中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030419

門柱磚家

學校名稱：高雄縣立鳳山國民中學

作者：	指導老師：
國二 杜宜穆	杜鴻祥
國二 蔡政宜	鍾惠美

關鍵詞：對稱型與不對稱型　等差數列　高斯值

門　柱　『磚』　家

摘要

本研究由「有 n 個磚塊，每個磚塊的高度 1 或 2，要搭建兩根等高的門柱，其中高度 1 的磚塊必須在高度 2 的磚塊之上，共有多少個構造方法？」開始，擴展到磚塊高度 a 和 b。其中 a＜b 且 a,b 互質。

接著再找出 1,2 上下不限制時，n 個磚塊的排列方法數，也提出不重複的搭建方式。

壹、研究動機：

學校重建校門，看著工人用高度爲 1 和 2 的兩種磚塊在堆砌兩根門柱。我們想：若限制磚塊個數或限制搭建次序……，是否也能搭建等高的門柱？也就是說：

有 n 個磚塊，每個磚塊的高度 1 或 2，要搭建兩根等高的門柱，其中高度 1 的磚塊必須在高度 2 的磚塊之上，共有多少個構造方法？

本來以爲只是加法遊戲，研究之後發現還得分類討論，過程中充滿了趣味性與挑戰性，恰好數學課上到數列，因此就進一步探討，並作爲科展的研究題材。

爲了方便，我們在紙上以數字 1、2 計算兩組總和相等的數字來代替兩根等高的門柱。

以下都是以 n 代表 n 個磚塊。

（1,2）表示高度 1 和 2 兩種磚塊。

（a,b）表示高度 a 和 b 兩種磚塊。其中 a＜b 且 a,b 互質。

貳、研究目的：

一、（1,2）的排法，1 必須在 2 之上。

二、（1,3）的排法，1 必須在 3 之上。

三、（1,b）的排法，1 必須在 b 之上。

四、（a,b）的排法，a 必須在 b 之上。

五、（1;2）的排法，1;2 上下不限制。

參、定義與符號：

一、排法分成對稱型與不對稱型兩種。

對稱型兩邊磚塊個數相同，不對稱型兩邊磚塊個數不同。如下圖。

以 n＝6 爲例，對稱型：

1	1
1	1
1	1

1	1
1	1
2	2

1	1
2	2
2	2

2	2
2	2
2	2

不對稱型：

<table><tr><td>1</td><td rowspan="2">2</td></tr><tr><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td rowspan="2">2</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>

<table><tr><td rowspan="2">2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td></tr><tr><td rowspan="2">2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>

二、$a_n(a,b)$表示 n 個磚塊可以構造出兩根等高門柱的方法總數。其中 a 必須在 b 之上。

三、$P_n(1;2)$表示 n 個磚塊可以構造出兩根等高門柱的方法總數。其中 1,2 不限上下次序。

四、$[x]$表 x 的高斯值，即不大於 x 的最大整數。

肆、研究方法與過程：

一、(1,2) 的排法，1 必須在 2 之上。

$n=1$ 時顯然無解，所以由 $n=2$ 開始。

我們發現 n 為奇數或偶數時的排法很不相同，所以將 n 分為奇數與偶數兩種類型討論。

（一）n 為偶數

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$a_n(1,2)$	2	3	6	9	12	17	22	27	34	41	48

n 個磚塊的總高度為 $n \sim 2n$ 之間的偶數，而單一門柱的高度從 $\frac{n}{2}$、$\frac{n}{2}+1$、$\frac{n}{2}+2$、……、$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$ 共有 $\frac{n}{2}+1$ 個，所以對任意偶數 n 有 $\frac{n+2}{2}$ 個對稱型排法。

結論：對任意偶數 n，對稱型排法都有 $\frac{n+2}{2}$ 個。

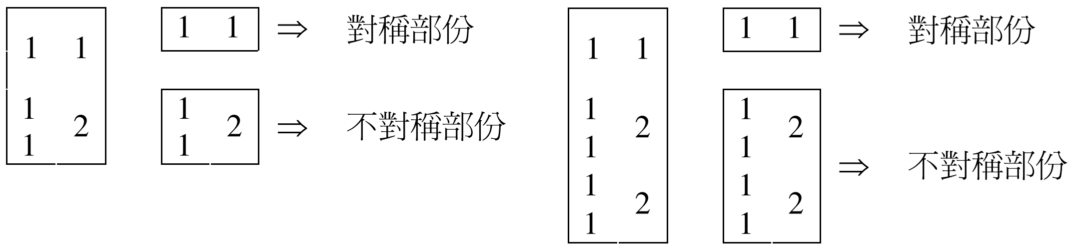
在 $n=6$ 時發現還有不對稱型排法。而 $n=6$、8、10 的不對稱型排法分別有 2、4、6 個。另外 $n=12$ 時又有另一種不對稱型排法，也就是偶數 n 每多 6 就多 1 種不對稱型排法。為什麼呢？

因為（1,2）時，偶數 n 的不對稱型排法是以一邊排 2 個 1 另一邊排 1 個 2 為單位。為了保持偶數 n，（1,2）的不對稱型排法必須是以 6 為基礎。偶數 n 每多 6 就多 1 種不對稱型排法，因此想到用高斯值 $\left[\frac{n}{6}\right]$ 表示不對稱型排法種數。

接下來討論為何 n 每多 2 每種不對稱型排法各多 2 個。

先將不對稱型排法分為對稱和不對稱兩部份，如下圖。

奇數 n ＝ 5 為例：　　　　　　　　偶數 n ＝ 8 為例：



因不對稱部份除左右互換外無其他變動，且左右互換後不影響對稱部份排列的個數，因此我們從對稱部份討論排法個數即可。對稱部份就和（1,2）偶數 n 的對稱型排法相同，n 每多 2，則對稱部份排法就多 1 個。又因不對稱部份可左右互換，所以得出 n 每多 2 則每種不對稱型排法就各多 2 個。

接下來討論不對稱型排法的個數：

$6\leqq n<12$　因 n 每多 2 則不對稱型排法也多 2 個，而 $n=6$ 有 2 個，$n=8$ 有 4 個，$n=10$ 有 6 個，因此有 $(n-4)$ 個。

$12\leqq n<18$　除了有 $(n-4)$ 個『6 的不對稱型排法』之外，還多了（n -10）個『12 的不對稱型排法』。共有 $(n-4)+(n-10)=2$（n -7）個。

$18\leqq n<24$　原理如前述。共有 $(n-4)+(n-10)+(n-16)=3$（n -10）個。

……

$6k\leqq n<6(k+1)$　　共有 k〔$(n-4)-3(k-1)$〕個。

$(n-4)$、$2(n-7)$、$3(n-10)$、……、k〔$(n-4)-3(k-1)$〕。括號內爲等差數列，首項爲 $(n-4)$，n 每多 6 就多一個公差(-3)，所以項數爲不對稱型排法種數，即 $\left[\frac{n}{6}\right]$。

括號外的係數恰爲不對稱型排法種數，即 $\left[\frac{n}{6}\right]$。

∴不對稱型排法有 $\left[\frac{n}{6}\right]\times\left[(n-4)-3\left(\left[\frac{n}{6}\right]-1\right)\right]$ 個。

∴n 爲偶數，$a_n(1,2)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{6}\right]\times\left[(n-4)-3\left(\left[\frac{n}{6}\right]-1\right)\right]$

另外，我們還發現：偶數 n 每多 2 就多 1 個對稱型排法。因爲不對稱型排法有 $\left[\frac{n}{6}\right]$ 種，而 n 每多 2，每 1 種不對稱型排法都各多 2 個，所以多 $2\left[\frac{n}{6}\right]$ 個排法。

∴ $a_n(1,2)=a_{n-2}(1,2)+1+2\left[\frac{n}{6}\right]$。

結論：n 為偶數，$a_n(1,2)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{6}\right]\times\left[(n-4)-3\left(\left[\frac{n}{6}\right]-1\right)\right]$

且 $a_n(1,2)=a_{n-2}(1,2)+1+2\left[\frac{n}{6}\right]$。

（二）n 爲奇數

n	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$a_n(1,2)$	2	4	6	10	14	18	24	30	36	44	52

因爲 n 爲奇數時，左右磚塊數必不相等，所以只有不對稱型排法。

同樣的，將（1,2）奇數 n 的不對稱型排法分成對稱和不對稱兩部份，如前述。對稱部份與（1,2）偶數 n 對稱型排法相同，得出 n 每多 2 就多 1 個排法；又因不對稱部份可左右互換，所以 n 每多 2 時每 1 種不對稱型排法就各多 2 個。

因爲從 n＝3 開始有不對稱型排法。爲了保持奇數 n，以 6 個磚塊爲單位增加不對稱型排法的種數。又因爲自 n＝3 開始有不對稱型排法，因此以$\left[\frac{n+3}{6}\right]$代表不對稱型排法種數。又因 n 每多 2，每種不對稱型排法都多 2 個，所以$a_n(1,2)=a_{n-2}(1,2)+2\left[\frac{n+3}{6}\right]$。

接下來討論不對稱型排法的個數：

$3\leqq n<9$　有$(n-1)$個

$9\leqq n<15$　有$(n-1)+(n-7)=2(n-4)$個

$15\leqq n<21$　有$(n-1)+(n-7)+(n-13)=3(n-7)$個

……

$6k-3\leqq n<6k+3$　有$k〔(n-1)-3(k-1)〕$個。

$(n-1)$、$2(n-4)$、$3(n-7)$、…、$k〔(n-1)-3(k-1)〕$。括號內爲等差數列，首項爲$(n-1)$。因爲每多 1 種不對稱型排法括號內就多公差（－3），所以項數爲不對稱型排法種數，即$\left[\frac{n+3}{6}\right]$。括號外的係數恰爲不對稱型排法種數，即$\left[\frac{n+3}{6}\right]$。

∴n 爲奇數，$a_n(1,2)=\left[\frac{n+3}{6}\right]\times〔(n-1)-3(\left[\frac{n+3}{6}\right]-1)〕$

結論 **n 為奇數，**$a_n(1,2)=\left[\frac{n+3}{6}\right]\times〔(n-1)-3(\left[\frac{n+3}{6}\right]-1)〕$

且$a_n(1,2)=a_{n-2}(1,2)+2\left[\frac{n+3}{6}\right]$。

二、（1,3）的排法，1 必須在 3 之上。

（一）n 爲偶數

因爲（1,3）時，單一門柱的高度從$\frac{n}{2}$、$\frac{n}{2}+2$、$\frac{n}{2}+4$、$\frac{n}{2}+6$、……、$\frac{n}{2}+n$共有$\frac{n}{2}+1$個，所以對任意偶數 n 有$\frac{n+2}{2}$個對稱型排法。

從 n＝4 開始有不對稱型排法。

n＝8 時又發現另 1 種不對稱型排法。因爲最基本的不對稱型排法爲 n＝ 4 的一邊 1 個 3 另一邊 3 個 1，且多 4 個磚塊後可以再得到另一種不對稱型排法。所以偶數 n 每多 4 就多 1 種不對稱型排法，以$\left[\frac{n}{4}\right]$代表不對稱型排法種數。

不對稱型排法之中可分爲對稱和不對稱兩部份，如（1,2）的研究。對稱部份同於（1,3）的對稱型排法，n 每多 2 排法就多 1 個，又因不對稱部份可左右互換，因此 n 每多 2，每 1 種不對稱型排法就多 2 個。

$4 \leqq n < 8$ 有$(n-2)$個不對稱型排法

$8 \leqq n < 12$ 有$(n-2)+(n-6) \qquad =2(n-4)$個

$12 \leqq n < 16$ 有$(n-2)+(n-6)+(n-10)=3(n-6)$個

……

$4k \leqq n < 4(k+1)$ 有 k〔$(n-2)-2(k-1)$〕個。

$(n-2)$、$2(n-4)$、$3(n-6)$、…、k〔$(n-2)-2(k-1)$〕。括號內爲等差數列，首項爲（n -2），因爲每多 1 種不對稱型排法，括號內就多公差（－2），所以項數爲不對稱型排法種數，即$\left[\frac{n}{4}\right]$。括號外的係數恰爲不對稱型排法種數，即$\left[\frac{n}{4}\right]$。

∴n 爲偶數，不對稱型排法有$\left[\frac{n}{4}\right]\times$〔$(n-2)-2\left(\left[\frac{n}{4}\right]-1\right)$〕個。

（二）n 爲奇數

因爲 n 爲奇數且 1、3 皆奇數，兩門柱的高度必爲一奇數一偶數。所以無法排列。

結論：n 為偶數， $a_n(1,3)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{4}\right]\times$〔$(n-2)-2\left(\left[\frac{n}{4}\right]-1\right)$〕

n 為奇數，無法排列。 $a_n(1,3)=0$

三、（1,b）的排法，1 必須在 b 之上。

（一）b 爲偶數：

1、n 爲偶數

對稱型排法以（1,2）爲基礎，將 1 個 1 換成 b 增加$(b-1)$。所以公差爲$(b-1)$。

又因單一門柱的高度最低爲$\frac{n}{2}$，最高爲$\frac{bn}{2}$，除以公差$(b-1)$後，得到$\frac{bn-n}{2(b-1)}+1$項，即$\frac{n+2}{2}$項。因此對稱型排法有$\frac{n+2}{2}$個。

最基本的不對稱型排法爲一邊 1 個 b 另一邊 b 個 1。因爲 b+1 爲奇數，所以自$2(b+1)$開始有偶數 n 的不對稱型排法。且 n 每多 2（b+1）就多 1 種不對稱型排法。整理之後得到：

$2(b+1) \leqq n < 4(b+1)$ 有$(n-2b)$個不對稱型排法

$4(b+1) \leqq n < 6(b+1)$ 有$(n-2b)+$〔$(n-2b)-2(b+1)$〕$=2(n-3b-1)$個

$6(b+1) \leqq n < 8(b+1)$ 有$(n-2b)+$〔$(n-2b)-2(b+1)$〕$+$〔$(n-2b)-4(b+1)$〕

$=3(n-4b-2)$個

……

$k\times2(b+1) \leqq n < (k+1)\times2(b+1)$ 有 k〔$(n-2b)-(b+1)(k-1)$〕個

$(n-2b)$、$2(n-3b-1)$、$3(n-4b-2)$、……、k〔$(n-2b)-(b+1)(k-1)$〕。括號內爲等差數列，首項爲$(n-2b)$。因爲每多 1 種不對稱型排法，括號內就多公差$-(b+1)$，所以項數爲不對稱型排法種數，即$\left[\dfrac{n}{2(b+1)}\right]$。而括號外的係數爲不對稱型排法種數，即$\left[\dfrac{n}{2(b+1)}\right]$。

$$\therefore a_n(1,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{2(b+1)}\right]\times〔(n-2b)-(b+1)\times(\left[\frac{n}{2(b+1)}\right]-1)〕$$

結論：b 為偶數，n 為偶數。

$$a_n(1,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{2(b+1)}\right]\times〔(n-2b)-(b+1)\times(\left[\frac{n}{2(b+1)}\right]-1)〕$$

2、n 爲奇數

因爲兩門柱磚塊數必不相等，所以沒有對稱型排法。

最基本的不對稱型排法在 $n=b+1$ 時出現，接著在最上方各加 1 個 1、最下方各加 1 個 b 或一邊 1 個 b 另一邊 b 個 1。爲了保持奇數 n，所以 n 每多 $2(b+1)$，就多 1 種不對稱型排法。

$(b+1)\leqq n<3(b+1)$　有$(n-b+1)$個不對稱型排法

$3(b+1)\leqq n<5(b+1)$　有$(n-b+1)+〔(n-b+1)-2(b+1)〕$
$=2(n-2b)$個

$5(b+1)\leqq n<7(b+1)$　有$(n-b+1)+〔(n-b+1)-2(b+1)〕+〔(n-b+1)-4(b+1)〕$
$=3(n-3b-1)$個

……

$(2k-1)(b+1)\leqq n<(2k+1)(b+1)$　有 k〔$(n-b+1)-(b+1)(k-1)$〕個

$(n-b+1)$、$2(n-2b)$、$3(n-3b-1)$、……、k〔$(n-b+1)-(b+1)(k-1)$〕。括號內爲等差數列，首項爲$(n-b+1)$，因爲每多 1 種不對稱型排法，括號內就多公差$-(b+1)$，所以項數爲不對稱型排法種數，即$\left[\dfrac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]$。括號外的係數恰爲不對稱型排法種數，即$\left[\dfrac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]$。

不對稱型排法個數爲$\left[\dfrac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]\times〔(n-b+1)-(b+1)\times(\left[\dfrac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]-1)〕$

結論：b 為偶數，n 為奇數。

$$a_n(1,b)=\left[\frac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]\times〔(n-b+1)-(b+1)\times(\left[\frac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]-1)〕$$

（二）b 爲奇數

1、n 爲偶數

（1,b）時單一門柱的高度最低爲$\frac{n}{2}$，最高爲$\frac{bn}{2}$。將其中的 1 換爲 b 增加$(b-1)$，所以對稱型排法有$\frac{bn-n}{2(b-1)}+1$個，即$\frac{n+2}{2}$ 。

因爲自 n＝b+1 開始有不對稱型排法，且 n 每多$(b+1)$就多 1 種不對稱型排法。

$(b+1)\leqq n<2(b+1)$　有$(n-b+1)$個不對稱型排法

$2(b+1)\leqq n<3(b+1)$　有$(n-b+1)+〔(n-b+1)-(b+1)〕=2(n-\frac{3b}{2}+\frac{1}{2})$個

$3(b+1)\leqq n<4(b+1)$　有$(n-b+1)+〔(n-b+1)-(b+1)〕+〔(n-b+1)-2(b+1)〕$

$=3(n-2b)$個

……

$k(b+1)\leqq n<(k+1)(b+1)$　有$k〔(n-b+1)-\frac{b+1}{2}(k-1)〕$個

括號內爲等差數列，首項爲$(n-b+1)$，因不對稱型排法每多 1 種，括號內就多公差$-\frac{b+1}{2}$，所以項數爲不對稱型排法種數，即$\left[\frac{n}{b+1}\right]$。括號外係數恰爲不對稱型排法種數，即$\left[\frac{n}{b+1}\right]$。

$$\therefore a_n(1,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{b+1}\right]\times〔(n-b+1)-\frac{b+1}{2}\times(\left[\frac{n}{b+1}\right]-1)〕$$

2、n 爲奇數

兩門柱的高度必爲一奇數一偶數。所以無法排列。

$\boxed{\text{結論}}$：b 為奇數。

n 為偶數，$a_n(1,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{b+1}\right]\times〔(n-b+1)-\frac{b+1}{2}\times(\left[\frac{n}{b+1}\right]-1)〕$

n 為奇數，無法排列。$a_n(1,b)=0$

探討（1,b）之後，再擴展到（a,b），且 a＜b。因爲 a,b 若不互質則先除以最大公因數，討論方式相同，所以簡化爲 a,b 互質。

四、(a,b) 的排法，a 必須在 b 之上。a＜b 且 a,b 互質。

（一）$a+b$ 爲奇數

1、n 爲偶數

將 a 換爲 b 時，差爲 $(b-a)$，單一門柱的高度最低爲 $\frac{an}{2}$，最高爲 $\frac{bn}{2}$，公差爲（b-a）的等差數列共有 $\frac{bn-an}{2(b-a)}+1$ 個，即 $\frac{n+2}{2}$。且 n 自 $2(a+b)$ 開始有不對稱型排法，又 n 每多 $2(a+b)$ 就多 1 種不對稱型排法。

$2(a+b)\leqq n<4(a+b)$　有〔$n-2(a+b-1)$〕個不對稱型排法

$4(a+b)\leqq n<6(a+b)$　有〔$n-2(a+b-1)$〕+〔$n-2(a+b-1)-2(a+b)$〕$=2(n-3a-3b+2)$ 個

$6(a+b)\leqq n<8(a+b)$　有〔$n-2(a+b-1)$〕+〔$n-2(a+b-1)-2(a+b)$〕+〔$n-2(a+b-1)-4(a+b)$〕$=3(n-4a-4b+2)$ 個

……

$k\times 2(a+b)\leqq n<(k+1)\times 2(a+b)$　有 k〔$n-2(a+b-1)-(a+b)(k-1)$〕個

括號內爲等差數列，首項爲〔$n-2(a+b-1)$〕，因每多 1 種不對稱型排法，括號內就多公差 $-(a+b)$，所以項數爲不對稱型排法種數，即 $\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]$。括號外係數恰爲不對稱型排法種數，即 $\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]$。

$$\therefore a_n(a,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]\times〔n-2(a+b-1)-(a+b)\times(\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]-1)〕$$

結論：a<b 且 a, b 互質。a+b 為奇數，n 為偶數。

$$a_n(a,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]\times〔n-2(a+b-1)-(a+b)\times(\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]-1)〕$$

2、n 爲奇數

沒有對稱型排法。最基本的不對稱型排法爲一邊 a 個 b 另一邊 b 個 a，所以從 n＝a+b 開始有不對稱型排法。

又以 n＝a+b 爲基礎，可在兩門柱最上方各加 a 或再最下方各加 b 或是一邊加 a 個 b 另一邊加 b 個 a。但爲了保持奇數 n，因此要加 2（a+b）。所以 n 每多 $2(a+b)$ 就多 1 種不對稱型排法。

$(a+b)\leqq n<3(a+b)$　有〔$n-(a+b-2)$〕個不對稱型排法

$3(a+b)\leqq n<5(a+b)$　有〔$n-(a+b-2)$〕+〔$n-(a+b-2)-2(a+b)$〕$=2$〔$n-(2a+2b-2)$〕個

$5(a+b)\leqq n<7(a+b)$　有〔$n-(a+b-2)$〕+〔$n-(a+b-2)-2(a+b)$〕+〔$n-(a+b-2)-4(a+b)$〕$=3$〔$n-(3a+3b-2)$〕個

……

$(2k-1)(a+b)\leqq n<(2k+1)(a+b)$　有 k〔$n-(a+b-2)-(a+b)(k-1)$〕個

括號內爲等差數列，首項爲〔$n-(a+b-2)$〕，因每多 1 種不對稱型排法，括號內就多公差$-(a+b)$，所以項數爲不對稱型排法種數，即$\left[\dfrac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]$。括號外係數恰爲不對稱型排法種數，即$\left[\dfrac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]$。

$$\therefore a_n(a,b)=\left[\frac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]\times〔n-(a+b-2)-(a+b)\times(\left[\frac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]-1)〕$$

$\boxed{\text{結論}}$：$a<b$ 且 a,b 互質。$a+b$ 為奇數，n 為奇數。

$$a_n(a,b)=\left[\frac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]\times〔n-(a+b-2)-(a+b)\times(\left[\frac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]-1)〕$$

（二）$a+b$ 爲偶數。

a,b 需互質，所以必皆爲奇數。

1、n 爲偶數

如同前面 $a+b$ 爲奇數，對稱型排法爲$\dfrac{n+2}{2}$個。且發現 n 從$(a+b)$開始有不對稱型排法，又 n 每多$(a+b)$則多加 1 種不對稱型排法。

$(a+b)\leqq n<2(a+b)$　有〔$n-(a+b-2)$〕個不對稱型排法

$2(a+b)\leqq n<3(a+b)$　有〔$n-(a+b-2)$〕＋〔$n-(a+b-2)-(a+b)$〕

$=2(n-\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}b+2)$個

$3(a+b)\leqq n<4(a+b)$　有〔$n-(a+b-2)$〕＋〔$n-(a+b-2)-(a+b)$〕

＋〔$n-(a+b-2)-2(a+b)$〕

$=3(n-2a-2b+2)$個

……

$k(a+b)\leqq n<(k+1)(a+b)$　有 k〔$n-(a+b-2)-\dfrac{a+b}{2}(k-1)$〕個

如同前述可得：$a_n(a,b)=\dfrac{n+2}{2}+\left[\dfrac{n}{a+b}\right]\times〔n-(a+b-2)-\dfrac{a+b}{2}\times(\left[\dfrac{n}{a+b}\right]-1)〕$

2、n 爲奇數

兩門柱高度必爲一奇數一偶數。所以無法排列。

$\boxed{\text{結論}}$：$a<b$ 且 a,b 互質。$a+b$ 為偶數，

n 為偶數，$a_n(a,b)=\dfrac{n+2}{2}+\left[\dfrac{n}{a+b}\right]\times〔n-(a+b-2)-\dfrac{a+b}{2}\times(\left[\dfrac{n}{a+b}\right]-1)〕$

n 為奇數，無法排列。$a_n(a,b)=0$

終於把上下次序有限制的構造方法告一段落，但是若不限制上下次序時會如何呢？

五、（1;2）的排法，1,2 上下不限制。

延續之前的排列，把上下次序不限制的部分附上去，列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n(1;2)$	0	2	2	6	10	22	42	86	170	342

$P_n(1;2)$ 增加速度很快。且自 n＝2 開始，分別是後項爲前項的 2 倍加 2 或減 2，且交替出現。進一步的觀察發現：

$$P_n(1;2) = P_{n-1}(1;2) + 2P_{n-2}(1;2)$$

由上式可知，只要有 $P_1(1;2)$、$P_2(1;2)$ 就可以依序算出以後各項。但是能不能以 n 直接求出 $P_n(1;2)$ 的值？

表中得知，自 n＝2 開始，$P_n(1;2)$、$P_{n+1}(1;2)$、……以後的各項都要連續乘以 2，推測是否 $P_n(1;2)$ 的值會與 2^n 有關係。因爲 $P_1(1;2)=0$，所以自 n＝2 開始，嘗試找 $P_n(1;2)$、2^n 與 n 的關係。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$P_n(1;2)$	0	2	2	6	10	22	42	86	170	342

發現 $P_n(1;2)$ 與 2^n 似乎有 3 倍的關係。

因爲 $P_n(1;2)$ 都是偶數，先找出 $\dfrac{P_n(1;2)}{2}$，再與 2^{n-1} 做比較之後。

2^{n-1}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$\dfrac{P_n(1;2)}{2}$	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171

發現 $\dfrac{P_n(1;2)}{2}$ 與 $2^{n-1}\pm1$ 都有 $\dfrac{1}{3}$ 的關係。

$\therefore \dfrac{P_n(1;2)}{2} = \dfrac{1}{3}$〔$2^{n-1}+(-1)^n$〕，也就是 $P_n(1;2) = \dfrac{2}{3}$〔$2^{n-1}+(-1)^n$〕。

另外，我們也找出證明 $P_n(1;2) = \dfrac{2}{3}$〔$2^{n-1}+(-1)^n$〕的方法，見附件。

結論：高度 1 或 2 的磚塊共有 n 塊，想要不限上下次序構造出兩根等高的門柱，總共有 $P_n(1;2) = \dfrac{2}{3}$〔$2^{n-1}+(-1)^n$〕。

只是 $P_n(1;2)=P_{n-1}(1;2)+2P_{n-2}(1;2)$ 又如何解釋呢？

（一） $P_n(1;2)=P_{n-1}(1;2)+2P_{n-2}(1;2)$

先以 n＝4、5、6 及 n＝5、6、7 做比較，我們發現用兩門柱最上方磚塊的相同與不相同分類，可以有兩種：

1、最上方用的是等高的磚塊，即同時為 1 或同時為 2。扣除最上方的各 1 塊磚塊後，剩下的磚塊即為 n-2 個，所以 $P_n(1;2)$ 中包含了 $2P_{n-2}(1;2)$ 種方法。

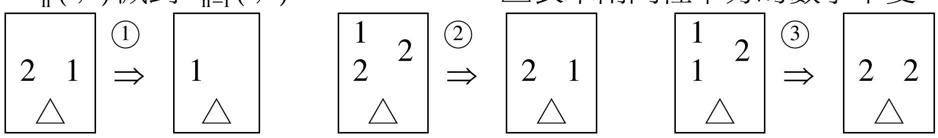
2、最上方用的是不等高的磚塊。如下圖。

①若左門柱最上方是 2，則改為 1；同時將右門柱最上方的 1 拿掉，則兩門柱依然等高，如此我們就用了 n-1 個。

②若左門柱最上方是 1，緊接的下方是 2 且右門柱最上方是 2。則將左右同時拿掉 1，得到左門柱為 2，右門柱的 2 改為 1，如此就用了 n-1 個。

③若左門柱最上方的兩塊都是 1 則直接換為 2，而右門柱不變動。得到左右皆等高，如此也是用了 n-1 個。

$P_n(1;2)$ 減到 $P_{n-1}(1;2)$　　　　△表示兩門柱下方的數字不變



如此，則以上各種狀況總磚塊數都少一個。這樣就包含了 n-1 個的所有排法，即 $P_{n-1}(1;2)$。所以 $P_n(1;2)=P_{n-1}(1;2)+2P_{n-2}(1;2)$ 成立。

（二） $P_{n-1}(1;2)+2P_{n-2}(1;2)=P_n(1;2)$

由 P_{n-2}（1,2）到 $P_n(1;2)$ 可以看作多兩個磚塊，因為兩門柱需等高，所以只要左右兩門柱最上方同時各加 1 或各加 2，就得到 $2P_{n-2}(1;2)$。與 $P_n(1;2)$ 減到 $P_{n-2}(1;2)$ 類似。

又 $P_{n-1}(1;2)$ 到 $P_n(1;2)$，因為只能增加 1 個磚塊又要保持等高，所以想到把一邊加 1，另一邊將 1 換為 2，如此磚塊總個數只多 1 符合 $P_{n-1}(1;2)$ 到 $P_n(1;2)$。另外，由 $P_{n-1}(1;2)$ 到 $P_n(1;2)$，若兩邊高度都加 2 時磚塊數不能調換更動，所以由 $P_{n-1}(1;2)$ 到 $P_n(1;2)$ 兩邊只能加 1。

但是兩邊都可能會有 1，要如何把 1 換為 2 才不會發生重覆與漏列？

1、$P_{n-1}(1;2)$加到$P_n(1;2)$。如下圖。

①若左右門柱最上方都是 1，則把右門柱最上方加 1；同時將左門柱最上方的 1 換爲 2，則兩門柱依然等高，如此就用了 n 個。

②若左右門柱最上方都是 2，則把左門柱最上方的 2 換成兩個 1，如此就用了 n 個。

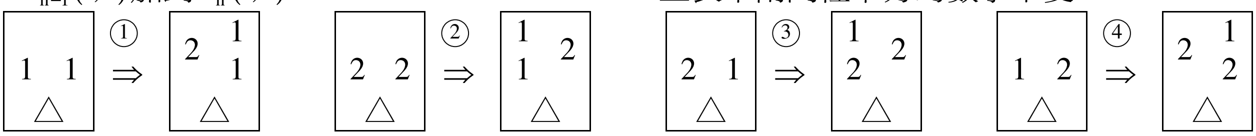
③若左門柱最上方是 2，右門柱最上方是 1，則把左門柱最上方加 1，而右門柱最上方的 1 換爲 2。則依然等高，如此也是用了 n 個。

④若左門柱最上方是 1，右門柱最上方是 2，則把右門柱最上方加 1，而左門柱最上方的 1 換爲 2。則依然等高，如此也是用了 n 個。

2、$P_{n-2}(1;2)$加到$P_n(1;2)$

因爲需加 2 個磚塊，所以只要在兩門柱各加 1 個即可，但爲了不重複，所以一律將磚塊加在門柱的最上方。因此將$P_{n-2}(1;2)$各種排法兩門柱的最上方各加上 1 或各加上 2 就得到$P_n(1;2)$，所以爲$2P_{n-2}(1;2)$。

$P_{n-1}(1;2)$加到$P_n(1;2)$ △表示兩門柱下方的數字不變



結論：(1, 2) 上下不限制，則 $P_n(1;2)=P_{n-1}(1;2)+2P_{n-2}(1;2)$ 且 $P_n(1;2)=\frac{2}{3}$〔$2^{n-1}+(-1)^n$〕。

伍、討論：

由 1 與 2 的加法竟然發展到這麼豐富的研究結果，真始料所未及。高斯符號這麼好用，原來數學家創造數學符號確有原因。

爲了找出變化的原因耗了不少時間，尤其是（1,2）不限上下次序的部份更是吃足苦頭。希望將來有機會再擴展至（a,b）不限上下次序的部份。更希望評審教授能不吝指導。謝謝！！

陸、結論：

（一）高度 1 和 2 的磚塊共有 n 個，要搭建等高的兩門柱，且 1 必須在 2 之上；

n 爲偶數，則$a_n(1,2)=a_{n-2}(1,2)+1+2\left[\frac{n}{6}\right]$

且$a_n(1,2)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{6}\right]\times$〔（n－4）－3（$\left[\frac{n}{6}\right]$－1）〕

n 爲奇數，則$a_n(1,2)=a_{n-2}(1,2)+2\left[\frac{n+3}{6}\right]$

且$a_n(1,2)=\left[\frac{n+3}{6}\right]\times$〔（n－1）－3（$\left[\frac{n+3}{6}\right]$－1）〕

（二）高度 1 和 3 的磚塊共有 n 個，要搭建等高的兩門柱，且 1 必須在 3 之上；

n 爲偶數，$a_n(1,3)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{4}\right]\times$〔$(n-2)-2$（$\left[\frac{n}{4}\right]-1$）〕

n 爲奇數，無法排列。$a_n(1,3)=0$

（三）高度 1 和 b 的磚塊共有 n 個，要搭建等高的兩門柱，且 1 必須在 b 之上；

1、b 爲偶數，

n 爲偶數，$a_n(1,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{2(b+1)}\right]\times$〔（$n-2b$）$-(b+1)\times$（$\left[\frac{n}{2(b+1)}\right]-1$）〕

n 爲奇數，$a_n(1,b)=\left[\frac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]\times$〔（$n-b+1$）$-(b+1)\times$（$\left[\frac{n+(b+1)}{2(b+1)}\right]-1$）〕

2、b 爲奇數，

n 爲偶數，$a_n(1,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{b+1}\right]\times$〔（$n-b+1$）$-\frac{b+1}{2}\times$（$\left[\frac{n}{b+1}\right]-1$）〕

n 爲奇數，無法排列。$a_n(1,b)=0$

（四）高度 a 和 b 的磚塊共有 n 個，要搭建等高的兩門柱，且 a 必須在 b 之上；

$a<b$ 且 a,b 互質。

1、 $a+b$ 爲奇數。

n 爲偶數，$a_n(a,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]\times$〔$n-2(a+b-1)-(a+b)\times$（$\left[\frac{n}{2(a+b)}\right]-1$）〕

n 爲奇數，$a_n(a,b)=\left[\frac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]\times$〔$n-(a+b-2)-(a+b)\times$（$\left[\frac{n+(a+b)}{2(a+b)}\right]-1$）〕

2、 $a+b$ 爲偶數且互質。

n 爲偶數，$a_n(a,b)=\frac{n+2}{2}+\left[\frac{n}{a+b}\right]\times$〔$n-(a+b-2)-\frac{a+b}{2}\times$（$\left[\frac{n}{a+b}\right]-1$）〕

n 爲奇數，無法排列。$a_n(a,b)=0$

（五）高度 1 和 2 的磚塊共有 n 個，要搭建等高的兩門柱，且 1、2 上下不限制，則

$P_n(1;2)=P_{n-1}(1;2)+2P_{n-2}(1;2)$ 且 $P_n(1;2)=\frac{2}{3}$〔$2^{n-1}+(-1)^n$〕

柒、參考資料：

康軒文教事業　　國中數學課本　第二、四冊

附件：

試證： $P_n(1;2)=\frac{2}{3}$〔 $2^{n-1}+(-1)^n$ 〕　$n\in N$

證明：

為了簡化證明，我們以 P_1 代表 $P_1(1;2)$、……、 P_n 代表 $P_n(1;2)$

（1）n 為偶數

由說明書列表中的 $P_n(1;2)$ 值得知：

$P_1=0$	$P_1=0$
$P_2=2P_1+2$	$P_1+P_2=2$
$P_3=2P_2-2$	$P_2+P_3=2(P_1+P_2)=2^2$
$P_4=2P_3+2$	$P_3+P_4=2(P_2+P_3)=2^3$
$P_5=2P_4-2$	$P_4+P_5=2(P_3+P_4)=2^4$
…… ……	…… …… ……
…… ……	…… …… ……
$P_{n-1}=2P_{n-2}-2$	$P_{n-2}+P_{n-1}=2(P_{n-3}+P_{n-2})=2^{n-2}$
$P_n=2P_{n-1}+2$	$P_{n-1}+P_n=2(P_{n-2}+P_{n-1})=2^{n-1}$

上列各式相加可得

$$2【P_1+P_2+P_3+P_4+\cdots+P_{n-1}】+P_n=0+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-2$$

$\therefore$ Ⓐ 式 $\Rightarrow$ $2【P_1+P_2+P_3+P_4+\cdots+P_{n-1}+P_n】=2^n-2+P_n$

$\because (P_1+P_2)+(P_3+P_4)+\cdots+(P_{n-1}+P_n)$

$$=2+2^3+2^5+\cdots+2^{n-1}$$

$$=\frac{2\left(4^{\frac{n}{2}}-1\right)}{4-1}$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{3}$$

$\therefore 2【P_1+P_2+P_3+P_4+\cdots+P_{n-1}+P_n】=\frac{4(2^n-1)}{3}$ 代入Ⓐ式

$$\therefore \frac{4(2^n-1)}{3}=2^n-2+P_n$$

$$\therefore P_n=\frac{4\times 2^n-4-3\times 2^n+6}{3}=\frac{2^n+2}{3}$$

$\therefore$ n 為偶數　$P_n(1;2)=\frac{2}{3}(2^{n-1}+1)$

（2）n 爲奇數

由說明書列表中的 $P_n(1;2)$ 值得知：

$P_1=0$	$P_1 = 0$
$P_2=2P_1+2$	$P_1+P_2 = 2$
$P_3=2P_2-2$	$P_2+P_3 = 2(P_1+P_2) = 2^2$
$P_4=2P_3+2$	$P_3+P_4 = 2(P_2+P_3) = 2^3$
$P_5=2P_4-2$	$P_4+P_5 = 2(P_3+P_4) = 2^4$
…… ……	…… …… ……
…… ……	…… …… ……
$P_{n-1}=2P_{n-2}+2$	$P_{n-2}+P_{n-1} = 2(P_{n-3}+P_{n-2}) = 2^{n-2}$
$P_n=2P_{n-1}-2$	$P_{n-1}+P_n = 2(P_{n-2}+P_{n-1}) = 2^{n-1}$

上列各式相加可得

$$2【P_1+P_2+P_3+P_4+\cdots\cdots+P_{n-1}】+P_n = 0+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n-2$$

$\therefore$ Ⓑ 式 $\Rightarrow$ $2【P_1+P_2+P_3+P_4+\cdots\cdots+P_{n-1}】+P_n = 2^n-2$

$\because (P_1+P_2)+(P_3+P_4)+\cdots\cdots+(P_{n-2}+P_{n-1})$

$$= 2+2^3+2^5+\cdots\cdots+2^{n-2}$$

$$= \frac{2\left(4^{\frac{n-1}{2}}-1\right)}{4-1}$$

$$= \frac{2(2^{n-1}-1)}{3}$$

$\therefore 2【P_1+P_2+P_3+P_4+\cdots\cdots+P_{n-1}】=\dfrac{4(2^{n-1}-1)}{3}$ 代入Ⓑ式

$\therefore \dfrac{4(2^{n-1}-1)}{3}+P_n = 2^n-2$

$\therefore P_n=\dfrac{3(2^n-2)}{3}-\dfrac{2(2^n-2)}{3} = \dfrac{2^n-2}{3}$

$\therefore$ n 爲奇數 $P_n(1;2) = \dfrac{2}{3}(2^{n-1}-1)$

$\therefore$ $n\in N$ $P_n(1;2) = \dfrac{2}{3}〔2^{n-1}+(-1)^n〕$ 得證

【評　語】　030419　門柱磚家

考慮透過不同高度的兩種磚塊來搭建兩根等高的門柱問題，作了不錯的歸納與分析，但若能繼續推廣至(a,b)的排法，a,b 上下不限制的一般化情形。作品將會更完整。