(a+b)+3$$

6. a,b 均爲 3n+2 型

$$I=\frac{a-2}{3}\times\frac{b-2}{3}+\frac{2a-1}{3}\times\frac{2b-1}{3}=\frac{ab-2a-2b+4+4ab-2a-2b+1}{9}$$

$$=\frac{5ab-4a-4b+5}{9}$$

$$F=\frac{a-2}{3}+\frac{b-2}{3}+\frac{2a-1}{3}+\frac{2b-1}{3}+(a-1)(b-1)=\frac{3a+3b-6}{3}+(a-1)(b-1)$$

$$=a+b-2+ab-a-b+1=ab-1$$

$$E=2(a+b)+3$$

總結以上各點，可得下表：（n,k 均爲正整數）

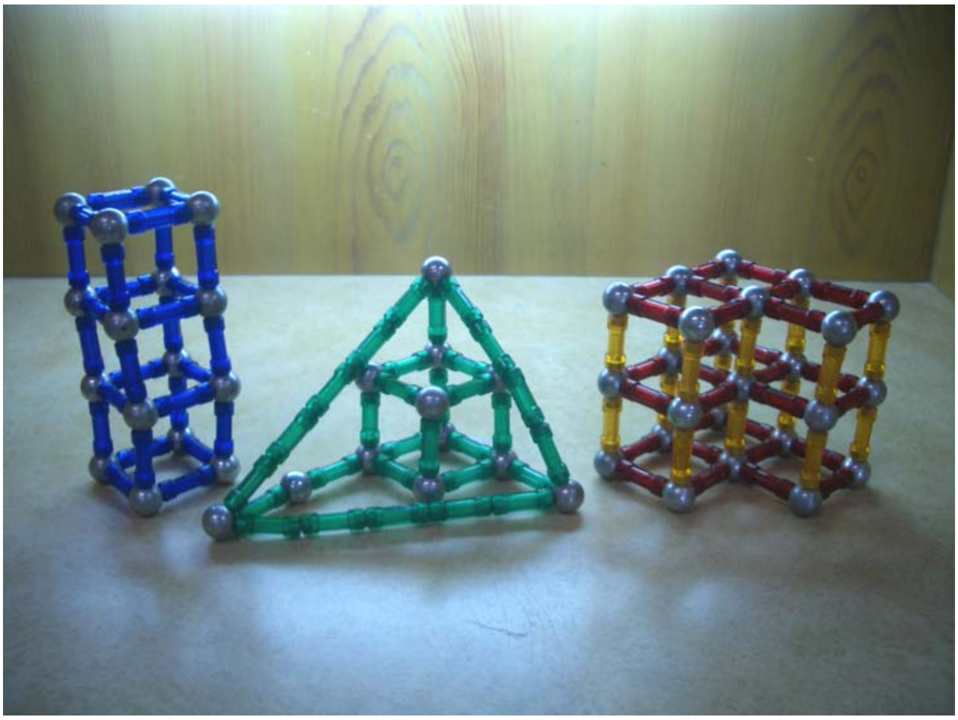
(a,b)	(3n,3k)	(3n,3k+1)	(3n,3k+2)	(3n+1,3k+1)	(3n+1,3k+2)	(3n+2,3k+2)
3V	3ab	3ab	3ab	3ab	3ab	3ab
I	$\frac{5ab}{9}-a-b+2$	$\frac{5a(b-1)}{9}-b+1$	$\frac{5ab-4a}{9}-b+1$	$\frac{5}{9}(a-1)(b-1)$	$\frac{1}{9}(a-1)(5b-4)$	$\frac{5ab-4a-4b+5}{9}$
F	$ab+a+b-7$	$ab+b-3$	$ab+b+3$	$ab-1$	$ab-1$	$ab-1$
E	$2a+2b+9$	$2a+2b+5$	$2a+2b+5$	$2a+2b+3$	$2a+2b+3$	$2a+2b+3$
h	3	3	3	3	3	3

陸、研究結果

- 對任何格子點長方體而言，$V = I + \frac{F}{2} + \frac{E}{4} - 1$ 都是正確的。
- 對任何格子點角柱體而言，$V = I + \frac{F + E - L}{2} - h$ 都是正確的。

柒、討論

我們在尋找錐體公式的時候，用了磁鐵組合玩具來幫助思考。



在偶然的情況下，我們因為磁鐵玩具不夠堅固，而將其做成倒下的狀態，卻意外地發現，若只做高、寬的三角形，就可推出長、高三角形，底面，斜面都可用立體想像推敲出來，如此一來，便可省下許多時間。

在收集數據及觀察的過程中，我們發現將錐體依不同的高分層後，同層的內部將是長方形，可推論出點數，而不用真的去做，斜邊和斜面上的點數也可推出，因此找出了用代數表示高為 1、2、3 的 3V,I,F,E,h 之間關係的方法，雖然至今仍未發現不同高之間的關係，但至少已經利用代數的方法完整的呈現出數據，而不再是毫無交集的一堆數字了！

我們希望能再繼續找出錐體、平台、…等等立體形狀的公式，然後再把它們整合起來，得出一個適用於所有格子點多面體的公式。

捌、結論

$$V = I + \frac{F+E-L}{2} - h$$ 適用於任何格子點角柱體，其中

L 爲柱體底面邊上的格子點數目（包括頂點），

V 爲柱體之體積，

I 爲柱體內部格子點的數目，

F 爲柱體各面格子點的數目，

E 爲柱體邊上格子點的數目（包括頂點），

h 爲柱體的高。

玖、參考資料及其他

一、九章數學教育基金會講義：格子點與面積（Pick 定理）

二、李儼（民 82）。中國古代數學簡史。台北市：九章出版社。P.82~89。

【評　語】　030424　點點滴滴～立體格子點探討

探討格子點的多面體是一個很好的研究課題，作者能有一些具體的成果，值得喝采與鼓勵。希望作者能進一步更深入研究，以期有更清楚的描述。