中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030421

廣義的畢氏定理探討

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳揚叡	陳政暉
國二 朱哲民	林耀南
國二 黃君皓	
國二 林文毅	

關鍵詞：銳角△的畢氏定理　鈍角△的畢氏定理

廣義的畢氏定理

壹、摘要：

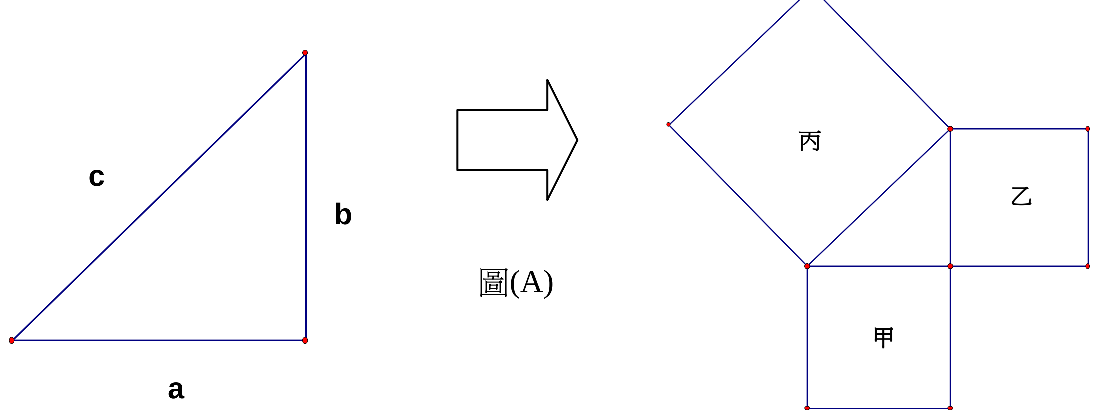
數學刊物從勾股定理談起以長方體的架構，長 x、寬 y、高 z，對角線 w 的概念去討論 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的畢氏數解，本文發現他遺漏了非常多組解。本文作者改以廣義的畢氏定理從平面幾何的概念找出所有畢氏數解。

傳統的畢氏定理只能在直角△上才能使用，本文探討一種廣義的畢氏定理，它適用於任何一種△(包括銳角△、鈍角△、直角△)，這種創新的廣義畢氏定理的靈感來自於直角△中的母子定理所使用的直角△，這種子△和原直角△的三邊依序垂直，銳角△和鈍角△中仍然存在著這種依序和原三角形三邊垂直的子△，文章中透過借用直角△推導畢氏定理相同手法去推導銳角△及鈍角△的畢氏定理，這樣的廣義的畢氏定理型如 $x^2+y^2+z^2=a^2$，(其中 a 代表△任一邊的長，x 和 z 落在另兩邊上，而 y 長的線段和 a 長的線段平行)。

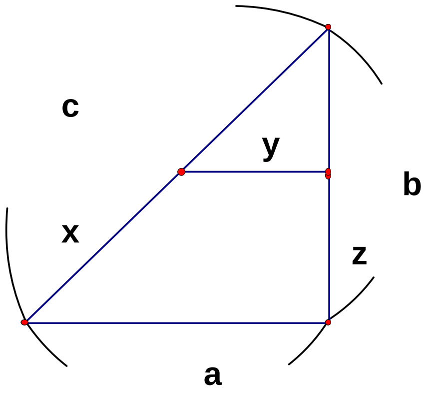
在廣義的畢氏定理條件下，本文探討了正△、等腰△、直角△、銳角△、鈍角△的畢氏數，並找出了那些被遺漏的解，接著解開了四元二次不定方程 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的所有畢氏數解。

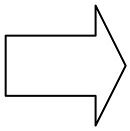
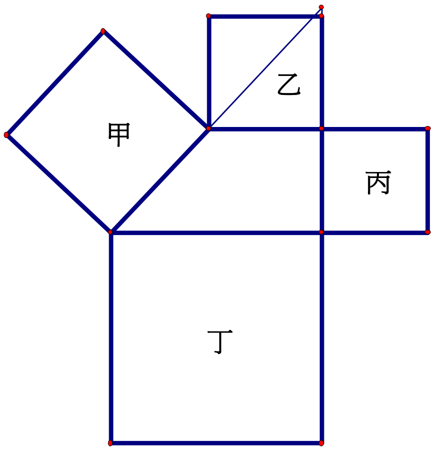
貳、研究動機：

在一般數學刊物中談到勾股數問題的推廣時，總是把 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 中的 x、y、z 分別當成長方體中的長、寬、高，來作比喻，也因爲受限於這個概念，我們在一本刊物從勾股定理談起中看到他的一般解爲 $x=mn$、$y=m^2+mn$、$z=mn+n^2$、$w=m^2+mn+n^2$，其中 m、n 表任意正整數，可是有一位同學很快的發現(12、15、16、25)這一組解並不在裡面，陸陸續續也有一些其他解被發現不在裡面，老師說可能作者誤以爲以長、寬、高討論可以涵蓋全部的解，也許我們應該回到平面的概念重新來考慮它的所有解。老師說在平面幾何上 a^2、b^2、c^2 可以想像成正方形的面積，所以有圖(A)的現象。而這是由斜邊的觀點來看，反應快的小朱立刻插上一句，站在一股的觀點來看，是不是也有類似的畢氏定理呢？對於小朱的說法，大部分同學都說，把 b^2 移項到 c^2 那邊去不就成了，(如 $a^2=c^2-b^2$)，可是小朱說那就沒意思了，應該說是要像圖(B)那樣，在股與斜邊之間搭一座橋 y，使 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 比較有意思，老師誇獎地說，這等於是把立體的概念解平面化了，也許你們可以把直角△的畢氏定理推廣到銳角△或鈍角△去呢！大夥兒聽了後躍躍欲試，很想找出答案。



圖(A)



圖(B)

參、研究目的：

一、探討銳角△的畢氏定理。

二、探討鈍角△的畢氏定理。

三、探討完整的廣義的畢氏定理。

四、利用廣義的畢氏定理探討各種特殊△的畢氏定理的速畫法及其畢氏數。

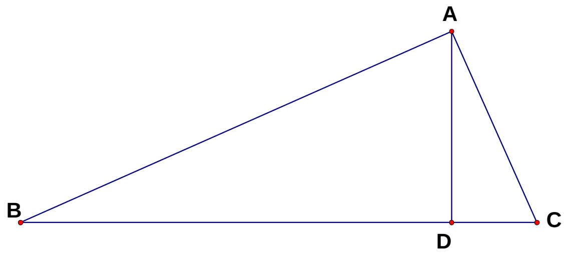
五、探討四元二次不定方程 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 非負的完全畢氏數解。

肆、研究過程：

一、理論探討：

(一)、檢視畢氏定理的證明

在相似△的課程中，介紹了一種畢氏定理的證明法，首先從直角△的直角頂 A，畫一垂直線 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，如圖(1)



圖(1)

由△ABD～△ABC 得 $\overline{BA}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}$ ……①

由△CAD～△CAB 得 $\overline{CA}^2=\overline{CD}\times\overline{CB}$ ……②

將①、②式相加得 $\overline{BA}^2+\overline{CA}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}+\overline{CD}\times\overline{CB}$

$=(\overline{BD}+\overline{CD})\times\overline{BC}$

$=\overline{BC}\times\overline{BC}$

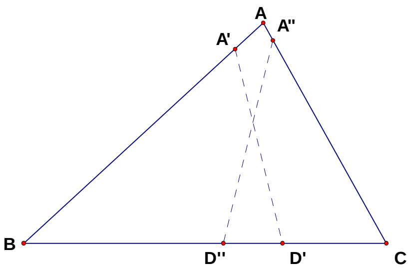
$=\overline{BC}^2$

簡單扼要的導出了畢氏定理，如圖(1)，這完全歸功於直角△中這兩個相似子△(△ABD及△ACD)處在那麼恰當的位置所致，但銳角△中有這種現象嗎？我們好奇的是銳角△或鈍角△中還有這些子△嗎？它們要如何畫出來？

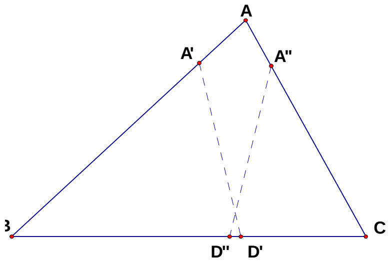
回頭檢查圖(1)中兩個子△，若∠BAC 被壓縮而小於 90°時，那兩個子△(△DAB、△DAC)

會被擠壓到哪裡去呢，我們猜想 $\overline{AD}$ 可能會拆開成 $\overline{A'D'}$ 及 $\overline{A''D''}$ 並維持△ $A'D'B$ ～△ABC 及△ $A''D''C$ ～△ABC，並且與圖(1)比較，$\angle A'D'B = \angle$A，$\angle A''D''C = \angle$A，$\angle BA'D' = \angle$C，$\angle CA''D'' = \angle$B。

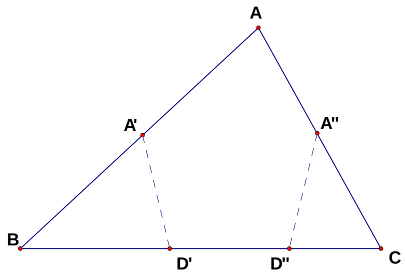
根據這些資料，我們試畫了很多遍，如圖(2-1)、(2-2)、(2-3)：



圖(2-1)



圖(2-2)



圖(2-3)

從上面三個猜想圖中，我們懷疑，在銳角△中應該會有第三個子△，也許是△ $AA'A''$ 吧。

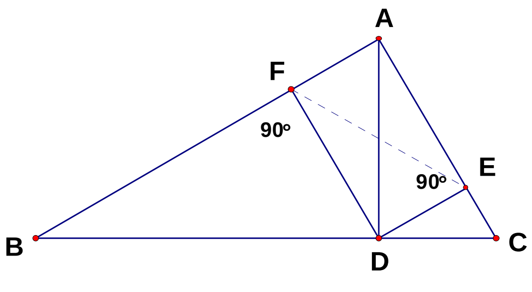
觀察圖(1)的直角△，它有兩個子△，如△ABD 和△ACD，但在圖(3)中另一種子△也有可能是△BDF，△CDE 和△AEF 等，不論是哪一組可能的子△候選者，我們在圖(3)中都可以發現到 D、E、F 這三點應該是所謂的關鍵點，而這三個點在直角△中偏偏非常容易找到，首先從直角 A 點畫出斜邊上的高 $\overline{AD}$，再分別從 D 點往兩股方向畫出垂線，即可馬上找到 E 和 F 點，因而快速地找到那些子△。

在第一組候選者△ABD 與△ACD 中，我們發現利用這兩個子△去推證畢氏定理時用到一個關鍵的關係式 $\overline{DB}+\overline{DC}=\overline{BC}$ 及另一個關係式 $\overline{DA}^2=\overline{DB}\times\overline{DC}$ 都和 D 有關。而在第二組候選者△AEF、△BDF、△CDE 中，我們也發現 $\overline{FA}\times\overline{FB}+\overline{EA}\times\overline{EC}=\overline{DB}\times\overline{DC}$ ，它和 D、E、F 三點也有關。

結論：

由檢視畢氏定理及子△的位置關係發現找尋銳角△或鈍角△的類似畢氏關係式應該和找尋對應的 D、E、F 有關。

(二)、在直角△中，我們發現一種三邊依序垂直母△三邊的內接△



圖(3)

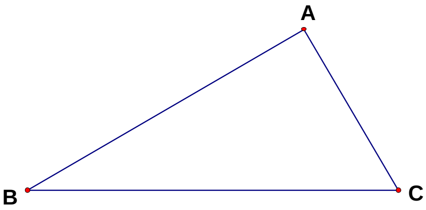
在圖(3)中，我們發現 $\overline{DE}\perp\overline{CA}$ ，$\overline{EA}\perp\overline{BA}$ ，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ，這△ADE 三邊似乎輪流垂直

原△ABC 的三邊，同理△DFA 也是如此，這暗示若要找到 D、E、F 三點，應該要先找到△DEA 及△DFA 這種分別與原△三邊垂直的△。這在銳角△及鈍角△中似乎不那麼容易，因此我們再回到直角△來探索，先任取一個直角△ABC，我們使用課本中教到的投影法試著看是否可以投出△DEA 及△DFA，作法如下：

已知：直角△ABC，∠A=90°，如圖(4)

求作：利用投影法作出△DEA 及△DFA，

使三邊分別垂直於△ABC 的三邊。



圖(4)

作法：(1)在 $\overline{BA}$ 上任取一點 P ，作 $\overline{PD'} \perp \overline{BC}$ 於 D'

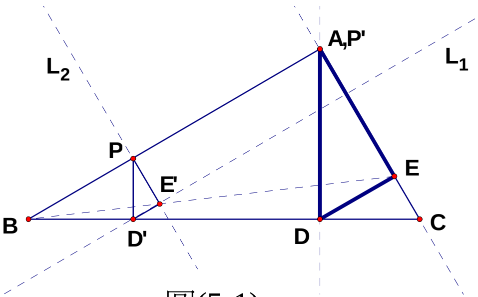
(2)過 D' 作直線 $L_1 \perp \overline{AC}$

(3)過 P 作直線 $L_2 \perp \overline{AB}$ ，交 L_1 於 E' 點

(4)以 B 為投射點，作 $\overleftrightarrow{BE'}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E 點

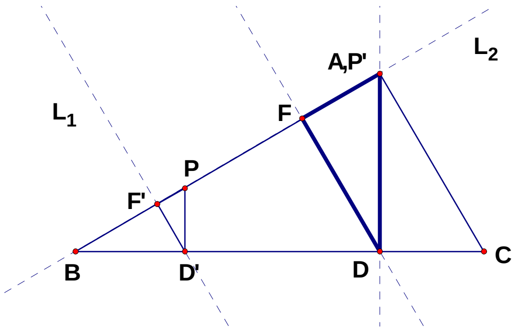
(5)過 E 點作 $\overline{EP'} // \overline{E'P}$ ， $\overline{ED} // \overline{E'D'}$

(6)連 $\overline{P'D}$ ，則△ DEP' 即為所求，如圖(5-1)



圖(5-1)

由畫出的投影△ DEP' 中，我們發現 $\overline{EP'}$ 和 $\overline{EA}$ 重合，也就是說其實△ DEP' 就是△DEA，同理我們也畫出△ DFP' ，如圖(5-2)，我們也發現其實△ $DFP' \cong$ △DFA。



圖(5-2)

在畫圖(5-1)和圖(5-2)時，我們發現當我們畫出 $\overline{PD'} \perp \overline{BC}$ 後，我們也只有兩種畫這被當投影用的小直角△可以畫出來，也就是說我們只能投影出兩種垂直三邊的△，一個是順時針垂直，一個是逆時針垂直。

結論： 直角△中存在兩種依序垂直三邊的△，一個是順時針垂直，一個是逆時針垂直。

(三)、尺規作圖畫出三邊依序垂直銳角△三邊的內接△

模仿上述直角△的畫法，試試看能否在銳角△中畫出那種垂直三邊的三角形，並檢查那些可能的子△存在嗎？作法如下：

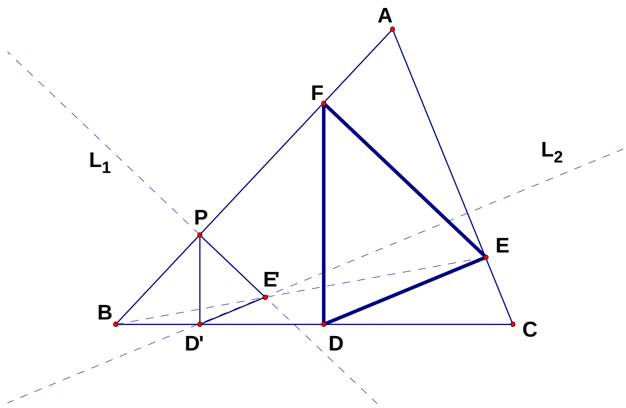
已知: 銳角△ABC，如圖(6)
求作: 畫出與三邊垂直的△

作法: (1) 任作 $\overline{PD'} \perp \overline{BC}$

(2) 分別過 P，D' 兩點，作直線 L_1，L_2 垂直 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$

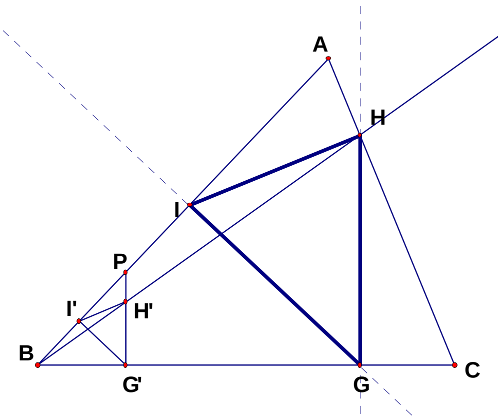
並設 L_1、L_2 交於 E'

(3) 以 B 爲投射點，將△$PD'E'$ 投射成內接△DEF，則△DEF 即爲所求

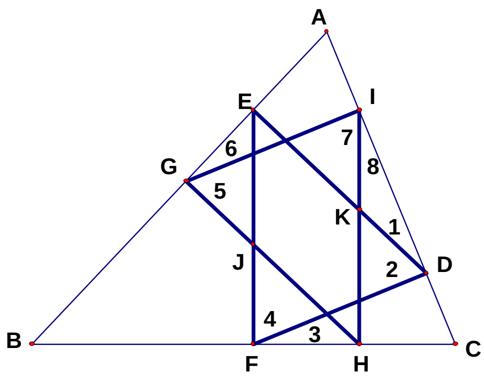


圖(6)

依照同樣的方法我們再畫出逆時針垂直的內接△，如圖(7)。



圖(7)



圖(8)

當我們把順時針及逆時針的△放在一起時，好像會相似，以下是我們的證明：

已知：△ABC 中，$\overline{DE} \perp \overline{AB}$，$\overline{EF} \perp \overline{BC}$，$\overline{FD} \perp \overline{AC}$，$\overline{GH} \perp \overline{AB}$，$\overline{HI} \perp \overline{BC}$，$\overline{GI} \perp \overline{AC}$，

如圖(8)

求證：△DEF～△GHI～△ABC

證明：(1)∵∠1+∠2=90° 又∠1+∠A=90°

∴∠2=∠A

∵∠3+∠4=90° 又∠3+∠C=90°

∴∠4=∠C

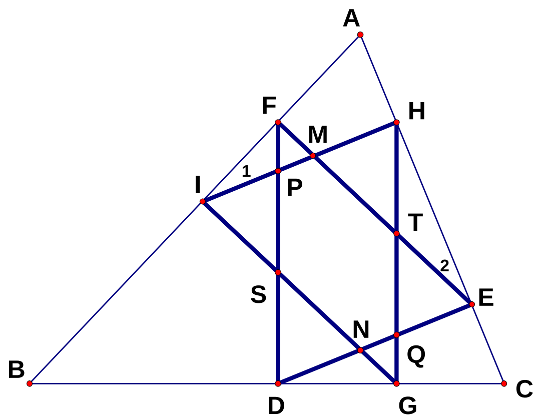
∴△DEF～△ABC

(2)同理，∠5=∠A、∠7=∠C

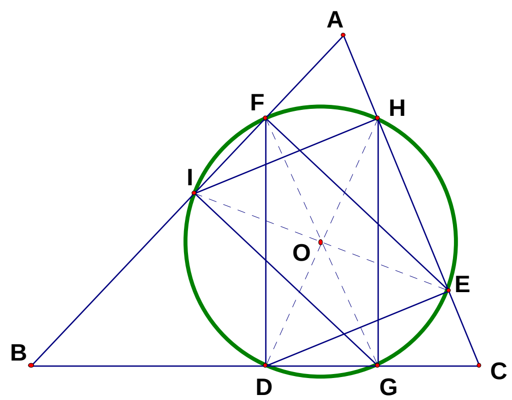
∴△GHI～△ABC(AA)　　∴△DEF~△GHI~△ABC

經過上述的證明後，我們發現△DEF、△GHI 均與原△ABC 相似。

我們立即想到，這兩個內接△會全等嗎？我們用 GSP 試過會全等，因此試著證明如下：



圖(9)



圖(10)

首先我們要先來證明 F、I、D、G、E、H 六點共圓。

已知：△DEF 和△GHI 皆爲三邊依序垂直△ABC 的內接△，如圖(9)

求證： F、I、D、G、E、H 六點共圓

證明：(1)連 $\overline{FH}$ 、$\overline{ID}$ 、$\overline{GE}$

(2)由前文中的性質知△DEF～△HIG

∴∠HIG=∠DEF……①

(3)由 $\overline{GI} \perp \overline{AB}$ 、$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ 知

∠1+∠HIG=∠2+∠DEF=90°……②

(4)由①②知∠1=∠2

因此由同圓周角性質知 I、F、H、E 四點共圓……③

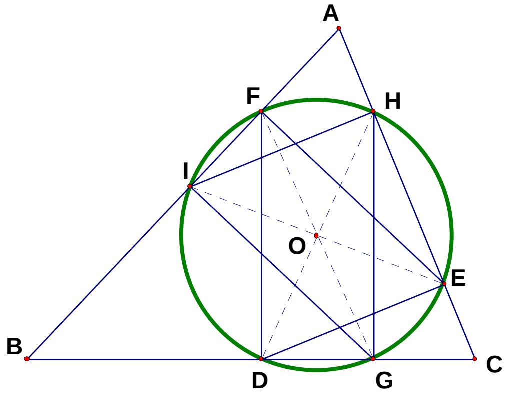
(5)同理可證 F、H、E、G 四點共圓……④

(6)由③④推得 I、F、H、E、G 五點共圓

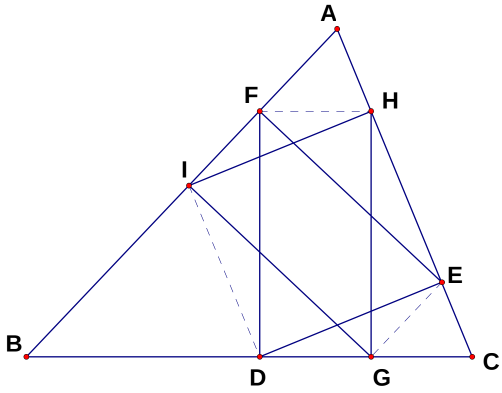
(7)又由 H、E、G、D 四點共圓，可以推得 I、F、H、E、G、D 六點共圓，如圖(10)。

在上述證明的過程中，很明顯的可得知四邊形 IFEG、四邊形 DFHG、四邊形 IHED 爲矩形，因此六條對角線相交於同一點，設爲 O，此點必爲此共圓的圓心，而 $\overline{IE}$ 、$\overline{FG}$ 、$\overline{HD}$ 皆爲其直徑。

當我們證明出 I、F、H、E、G、D 六點共圓後，我們就可輕易的證明內接△DEF 以及內接△HIG 必全等。說明如下：



圖(11)



圖(12)

已知：△ABC 爲銳角△，△DEF 和△HIG 分別是三邊依序逆時針與順時針垂直原△ABC 三邊的內接△

求證：△DEF≅△HIG，如圖(11)

證明：(1)∵I、F、H、E、G、D 六點共圓且圓心爲 O

∴$\overline{FG}$ 和 $\overline{HD}$ 皆爲直徑

∴∠HFD=∠FHG=90°

∴圓內接四邊形 DFHG 必爲矩形

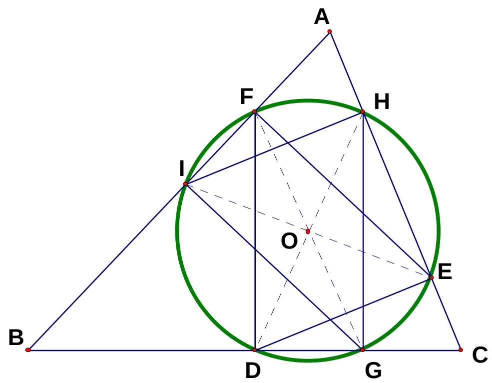
∴$\overline{FD}=\overline{HG}$

(2)同理 $\overline{FE}=\overline{IG}$ ，$\overline{DE}=\overline{IH}$

因此△DEF≅△HIG(SSS 全等)

特別值得一提的是在此證明中我們知道 $\overline{FH}//\overline{BC}$ 、$\overline{EG}//\overline{AB}$ 、$\overline{ID}//\overline{AC}$ ，如圖(12)，而這個「平行概念」在往後我們研究「廣義的畢氏定理」及「快速畫法」中有很大的幫助。

當我們將上文中的六點共圓的圓畫出來後，我們終於發現尋找已好幾個月了的子△，它們就是△BFG、△CHD 和△AIE，以下證明：



圖(13)

已知：如圖(13)，I、F、H、E、G、D 六點共圓，圓心為 O

求證：△BFG～△BCA　△CHD～△CBA　△AIE～△ACB

證明：(1)首先我們要證明△BFG～△BCA

$\because \angle BFG = \frac{1}{2}\overset{\frown}{IDG}$

又 $\angle BCA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DIFH} - \overset{\frown}{GE})$

$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DG} + \overset{\frown}{HE})$

$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DG} + \overset{\frown}{ID})$　　$(\because \overline{IH} // \overline{DE})$

$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{IDG}$

$\therefore \angle BFG = \angle BCA$

(2)由∠B=∠B 及∠BFG=∠BCA

∴△BFG～△BCA(AA 相似)

(3)同理可證△CHD～△CBA 及△AIE～△ACB

經由這個證明後我們可以肯定△BFG、△CHD 及△AIE 必為銳角△ABC 的三個子△，也可以肯定直角△中的兩個子△是△ABD 及△ACD，而∠A 附近的子△應該是退化掉了。

結論：

利用投影法作出順時針及逆時針垂直母△三邊的內接△，並找出銳角△中關鍵的三個子△。

(四)、發現銳角△各邊的廣義畢氏定理

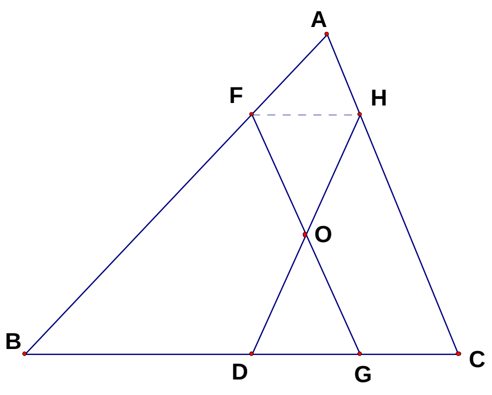
由於數學課時老師曾利用直角△那兩個子△的對應邊長比例關係式而導出直角△的畢氏定理，毫無疑問的我們可以大膽的猜想在銳角△中一樣可以利用這三個子△來導出銳角△的畢氏定理，說明如下：

已知：△ABC 為銳角△，△DEF 和△GHI 為三邊依序垂直△ABC 的△

求證：$\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FH}^2 + \overline{HC}^2$　如圖(14)

$\overline{CA}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{ID}^2 + \overline{DC}^2$

$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{GB}^2$



圖(14)

證明：(1) $\because \overline{FH} // \overline{BC}$　∴△AFH～△ABC

又△GBF～△ABC，△DHC～△ABC

∴△AFH～△GBF～△DHC～△ABC

∴△AFH 面積：△GBF 面積：△DHC 面積：△ABC 面積

$= \overline{FH}^2 : \overline{BF}^2 : \overline{HC}^2 : \overline{BC}^2$ (相似形的面積比=對應邊長的平方比)

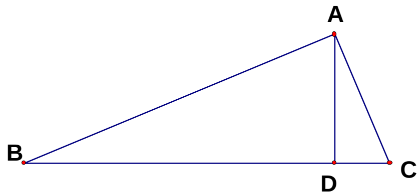
(2)觀察△ABC 面積
=△GBF 面積+△DHC 面積+AFOH 面積-△ODG 面積
=△GBF 面積+△DHC 面積+△AFH 面積+△OFH 面積-△ODG 面積
=△GBF 面積+△DHC 面積+△AFH 面積　(∵△OFH≅△ODG)

$\therefore \overline{BC}^2 k=\overline{BF}^2 k+\overline{HC}^2 k+\overline{FH}^2 k$

$\therefore \overline{BC}^2=\overline{BF}^2+\overline{HC}^2+\overline{FH}^2$　得證

(3)同理可證 $\overline{CA}^2=\overline{AI}^2+\overline{ID}^2+\overline{CD}^2$ 、 $\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{BG}^2$

以上這三個關係式即爲**銳角△的畢氏定理**，我們拿另一種直角△的畢氏定理的證明法來和它們比較：



圖(15)

如圖(15)是直角△ABC，∠A=90°，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，觀察利用面積推導畢氏定理證明法如下：

由於△BDA～△ADC～△BAC
∴△BDA 面積：△ADC 面積：△BAC 面積

$=\overline{BA}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$

又由△BAC 面積=△BDA 面積+△ADC 面積

$\therefore \overline{BC}^2 k=\overline{BA}^2 k+\overline{AC}^2 k$

$\therefore \overline{BC}^2=\overline{BA}^2+\overline{AC}^2$

此即爲畢氏定理，而因爲直角△BAC 中的頂點 A 處的子△已退化掉，所以面積爲零，若我們假設它存在的話，應該有一平行底邊的平行線段，只是現在這平行線段長爲零，所以說 $\overline{BC}^2=\overline{BA}^2+0^2+\overline{AC}^2$ 應該是較完整的畢氏定理的型式，而我們上文中的銳角△畢氏定理的證明和此處之證明完全相同，因此我們敢大膽的說，我們已經找到銳角△的畢氏定理了。

結論：銳角△三邊的畢氏定理型式爲 $\overline{BC}^2=\overline{BF}^2+\overline{FH}^2+\overline{HC}^2$ ， $\overline{FH}\,//\,\overline{BC}$

$\overline{CA}^2=\overline{AI}^2+\overline{ID}^2+\overline{CD}^2$ ， $\overline{ID}\,//\,\overline{AC}$

$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{BG}^2$ ， $\overline{EG}\,//\,\overline{AB}$

(五)、發現直角△兩股的廣義畢氏定理

如圖(16)，在直角△ABC 中，∠A=90°，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，$\overline{DE} \perp \overline{AB}$

試證：短股$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{DC}^2$，$\overline{ED} // \overline{AC}$

證明：∵△ABC～△EDA～△EBD～△DAC

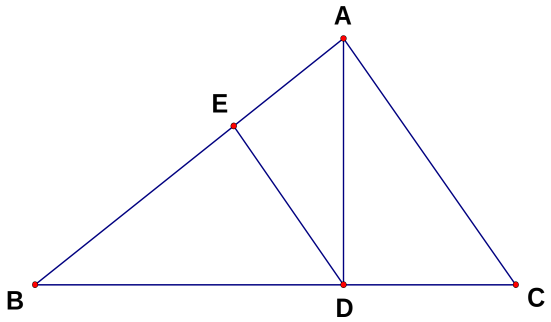
∴△ABC：△EDA：△EBD：△DAC=$\overline{AC}^2$：$\overline{AE}^2$：$\overline{ED}^2$：$\overline{DC}^2$

又△ABC 面積=△EDA 面積+△EBD 面積+△DAC 面積

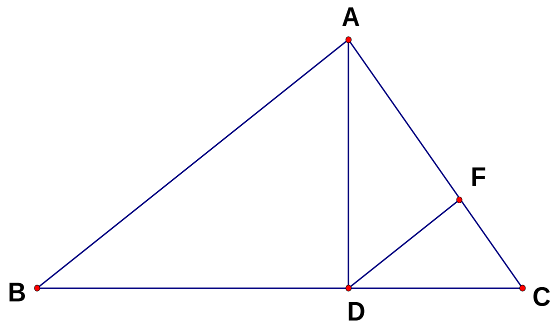
$\therefore \overline{AC}^2 k = \overline{AE}^2 k + \overline{ED}^2 k + \overline{DC}^2 k$

$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{DC}^2$ 此即爲直角△ABC 中短股$\overline{AC}$的畢氏定理。

同理很容易的我們可以導出長股$\overline{AB}$的畢氏定理爲$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FD}^2 + \overline{DB}^2$，如圖(17)



圖(16)



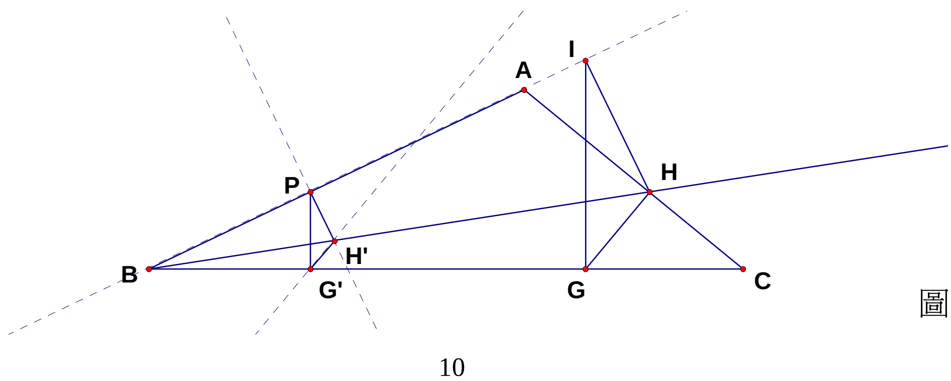
圖(17)

結論：直角△短股畢氏定理爲$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{DC}^2$，$\overline{ED} // \overline{AC}$

長股畢氏定理爲$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FD}^2 + \overline{DB}^2$，$\overline{FD} // \overline{AB}$

(六)、尺規作圖畫出三邊依序垂直鈍角△三邊的內接△

接下來我們要來探討當頂點爲鈍角的鈍角△的奧秘，我們也嘗試畫出和原△三邊依序垂直的內接△，雖然因爲鈍角的關係以致有個交點落在延長線上，跑到原△外部去了，但我們還是可以將它畫出，作法如下：



圖(18)

已知：△ABC 中∠A＞90°，如圖(18)

求作：畫出一個依序垂直原△三邊的△

作法：(1)在 $\overleftrightarrow{BA}$ 任取一點 P，作 $\overline{PG'}\perp\overline{BC}$

(2)過 P 作 $\overline{PH'}\perp\overline{BA}$，過 G' 作 $\overleftrightarrow{G'H'}\perp\overleftrightarrow{CA}$，得△ $PG'H'$

(3)以 B 為投射點，作 $\overleftrightarrow{BH'}$ 交 $\overline{CA}$ 於 H

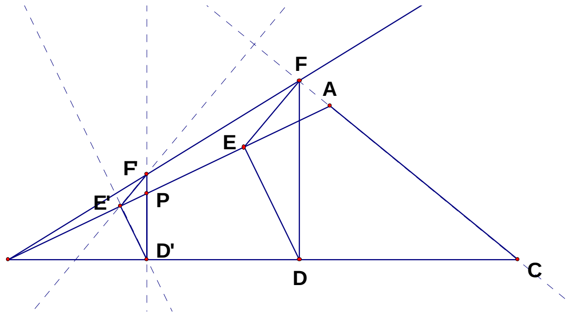
(4)作 $\overline{HI}\,//\,\overline{H'P}$ 交 $\overleftrightarrow{BA}$ 於 I

(5)作 $\overline{HG}\,//\,\overline{H'G'}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G

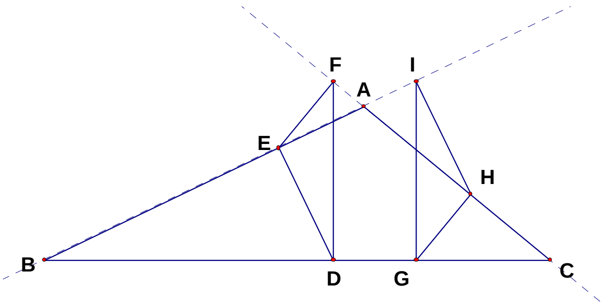
(6)連 $\overline{IG}$，則△GHI 即為所求

證明：因△ $PG'H'$ 三邊依序垂直△ABC 的三邊，而△GHI 是以 B 為投射點所作之相似△，當然△GHI 的三邊也依序垂直原△的三邊。

觀察圖(18)中的△GHI，他很明顯的以逆時針方向依序垂直△ABC，顯然的我們也可以以相同的方法畫出一個以順時針方向依序垂直△ABC 的△。如圖(19)所示，△DEF 即為以順時針方向依序垂直原△ABC 三邊直線的△。

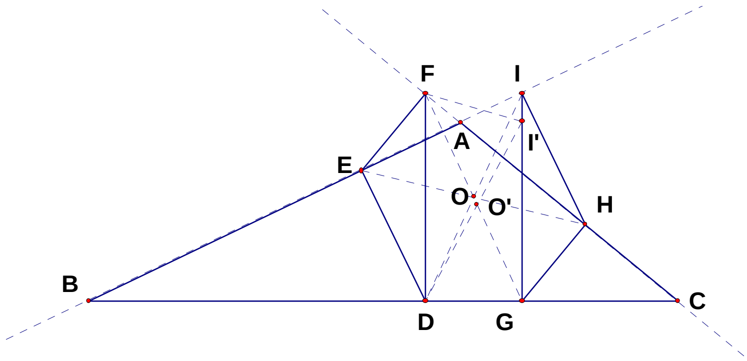


圖(19)



圖(20)

接下來我們同樣的相信這兩個△，△DEF 和△GHI 會全等，如圖(20)，且就如同在銳角△中那樣 G、H、I、F、E、D 六點也會共圓，只是我們發現無法如法炮製使用銳角△中的方法加以證明，但不氣餒的我們另外找一種共圓的證明法，敘述如下：



圖(21)

已知：△ABC 爲鈍角△，∠BAC＞90°，△DEF 和△GHI 分別爲順時針及逆時針依序垂直原△ABC 三邊的△，如圖(20)。

求證：(1)△DEF≅△IHG

(2)D、E、F、G、H、I 六點共圓。

證明：(1)∵ $\overline{FI}$ 與 $\overline{DG}$ 只有平行或不平行兩種可能，如圖(21)

(2)若 $\overline{FI}$ 平行 $\overline{DG}$

∵ $\overline{FD} \perp \overline{BC}$ ，$\overline{IG} \perp \overline{BC}$

∴ $\overline{FD} // \overline{IG}$ 　∴FDGI 爲平行四邊形

又∠FDG=90° 　∴FDGI 爲矩形

∴F、D、G、I 四點共圓

又∠IED=90° 　∴E 亦在該共圓上

同理 H 亦在該共圓上

∴D、E、F、G、H、I 六點共圓……①

(3)若 $\overline{FI}$ 不平行 $\overline{DG}$

可從 F 點，作 $\overline{FI'} // \overline{DG}$ 交於 I' 點

同理 F、D、G、I' 四點共圓

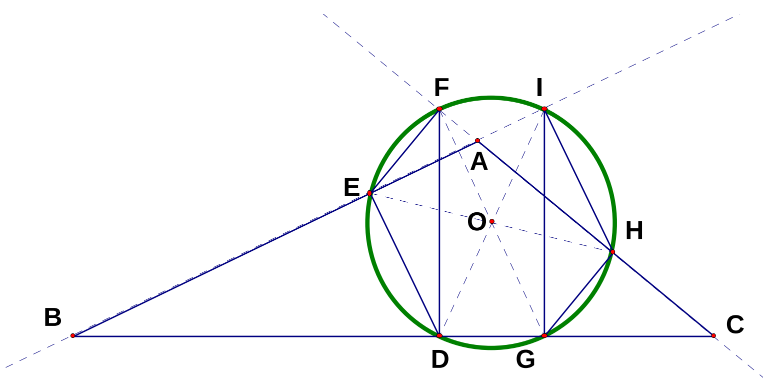
又∠FHG=90°

∴H、F、D、G、I' 五點共圓……②

(4)不論是①式之共圓的圓，或是②式之共圓的圓，因爲兩者至少重複 H、F、D、G 四點，因此這兩個共圓的圓明顯的是同一個圓。故 I 與 I' 應該是同一點，因此得證 D、E、F、G、H、I 六點共圓。

(5)由 FDGI 爲矩形，得知 $\overline{FD} = \overline{IG}$ ，也很容易的就能證出△DEF≅△IHG

就如同在銳角△的現象，當我們證出 D、E、F、G、H、I 六點共圓後，那三個子△立即呈現出來了，他們就是△BID、△CFG 和△AEH。證明如下：



圖(22)

已知：鈍角△ABC，如圖(22)，∠BAC＞90°，D、E、F、G、H、I 六點共圓
求證：△BID～△BCA　　△CFG～△CBA　　△AEH～△ACB

證明：(1)連 $\overline{FI}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{ID}$ 、 $\overline{EH}$

(2)∵FDGI 爲矩形

∴令 $\overline{FG}$ 和 $\overline{ID}$ 交於 O，O 爲六點共圓的圓心

(3)∵EFIHGD 爲平行六邊形

∴ $\overline{EF}=\overline{GH}$ ， $\overline{ED}=\overline{IH}$ ， $\overline{FI}=\overline{DG}$

∴ $\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{GH}$ ， $\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{IH}$ ， $\overset{\frown}{FI}=\overset{\frown}{DG}$

(4)∵∠C 爲圓外角

∴ $\angle C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{FED}-\overset{\frown}{GH})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED}-\overset{\frown}{GH})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}=\angle BID$

又∠B=∠B

∴△BID～△BCA，同理△CFG～△CBA

(5)∵∠C=∠BID(已證)

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}$

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{IH}$

=∠AEH

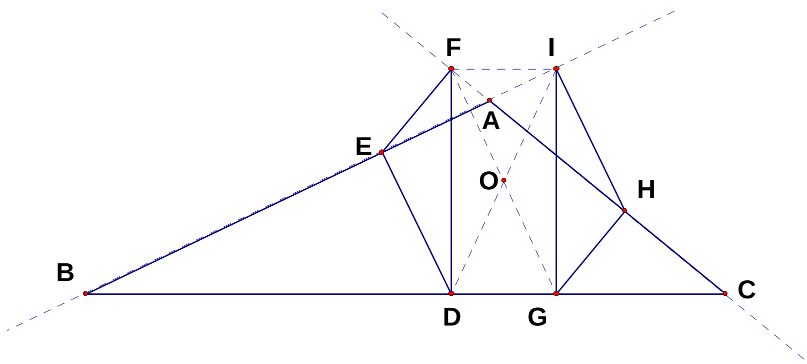
∴△AEH～△ACB(AA)

經過這個證明後，我們確定△BID、△CFG 及△AEH 即爲鈍角△的三個子△。

結論：

利用投影法作出垂直母△三邊(延長線)的內接△，並找出鈍角△中關鍵的三個子△。

(七)、發現鈍角△各邊的廣義畢氏定理



圖(23)

已知：△ABC 爲鈍角△，∠A＞90°，△BID，△CFG 及△AEH 爲其三個子△，如圖(23)

求證：$\overline{BC}^2=\overline{BI}^2+\overline{CF}^2+\overline{FI}^2$

證明：(1)如同在作圖中敘述，我們知道 FIGD 爲矩形

$\therefore \overline{FI} // \overline{BC}$

∴△AFI~△ACB

又∵△BID~△BCA　△CFG~△CBA，△AEH~△ABC

∴△AIF~△DBI ~△GFC~△ABC

∴△AIF 面積：△DBI 面積：△GFC 面積：△ABC 面積

$=\overline{IF}^2：\ \overline{BI}^2：\ \overline{CF}^2：\ \overline{BC}^2$

(2)觀察 ABC 面積

=△DBI 面積+△GFC 面積+△ODG 面積-凹四邊形 FOIA 面積

=△DBI 面積+△GFC 面積+△OFI 面積-凹四邊形 FOIA 面積

=△DBI 面積+△GFC 面積+△AIF 面積……①

∴令△AIF 面積=$\overline{IF}^2$k，△DBI 面積=$\overline{BI}^2$k，△GFC 面積=$\overline{FC}^2$k

△ABC 面積=$\overline{BC}^2$k(其中 k 爲常數)

代入①式可得$\overline{BC}^2$k=$\overline{BI}^2$k+$\overline{FC}^2$k+$\overline{IF}^2$k

∴得證$\overline{BC}^2=\overline{BI}^2+\overline{CF}^2+\overline{IF}^2$($\overline{BC}$是鈍角三角形最長邊)

上式即爲**鈍角△最長邊的畢氏定理**，更神奇的是此時：

$\overline{BA}^2=\overline{BD}^2+\overline{DH}^2+\overline{AH}^2$ 、 $\overline{CA}^2=\overline{AE}^2+\overline{CG}^2+\overline{EG}^2$

說明如下：

因爲在圖(23)中，連$\overline{EG}$

由△ABC 面積=△AHE 面積+△GFC 面積+四邊形 BGOE 面積-△OFH 面積

=△AHE 面積+△BEG 面積+△GFC 面積

$\therefore \overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GC}^2$得證

同理，連$\overline{DH}$

由△ABC 面積=△BIG 面積+△AEH 面積+四邊形 ODCH 面積-△OEI 面積

=△BID 面積+△CDH 面積+△AEH 面積

$\therefore \overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{DH}^2+\overline{AH}^2$得證

結論：鈍角△三邊的畢氏定理爲 $\overline{BC}^2=\overline{BI}^2+\overline{CF}^2+\overline{IF}^2$ ($\overline{BC}$ 是鈍角三角形最長邊)

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GC}^2 \text{，} \overline{EG}\ //\ \overline{AC}$$

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{DH}^2+\overline{AH}^2 \text{，} \overline{DH}\ //\ \overline{AB}$$

研究到此，我們已經完整的找到了直角△、銳角△及鈍角△各邊的廣義畢氏定理。

二、應用探討：

就如同直角△三邊長爲人津津樂道的畢氏數概念一般，我們也很想探討我們發現的銳角或鈍角△畢氏定理三邊長的畢氏數，我們從直角△任一股的畢氏數談起，再到正△的畢氏數，接下來是等腰△的畢氏數，最後則是找出一般化的畢氏數。方法是我們先由各圖形理論上正式的畢氏圖畫法中尋找各自的快速畫法，並進而推出其畢氏數。

(一)、直角△兩股的平行線段速畫法及其畢氏數探討

直角△斜邊及兩股各自的畢氏定理是最容易操作的，它們的快速畫法敘述如下：

甲：股 $\overline{AC}$ 畢氏定理平行線段的速畫法，如圖(24)

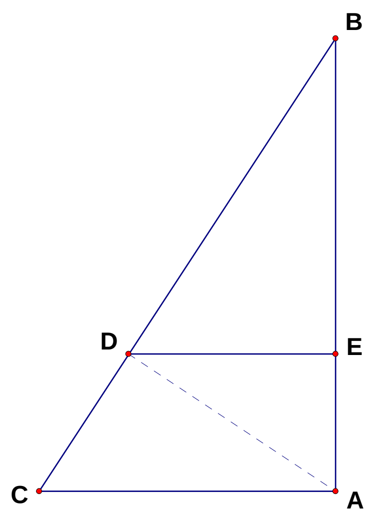
(1)作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D

(2)作 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$ 於 E 則股 $\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{ED}^2+\overline{DC}^2$ ，$\overline{ED}//\overline{AC}$ 即爲所求。

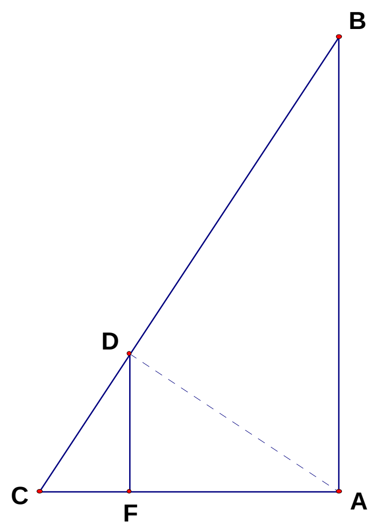
乙：股 $\overline{AB}$ 畢氏定理平行線段的速畫法，如圖(25)

(1)作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D

(2)作 $\overline{DE}\perp\overline{AC}$ 於 F 則股 $\overline{AB}^2=\overline{AF}^2+\overline{FD}^2+\overline{DB}^2$ ，$\overline{FD}//\overline{AB}$ 即爲所求。



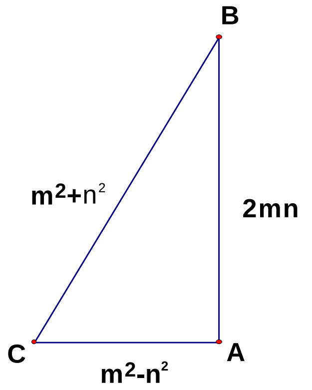
圖(24)



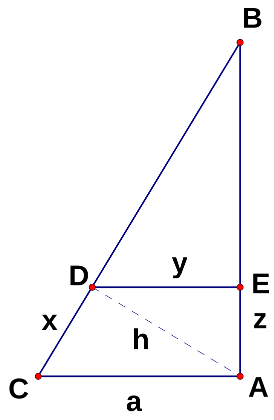
圖(25)

接著我們來探討直角△中兩股的畢氏數：

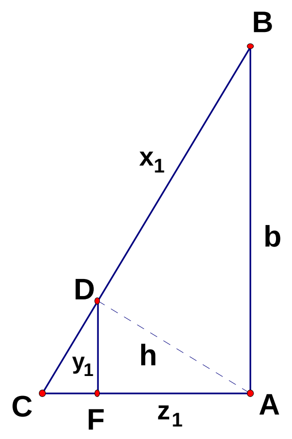
由於我們常使用的直角△畢氏數，如(3、4、5)、(5、12、13)、(7、24、25)…等，皆可由畢氏數的產生式m^2-n^2、$2mn$、m^2+n^2來取得，如圖(26)。現在我們想要利用這些產生式來推出「短股」以及「長股」的畢氏數，作法如下：



圖(26)



圖(27)



圖(28)

如圖(27)，令$\overline{CD}$=x，$\overline{DE}$=y，$\overline{EA}$=z，$\overline{AC}$=a，$\overline{AD}$=h，且$\overline{DE}//\overline{AC}$，$x^2+y^2+z^2=a^2$

如圖(28)，令$\overline{BD}=x_1$，$\overline{DF}=y_1$，$\overline{FA}=z_1$，$\overline{AB}$=b，$\overline{AD}$=h，且$\overline{DF}//\overline{AB}$，${x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=b^2$

(1)短股：

由△CDA～△CAB 得 $\overline{CD}:\overline{AC}=\overline{CA}:\overline{CB}$

即 x：$(m^2-n^2)=(m^2-n^2):(m^2+n^2)$

$\therefore$x=$\dfrac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}$

同理可得：y=$\dfrac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}$，z=$\dfrac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}$，h=$\dfrac{2mn(m^2-n^2)}{m^2+n^2}$

其中$a=\overline{AC}=m^2-n^2$

因為畢氏數是最簡整數比，因此我們只要將這些相關數據拿來化簡即可：

$$a:x:y:z=(m^2-n^2):\frac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}:\frac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}:\frac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}$$

$$=1:\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}:\frac{4m^2n^2}{(m^2+n^2)^2}:\frac{2mn(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)}{(m^2+n^2)^2}$$

$$=(m^2+n^2)^2:(m^2-n^2)(m^2+n^2):4m^2n^2:2mn(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)$$

$=(m^2+n^2)^2:(m^4-n^4):4m^2n^2:2mn(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)$即為所求。

例如原直角△畢氏數（3、4、5）中，是取 m=2，n=1 產生的，當我們以 m=2，n=1 代入上式可得 a：x：y：z=$(2^2+1^2)^2:(2^4-1^4):4\times2^2\times1^2:2\times2\times1\times(2^2-1^2)$

=25：15：16：12

檢驗：$15^2+16^2+12^2$=225+256+144=625=25^2成立

因此直角△「短股」的畢氏數爲$(m^2+n^2)^2$：(m^4-n^4)：$4m^2n^2$：$2mn(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)$

我們列出一些「短股」畢氏數組，如下表(1)：更多的組合請見附件(一)。

原直角△畢氏數組(a、b、c)	短股畢氏數組(w：x：y：z)
(3、4、5)	25：15：16：12
(5、12、13)	169：65：144：60
(7、24、25)	625：175：576：168
(15、8、17)★	289：255：64：120
(11、60、61)	3721：671：3600：660
(21、20、29)★	841：609：400：420

表(1)

註：(15、8、17)是以 m=4、n=1 代入得到，故m^2-n^2會較$2mn$大，但我們仍將m^2-n^2視爲短股並計算其畢氏數組，其他特殊的例子亦同。(以★標示之)

(2)長股：

同理，在圖(27)中，我們可以計算得：

$$y_1=\frac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}\ ,\ z_1=\frac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}\ ,$$

$$x_1=(m^2+n^2)-\frac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}=\frac{(\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2)^2-(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)^2}{\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2}=\frac{2\mathrm{m}^2\times2\mathrm{n}^2}{m^2+n^2}=\frac{4\mathrm{m}^2\mathrm{n}^2}{m^2+n^2}$$

我們可以開始來求直角△「長股」的畢氏數了。

$$b：x_1：y_1：z_1=2\mathrm{mn}：\frac{4\mathrm{m}^2\mathrm{n}^2}{m^2+n^2}：\frac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}：\frac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}$$

$$=1：\frac{2\mathrm{mn}}{m^2+n^2}：\frac{(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)^2}{(m^2+n^2)^2}：\frac{2mn(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}$$

$$=(m^2+n^2)^2：2\mathrm{mn}(m^2+n^2)：(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)^2：2mn(m^2-n^2)$$ 即爲所求

例如原直角△的畢氏數(3、4、5)中，是取 m=2，n=1 產生的，當我們以 m=2，n=1 代入上式可得$b：x_1：y_1：z_1=(2^2+1^2)^2：2\times2\times1\times(2^2+1^2)：(2^2-1^2)^2：2\times2\times1\times(2^2-1^2)$

=25：20：9：12

檢驗：$20^2+9^2+12^2$=400+81+144=625=25^2成立

因此直角△「長股」的畢氏數爲$(m^2+n^2)^2$：$2\mathrm{mn}(m^2+n^2)$：$(\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2)^2$：$2mn(m^2-n^2)$

我們也列出一些「長股」畢氏數組，如下表(2)：更多的組合請見附件(一)。

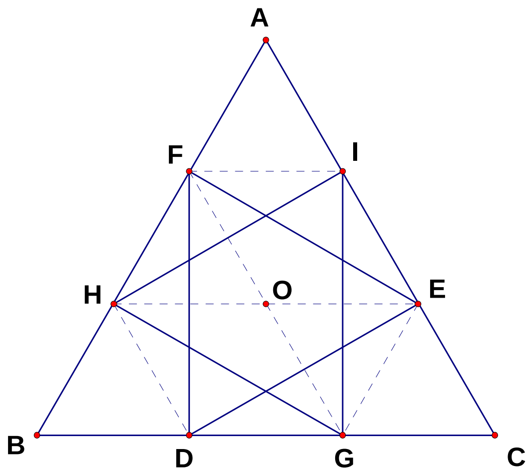
原直角△畢氏數組(a、b、c)	長股畢氏數組(w ： x_1 ： y_1 ： z_1)
(3、4、5)	25：20：9：12
(5、12、13)	169：156：25：60
(7、24、25)	625：600：49：168
(15、8、17)★	289：136：225：120
(11、60、61)	3721：3660：121：660
(21、20、29)★	841：580：441：420

表(2)

註：(15、8、17)是以 m=4、n=1 代入得到，故$2mn$會較m^2-n^2大，但我們仍將$2mn$視爲長股並計算其畢氏數組，其他特殊的例子亦同。(以★標示之)

結論：直角△兩股的畢氏定理產生在那兩個子△的斜邊上的高的垂足點處。其畢氏數有無限多組，短股畢氏數爲$(m^2+n^2)^2$ ：(m^4-n^4)： $4m^2n^2$ ： $2mn(m^2-n^2)$
長股畢氏數爲$(m^2+n^2)^2$ ： $2mn(m^2+n^2)$ ： $(m^2-n^2)^2$ ： $2mn(m^2-n^2)$

(二)、正△平行線段速畫法及其畢氏數探討



圖(29)

在正△ABC 中，如圖(29)，若△DEF 及△GHI 爲兩個依序垂直三邊的△，明顯的由對稱關係可以看出來$\overline{HE}//\overline{BC}$，又$\overline{FI}//\overline{BC}$，$\therefore\overline{FI}//\overline{HE}//\overline{BC}$，∴△AFI 爲正△，$\therefore\overline{AF}=\overline{FI}$，同理$\overline{BH}=\overline{HD}$，又因 D、G、E、I、F、H 六點共圓，設圓心爲 O，明顯的由對稱性可知六邊形 DGEIFH 必爲正六邊形，因此$\overline{FI}=\overline{FH}=\overline{HD}$，$\therefore\overline{AF}=\overline{FH}=\overline{HB}$，因此我們找到了正△畢氏定理的速畫法也就是說那平行線段$\overline{FI}$位在正△邊長的三等分點處。速畫方法如下：

(1)過 A 任畫一直線 L，如圖(30)

(2)在 L 上依序取三點 X、Y、Z，使$\overline{AX}=\overline{XY}=\overline{YZ}$

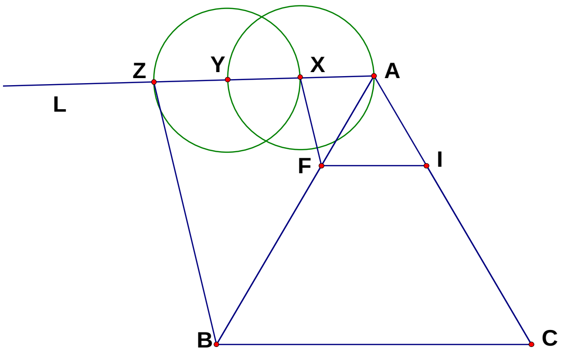
(3)連 $\overline{ZB}$

(4)作 $\overline{XF}\,//\,\overline{ZB}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F

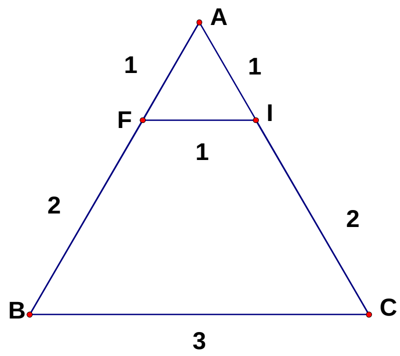
(5)作 $\overline{FI}\,//\,\overline{BC}$ 交 $\overline{AC}$ 於 I

則 $\overline{BC}^2=\overline{BF}^2+\overline{FI}^2+\overline{IC}^2$ ，$\overline{FI}\,//\,\overline{BC}$ 即爲所求

進一步我們以邊長爲 3 的正△爲例，如圖(31)



圖(30)



圖(31)

取 $\overline{BF}$ =2，$\overline{FI}$ =1，$\overline{IC}$ =2，$\overline{BC}$ =3

檢驗：$\overline{BF}^2+\overline{FI}^2+\overline{IC}^2=2^2+1^2+2^2$=4+1+4=9=$\overline{BC}^2$　　完全正確！

對於任何正△都有 $\overline{BC}$ ：$\overline{BF}$ ：$\overline{FI}$ ：$\overline{IC}$ =3：2：1：2。(其中 $\overline{FI}\,//\,\overline{BC}$)

結論：

正△的畢氏定理產生在三邊的三等分點處。它的畢氏數比爲 3：2：1：2，僅此一組。

(三)、等腰△平行線段的速畫法及其畢氏數探討

如圖(32)，△ABC 爲銳角等腰△，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，我們先專注於底邊 $\overline{BC}$ 的畢氏定理快速畫法，較有特色及實用性，先分析如下：設△ABC 中，底邊 $\overline{BC}=a$ ，腰 $\overline{AB}=\overline{AC}=b$ ，以及 $\overline{DB}=\overline{EC}=c$ (對稱性)作 $\overline{AN}\perp\overline{BC}$ 交 $\overline{DE}$ 於 M，$\therefore\overline{BN}=\dfrac{1}{2}a$

由△ADM~△ABN 知 $\overline{AD}$ ：$\overline{AB}=\overline{DM}$ ：$\overline{BN}$

∴(b-c)：b=$\overline{DM}$ ：$\dfrac{1}{2}a$

$$\therefore \overline{DM}=\frac{a(b-c)}{2b}$$

$$\therefore \overline{DE}=2\,\overline{DM}=\frac{a(b-c)}{b}$$

由於 D、E 是在底邊 $\overline{BC}$ 的畢氏定理關鍵點

$$\therefore 令\ \overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2=\overline{BC}^2$$

$$\therefore c^2+\left[\frac{a(b-c)}{b}\right]^2+c^2=a^2$$

$$\therefore 2c^2+\frac{a^2(b^2-2bc+c^2)}{b^2}=a^2$$

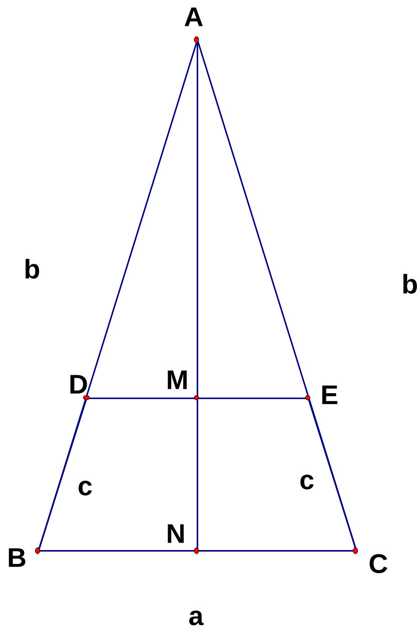
$$\therefore 2b^2c^2+a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2=a^2b^2$$

$$\therefore 2b^2c^2-2a^2bc+a^2c^2=0$$

$$\therefore 2b^2c-2a^2b+a^2c=0$$

$$\therefore (a^2+2b^2)c=2a^2b$$

$$\therefore c=\frac{2a^2b}{a^2+2b^2}$$



圖(32)

$$\therefore \overline{AD}：\overline{DB}=(b-c)：c=\frac{2b^3-a^2b}{a^2+2b^2}：\frac{2a^2b}{a^2+2b^2}=(2b^3-a^2b)：2a^2b=(2b^2-a^2)：2a^2$$

上面這個式子告訴我們任何等腰△的「平行線段」端點 D 或 E 的比例，可用腰長和底長來表示，我們只要把等腰腰長切成 $(2b^2-a^2)：2a^2$ 的兩段即可找到「平行線段」。詳細的作圖法請見附件(二)。

經由上文的探討，我們可以來計算等腰△「底邊」的畢氏數組了。

(1)銳角等腰△：

如圖(33)，在△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=b$，底邊 $\overline{BC}=a$，$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{EC}=c$

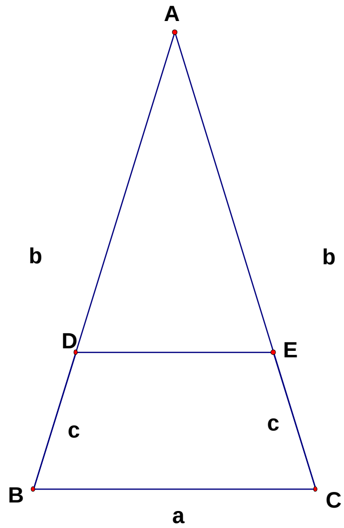
由△ADE～△ABC 得 $\overline{DE}：\overline{BC}=\overline{AD}：\overline{AB}$

即 $\overline{DE}：a=(b-c)：b$

$$\therefore \overline{DE}=\frac{a(b-c)}{b}$$

又 $c=\dfrac{2a^2b}{a^2+2b^2}$ 代入上式得 $\overline{DE}=\dfrac{a\left(b-\dfrac{2a^2b}{a^2+2b^2}\right)}{b}$

$$=\frac{2ab^2-a^3}{a^2+2b^2}$$



圖(33)

因此我們可以推算「底邊」的畢氏數組了。

$$\overline{BC}:\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=a:\frac{2a^2b}{a^2+2b^2}:\frac{2ab^2-a^3}{a^2+2b^2}:\frac{2a^2b}{a^2+2b^2}$$

$$=1:\frac{2ab}{a^2+2b^2}:\frac{2b^2-a^2}{a^2+2b^2}:\frac{2ab}{a^2+2b^2}$$

$$=(a^2+2b^2):(2ab):(2b^2-a^2):(2ab)$$

以銳角等腰△(3、3、2)爲例，腰 b=3，底長 a=2，代入上式得：

$$\overline{BC}:\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=(2^2+2\times3^2):(2+2\times3):(2\times3^2-2^2):(2+2\times3)$$

$$=22:12:14:12$$

$$=11:6:7:6$$

檢驗：$6^2+7^2+6^2=121=11^2$　　成立

因此等腰銳角△的畢氏數爲 (a^2+2b^2)：$(2ab)$：$(2b^2-a^2)$：$(2ab)$

我們列出一些銳角等腰△的畢氏數組，見表(3)：更多的組合請見附件(一)。

銳角等腰△三邊長(b、b、a)	「底邊」畢氏數組(w：x：y：z)
(3、3、2)	11：6：7：6
(4、4、3)	41：24：23：24
(5、5、3)	59：30：41：30
(7、7、4)	57：28：41：28
(11、11、7)	291：154：193：154

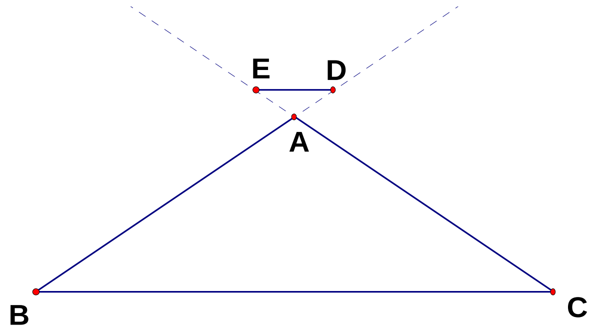
表(3)

(2)鈍角等腰△：

它的平行線段 $\overline{DE}$ 產生在外部，而將兩腰切成($2b^2-a^2$)：$2a^2$ 的比例即可找到畢氏定理，但鈍角△其底邊較兩腰長，故若按照此比例的話，會造成 $2b^2-a^2$ 成負數。不過就因爲鈍角△有平行線段在外部的這個特性，我們把負號代表產生在外部。要使這比例還原成正數，就加上絕對值：(a＞b＞0，且 $2b^2<a^2$)　$\left|2b^2-a^2\right|=a^2-2b^2$。

而鈍角△中，$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2$，銳角△中 $2b^2-a^2$：$2a^2$ 是 $\overline{AD}$：$\overline{BD}$ 的線段比，$\overline{AD}=b-c$，$\overline{BD}=c$，不過鈍角△中 c 位於外部，(b+c)是構成畢氏定理的腰長，所以切開的兩段應是 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$(其實不是切開，而是多重疊一段，但不影響)，$\overline{AD}$：$\overline{BD}=a^2-2b^2$：$2a^2$

從上文中我們可以來推導鈍角等腰△的畢氏數組了，如圖(34)：



圖(34)

由△ABC～△AED 知：

$\overline{DE}$ ： $\overline{BC}$ ： $\overline{AE}$ ： $\overline{AB}$

$\overline{DE}$ ：a = c：b， $\overline{DE} = \dfrac{ac}{b}$

而 $c = \dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}$ 代入 $\overline{DE}$ 得 $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2} = \dfrac{a(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}$

所以我們真的可以來推算畢氏數了：

$$\overline{BC} : \overline{BD} : \overline{DE} : \overline{EC} = a : \left(\frac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}+b\right) : \frac{a(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2} : \left(\frac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}+b\right)$$

$$= a : \left(\frac{b\times 2a^2}{a^2+2b^2}\right) : \left(\frac{a(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}\right) : \left(\frac{b\times 2a^2}{a^2+2b^2}\right)$$

$$= (a^2+2b^2) : (2ab) : (a^2-2b^2) : (2ab)$$

因此等腰鈍角△的畢氏數為 (a^2+2b^2) ： $(2ab)$ ： (a^2-2b^2) ： $(2ab)$

我們也列出一些鈍角等腰△的畢氏數組，見表(4)：更多的組合請見附件(一)。

鈍角等腰△三邊長(b、b、a)	「底邊」畢氏數組(w ：x：y：z)
(3、3、5)	43：30：7：30
(4、4、6)	17：12：1：12
(5、5、8)	57：40：7：40
(7、7、10)	99：70：1：70
(11、11、16)	249：176：7：176

表(4)

結論：

等腰△底邊的畢氏定理產生在其兩腰長 $\left|(2b^2-a^2)\right|$ ： $2a^2$ 的比例分點處，其畢氏數組有無限多組，型如：

(a^2+2b^2) ：**(** 2ab **)**： $(2b^2-a^2)$ ：**(** 2ab **)**，當 $a < \sqrt{2}\,b$

(a^2+2b^2) ： $(2ab)$ ： (a^2-2b^2) ： $(2ab)$ ，當 $a > \sqrt{2}\,b$

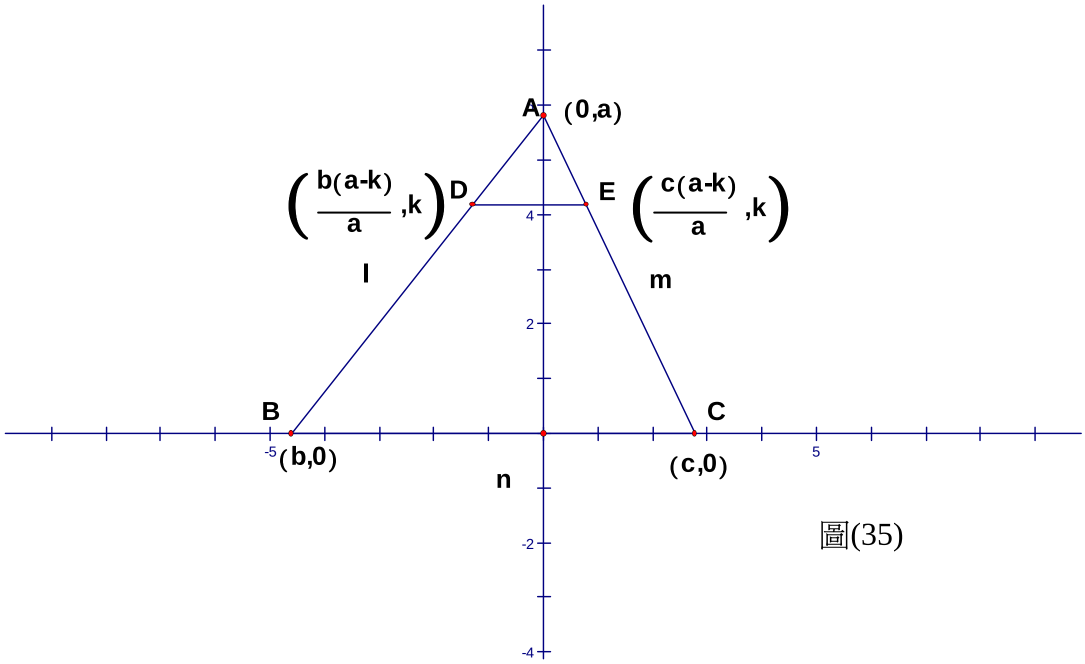
(四)、一般△平行線段的 k 值公式及其畢氏數探討

一般△既沒有特殊的角度，也沒有特殊的邊長關係，因此推算畢氏數的過程十分不易，不過終究被我們克服了。

(1)銳角△：

我們先利用直角座標計算出平行線段到底邊的距離，設爲 k，如圖(35)：

設 A(0,a)，B(b,0)，C(c,0)，$\overline{AB}=l$ ，$\overline{AC}=m$ ，$\overline{BC}=n$



圖(35)

先把 D、E 的座標算出來：

$\overleftrightarrow{AB}$ ：$y=-\dfrac{a}{b}x+a\ldots$①　，D_y=k 代入①

$k=-\dfrac{a}{b}+a$ ，　$D_x=\dfrac{b(a-k)}{a}$ ，∴D 的座標爲$(\dfrac{b(a-k)}{a}$,k)

$\overleftrightarrow{AC}$ ：$y=-\dfrac{a}{c}x+a\ldots$②，$E_y=k$ 代入②

$k=-\dfrac{a}{c}x+a$ ，$E_x=\dfrac{c(a-k)}{a}$ ，∴E 的座標爲$(\dfrac{c(a-k)}{a}$,k)

接下來算出$\overline{BD}$ 、$\overline{EC}$ 、$\overline{DE}$ 、$\overline{BC}$ ：

$$\overline{BD}=\sqrt{(\frac{ab-b(a-k)}{a})^2+(k-0)^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{bk}{a})^2+k^2}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2k^2}{a^2}+k^2}$$

$$=\sqrt{\frac{k^2(a^2+b^2)}{a^2}}=\frac{kl}{a}$$

$$\overline{EC}=\sqrt{(\frac{c(a-k)}{a}-c)^2+(k-0)^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{-ck}{a})^2+k^2}$$

$$=\sqrt{\frac{c^2k^2}{a^2}+k^2}$$

$$=\sqrt{\frac{k^2(a^2+c^2)}{a^2}}=\frac{km}{a}$$

$\overline{DE}=\dfrac{n(a-k)}{a}$ ， $\overline{BC}$=n

設 $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2$

$$(\frac{kl}{a})^2+(\frac{n(a-k)}{a})^2+(\frac{km}{a})^2=n^2$$

$$\frac{k^2l^2}{a^2}+\frac{k^2m^2}{a^2}=n^2-\frac{n^2(a-k)^2}{a^2}$$

$$k^2(l^2+m^2)=n^2(a^2-(a-k)^2)$$

$$k^2(l^2+m^2)=n^2((a+a-k)(a-a+k))$$

$$k^2(l^2+m^2)=n^2((2a-k)k)$$

$$k(l^2+m^2)=n^2(2a-k)$$

$$k(l^2+m^2+n^2)=2an^2$$

$$k=\frac{2an^2}{l^2+m^2+n^2}$$

算出 k 值後，我們可以來推算銳角△的畢氏數了。

$$\overline{BD}=\frac{kl}{a}=\frac{2an^2\times l}{l^2+m^2+n^2}\times\frac{1}{a}=\frac{2\ln^2}{l^2+m^2+n^2}$$

$$\overline{BC}=\frac{km}{a}=\frac{2an^2\times m}{l^2+m^2+n^2}\times\frac{1}{a}=\frac{2mn^2}{l^2+m^2+n^2}$$

$$\overline{DE}=\frac{n(a-k)}{a}=n(a-\frac{2an^2}{l^2+m^2+n^2})\times\frac{1}{a}=n-\frac{2n^3}{l^2+m^2+n^2}=\frac{n(l^2+m^2-n^2)}{l^2+m^2+n^2}$$

化簡畢氏數的比例：

$$\overline{BC}：\overline{BD}：\overline{DE}：\overline{EC}=\text{n}：\frac{2\ln^2}{l^2+m^2+n^2}：\frac{n(l^2+m^2-n^2)}{l^2+m^2+n^2}：\frac{2mn^2}{l^2+m^2+n^2}$$

$$=1：\frac{2\ln}{l^2+m^2+n^2}：\frac{(l^2+m^2-n^2)}{l^2+m^2+n^2}：\frac{2mn}{l^2+m^2+n^2}$$

$$=(l^2+m^2+n^2)：(2\ln)：(\text{l}^2+\text{m}^2-\text{n}^2)：(2mn)$$，其中 $l^2+m^2-n^2\neq 0$

以銳角一般△(5、6、7)代入，即 l=5，m=6，n=7

(25+36+49)：(2×5×7)：(25+36-49)：(2×6×7)=110：70：12：84=55：35：6：42

檢驗：$35^2+6^2+42^2=1225+36+1764=3025=55^2$ 成立

因此銳角△$\overline{BC}$ (n)的一般畢氏數爲$\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$(2\ln)$：$(l^2+m^2-n^2)$：$(2mn)$

同理$\overline{AB}$ (l)的一般畢氏數爲$\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$(2ml)$：$(m^2+n^2-l^2)$：$(2nl)$

$\overline{AC}$ (m)的一般畢氏數爲$\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$(2mn)$：$\left(l^2+n^2-m^2\right)$：$(2ml)$

$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 的畢氏數推導詳見附件(三)。

(2)鈍角△：

鈍角△的平行線段在△外部，因此可以把負數視爲方向，因此求得鈍角△的「平行線段」長爲$\left|(l^2+m^2-n^2)\right|=n^2-l^2-m^2$ $(\because l^2+m^2<n^2)$

∴鈍角△的畢氏數組爲：

$\overline{BC}$ ：$\overline{BD}$ ：$\overline{DE}$ ：$\overline{EC}=\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$(2\ln)$：$(n^2-l^2-m^2)$：$(2mn)$，其中$l^2+m^2-n^2\neq 0$

以鈍角△(3、5、6)代入，即 l=3，m=5，n=6

(9+25+36)：(2x3x6)：(36-9-25)：(2x5x6)=70：36：2：60=35：18：1：30

檢驗：$18^2+1^2+30^2$=324+1+900=1225=35^2 成立

因此鈍角△$\overline{BC}$ (n)的一般畢氏數爲$\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$(2\ln)$：$(n^2-l^2-m^2)$：$(2mn)$………①

同理$\overline{AB}$ (l)的畢氏數組爲$\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$(2ml)$：$(l^2-m^2-n^2)$：$(2nl)$…………………………②

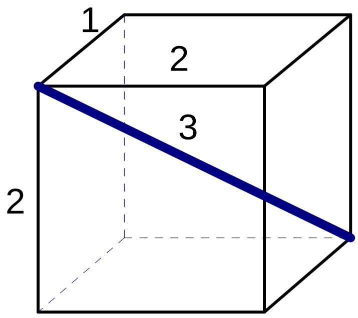
$\overline{AC}$ (m)的畢氏數組爲$\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$(2mn)$：$(m^2-l^2-n^2)$：$(2ml)$……………………③

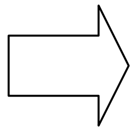
結論：

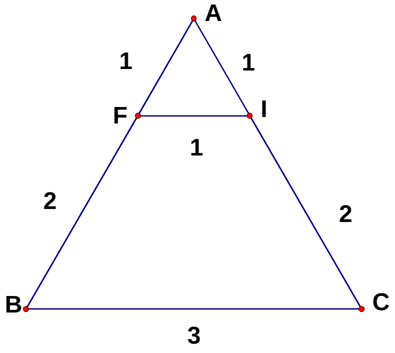
一般△的畢氏定理「平行線段」與$\overline{BC}$的距離爲$\dfrac{2an^2}{l^2+m^2+n^2}$，$\overline{AB}$ 的 k 值爲$\dfrac{2cl^2}{l^2+m^2+n^2}$，$\overline{AC}$ 的 k 值爲$\dfrac{2bm^2}{l^2+m^2+n^2}$，只要找到 k 值，即可求得一般△的畢氏數，且有無限多組組合，其型式如上文之①、②、③。

伍、討論：

在盛立人、嚴鎮軍所著的從勾股定理談起一書中(以後簡稱嚴書)的第六單元勾股數問題的推廣，是以長方體的長 x、寬 y、高 z 和對角線 w 的長度，探討四元二次不定方程$x^2+y^2+z^2=w^2$的整數解，書中說到對於上式的一般解的討論很複雜，書中從略，僅列出其一般解的形式$x=mn$ 、$y=m^2+mn$ 、$z=mn+n^2$ 、$w=m^2+mn+n^2$(m、n 是任意正整數)對於這個以「長方體」概念推導出來的整數解，我們很好奇的想拿來和我們的「平面解」來作比較，我們發現：當$m=1$、$n=2$時，$x=1$ 、$y=2$ 、$z=2$ 、$w=3$即爲平面上正△的畢氏數解，如圖(36)。此時本文的$l=3$ 、$m=3$ 、$n=3$ 。







圖(36)

進一步的我們發現若(w、x、y、z)來自於嚴書中的解，我們只須令$l=m+n$，即可得對應的l、m、n，證明如下：

當$l=m+n$時，觀察本文的解($l^2+m^2+n^2$ 、 $2ml$ 、 $\left|m^2+n^2-l^2\right|$ 、 $2nl$)

其中$l^2+m^2+n^2=(m+n)^2+m^2+n^2=2m^2+2mn+2n^2$

$$2ml=2m(m+n)=2m^2+2mn$$

$$\left|m^2+n^2-l^2\right|=\left|m^2+n^2-(m+n)^2\right|=\left|-2mn\right|=2mn$$

$$2nl=2n(m+n)=2n^2+2mn$$

因此$l^2+m^2+n^2$ ： $2ml$ ： $\left|m^2+n^2-l^2\right|$ ： $2nl$

$=(2m^2+2mn+2n^2)$ ： $(2m^2+2mn)$ ： $2mn$ ： $(2n^2+2mn)$

$=(m^2+mn+n^2)$ ： (m^2+mn) ： mn ： (n^2+mn)　此即爲嚴書中的解

★註：在推導的過程中我們發現「化簡過程」要除以 2，所以反過來說若解來自於嚴書中則除了可先由嚴書公式找到m、n，再取$l=m+n$，而得到 l 、m、 n之外，尙可先將嚴書解乘以 2，再在本文公式中直接拼湊l、m、 n即得。

明顯的，本文公式包含$l=m+n$及$l\neq m+n$的所有可能的解：

例如：當嚴書中取m＝1、 n ＝1 時，得解爲(3、1、2、2)

本文相對的解爲l＝2、m＝1、 n ＝1，其解也是(3、2、1、2)

又例如：本文公式任取l＝5、m＝3、 n ＝1，($l\neq m+n$)時，可得解爲(35、6、15、10)，

但此解在嚴書中卻找不到對應的m 、 n ，也就是說嚴書欠缺一大堆解。

又觀察有些解剛開始在本文公式l、m、 n皆爲整數時看起來找不到答案，但是如果允許l、m、 n不一定是整數(△三邊可能爲分數或無理數)，依然可以找到對應的值。例如：

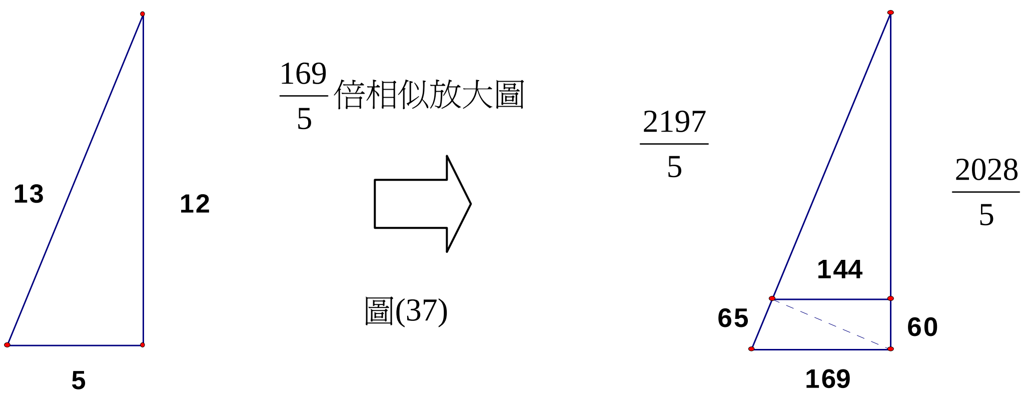
(1)解(9、6、3、6)無法直接取得整數l、m、n，但若取無理數$l=\sqrt{3}$、$m=\sqrt{3}$、$n=\sqrt{3}$(正△，$l\neq m+n$)即成立，這是因爲當化簡 9：6：3：6 成爲 3：2：1：2 時須除以 3，所以反過來說要乘以$\sqrt{3}$即得l、m、 n 。

(2)解(145、80、15、120)無法直接取得整數 l 、m、 n，但若取無理數$l=2\sqrt{5}$、$m=3\sqrt{5}$、

$n=4\sqrt{5}$(鈍角△，$l\neq m+n$)即成立，這是因為當化簡 145：80：15：120 成 29：16：3：24 時須除以 5 ，所以反過來說乘以$\sqrt{5}$即得l、m、n 。

(3)解(25、12、15、16)無法直接取得整數 l 、m、n ，但若取無理數$l=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$、$m=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$、$n=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$(直角△，$l\neq m+n$)即成立，這是因為當轉化 25：12：15：16 成 50：24：30：32 時須乘以 2，所以反過來說除以$\sqrt{2}$即得l、m、n 。

(4)解(169、65、144、60)無法直接取得整數 l 、m、n ，但若取分數有理數$l=\dfrac{2197}{5}$、$m=\dfrac{2028}{5}$、$n=169$(直角△，$l\neq m+n$)即成立，這是因為我們可將直角△(5、12、13)放大$\dfrac{169}{5}$倍成為直角△(169、$\dfrac{2028}{5}$、$\dfrac{2197}{5}$)，即可找到l、m、n ，如圖(37)



圖(37)

因此嚴書作者所謂的(w、x、y、z)一般解應該遺漏了如上文所探討的所有$l\neq m+n$，且l、m、n 可能為分數有理數或無理數的解，所以我們認為四元二次不定方程$x^2+y^2+z^2=w^2$的完全解應要有更完整的式子才對。

反觀本文從直角△、銳角△、鈍角△各個角度來探討(w、x、y、z)的解，可說面面俱到，最後並導出任意△的一般解：

(1)$l^2+m^2+n^2$ ：$2\ln$ ：$\left|l^2+m^2-n^2\right|$ ：$2mn$ ，以 n 為底邊

(2)$l^2+m^2+n^2$ ：$2mn$ ：$\left|l^2+n^2-m^2\right|$ ：$2ml$ ，以 m 為底邊

(3)$l^2+m^2+n^2$ ：$2ml$ ：$\left|m^2+n^2-l^2\right|$ ：$2nl$ ，以l為底邊

其中l、m、n 是代表△的三邊長，也許有人會問你如何知道這三個式子已完全表達了$x^2+y^2+z^2=w^2$的所有整數解？我們再整理並解釋如下：

其實這l、m、n 並不一定要代表△的三邊長，他們可以代表三個任意整數或任意實數倍

比率數(如$\frac{q}{p}\sqrt{k}$ ，p 、q 爲整數，$q \neq 0$ ，k 爲非負實數)，例如：

1. 當$l = 5$ 、$m = 6$ 、$n = 7$ 合乎△三邊不等式時，$l^2 + m^2 + n^2 = 110$ ，$2\ln = 2 \times 5 \times 7 = 70$ ，

   $\left|l^2 + m^2 - n^2\right| = 12$ ，$2mn = 84$ ，得(w、x、y、z)=(110、70、12、84)= (55、35、6、42)，

   則$35^2 + 6^2 + 42^2 = 55^2$ 成立。
2. 當$l = 1$ 、$m = 2$ 、$n = 3$ ，不合乎△三邊不等式時，計算得(w、x、y、z)=(7、3、2、6)也成立。
3. 當$l = 2$ 、$m = -3$ 、$n = 4$ ，有負整數時，計算得(w、x、y、z)=(29、16、-3、-24)也成立。
4. 當$l = 4$ 、$m = 0$ 、$n = 3$ ，有一數爲零時，計算得(w、x、y、z)=(25、24、7、0)也成立。

   ★註：值得注意的是當其中一數$m = 0$時，所得的四元二次不定方程的解(25、24、7、0)包含了原來直角△中的三元二次不定方程$x^2 + y^2 = z^2$的畢氏數解，非常奇妙。
5. 當$l = 2\sqrt{5}$ 、$m = 3\sqrt{5}$ 、$n = 4\sqrt{5}$ ，① l 當底邊時，得(29、12、21、16)。② m 當底邊時得(29、24、11、12)。③ n 當底邊時，得(29、16、3、24)。
6. 當$l = \frac{125}{3}$、$m = \frac{100}{3}$、$n = 25$，n 當底邊時得(25、15、16、12)，又$l = \frac{3}{\sqrt{2}}$、$m = \frac{4}{\sqrt{2}}$、$n = \frac{5}{\sqrt{2}}$，n 當底邊時亦可得(25、15、16、12)。

經過這些探討後，我們發現我們可用三個任意整數或任意實數倍比率數，代入本文廣義畢氏定理的公式並化簡取得(w、x、y、z)的解，反過來說$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$的畢氏數解，一定都在本文這一般解中。

陸、結論：

一、在直角△中，透過母子定理可導出畢氏定理，關鍵在於那兩個顯而易見的子△，如圖(4)，而在銳角△及鈍角△中也存在類似成對的子△，如圖(9)、(20)，藉由這些子△及原△面積拼湊的等式即可導出銳角△和鈍角△的畢氏定理。

(1) 銳角△的畢氏定理，型如：$\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FH}^2 + \overline{HC}^2$ ，$\overline{FH} // \overline{BC}$

$\overline{CA}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{ID}^2 + \overline{DC}^2$ ，$\overline{ID} // \overline{CA}$

$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{GB}^2$ ，$\overline{EG} // \overline{AB}$ ，如圖(14)

(2) 鈍角△的畢氏定理，型如：$\overline{BC}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{FI}^2 + \overline{CF}^2$ ，$\overline{IF} // \overline{BC}$

$\overline{BA}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{HA}^2$ ，$\overline{DH} // \overline{BA}$

$\overline{CA}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GE}^2 + \overline{EA}^2$ ，$\overline{GE} // \overline{CA}$ ，如圖(23)

二、對任意△ABC 的任一邊長的平方都可以用本文廣義畢氏定理的型式表示出來，因此完整的畢氏定理型式應寫成 $\overline{BC}^2=\overline{BX}^2+\overline{XY}^2+\overline{YC}^2$，其中 $\overline{XY}\,//\,\overline{BC}$，而 $\overline{BX}$ 落在 $\overleftrightarrow{BA}$ 上，$\overline{YC}$ 落在 $\overleftrightarrow{CA}$ 上，且當 $\overline{BC}$ 為直角△的斜邊時，$\overline{XY}=0$。

三、(1)正△的各邊的畢氏數產生在各邊 2：1 的分點處。

畢氏數組僅有一組，恆為 3：2：1：2

(2)直角△一股的畢氏定理所需的畢氏數分割點產生在斜邊上的高的垂足處。

「短股」的畢氏數組有無限多組，一般式為：

$(m^2+n^2)^2$：(m^4-n^4)：$4m^2n^2$：$2mn(m^2-n^2)$，(m、n 為任意正整數，且 m＞n)

「長股」的畢氏數組有無限多組，一般式為：

$(m^2+n^2)^2$：$2mn(m^2+n^2)$：$(m^2-n^2)^2$：$2mn(m^2-n^2)$

(3)等腰△底邊的畢氏定理所需的畢氏數分割點產生在兩腰上 $\left|2b^2-a^2\right|$：$2a^2$ 的分點處。

(其中 b 為腰長，a 為底長)

底邊的畢氏數組有無限多組，其中：

當頂角為銳角時，一般式為 (a^2+2b^2)：$(2ab)$：$(2b^2-a^2)$：$(2ab)$

當頂角為鈍角時，一般式為 (a^2+2b^2)：$(2ab)$：(a^2-2b^2)：$(2ab)$

(4)對於任意△，設三邊長為 l、m、n，則：

①當底邊為 n 時

(w、x、y、z)的解為 $\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$\left(2ln\right)$：$\left|\left(l^2+m^2-n^2\right)\right|$：$\left(2mn\right)$

②當底邊為 m 時

(w、x、y、z)的解為 $\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$\left(2mn\right)$：$\left|\left(l^2+n^2-m^2\right)\right|$：$\left(2ml\right)$

③當底邊為 l 時

(w、x、y、z)的解為 $\left(l^2+m^2+n^2\right)$：$\left(2ml\right)$：$\left|\left(m^2+n^2-l^2\right)\right|$：$\left(2nl\right)$

四、四元二次不定方程 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的整數完全解，只要以三個任意整數或任意實數倍比率數，代入上式中的任一式且不必加絕對值，再經化簡即可找到，反過來，任一組(w、x、y、z)解，經適當還原後，皆可找到對應的 l、m、n。

柒、參考資料

一、出光正則 畢達哥拉斯的禮物 初版 台北市萬安街 21 巷 11 號 3 樓 益智工房 2002 年 5 月 P55~62

二、黃家禮 幾何明珠 一版 台北市信義路 3 段 147 巷 15 弄 5-1 號 7 樓 九章出版社 2001 年 10 月 P1~14

三、盛立人、嚴鎮軍 從勾股定理談起 一版 台北市信義路 3 段 147 巷 15 弄 5-1 號 7 樓 九章出版社 2001 年 2 月 P40~41
四、第三十八屆全國科展 國中組 將母子定理推廣成三代通則的利器─照妖鏡
五、第三十八屆全國科展 國中組 從畢氏定理談起

【評　語】　030421　廣義的畢氏定理探討

作者巧妙的利用了他們自已所構造的輔助三角形，找出其與 Diophantine eguation $X^2+Y^2+Z^2=W^2$ 的解之間的關聯，並由此得出了一些解的形式，是很不錯的結果，是否還存在著無法藉由此種方式得出的解?或者，所有可能的解都已經找到了?如果能加入這些討論，會是十分完美的作品。