中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030423

乾坤大挪移---卡特藍數列之研究

學校名稱：臺北市私立復興國民中學

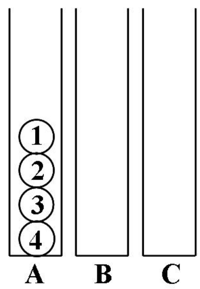
作者：	指導老師：
國一　高廷瑄	陳俊佑
國一　劉彥含	張慎
國一　王若瑄	
國一　賴睿加	

關鍵詞：胚騰(pattern)　卡特藍數列(Catalan Number)

壹、　摘要

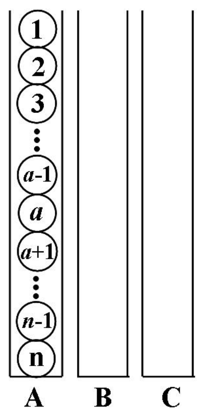
由左而右有 A、B、C 三根管子，在 A 管內有 n 顆由上而下依序編號爲 $1\sim n$ 的球 $(n \geq 1)$，移動球的規則爲：一次只能由左往右移動任一管子內最上方的一顆球，在此規則下，最後 C 管中 n 顆球的排列種類有 E_{n+2} 種，其中 $E_n = \dfrac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-10)}{(n-1)!}$ 爲 n 邊形被其對角線切成 $n-2$ 個三角形所有方法數。而 C 管中 n 顆球的排列方法，k 號球在底的方法數爲 $a_{n,k} = \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)(n-k)}{k!}$ 種，而這個數列滿足以下的關係式：$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} + \cdots + a_{n-1,n-1} = \sum_{j=k-1}^{n-1} a_{n-1,j}$。

貳、　研究動機



以下是我們數學老師課外補充的一個題目：如圖，4 個編號爲 1、2、3、4 的小球依圖中順序放在 A 管中，把 A 管的球經 B 管 “單向”移至 C 管中(也就是不允許由 C 至 B，C 至 A，B 至 A)，B 管可暫存若干球，但須遵循 “後進先出”原則，問將小球全部放入 C 管中後，C 管中球可能有多少不同的排列法。我們對這個題目深感興趣，所以想要加以研究，當題目的 4 顆球如果改成 n 顆球時，會是什麼樣的結果。

參、　研究目的



1. 要找出 3 根管子、n 顆球，依照前述的規則移動球，最後在 C 管中，球的排列方法數。
2. 研究 n 邊形被它的對角線切成 $n-2$ 個三角形的切割方法數，還有切割方法與三根管子 n 顆球的排列數的關係。

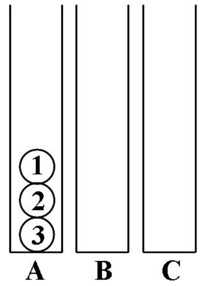
肆、　研究器材

紙、筆、電腦、紙卡球

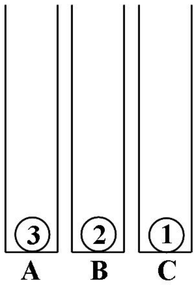
伍、 研究過程及結果

一、三根管子

很明顯的，當全部只有一顆球時，最後的排列只有一種可能。而當全部只有兩顆球時，全部只有兩種排列法，這兩種排列法在 C 管都會出現。

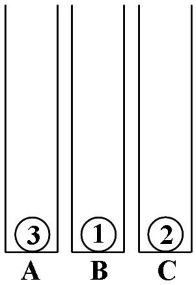


(一) 三顆球的情況



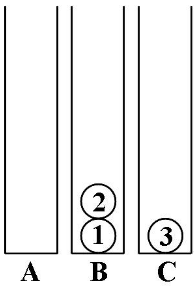
1 號球在 C 管底

將 1 號球移至 C 管中後，2 號球和 3 號球可平鋪於 A、B 兩管中，2 號球和 3 號球能以任意順序排入 C 管中，因此所有排法都可行。



2 號球在 C 管底

將 2 號球移至 C 管中後，1 號球和 3 號球可平鋪於 A、B 兩管中，1 號球和 3 號球能以任意順序排入 C 管中，因此所有排法都可行。

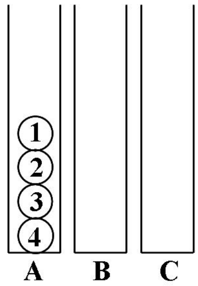


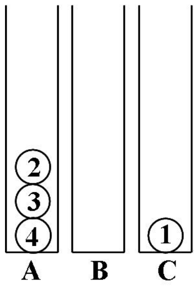
3 號球在 C 管底

因爲要移出 3 號球，於是得先將 1 號球和 2 號球放入 B 管中，無法不移動 2 號球而移動 1 號球，又因球不能往回搬，所以不出現 312。

由以上討論可以知道，3 顆球時，在 C 管的排列種類共有 2＋2＋1＝5 種。

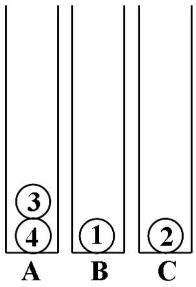
(二) 四顆球的情況





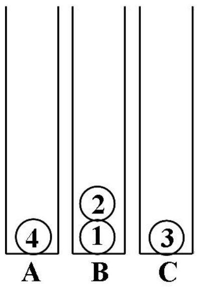
1 號球在 C 管底

1 號球移至 C 管後，2 號球、3 號球、4 號球在 A 管呈三顆球狀，可套用先前三顆球的結果，共有 5 種可能。



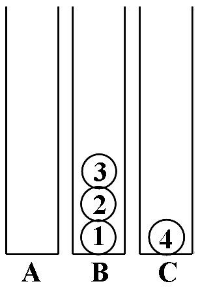
2 號球在 C 管底

2 號球要在 C 管底，就須先將 1 號球移至 B 管，再把 2 號球移至 C 管。可看成一開始 2 號球在 C 管，1、3、4 號球在 A 管的情況。因爲要排 3 顆球時，必先將 1 號球移出 A 管。跟 A 管中的 3 號球、4 號球加上在 B 管中的 1 號球的狀態相同，可套用先前 3 顆球的結果，共有 5 種可能。



3 號球在 C 管底

因爲要移出 3 號球，於是得先將 1 號球和 2 號球放入 B 管中，無法不移動 2 號球而移動 1 號球，又因球不能往回搬，所以由下往上算。31 時，共 2 種皆不能排；32 時，1 號球和 4 號球平鋪於 A、B 兩管中，因此所有排法皆可行；34 時，不出現 3412。



4 號球在 C 管底

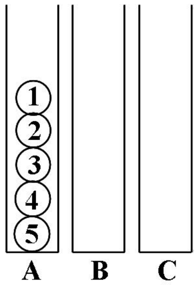
因爲要移出 4 號球，於是得先將 1 號球、2 號球和 3 號球放入 B 管中，無法不移動 3 號球而移動 1 號球或 2 號球，又因球不能往回搬，所以由下往上算。41 時，共 2 種皆不能排；42 時，共 2 種皆不能排；43 時，4312 不能排。

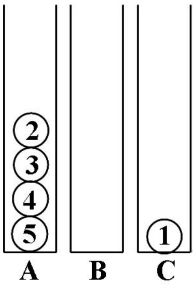
由以上討論知道，當有 4 顆球時，最後在 C 管的排列種類共有 5＋5＋3＋1＝14 種。

我們先定義兩個符號，第一個是雙變數數列 $a_{n,k}$ ， $a_{n,k}$ 代表原先有 n 顆球在 A 管，k 號球移到在 C 管最下面一顆全部的排列種類。例如：有 4 顆球，當全部的球移到 C 管後，1 號球在底有 $a_{4,1}=5$ 種，2 號球在底有 $a_{4,2}=5$ 種，3 號球在底有 $a_{4,3}=3$ 種，4 號球在底有 $a_{4,4}=1$ 種。

第二個符號是要表示，當原本有 n 顆球時，最後在 C 管球的排列種類，記爲 $f(n)$ 。由之前的討論知道， $f(4)=a_{4,1}+a_{4,2}+a_{4,3}+a_{4,4}=14$ 。

(三) 五顆球的情況

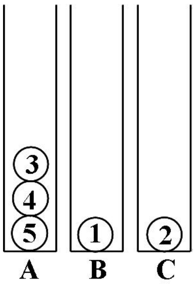




1 號球在 C 管底

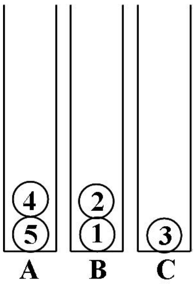
將 1 號球移至 C 管後，2 號球、3 號球、4 號球和 5 號球在 A 管，呈四顆球狀，可套用先前四顆球的結果。

共有 $a_{5,1}=f(4)=14$ 種可能。



2 號球在 C 管底

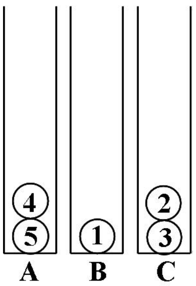
若要移出 2 號球來，則須先將 1 號球移至 B 管，再將 2 號球移至 C 管。因爲要排 4 顆球時，必先將 1 號球從 A 管移到 B 管，因此在 A 管中的 3 號球、4 號球、5 號球加上在 B 管中的 1 號球呈四顆球狀，可套用先前四顆球的結果。所以 $a_{5,2}=a_{5,1}=f(4)=14$



3 號球在管底

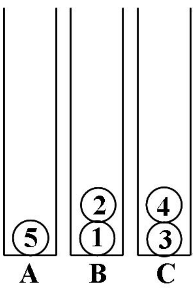
由下往上依次爲 3 號球、1 號球

因爲要移出 3 號球，於是得先將 1 號球和 2 號球放入 B 管中，無法不移動 2 號球而移動 1 號球，又因球不能往回搬。所以由下往上算，31 在底，共 6 種皆不出現。



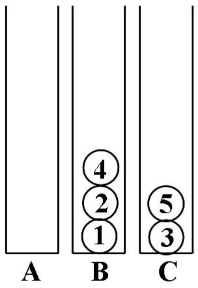
由下往上依次爲 3 號球、2 號球

1 號球移至 B 管，3 號球和 2 號球依次移至 C 管後，因爲要排 3 顆球時，必先將 1 號球移出 A 管，因此在 A 管中的 4 號球、5 號球加上在 B 管中的 1 號球呈三顆球，可套用先前三顆球的結果，共有 5 種可能。



由下往上依次爲 3 號球、4 號球

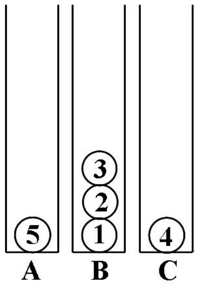
因爲要移出 4 號球，於是得先將 1 號球和 2 號球放入 B 管中，無法不移動 2 號球而移動 1 號球，又因球不能往回搬。所以由下往上算：341 時，共 2 種皆不能排；342 時，1 號球和 5 號球平鋪於 A、B 兩管中，34215 及 34251 兩種排列皆可形出現；345 時，34512 不能排列。共有 3 種可能。



由下往上依次爲 3 號球、5 號球

因爲要移出 5 號球，於是得先將 1 號球、2 號球和 4 號球放入 B 管中，無法不移動 4 號球而移動 1 號球或 2 號球，又因球不能往回搬，所以由下往上算。351 時，共 2 種皆不能排；352 時，共 2 種皆不能排；354 時，35412 不能排。

由以上討論知道 $a_{5,3} = a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} = f(4) - f(3) = 9$ 。



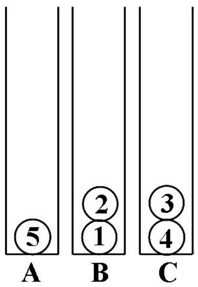
4 號球在 C 管底

由下往上依次爲 4 號球、1 號球

因爲要移出 4 號球，於是得先將 1 號球、2 號球和 3 號球放入 B 管中，無法不移動 3 號球而移動 1 號球或 2 號球，又因球不能往回搬，所以由下往上算。41 時，共 6 種皆不能排。

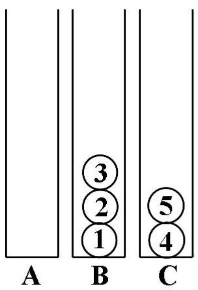
由下往上依次爲 4 號球、2 號球

同理，由下而上依次是 42 的六種排列都不會出現。



由下往上依次爲 4 號球、3 號球

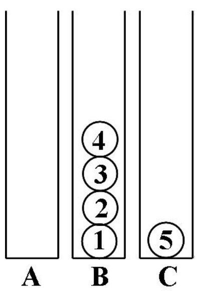
因爲要移出 4 號球，於是得先將 1 號球和 2 號球放入 B 管中，無法不移動 2 號球而移動 1 號球，又因球不能往回搬，所以由下往上算。431 時，共 2 種皆不能排；432 時，1 號球和 5 號球平鋪於 A、B 兩管中，因此所有排法皆可行；435 時，43512 不能排。



由下往上依次爲 4 號球、5 號球

因爲要移出 4 號球，於是得先將 1 號球、2 號球和 3 號球放入 B 管中，無法不移動 3 號球而移動 1 號球或 2 號球，又因球不能往回搬，所以由下往上算。451 時，共 2 種皆不能排；452 時，共 2 種皆不能排；453 時，45312 不能排。

由以上討論知道 $a_{5,4} = a_{4,3} + a_{4,4} = f(4) - f(3) - f(3) = 4$ 。



5 號球在 C 管底

因爲要移出 5 號球，於是得先將 1 號球、2 號球、3 號球和 4 號球放入 B 管中，才能將 5 號球移到 C 管。接下來不可能不移動 4 號球而先移動 3、2、1 號球，因此由下往上 53、52、51 的情況都不能排，而 54 時只有一種可能。

由以上討論知道： $a_{5,5} = a_{4,4} = 1$ 。

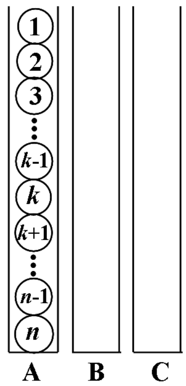
用 $f(n)$ 表示 $f(4) - f(3) - f(3) - \left(f(3) - f(2)\right)$ 。

至此，關於數列$a_{n,k}$，下面兩個結論是很明顯的：

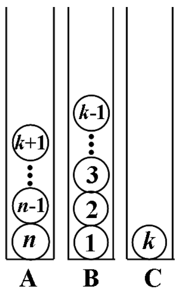
(1) $a_{n,n}=1$，因爲若要 n 號球在 C 管底，則$1\sim n-1$號球都要依次的被移到 B 管中，再把 n 號球移到 C 管中，接下來就只能依次由$n-1$號球開始，一顆顆的移到 C 管，因此只有一種可能。

(2) $a_{n+1,1}=a_{n+1,2}=f(n)$。全部有$n+1$顆球時，若 1 號球在 C 管的情形就是先把 1 號球移到 C 管，剩下$2\sim n+1$號球在 A 管，共 n 顆球。這 n 顆球到 C 管的排列法會等於$f(n)$。若是 2 號球在 C 管底，一開始是先把 1 號球移到 B 管，再把 2 號球從 A 管、經 B 管移到 C 管。此時 A 管有$3\sim n+1$號球、B 管是 1 號球。此情況跟一開始 A 管中有 1、$3\sim n+1$是一樣的。因爲不管要做什麼動作，第一步一定是把 1 號球先移到 B 管中。因此 2 號球在 C 管底的排列數是也是$f(n)$。

(四) n 顆球的情況

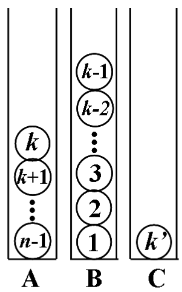


已經知道$a_{n,n}=1$、$a_{n+1,1}=a_{n+1,2}=f(n)$的情況下，我們要研究 n 顆球 k 號球在 C 管底的情況。

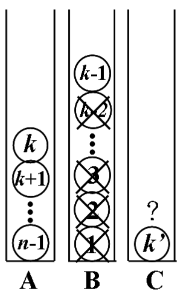


k 號球在管底

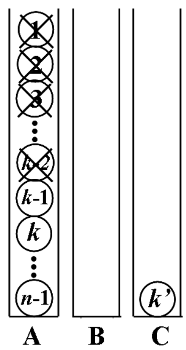
因爲要移出 k 號球，於是得先將 1 號球、2 號球…$(k-1)$號球放入 B 管中。



因爲 k 號球移至 C 管，因此 A、B 兩管中剩下 $n-1$ 顆球，若不考慮原先的 k 號球，我們可以把 A 管中剩下的球重新編號成 k 到 $n-1$ 號球。



無法不移動 k-1 號球而移動 1 號球到 C 管，所以 C 管中 k 號球的上方不可能是 1 號球。同理，k 號球上方不可能是 2 到 $k-2$ 號球。



將 1 號球到$k-1$號球倒推回 A 管中，如圖所示。則可知， n 顆球 k 在管底的排法爲以下排法的總和：$n-1$顆球$k-1$在底的排法、$n-1$顆球 k 在底的排法、$n-1$ 顆球$k+1$底的排法，…到 $n-1$ 顆球 $n-1$ 在底排法。也就是說 $a_{n,k}=a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1}+\cdots a_{n-1,n-1}=\sum_{j=k-1}^{n-1}a_{n-1,j}$。我們把以上的結果，列在表 1。

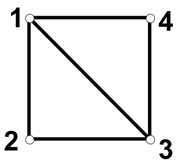
二、多邊形的切割

後來在閱讀初中趣味數學 100 題與數字的異想世界這兩本書，都讀到了 1、2、5、14、42、132，這個被稱爲卡特藍數的數列，這個數列是三邊形、四邊形、五邊形、六邊形、七邊形、八邊形被它們的對角線，分成三角形的方法數。我們猜想 $f(n)$ 就是卡特藍數列，所以接著，我們研究 n 邊形被它的對角線分成三角形的方法數，看是不是也滿足 $a_{n,k}=\sum_{j=k-1}^{n-1} a_{n-1,j}$ 這個式子。

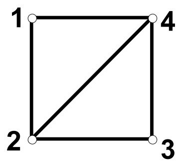
一個 n 邊形可以被它的 $n-3$ 條對角線切成 $n-2$ 個三角形。因此所選擇的對角線不可交叉。$\overline{AB}$ 與 $\overline{BA}$ 代表同一線段，我們通常將較小的號碼放在前端，較大的號碼則放在第二個數。若情況需要，我們也可能把大的數放在前面。兩組對角線若不全同，就視爲不同的切割方法。要研究 n 邊形有幾種切割法，我們先把 n 邊形的頂點分別標上 1、2、3、…n，再把所有可能的切割法都畫出來。實際上，我們把四邊形到八邊形所有的三角形分割法逐一畫出，結果在附錄(一)。定義 E_n 爲 n 邊形被其對角線切成 $n-2$ 個三角形的方法數。

接下來要把多邊形的分割方法加以分類，我們分類的方法是由 $\overline{13}$ 這條對角線開始搜尋，若有 $\overline{13}$ 這條對角線，則把這種分割法分到 $\overline{13}$ 這一類。若沒有，再去檢查看有沒有 $\overline{24}$ 這條對角線，若有這條對角線，則把這種分割法分到 $\overline{24}$ 這一類，以此類推，就可以把所有分割法加以分類。

(一) 四邊形



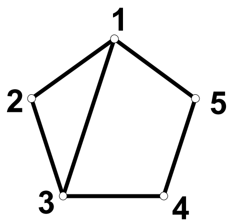
$\overline{13}$



$\overline{24}$

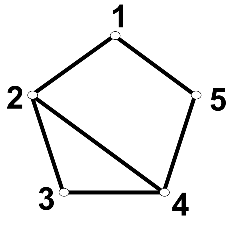
共 $E_4=2$ 種分法

(二) 五邊形



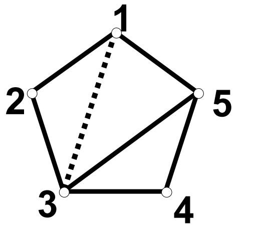
$\overline{13}$

多邊形 1345 是一個完整的四邊形，可套用四邊形的結果，共 2 種切法。



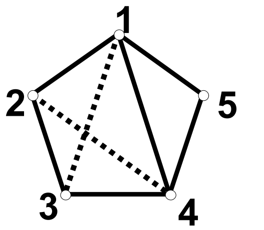
$\overline{24}$

在分割時，如有 $\overline{13}$ 則不會有 $\overline{24}$，所以不會重複，四邊形 1245 仍是一個完整的四邊形，共 2 種切法。



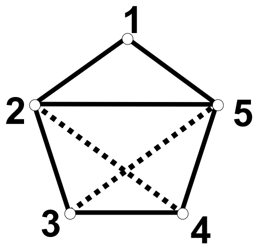
$\overline{35}$

在分割時，如有$\overline{35}$也可能有$\overline{13}$，爲了不與五邊形的$\overline{13}$分割法重複，因此要用面 1235 減去四邊形$\overline{13}$的切法，剩 1 種。



$\overline{41}$

在分割時，如有$\overline{41}$就一定有$\overline{13}$或$\overline{24}$，爲了不與五邊形的$\overline{13}$和$\overline{24}$分割法重複，因此要用面 1235 減去四邊形$\overline{13}$和$\overline{24}$的切法，剩 0 種。

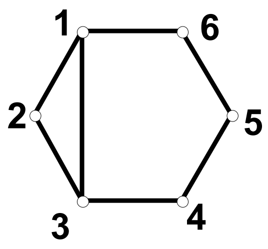


$\overline{52}$

在分割時，如有$\overline{52}$就一定有$\overline{24}$或$\overline{35}$，爲了不與五邊形的$\overline{24}$和$\overline{35}$分割法重複，因此要用面 2345 減去四邊形的$\overline{24}$和$\overline{35}$切法，剩 0 種。

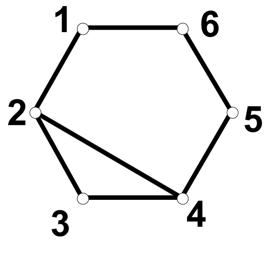
由以上討論可以發現，五邊形的切割方法數爲 $E_5=2+2+1=5$，和 3 顆球在 C 管的排列方法數是一樣的。

(三) 六邊形



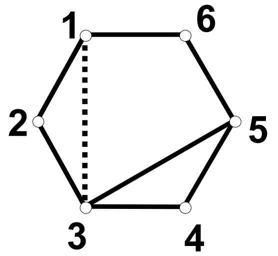
$\overline{13}$

多邊形 13456 是一個完整的五邊形，可套用五邊形的結果，共 5 種切法。



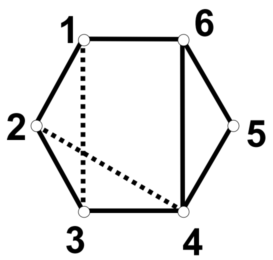
$\overline{24}$

在分割時，如有$\overline{13}$則不會有$\overline{24}$，所以不會重複，多邊形 12456 仍是一個完整的五邊形，共 5 種切法。



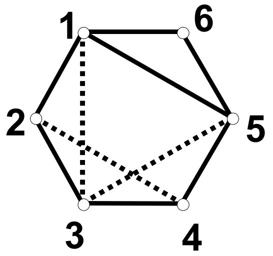
$\overline{35}$

在分割時，如有$\overline{35}$也可能有$\overline{13}$，爲了不與六邊形的$\overline{13}$分割法重複，因此要用面 12356 減去五邊形$\overline{13}$的切法，剩 3 種。



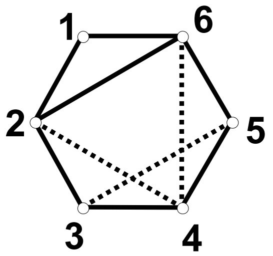
$\overline{46}$

在分割時，如有$\overline{46}$，也可能有$\overline{13}$或$\overline{24}$，爲了不與六邊形的$\overline{13}$與$\overline{24}$分割法重複，因此要用面 12346 減去五邊形$\overline{13}$和$\overline{24}$的切法，剩 1 種。



$\overline{51}$

在分割時，如有$\overline{51}$就一定有$\overline{13}$、$\overline{24}$或$\overline{35}$，爲了不與六邊形的$\overline{13}$、$\overline{24}$和$\overline{35}$分割法重複，因此要用面 12345 減去五邊形的$\overline{13}$、$\overline{24}$和$\overline{35}$切法，剩 0 種。



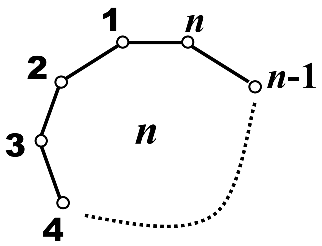
$\overline{62}$

在分割時，如有$\overline{62}$就一定有$\overline{24}$、$\overline{35}$或$\overline{46}$，爲了不與六邊形的$\overline{24}$、$\overline{35}$和$\overline{46}$分割法重複，因此要用面 23456 減去五邊形的$\overline{24}$、$\overline{35}$和$\overline{46}$切法，剩 0 種。此時，對面 23456 來說，對角線$\overline{24}$、$\overline{35}$和$\overline{46}$，相當於面 12345 的對角線$\overline{13}$、$\overline{24}$和$\overline{35}$。

由以上的討論，我們知道，六邊形要切成 4 個三角形的方法，共有$E_6=5+5+3+1$，共 14 種，這也跟$f(4)=5+5+3+1=14$的分布是一樣的。

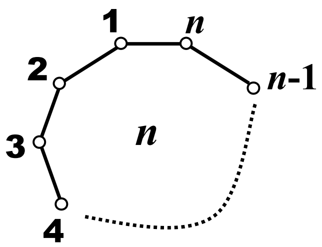
若切割 n 邊形，定義$b_{n,k}$爲第一條切割線是$\overline{k,(k+2)}$時的分割數。例如：四邊形先切$\overline{13}$的方法有 1 種，先切$\overline{24}$的方法有 1 種，則$b_{4,1}=b_{4,2}=1$。五邊形先切$\overline{13}$的方法有 2 種，先切$\overline{24}$的方法有 2 種，先切$\overline{35}$的方法有 1 種，則$b_{5,1}=b_{5,2}=2$，$b_{5,3}=1$。

(四) n 邊形



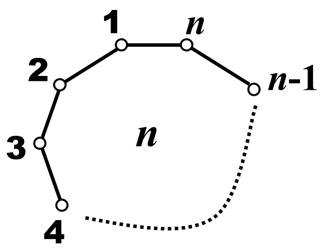
$\overline{13}$

多邊形 134.... n-1, n 是一個完整的($n-1$)邊形，可套用($n-1$)邊形的結果，共有 E_{n-1} 種切法。也就是是 $b_{n,1}=b_{n-1,1}+b_{n-1,2}+\cdots+b_{n-1,n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}b_{n-1,i}$ 。



$\overline{24}$

在分割時，如有 $\overline{13}$ 則不會有 $\overline{24}$ ，所以不會重複，多邊形 124⋯ n-1, n 仍是一個完整的($n-1$)邊形，共有 E_{n-1} 種切法。所以同樣的 $b_{n,2}=b_{n-1,1}+b_{n-1,2}+\cdots+b_{n-1,n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}b_{n-1,i}$ 。

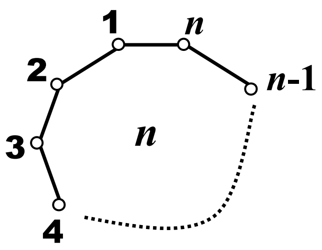


$\overline{35}$

在分割時，如有 $\overline{35}$ 也可能有 $\overline{13}$ ，爲了不與 n 邊形的 $\overline{13}$ 分割法重複計算，因此要用多邊形 1235⋯n-1, n 的切割數，減去($n-1$)邊形 $\overline{13}$ 的切法，得 $b_{n,3}=E_{n-1}-b_{n-1,1}=b_{n-1,2}+\cdots+b_{n-1,n-1}=\sum_{i=2}^{n-1}b_{n-1,i}$ 。

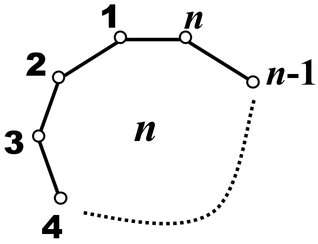
$\overline{i,i+2}$

在分割時，若先選取的是 $\overline{i,i+2}$ ，就把 n 邊形切成 $n-1$ 邊形 $1,2,3...,i,i+2,i+3,...n-1,n$ 。若有 $\overline{13}$ 、 $\overline{24}$ 、 $\overline{35}$ ，⋯， $\overline{i-2,i}$ ，則會重複計算。被分到此類方法數爲($n-1$)邊形的切割方法數，減去($n-1$)邊形 $\overline{13}$ 的切割方法數、減去($n-1$)邊形 $\overline{24}$ 的切割方法數、⋯、減去($n-1$)邊形 $\overline{i-2,i}$ 的切割方法數。這邊不用減去($n-1$)邊形 $\overline{i-1,i+1}$ 的切割數，因爲如果有對角線 $\overline{i-2,i}$ ，就不會有對角線 $\overline{i-1,i+1}$ 。最後得到的切割數爲 $b_{n,i}=E_{n-1}-\sum_{j=1}^{i-2}b_{n-1,j}=\sum_{k=i-1}^{n-1}b_{n-1,k}$ 。



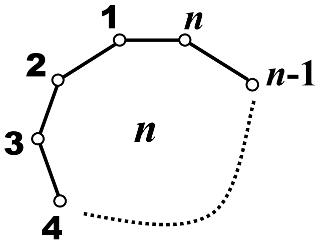
$\overline{n-2,n}$

在分割時，如有 $\overline{n-2,n}$ 且沒有 $\overline{13}$ 、 $\overline{24}$ 、⋯、 $\overline{n-4,n-2}$ 其中之一，只剩下一種切割法，就是由對角線 $\overline{n-2,n}$ 、 $\overline{n-3,n}$ 、⋯、 $\overline{2,n}$ 、 $\overline{1,n}$ 的所組成的切割方式。可以知道 $b_{n,n-2}=1$ 。



$\overline{n-1,1}$

在分割時，如有$\overline{n-1,1}$就一定有$\overline{13}$ 、$\overline{24}$ ... $\overline{n-3,n-1}$其中之一。爲了不與 n 邊形的$\overline{13}$ 、$\overline{24}$ 、⋯、$\overline{n-3,n-1}$分割法重複，因此要用剩下的$(n-1)$邊形減去$(n-1)$邊形$\overline{13}$ 、$\overline{24}$ 、⋯、$\overline{n-3,n-1}$的切法。得知$b_{n,n-1}=0$



$\overline{n,2}$

在分割時，如有$\overline{n,2}$就一定有$\overline{24}$ ... $\overline{n-2,n}$，爲了不與 n 邊形$\overline{24}$ 、⋯、$\overline{n-2,n}$分割法重複，因此要用剩下的$(n-1)$邊形減去$(n-1)$邊形$\overline{13}$ 、$\overline{24}$ 、⋯、$\overline{n-2,n}$的切法。得知$b_{n,n}=0$

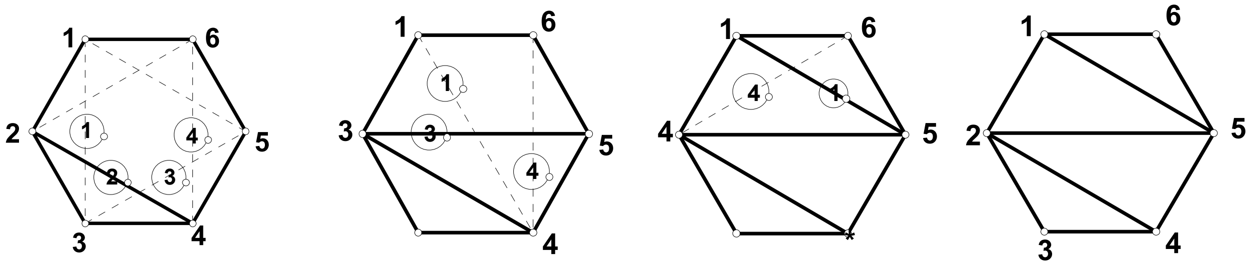
經過這番研究，我們發現E_n和$f(n)$所形成的數列是幾乎相同的，且計算E_n和$f(n)$的數列$b_{n,k}$與$a_{n,k}$也大致相同。我們知道，$b_{3,1}=a_{1,1}=1$、$b_{4,1}=a_{2,1}=1$、$b_{4,2}=a_{2,2}=1$。若令$b_{n+2,k}=a_{n,k}$，這兩個數列同時滿足一個遞迴式：

$$a_{n,k}=a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1}+\cdots a_{n-1,n-1}=\sum_{j=k-1}^{n-1}a_{n-1,j}\quad 。$$

因此我們可以確定$b_{n+2,k}=a_{n,k}$。進一步的，也可以確定$E_{n+2}=f(n)$。如此，我們能用“多邊形的切割方法數”來計算三根管子 n 顆球的排列數，也可以反過來用三根管子 n 顆球的排列數來看“多邊形的切割方法數”。

更進一步的，我們想知道，是不是一種 $n+2$ 邊形的切割方法，就對應到一種三根管子 n 顆球的的排列方法；三根管子 n 顆球的一種排列方法也會對應到一種 $n+2$ 邊形的切割法。透過一些例子，我們相信這是對的，並且也找到了其中的對應方式。雖然現在我們還不太會證明它們真的是一一對應，在接下來的一個月，我們會努力完成證明。

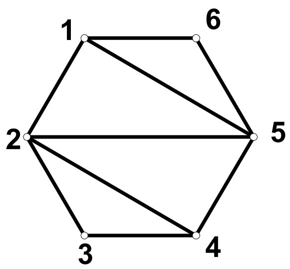
四顆球對應到六邊形，四顆球的 2314 排列，所對應的切割法為對角線 $\overline{24}$ 、$\overline{25}$ 、$\overline{15}$ 。說明如下：因為底球是 2，所以第一條切割線是 $\overline{24}$ 。之後將新形成的五邊形重新編號，要跳過第一顆球的的號碼 2，也就是新的五邊形的頂點標上 13456。由下往上的第二顆球為 3，因此將新的五邊形中編號為 3 的頂點，與它的逆時針數第二個頂點相連，恰為連對角線 $\overline{35}$ 。再重新編號，此時仍然是由 1 開始跳過計算過球的號碼 2、3，逆時針對新的四邊形編號。由下往上第三顆球是 1，就在剩下的四邊形中找到編號為 1 的頂點，與它的逆時針數第二個頂點相連，此時是對角線 $\overline{15}$ 。



已知 $f(n)=E_{n+2}$ ，因此 n 顆球對應到 $n+2$ 邊形。若在 C 管的底球為 a_1 ，則第一條切割線為 $\overline{a_1\ a_1+2}$ 。之後將 $n+1$ 邊形的頂點重新編號，跳過已用過的球號 a_1 。由下往上數的第二顆球號為 a_2 ，在 $n+1$ 邊形的頂點找到編號為 a_2 的點，與它的逆時針數第二個頂點相連，得一個新的 n 邊形，再對這個 n 邊形的頂點重新編號，也是要跳過已用過的球號 a_1 與 a_2 。如此一直做到最後剩下四邊形，及最後兩顆球。倒數第二顆球為 a_{n-1} ，在剩下的四邊形找到編號為 a_{n-1} 的頂點，與它的逆時針數第二個頂點相連，就完成了 $n+2$ 邊形的切割。

接下來我們要引入圖的相鄰矩陣(adjacent matrix)的概念。一個有 n 個點的圖，頂點分別標上 $1\sim n$ ，若頂點 i 與頂點 j 有邊相鄰，則矩陣中 $a_{ij}=a_{ji}=1$ ，若頂點 i 與頂點 j 沒有邊相鄰，則矩陣中 $a_{ij}=a_{ji}=0$

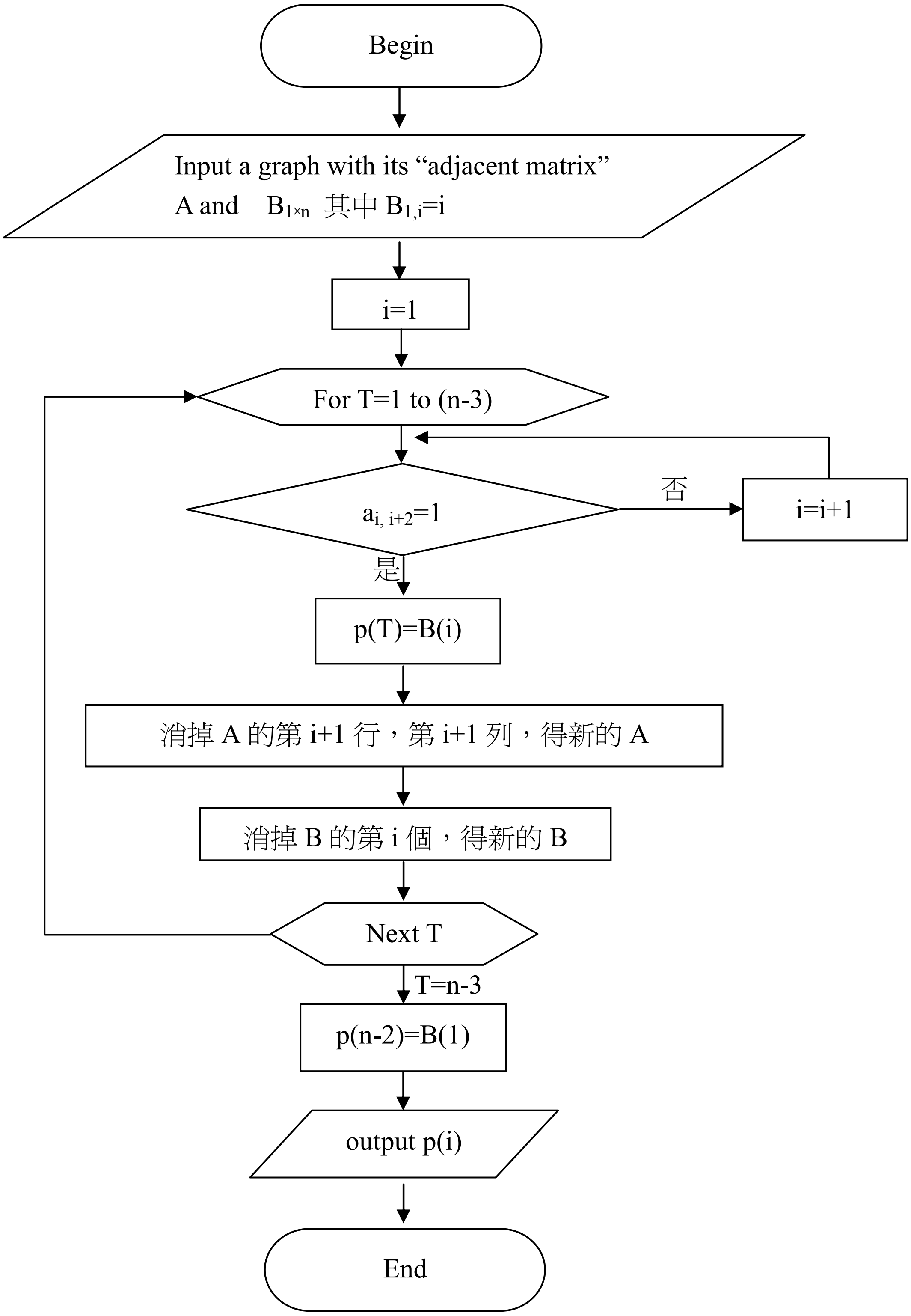
如右圖，



它的相鄰矩陣為

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

若是要將$n+2$邊形一種分割法對應到一種n顆球的排列，只要依照以下的流程圖就可以完成。



三、三根管子 n 顆球，k 號球在 C 管底的排列數

我們已經知道，三根管子 n 顆球的排列數等於 $n+2$ 邊形的切割數，因此 $a_{n+1,1}=f(n)=E_{n+2}=\dfrac{2\times 6\times 10\times\cdots\times(4n-2)}{(n+1)\,!}$。但我們進一步想知道，三根管子 n 顆球 k 號球在 C 管底的排列數爲何。

由以上討論，已知道 $a_{n,n}=1$。而 $a_{n,n-1}=a_{n-1,n-1}+a_{n-1,n-2}=1+a_{n-1,n-2}$，同樣的也可以知道 $a_{n-1,n-2}=1+a_{n-2,n-3}$，透過不斷的迭代，就可以得到 $a_{n,n-1}=n-1$。

透過同樣的代換方法，並且靠著數學軟體 Mathematica 的幫忙，得到

$$a_{n,n-2}=\sum_{k=2}^{n-1}(a_{k,k-1}+a_{k,k})=\frac{(n-2)(n+1)}{2!}$$

$$a_{n,n-3}=\sum_{k=3}^{n-1}(a_{k,k-2}+a_{k,k-1}+a_{k,k})=\frac{(n-3)(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$a_{n,n-4}=\sum_{k=4}^{n-1}(a_{k,k-3}+a_{k,k-2}+a_{k,k-1}+a_{k,k})=\frac{(n-4)(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$a_{n,n-5}=\sum_{k=5}^{n-1}(a_{k,k-4}+a_{k,k-3}+a_{k,k-2}+a_{k,k-1}+a_{k,k})=\frac{(n-5)(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

因此，我們猜想 $a_{n,n-k}=\dfrac{(n-k)(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}$。在還沒開始證明之前，我們想先驗證 $a_{n,1}=f(n-1)=E(n+1)=\dfrac{2\times 6\times\cdots\times(4n-6)}{n\,!}$ 這個式子對不對。也就是看 $a_{n,1}=a_{n,n-(n-1)}$ $=\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}=\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}{n!}$ 是否等於 $E_{n+1}=\dfrac{2\times 6\times\cdots\times(4n-6)}{n!}$。透過以下的計算我們知道這兩個數是一樣的，只是有兩種不同的表示法。

$$\begin{aligned}
&2\times 6\times 10\times\cdots\times(4n-6)=1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)\times 2^{n-1}\\
&=\frac{[1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)]\times 2^{n-1}\times[2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n-2]}{[2\times 4\times 6\times\cdots\times 2(n-1)]}\\
&=\frac{[1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-2)]\times 2^{n-1}}{[1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)]\times 2^{n-1}}\\
&=\frac{[1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-2)]}{[1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)]}=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\\
&=n(n+1)(n+2)\cdots(2n-3)(2n-2)
\end{aligned}$$

在證明 $a_{n,k}$ 的公式之前，要先提到幾個預備定理。第一個是高中課程中會提到的公式：

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+r)=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r+1)}{r+2}$，其中 r 是正整數。

第二個是我們推出的遞迴式，可以進一步的修改，得 $a_{n,k}=\sum_{t=k-1}^{n-1}a_{n-1,t}$ $=a_{n-1,k-1}+\left(a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1}+\cdots+a_{n-1,n-1}\right)=a_{n-1,k-1}+a_{n,k+1}$。同樣的 $a_{n-1,k-1}=a_{n-2,k-2}+a_{n-1,k}$，

這樣一直代換下去，

$$
\begin{aligned}
a_{n,k} &= a_{n-1,k-1}+a_{n,k+1}\\
a_{n-1,k-1} &= a_{n-2,k-2}+a_{n-1,k}\\
a_{n-2,k-2} &= a_{n-3,k-3}+a_{n-2,k-1}\\
&\vdots\\
a_{n-k+2,2} &= a_{n-k+1,1}+a_{n-k+2,3}\\
&= a_{n-k+1,2}+a_{n-k+2,3}
\end{aligned}
$$

可得 $a_{n,k}=a_{n-k+1,2}+a_{n-k+2,3}+\cdots+a_{n-1,k}+a_{n,k+1}=\sum_{t=2}^{k+1}a_{n-k+t-1,t}$ 。

接下來我們對 k 做數學歸納法，去證明 $a_{n,n-k}=\dfrac{(n-k)(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}$，其中 $k\geq 2$ 。

證明：當 $k=2$，已經驗證過 $a_{n,n-2}=\dfrac{(n-2)(n+1)}{2!}$ 。

假設 $k=m$ 此公式都成立，則當 $k=m+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
&a_{n,n-(m+1)}=a_{n,n-m}+a_{n-1,n-(m+1)}+\cdots+a_{m+2,2}=\sum_{t=m+2}^{n}a_{t,t-m}=\sum_{t=m+2}^{n}\frac{(t-m)(t+1)(t+2)(t+3)\cdots(t+m-1)}{m!}\\
&=\sum_{t=m+2}^{n}\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)\cdots(t+m-1)}{m!}-\sum_{t=m+2}^{n}\frac{m(t+1)(t+2)(t+3)\cdots(t+m-1)}{m!}\\
&\sum_{t=m+2}^{n}\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)\cdots(t+m-1)}{m!}-\sum_{t=m+3}^{n+1}\frac{mt(t+1)(t+2)\cdots(t+m-2)}{m!}\\
&=\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)\cdots(t+m-1)}{m!}-\sum_{t=1}^{m+1}\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)\cdots(t+m-1)}{m!}\\
&\quad-\sum_{t=1}^{n+1}\frac{mt(t+1)(t+2)\cdots(t+m-2)}{m!}+\sum_{t=1}^{m+2}\frac{mt(t+1)(t+2)\cdots(t+m-2)}{m!}\\
&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m-1)(n+m)}{m!\times(m+1)}-\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(2m)(2m+1)}{m!\times(m+1)}\\
&\quad-\frac{m(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m-1)(n+m)}{m!\times m}+\frac{m(m+2)(m+3)\cdots(2m)(2m+1)}{m!\times m}\\
&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m-1)(n+m)}{m!\times(m+1)}-\frac{(m+1)(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m-1)(n+m)}{m!\times(m+1)}\\
&=\frac{\left(n-(m+1)\right)(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m-1)\left(n+(m+1)-1\right)}{(m+1)!}
\end{aligned}
$$

由數學歸納法得證。

陸、　結論及展望

一、 經過長時間的研究，我們發現 3 根管子 n 顆球其中的規律性，如下表：

球數＼底球	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	2	2	1					
4	5	5	3	1				
5	14	14	9	4	1			
6	42	42	28	14	5	1		
7	132	132	90	48	20	6	1	
8	429	429	297	165	75	27	7	1

表 1

以上表格，我們可以用雙變數數列來表示：

若 i 代表球數，j 代表底球號碼，$a_{i,j}$ 代表 i 顆球 j 號球在底的排列數。這個數列滿足以下的式子：$a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j} + \cdots a_{i-1,i-1} = \sum_{t=j-1}^{i-1} a_{i-1,t}$，其中 $0 < j \le i$

二、 我們將上面的表格對照多邊形與三角形的切割，發現：

1. 多邊形切成 n 個三角形的切割數等於三根管子 n 顆球的排列數。
2. 一個 n 邊形的切割若有對角線 $\overline{a,a+2}$，其切法的排列，相當於 3 根管子 n 顆球，a 號球在底的排列數。
3. 三根管子的 n 顆球的排列與多邊形切成三角形的切割有一種對應關係。給一種 n 顆球的排列，能找到它所對應 $n+2$ 邊形的切割；反過來給一種 $n+2$ 邊形的切割，也能找到它所對應到的 n 顆球的排列。

原本在統整三根管子 n 顆球排列的結果時，是準備用 $f(n)$ 及減法去表示。例如，用三根管子五顆球的排法，1 號球在底有 $f(4)$ 種、2 號球在底也是有 $f(4)$，3 號球在底有 $f(4)-f(3)$ 種，2 號球在底是 $f(4)-f(3)-f(3)$ 種，1 號球在底有 $f(4)-f(3)-f(3)-\big(f(3)-f(2)\big)$ 種，但是因爲去括號的化簡比較繁雜，因此沒有採用。

三、 進一步，找到了三根管子 n 顆球 k 號球在底的排列數 $a_{n,k}$ 的公式。

由公式 $a_{n,n-k}=\dfrac{(n-k)(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}$ ，

可以得到 $a_{n,k}=\dfrac{k(n+1)(n+2)\cdots(2n-k-1)}{(n-k)!}$ 。

我們用數學歸納法證明此公式是正確的。

經過快一年的研究，我們發現三根管子的排列種數竟然與三角形的切割種數完全符合，也可以解釋三根管子在不同情況下的排列種數，如此看起來不相干的兩種東西，竟然有這麼深的關係，真是讓人興奮。也謝謝老師犧牲許多午睡時間，陪我們一起探索與思考。不只教導我們高中才會學到的數學歸納法及矩陣，還有更重要的是研究數學的態度與方法，更是讓我們獲益良多。

接下來，我們要繼續努力的是，對於 n 顆球的排列與多邊形的切割，我們提出來的對應方式是一一對應。

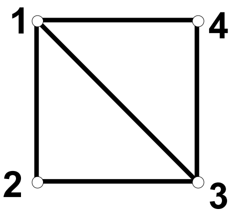
我們也有試著找尋四根管子 n 顆球的排法數的規律。現在能確定的是 6 顆球以內，所有的排列法都是可行的。當有七顆球時，7132465、7135246、7135264、7142536、7153264、7153624、7213546、7215364、7245136、7241365、7241536、7241635、7246135、7251436、7251364、7314625、7314652、7314265、7315264、7351246、7351426、7351462、7351624、7352416、7352461、7352146、7415263 共 27 種是排不出來的。相信這個題目也是相當有趣而值得研究的。

柒、 參考資料及其他

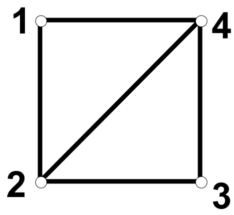
一、盧建明主編，國中生命數學補充教材(代數 2)，建宏書局，P37
二、單墫著主編，初中趣味數學 100 題，九章出版社，P25
三、柯利弗德・皮寇弗主編，2003.11.15，數字的異想世界，商周出版社，P212

捌、　附錄

一、四邊形的切割

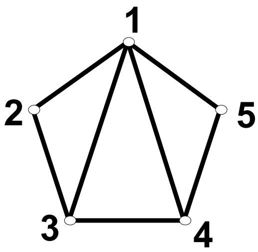


$\overline{13}$



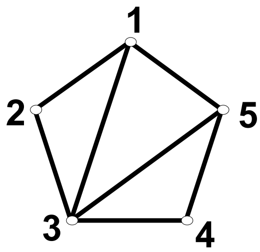
$\overline{24}$

二、五邊形的切割



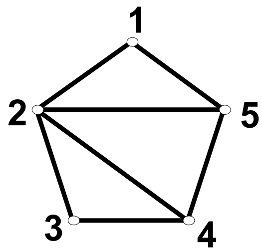
$\overline{13}$

$\overline{14}$



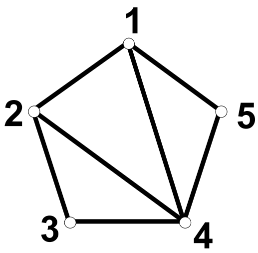
$\overline{13}$

$\overline{35}$



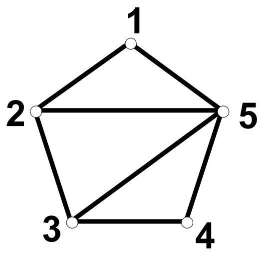
$\overline{24}$

$\overline{25}$



$\overline{24}$

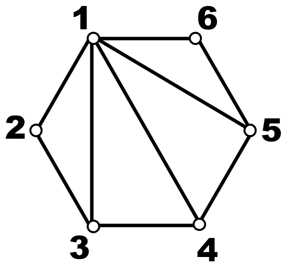
$\overline{14}$



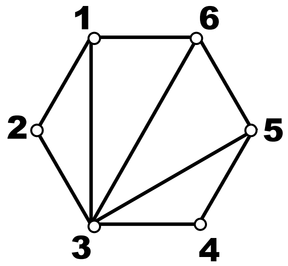
$\overline{35}$

$\overline{25}$

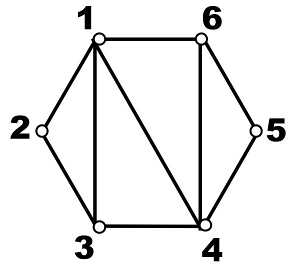
三、六邊形的切割



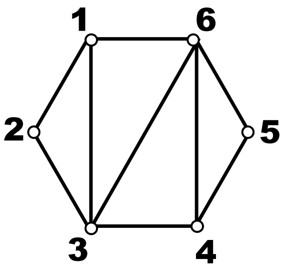
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$



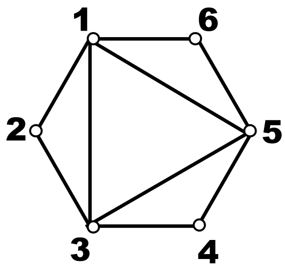
$\overline{13}$
$\overline{35}$
$\overline{36}$



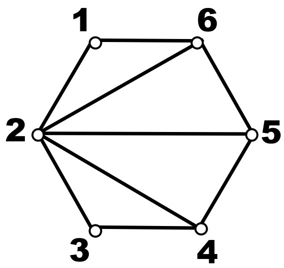
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{46}$



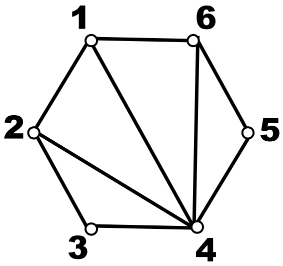
$\overline{13}$
$\overline{36}$
$\overline{46}$



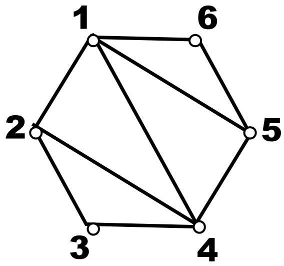
$\overline{13}$
$\overline{15}$
$\overline{35}$



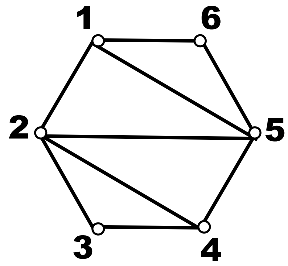
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$



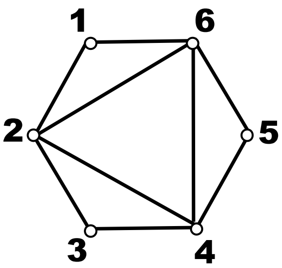
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{46}$



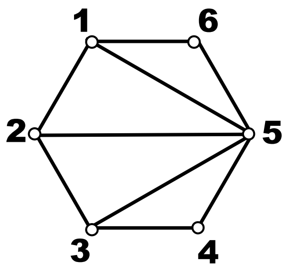
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$



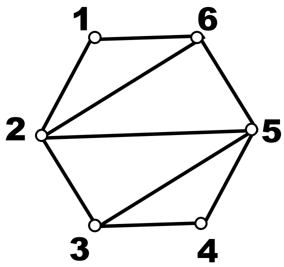
$\overline{24}$
$\overline{15}$
$\overline{25}$



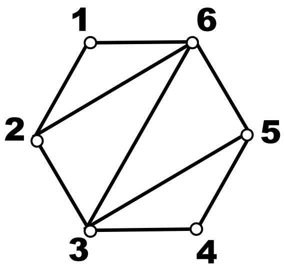
$\overline{24}$
$\overline{26}$
$\overline{46}$



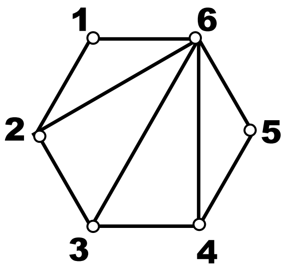
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{25}$



$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$

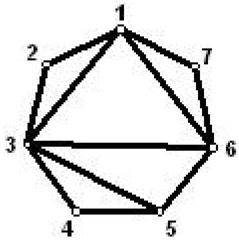


$\overline{35}$
$\overline{26}$
$\overline{36}$

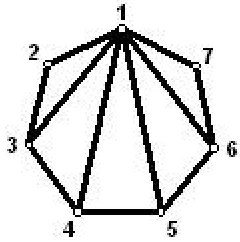


$\overline{46}$
$\overline{26}$
$\overline{36}$

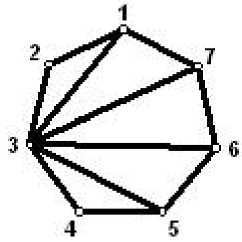
四、七邊形的切割



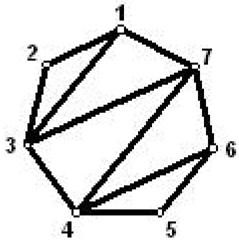
$\overline{13}$
$\overline{16}$
$\overline{35}$
$\overline{36}$



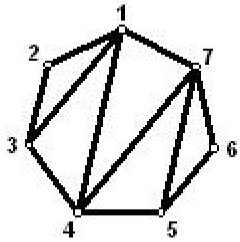
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$



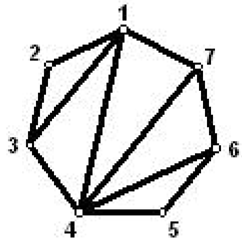
$\overline{13}$
$\overline{35}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$



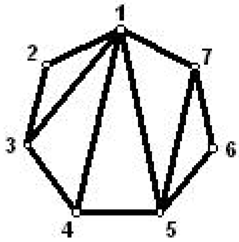
$\overline{13}$
$\overline{37}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



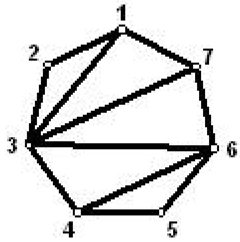
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



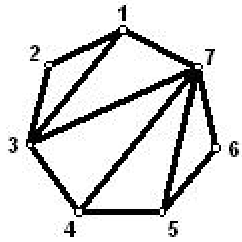
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



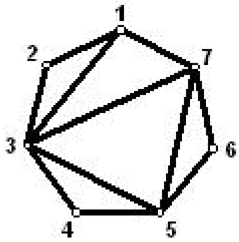
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{57}$



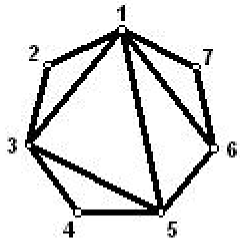
$\overline{13}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$
$\overline{46}$



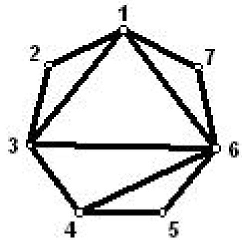
$\overline{13}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



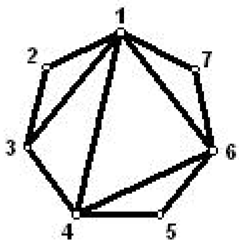
$\overline{13}$
$\overline{35}$
$\overline{37}$
$\overline{57}$



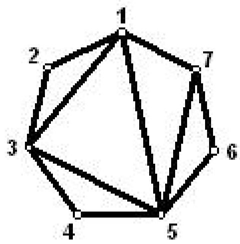
$\overline{13}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{35}$



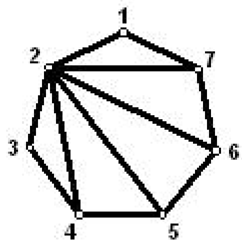
$\overline{13}$
$\overline{16}$
$\overline{36}$
$\overline{46}$



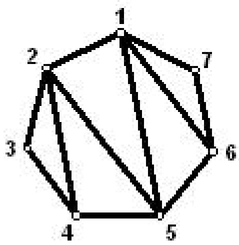
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{16}$
$\overline{46}$



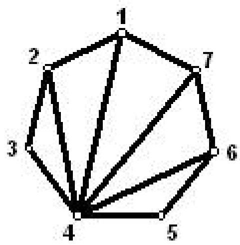
$\overline{13}$
$\overline{15}$
$\overline{35}$
$\overline{57}$



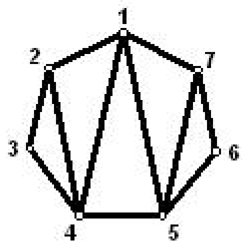
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$



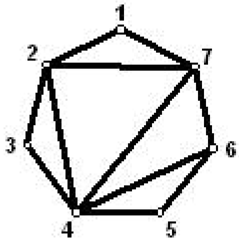
$\overline{24}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{25}$



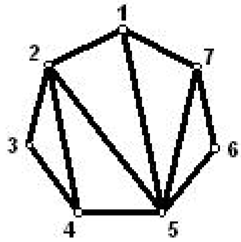
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



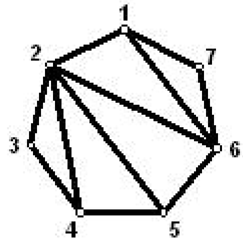
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{57}$



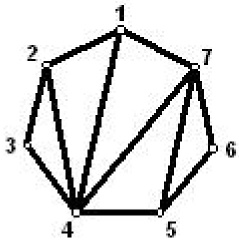
$\overline{24}$
$\overline{27}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



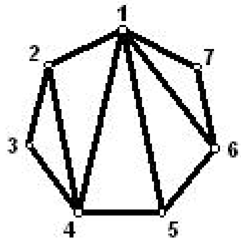
$\overline{24}$
$\overline{15}$
$\overline{25}$
$\overline{57}$



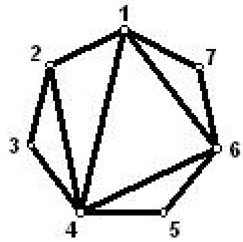
$\overline{24}$
$\overline{16}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$



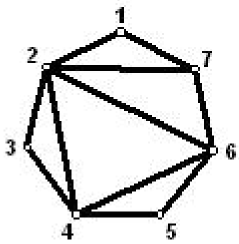
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



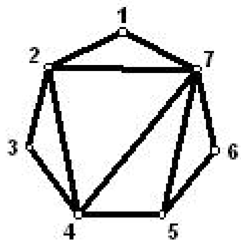
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$



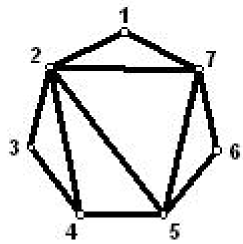
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{16}$
$\overline{46}$



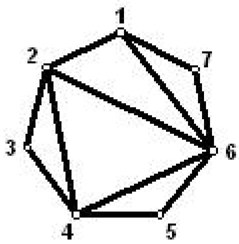
$\overline{24}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{46}$



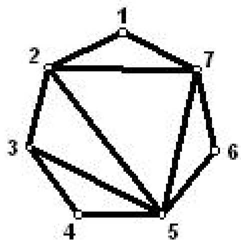
$\overline{24}$
$\overline{27}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



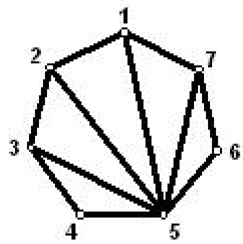
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{27}$
$\overline{57}$



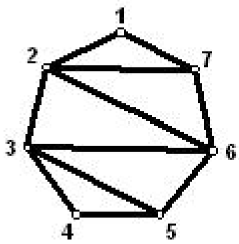
$\overline{24}$
$\overline{16}$
$\overline{26}$
$\overline{46}$



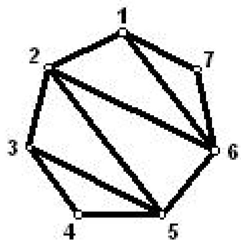
$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{27}$
$\overline{57}$



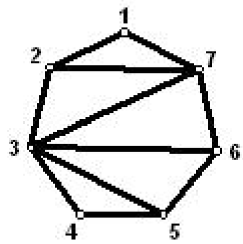
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{25}$
$\overline{57}$



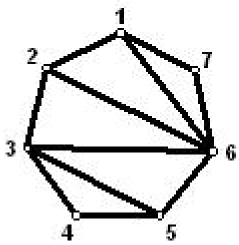
$\overline{35}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{36}$



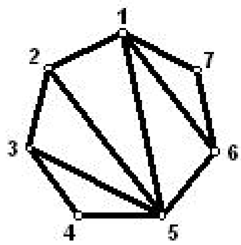
$\overline{35}$
$\overline{16}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$



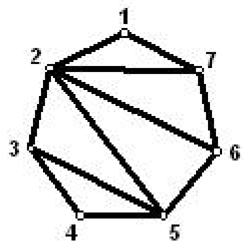
$\overline{35}$
$\overline{27}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$



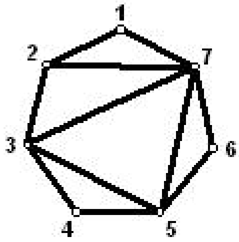
$\overline{35}$
$\overline{16}$
$\overline{26}$
$\overline{36}$



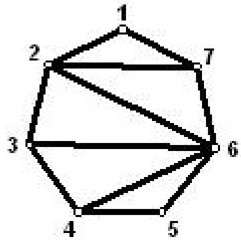
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{25}$



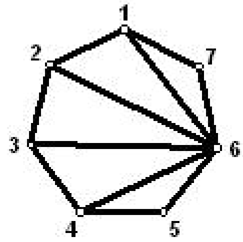
$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$



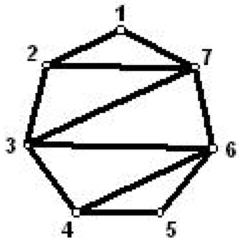
$\overline{35}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{57}$



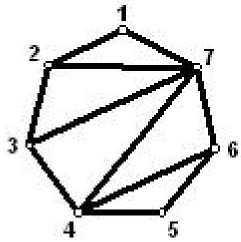
$\overline{46}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{36}$



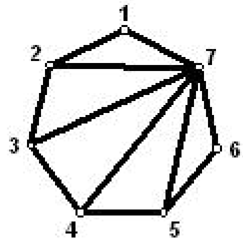
$\overline{46}$
$\overline{16}$
$\overline{26}$
$\overline{36}$



$\overline{46}$
$\overline{27}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$

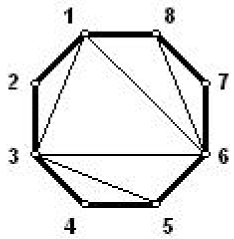


$\overline{46}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$

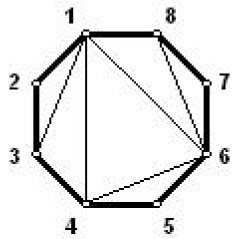


$\overline{57}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$

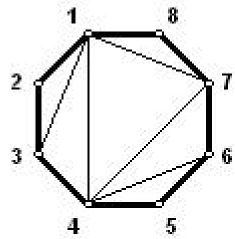
五、八邊形的切割



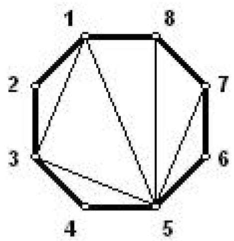
$\overline{13}$
$\overline{16}$
$\overline{35}$
$\overline{36}$
$\overline{68}$



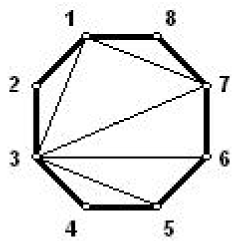
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{16}$
$\overline{46}$
$\overline{68}$



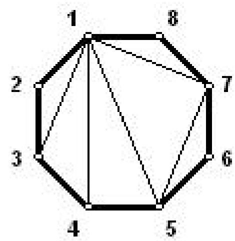
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{17}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



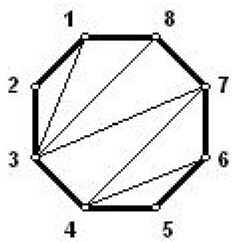
$\overline{13}$
$\overline{15}$
$\overline{35}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



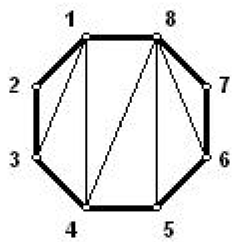
$\overline{13}$
$\overline{17}$
$\overline{35}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$



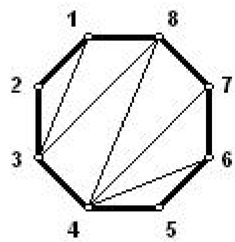
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{17}$
$\overline{57}$



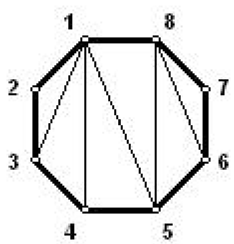
$\overline{13}$
$\overline{37}$
$\overline{38}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



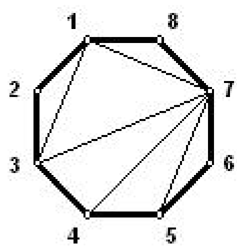
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



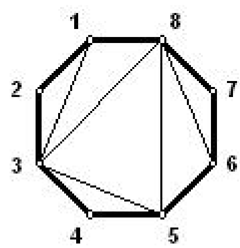
$\overline{13}$
$\overline{38}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$
$\overline{48}$



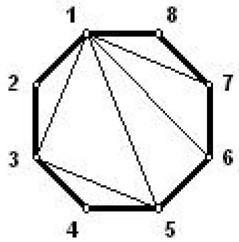
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



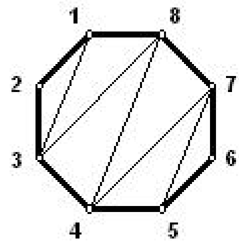
$\overline{13}$
$\overline{17}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



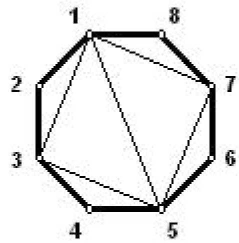
$\overline{13}$
$\overline{35}$
$\overline{38}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



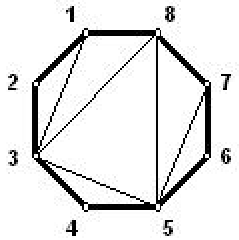
$\overline{13}$ $\overline{15}$ $\overline{16}$ $\overline{17}$ $\overline{35}$



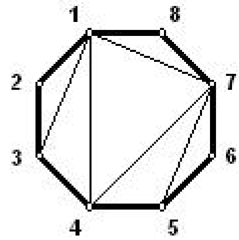
$\overline{13}$ $\overline{38}$ $\overline{47}$ $\overline{48}$ $\overline{57}$



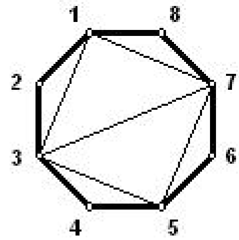
$\overline{13}$ $\overline{15}$ $\overline{17}$ $\overline{35}$ $\overline{57}$



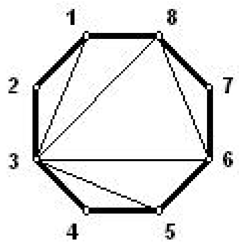
$\overline{13}$ $\overline{35}$ $\overline{38}$ $\overline{57}$ $\overline{58}$



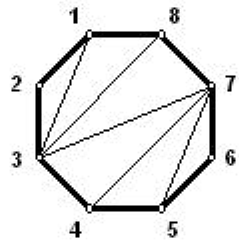
$\overline{13}$ $\overline{14}$ $\overline{17}$ $\overline{47}$ $\overline{57}$



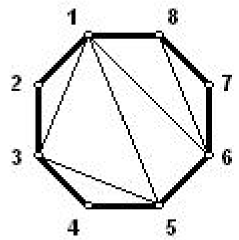
$\overline{13}$ $\overline{35}$ $\overline{57}$ $\overline{17}$ $\overline{37}$



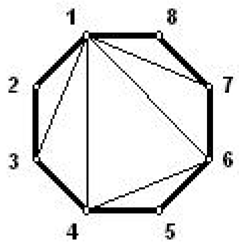
$\overline{13}$ $\overline{35}$ $\overline{68}$ $\overline{38}$ $\overline{36}$



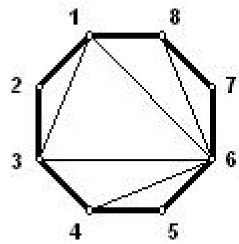
$\overline{13}$ $\overline{57}$ $\overline{38}$ $\overline{37}$ $\overline{47}$



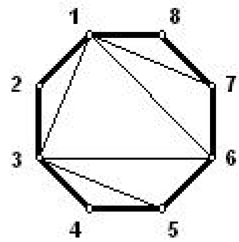
$\overline{13}$ $\overline{15}$ $\overline{16}$ $\overline{35}$ $\overline{68}$



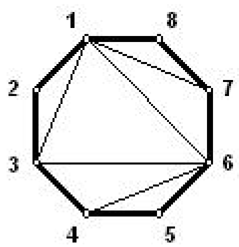
$\overline{13}$ $\overline{14}$ $\overline{16}$ $\overline{17}$ $\overline{46}$



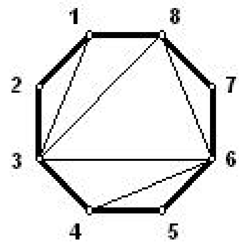
$\overline{13}$ $\overline{16}$ $\overline{36}$ $\overline{46}$ $\overline{68}$



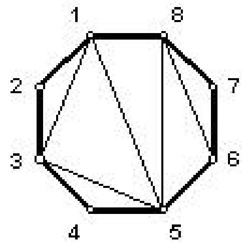
$\overline{13}$ $\overline{16}$ $\overline{17}$ $\overline{35}$ $\overline{36}$



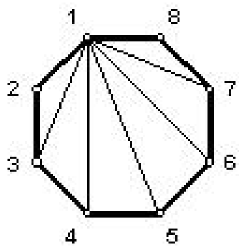
$\overline{13}$ $\overline{16}$ $\overline{17}$ $\overline{36}$ $\overline{46}$



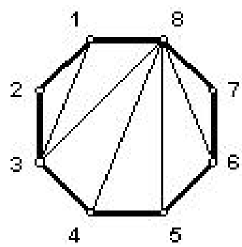
$\overline{13}$ $\overline{36}$ $\overline{38}$ $\overline{46}$ $\overline{68}$



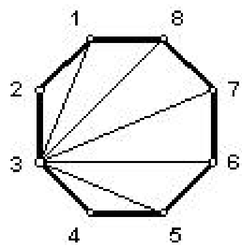
$\overline{13}$ $\overline{35}$ $\overline{15}$ $\overline{58}$ $\overline{68}$



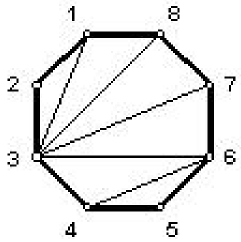
$\overline{13}$ $\overline{14}$ $\overline{15}$ $\overline{16}$ $\overline{17}$



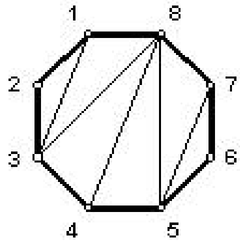
$\overline{13}$ $\overline{38}$ $\overline{48}$ $\overline{58}$ $\overline{68}$



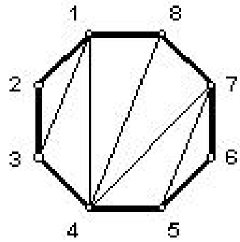
$\overline{13}$ $\overline{38}$ $\overline{37}$ $\overline{36}$ $\overline{35}$



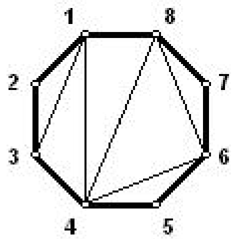
$\overline{13}$
$\overline{38}$
$\overline{37}$
$\overline{36}$
$\overline{46}$



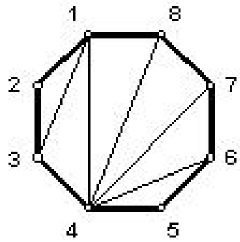
$\overline{13}$
$\overline{38}$
$\overline{48}$
$\overline{58}$
$\overline{57}$



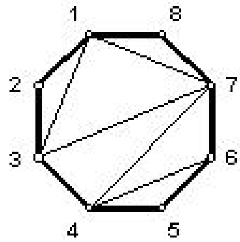
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



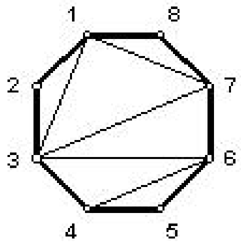
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{46}$
$\overline{48}$
$\overline{68}$



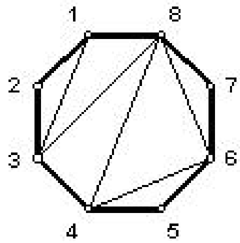
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{47}$
$\overline{46}$



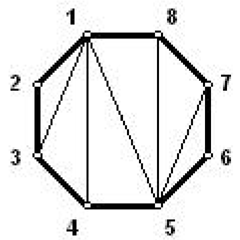
$\overline{13}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$
$\overline{46}$
$\overline{17}$



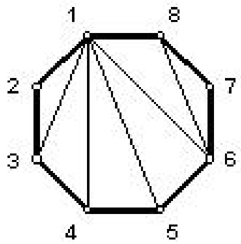
$\overline{13}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$
$\overline{46}$
$\overline{17}$



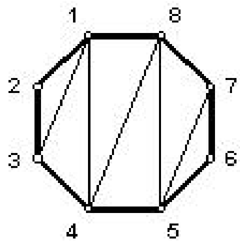
$\overline{13}$
$\overline{38}$
$\overline{48}$
$\overline{46}$
$\overline{68}$



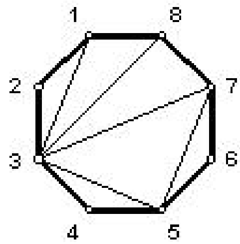
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



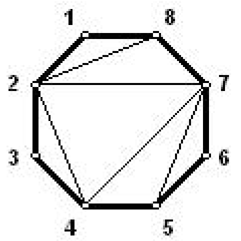
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{68}$



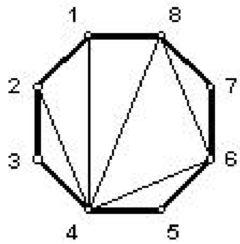
$\overline{13}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



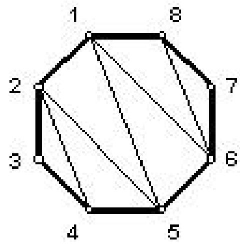
$\overline{13}$
$\overline{38}$
$\overline{37}$
$\overline{35}$
$\overline{57}$



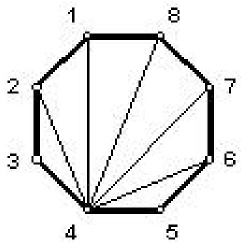
$\overline{24}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



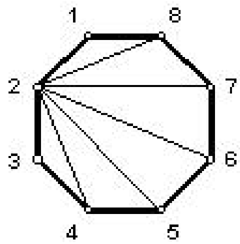
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{46}$
$\overline{68}$



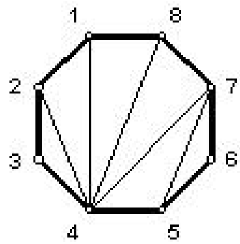
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{68}$



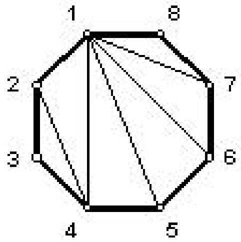
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



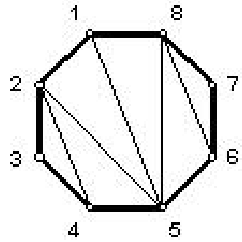
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$



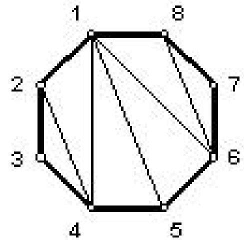
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



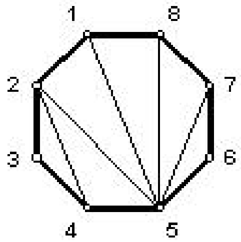
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$



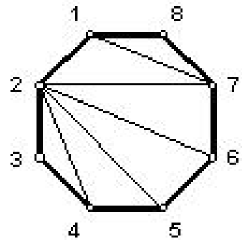
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{15}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



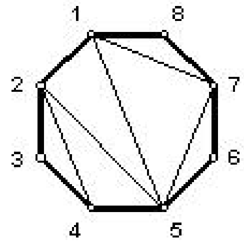
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{68}$



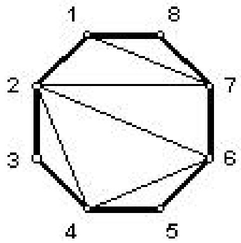
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{15}$
$\overline{58}$
$\overline{57}$



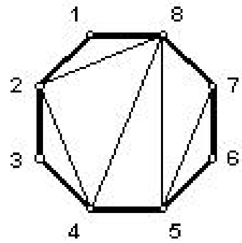
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{17}$



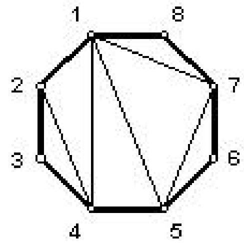
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{15}$
$\overline{57}$
$\overline{17}$



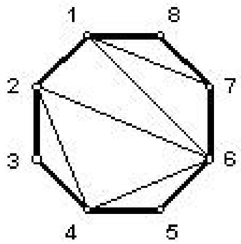
$\overline{24}$
$\overline{46}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{17}$



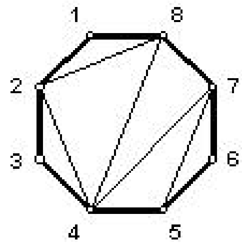
$\overline{24}$
$\overline{57}$
$\overline{28}$
$\overline{48}$
$\overline{58}$



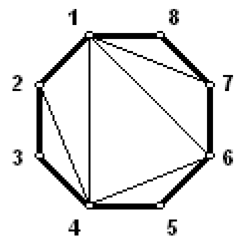
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{17}$
$\overline{57}$



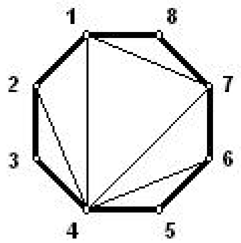
$\overline{24}$
$\overline{26}$
$\overline{46}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$



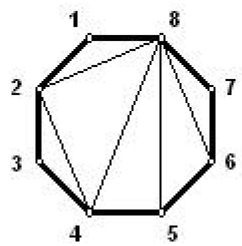
$\overline{24}$
$\overline{47}$
$\overline{48}$
$\overline{57}$
$\overline{28}$



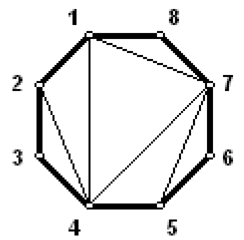
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$
$\overline{46}$



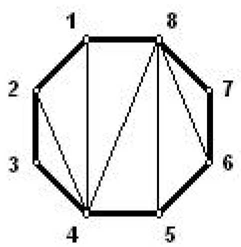
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{17}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



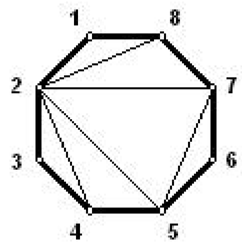
$\overline{24}$
$\overline{48}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$
$\overline{28}$



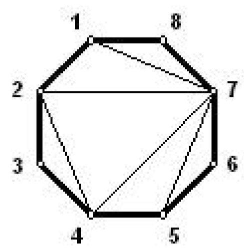
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{17}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



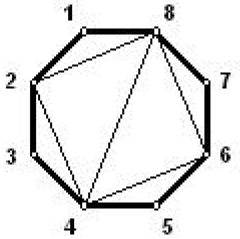
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



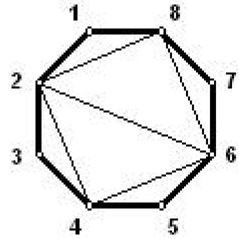
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$
$\overline{57}$



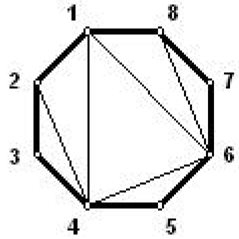
$\overline{24}$
$\overline{17}$
$\overline{27}$
$\overline{47}$
$\overline{57}$



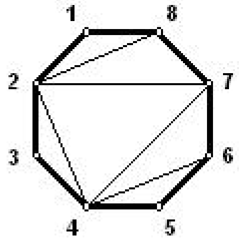
$\overline{24}$
$\overline{28}$
$\overline{46}$
$\overline{48}$
$\overline{68}$



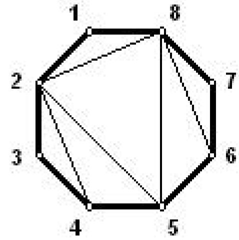
$\overline{24}$
$\overline{46}$
$\overline{68}$
$\overline{28}$
$\overline{26}$



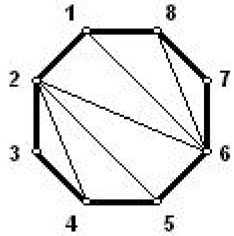
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{16}$
$\overline{46}$
$\overline{68}$



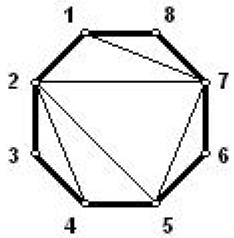
$\overline{24}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



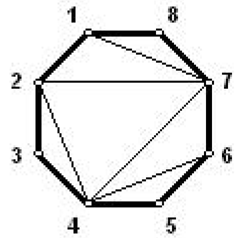
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{28}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



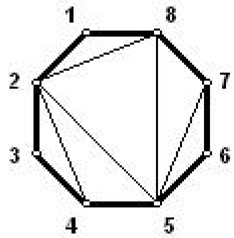
$\overline{24}$
$\overline{16}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{68}$



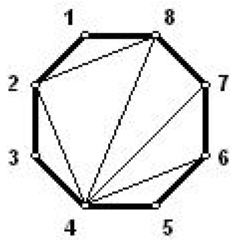
$\overline{24}$
$\overline{17}$
$\overline{25}$
$\overline{27}$
$\overline{57}$



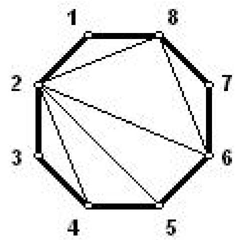
$\overline{24}$
$\overline{17}$
$\overline{27}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$



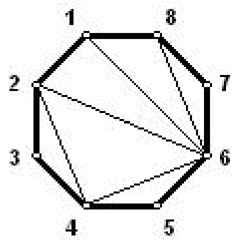
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{28}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



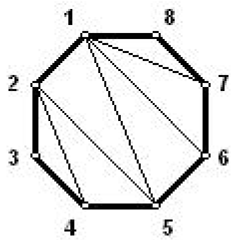
$\overline{24}$
$\overline{28}$
$\overline{46}$
$\overline{47}$
$\overline{48}$



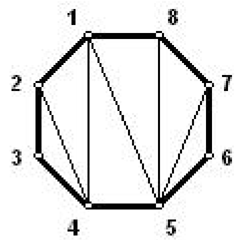
$\overline{24}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{28}$
$\overline{68}$



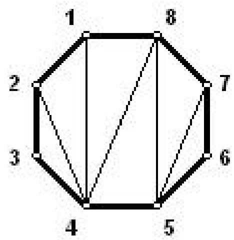
$\overline{24}$
$\overline{16}$
$\overline{26}$
$\overline{46}$
$\overline{68}$



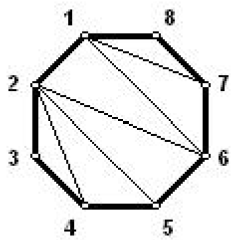
$\overline{24}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$
$\overline{25}$



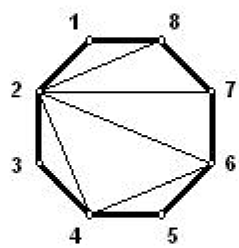
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



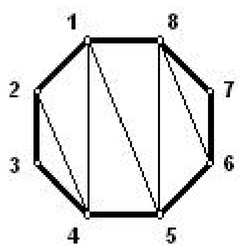
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{48}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



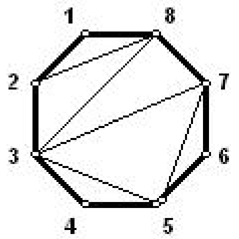
$\overline{24}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$



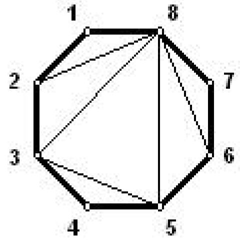
$\overline{24}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$
$\overline{46}$



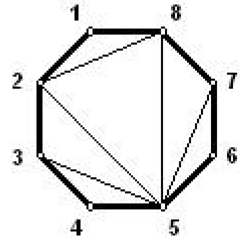
$\overline{24}$
$\overline{14}$
$\overline{15}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



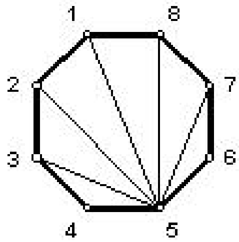
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{37}$
$\overline{38}$
$\overline{57}$



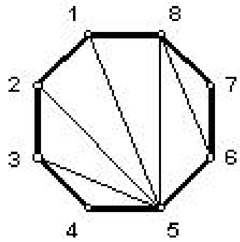
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{38}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



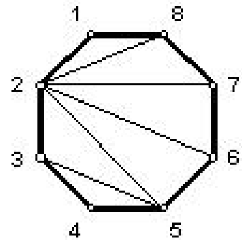
$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{28}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



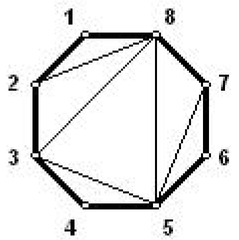
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{25}$
$\overline{58}$
$\overline{57}$



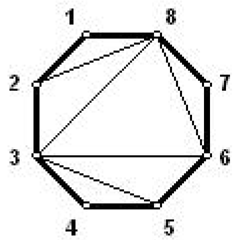
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{25}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



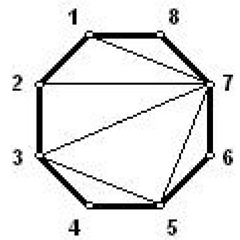
$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$



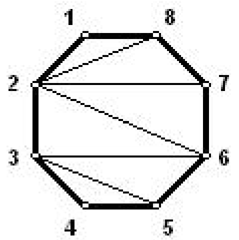
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{38}$
$\overline{57}$
$\overline{58}$



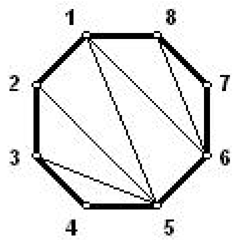
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{36}$
$\overline{38}$
$\overline{68}$



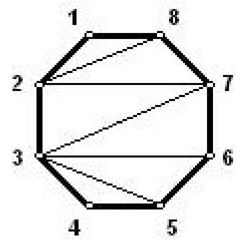
$\overline{35}$
$\overline{17}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{57}$



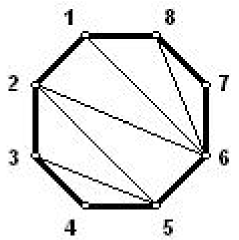
$\overline{35}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$
$\overline{36}$



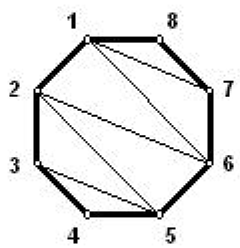
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{25}$
$\overline{68}$



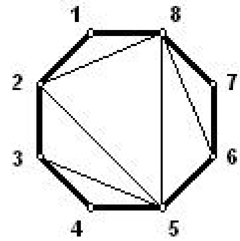
$\overline{35}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$



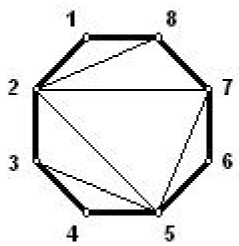
$\overline{35}$
$\overline{16}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{68}$



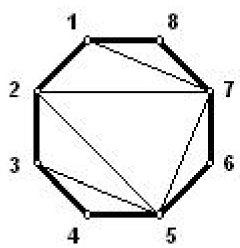
$\overline{35}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$



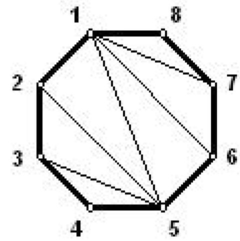
$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{28}$
$\overline{58}$
$\overline{68}$



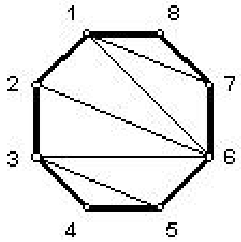
$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{27}$
$\overline{28}$
$\overline{57}$



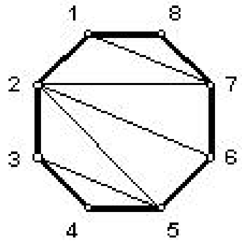
$\overline{35}$
$\overline{17}$
$\overline{25}$
$\overline{27}$
$\overline{57}$



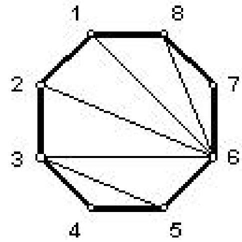
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$
$\overline{25}$



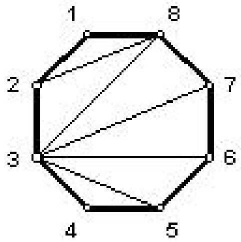
$\overline{35}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$
$\overline{26}$
$\overline{36}$



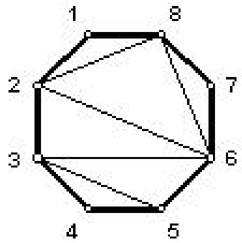
$\overline{35}$
$\overline{25}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{17}$



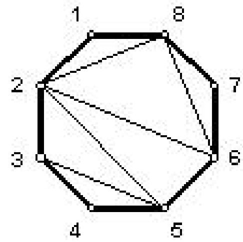
$\overline{35}$
$\overline{36}$
$\overline{26}$
$\overline{16}$
$\overline{68}$



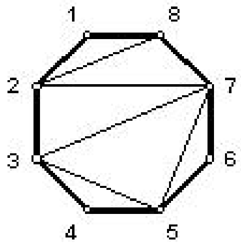
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$
$\overline{38}$



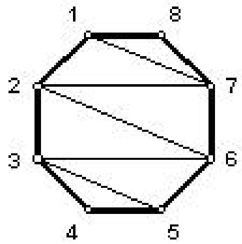
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{26}$
$\overline{36}$
$\overline{68}$



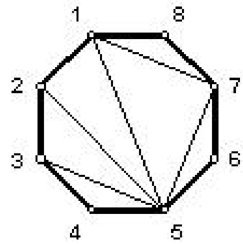
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{26}$
$\overline{25}$
$\overline{68}$



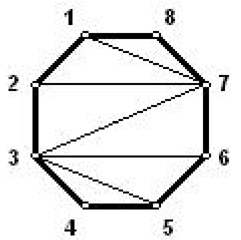
$\overline{35}$
$\overline{28}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{57}$



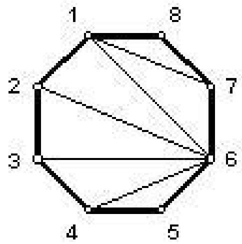
$\overline{35}$
$\overline{17}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{36}$



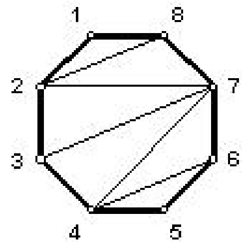
$\overline{35}$
$\overline{15}$
$\overline{17}$
$\overline{25}$
$\overline{57}$



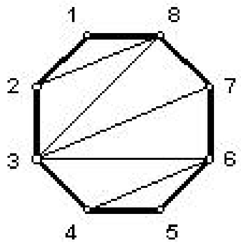
$\overline{35}$
$\overline{17}$
$\overline{27}$
$\overline{36}$
$\overline{37}$



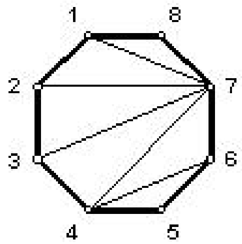
$\overline{46}$
$\overline{16}$
$\overline{17}$
$\overline{26}$
$\overline{36}$



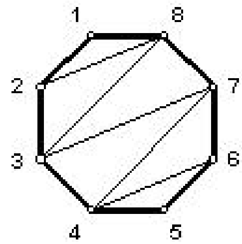
$\overline{46}$
$\overline{28}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$



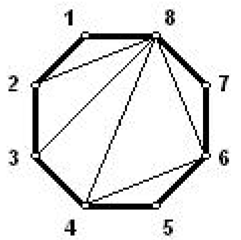
$\overline{46}$
$\overline{28}$
$\overline{38}$
$\overline{37}$
$\overline{36}$



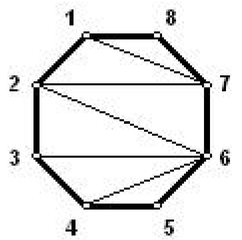
$\overline{46}$
$\overline{17}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$



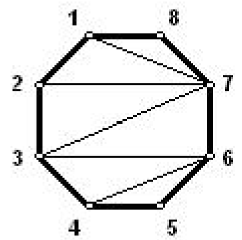
$\overline{46}$
$\overline{28}$
$\overline{38}$
$\overline{37}$
$\overline{47}$



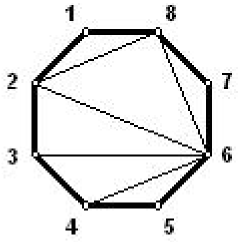
$\overline{46}$
$\overline{28}$
$\overline{38}$
$\overline{48}$
$\overline{68}$



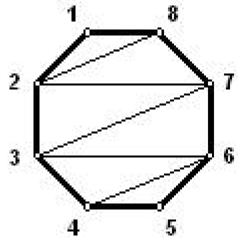
$\overline{46}$
$\overline{17}$
$\overline{26}$
$\overline{27}$
$\overline{36}$



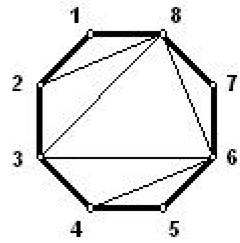
$\overline{46}$
$\overline{17}$
$\overline{27}$
$\overline{37}$
$\overline{36}$



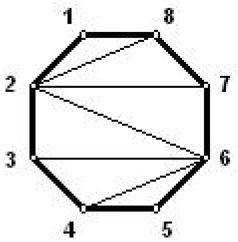
$\overline{46}$ $\overline{36}$ $\overline{26}$ $\overline{68}$ $\overline{28}$



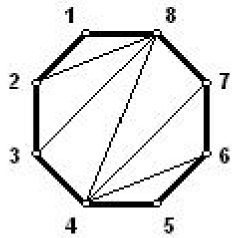
$\overline{46}$ $\overline{36}$ $\overline{37}$ $\overline{27}$ $\overline{28}$



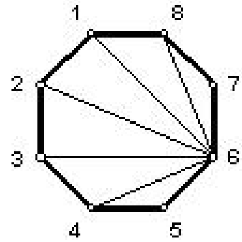
$\overline{46}$ $\overline{36}$ $\overline{68}$ $\overline{38}$ $\overline{28}$



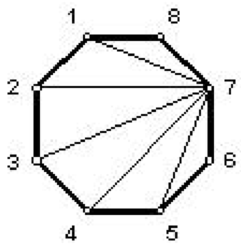
$\overline{46}$ $\overline{36}$ $\overline{26}$ $\overline{27}$ $\overline{28}$



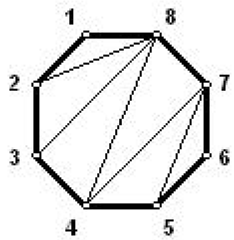
$\overline{46}$ $\overline{28}$ $\overline{38}$ $\overline{47}$ $\overline{48}$



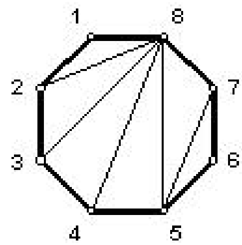
$\overline{46}$ $\overline{16}$ $\overline{26}$ $\overline{36}$ $\overline{68}$



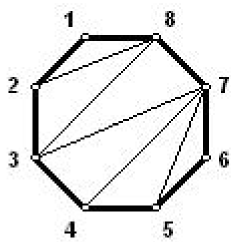
$\overline{57}$ $\overline{17}$ $\overline{27}$ $\overline{37}$ $\overline{47}$



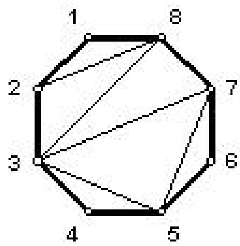
$\overline{57}$ $\overline{28}$ $\overline{38}$ $\overline{47}$ $\overline{48}$



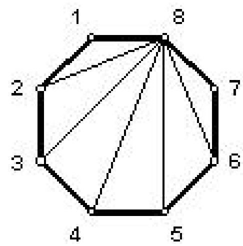
$\overline{57}$ $\overline{28}$ $\overline{38}$ $\overline{48}$ $\overline{58}$



$\overline{57}$ $\overline{28}$ $\overline{37}$ $\overline{38}$ $\overline{47}$



$\overline{57}$ $\overline{28}$ $\overline{38}$ $\overline{37}$ $\overline{35}$



$\overline{68}$ $\overline{28}$ $\overline{38}$ $\overline{48}$ $\overline{58}$

【評　語】　030423　乾坤大挪移---卡特藍數列之研究

本作品對於卡特藍數列的研究投入相當多的心力，兩種等價的計數問題也能清楚表達，美中不足的地方是類似問題的研究已有不少，無法獲得更好的名次。