中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030418

<u>心發現</u>

學校名稱：臺南縣立學甲國民中學

作者：	指導老師：
國二 蘇依安	林琪祐
國二 陳佳郁	
國二 陳孟真	
國二 黃晴永	

關鍵詞：三心　三角錐　六面共點

摘要

在平面上，三角形有重心、外心、內心，若將討論的範圍提升到空間中，三角錐也有同樣的性質，我們利用了**紙筆證明**以及**動態繪圖軟體 GSP** 來呈現，來說明空間中的三角錐確實也有重心、外心、內心，而且其幾何性質，與我們所學平面上三角形的三心有極相似之處。

壹、研究動機

在我們學了三角形全等性質的證明之後，老師又介紹了三角形的重心、外心、內心，我們不禁疑惑，為何任意三角形會有三心？而其他平面圖形不一定會有？又為何三線會共點？若將三角形三心的概念延伸到空間中，會適用於什麼圖形呢？一連串的問題強烈的驅使我們做研究。

貳、研究目的

找出空間中何種圖形同時具有重心、內心、外心。以及找出三心在空間中的性質，利電腦動態模擬呈現。如同證明三角形三線共點，也要證明其六面共點。

參、研究設備及器材

電腦、GSP 繪圖軟體、三角錐模型、紙、筆

肆、研究過程或方法

在平面上，任意多邊形中，任意三角形是唯一同時具有重心、內心、外心的圖形。我們推論，因為平面幾何圖形（不含曲線圖形），都可分割成三角形，所以我們認為三角形可視為平面幾何的基本圖形，而換個角度想，若在平面上要圍出一個封閉的區域（面積不為零），最少需要三個邊。

因此，我將討論的層次提升到空間中，可以發現三角錐也是如此，任意空間幾何圖形（不含曲線圖形）都可視為三角錐的組合圖形，若在空間中要圍出一個封閉的區域（體積不為零），最少需要四個面，如同三角形在平面的地位，我們猜測三角錐在空間中也是如此。因此我們著手討論三角錐，希望能夠發現我們要的答案。

由於三角錐是空間中的圖形，討論的範圍不再侷限於平面，而是空間，即使做出模型，對於點、線、面的呈現也是有限，在請教了老師之後，知道有 GSP 這套電腦繪圖軟體，對於我們的研究，有相當大的幫助，由於平常有機會使用電腦，對於電腦的使用並不陌生，但由於軟體本身使用起來需要有紮實的幾何、代數概念，因此，藉著這個機會，讓我們能將所學的知識實際的在電腦上運用、操作。

一、三角錐重心探索、介紹

三角形的重心是做出中線，目的是要將面積平分，在我們研究的過程中發現，若要將三角錐的體積平分，必須利用**面**來做切割，使體積平分爲二，三角錐體的體積爲

（$\frac{1}{3}$**底面積** x **錐高**），其面必須平分錐體的底面積，我們發現，**錐體的頂點**與**底面三角形中線**所形成的面恰符合其性質，如**圖**（一）：

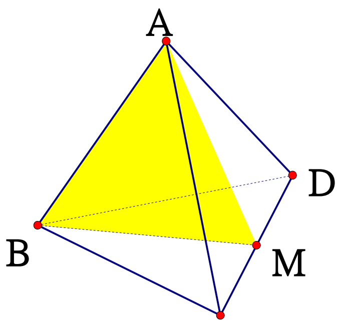
$\overline{BM}$ 爲 ΔBCD 的中線，平面 ABM 可將三角錐 ABCD 的體積平分爲二。

三角錐 A-BCM 體積 $=\frac{1}{3}\Delta BMC$ 面積 X 錐高

三角錐 A-BDM 體積 $=\frac{1}{3}\Delta BMD$ 面積 X 錐高

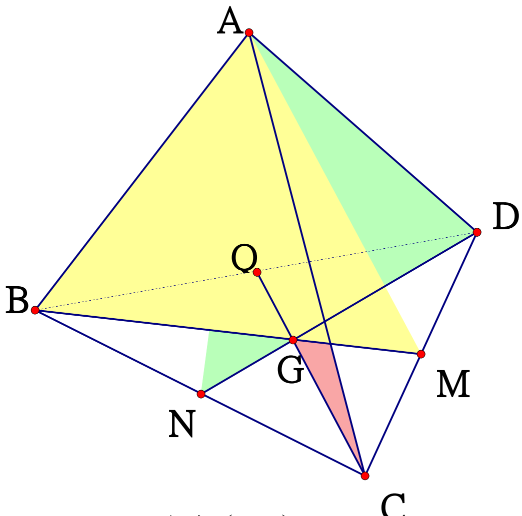
$\because \Delta BMC$ 面積 $=\Delta BMD$ 面積

$\therefore$ 三角錐 A-BCM 體積 ＝ 三角錐 A-BDM 體積



圖（一）

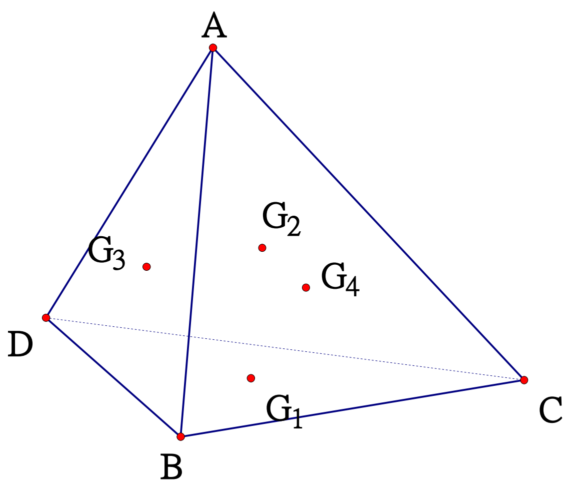
由這個概念切入，由於底面 ΔBCD 有三條中線，如**圖(二)**，所以對三角錐 ABCD 來說，平面 ABM、平面 ACQ、平面 ADN 都可將三角錐 A-BCD 的體積平分，進一步觀察更可以發現三平面交於一線 $\overline{AG}$，而此線恰爲頂點 A 與底面 ΔBCD 重心的連線，使我們不禁猜測三角錐 ABCD 的重心是否會落在 $\overline{AG}$ 上



圖（二）

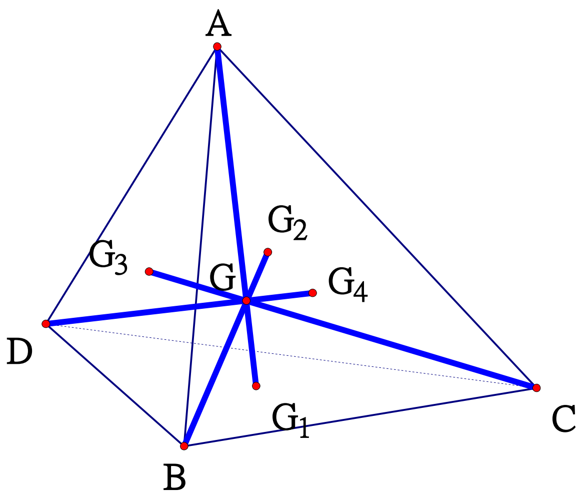
（承上）若分別以 A、B、C、D 爲頂點，連接其相對面的三角形的重心，會有什麼發現呢？

如**圖**（三）G_1、G_2、G_3、G_4 分別爲 ΔBCD、ΔACD、ΔABD、ΔABC 的重心，連接 $\overline{AG_1}$、$\overline{BG_2}$、



圖（三）

$\overline{CG_3}$ 、$\overline{DG_4}$ ，如**圖（四）**，四條直線 $\overline{AG_1}$ 、$\overline{BG_2}$ 、$\overline{CG_3}$ 、$\overline{DG_4}$ 相交於交於一點 G，而 G 點就是我們所尋找的三角錐重心。



圖（四）

三角錐重心求法：

1. 三角錐重心爲各頂點與其相對面之三角形中線所形成面的交點，此平面共有六個，六個平面相交於一點，此點即爲三角錐之重心。
2. 三角錐各頂點與其相對三角形重心的連線，此線共有四條，四線交於一點此點即爲三角錐之重心。

如同平面上三角形的重心有著**平分面積** 、將**中線分成比例 2：1 的線段**等性質，我們發現三角錐的重心也有類似相同性質。

三角錐重心性質

三角錐重心性質（一）

如**圖（四）** $\overline{AG_1}$ 、$\overline{BG_2}$ 、$\overline{CG_3}$ 、$\overline{DG_4}$ 可將三角錐等分成十二個體積相同的三角錐。

$G-G_1BC$ 體積 $=$ $G-G_1CD$ 體積 $=$ $G-G_1BD$ 體積

$=$ $G-G_2AC$ 體積 $=$ $G-G_2AD$ 體積 $=$ $G-G_2CD$ 體積

$=$ $G-G_3AB$ 體積 $=$ $G-G_3AD$ 體積 $=$ $G-G_3BD$ 體積

$=$ $G-G_4AB$ 體積 $=$ $G-G_4BC$ 體積 $=$ $G-G_4AC$ 體積

重心性質（一）證明

已知：G 為三角錐 ABCD 之重心，G_1 、G_2 、G_3 、G_4 分別為 ΔBCD 、ΔACD 、ΔABD 、ΔABC 的重心

求證：$G-G_1BC$ 體積 ＝ $G-G_1CD$ 體積 ＝ $G-G_1BD$ 體積

＝ $G-G_2AC$ 體積 ＝ $G-G_2AD$ 體積 ＝ $G-G_2CD$ 體積

＝ $G-G_3AB$ 體積 ＝ $G-G_3AD$ 體積 ＝ $G-G_3BD$ 體積

＝ $G-G_4AB$ 體積 ＝ $G-G_4BC$ 體積 ＝ $G-G_4AC$ 體積

證明：如**圖（五）** G_1 為 ΔBCD 的重心

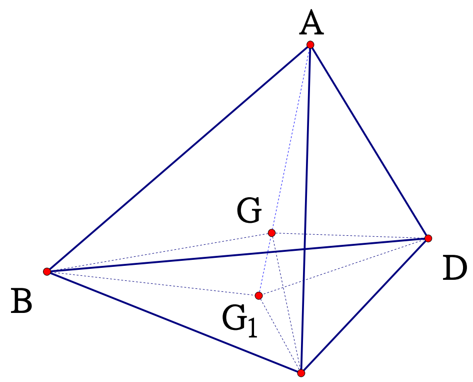
$\therefore$ ΔG_1BC 面積 ＝ ΔG_1CD 面積 ＝ ΔG_1BD 面積

錐體體積 = $\frac{1}{3}$ X（底面積）X（錐高）

由此可得 $G-G_1BC$ 體積 ＝ $G-G_1CD$ 體積

＝ $G-G_1BD$ 體積 ＝ $\frac{1}{3}$ $G-BCD$ 體積 ⋯

（底面積相等，錐高相同）



圖（五）

同理可證 $G-G_2AC$ 體積 ＝ $G-G_2AD$ 體積

＝ $G-G_2CD$ 體積 ＝ $\frac{1}{3}$ （$G-ACD$ 體積）⋯

$G-G_3AB$ 體積 ＝ $G-G_3AD$ 體積 ＝ $G-G_3BD$ 體積 ＝ $\frac{1}{3}$ （$G-ABD$ 體積）⋯

$G-G_4AB$ 體積 ＝ $G-G_4BC$ 體積 ＝ $G-G_4AC$ 體積 ＝ $\frac{1}{3}$ （$G-ABC$ 體積）⋯

另外 $A-G_1BC$ 體積 ＝ $A-G_1CD$ 體積 ＝ $A-G_1BD$ 體積（底面積相等，錐高相同）

（$A-G_1BC$ 體積）－（$G-G_1BC$ 體積）＝（$A-G_1CD$ 體積）－（$G-G_1CD$ 體積）

$=$（$A-G_1BD$ 體積）$-$（$G-G_1BD$ 體積）

$\Rightarrow$ $G-ABC$ 體積 $=$ $G-ACD$ 體積 $=$ $G-ABD$ 體積 $\cdots$

同理可證

$G-ABC$ 體積 $=$ $G-BCD$ 體積 $=$ $G-ABD$ 體積 $\cdots$

由 、可知

$G-ABC$ 體積 $=$ $G-ACD$ 體積 $=$ $G-ABD$ 體積 $=$ $G-BCD$ 體積$\cdots$

由 、、、、 可知

$G-G_1BC$ 體積 $=$ $G-G_1CD$ 體積 $=$ $G-G_1BD$ 體積

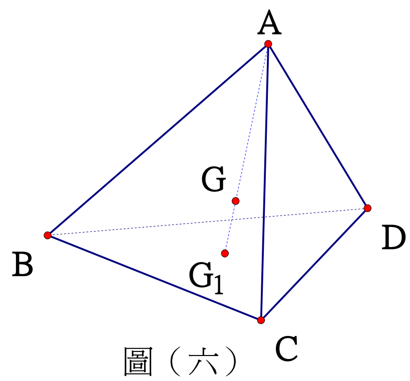
$=$ $G-G_2AC$ 體積 $=$ $G-G_2AD$ 體積 $=$ $G-G_2CD$ 體積

$=$ $G-G_3AB$ 體積 $=$ $G-G_3AD$ 體積 $=$ $G-G_3BD$ 體積

$=$ $G-G_4AB$ 體積 $=$ $G-G_4BC$ 體積 $=$ $G-G_4AC$ 體積

三角錐重心性質（二）

如圖（六），G 爲三角錐 ABCD 的重心，G_1 爲 ΔBCD 的重心，$\overline{AG}:\overline{GG_1}$ ＝3：1



圖（六）

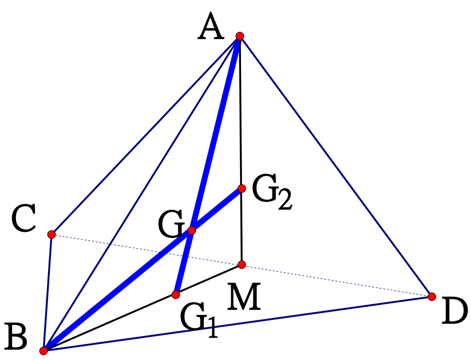
重心性質（二）證明

已知：三角錐 ABCD 中，如圖（七），G_1 、G_2 分別爲三角形 BCD、三角形 CAD 的重心，G 爲 $\overline{AG_1}$ 、$\overline{BG_2}$ 的交點

求證：$\overline{AG}:\overline{GG_1}=3:1$ $\overline{BG}:\overline{GG_2}=3:1$

證明：ΔMAB 中 $\overline{MG_2}:\overline{G_2A}=1:2$ ；

$\overline{MG_1}:\overline{G_1B}=1:2$



圖（七）

$\therefore\ \overline{G_1G_2} \,//\, \overline{AB} \;\Rightarrow\; \Delta MG_2G_1 \sim \Delta MAB$

$\Delta G_2GG_1 \sim \Delta BGA$ …

又 $\overline{G_2G_1} : \overline{AB} = \overline{MG_2} : \overline{MA} = 1:3$ …

由 、 可知，$\overline{AG} : \overline{GG_1} = 3:1$ $\overline{BG} : \overline{GG_2} = 3:1$（對應邊成比例）

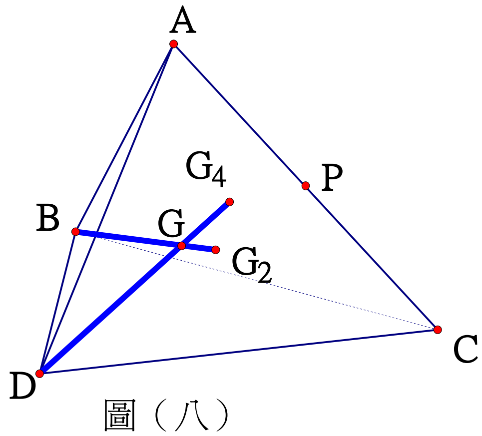
在平面上三角形可證明三中線交於一點。但是由於任意兩直線在空間中的情形有，平行、歪斜、交於一點、重疊等四種情形，情況較複雜，若能夠證明三角錐中，各頂點與其相對面三角形重心的連線交於同一點，也就是上述 $\overline{AG_1}$、$\overline{BG_2}$、$\overline{CG_3}$、$\overline{DG_4}$ 四線交於同一點，對於三角錐重心的討論將更加的完備。

三角錐重心連線共點證明

（$\overline{AG_1}$ 、$\overline{BG_2}$ 、$\overline{CG_3}$ 、$\overline{DG_4}$ 四線共點證明）

首先必須證明在三角錐 $\overline{AG_1}$ 、$\overline{BG_2}$ 、$\overline{CG_3}$ 、$\overline{DG_4}$ 四線中，任意兩條直線會有交點。

$\overline{AG_1}$ 、$\overline{BG_2}$ 、$\overline{CG_3}$ 、$\overline{DG_4}$ 任意兩線有交點



圖（八）

已知：如圖（八）三角錐 ABCD 中 G_2 、 G_4 分別為 ΔADC 、 ΔABC 重心

求證：$\overline{BG_2}$ 、$\overline{DG_4}$ 兩直線交於一點 G

證明：在 ΔABC 中，$\overline{BP}$ 為中線 $\Rightarrow$ B、G_4 、P 三點共線

在 ΔADC 中，$\overline{DP}$ 為中線 $\Rightarrow$ D、G_2 、P 三點共線

$\therefore$ B、D、G_2 、G_4 四點落在平面 BDP 上

$\therefore$ $\overline{BG_2}$ 、$\overline{DG_4}$ 兩直線交於一點

接下來必須證明$\overline{CG_3}$ 、$\overline{DG_4}$會通過$\overline{BG_2}$ 、$\overline{DG_4}$的交點 G，只要能夠證明其中一條通過 G 即可，另外一條亦然。

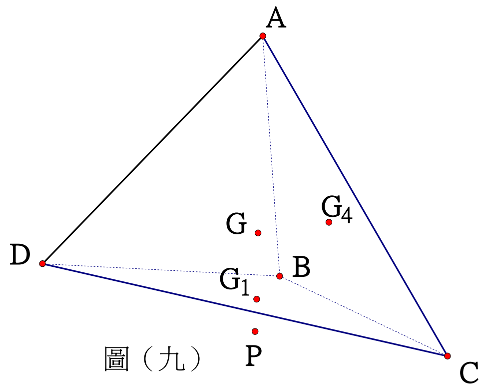
第三條線會通過前兩線的交點

已知：三角錐 ABCD 中，G 爲$\overline{AG_1}$ 、$\overline{CG_3}$的交點G_1 、

G_3分別爲ΔBCD 、ΔABD的重心，

$\overline{DG}$延長線交ΔABC於G_4

求證： G_4爲ΔABC的重心



圖（九）

證明：如圖（九），延長$\overline{GG_1}$ ，使得$\overline{G_1P} = \frac{1}{2}\overline{GG_1}$

連接$\overline{AP}$ ，做$\overline{BC}$中點 Q 如圖（十）

G、 G_1兩點會落在平面 AQD 上，

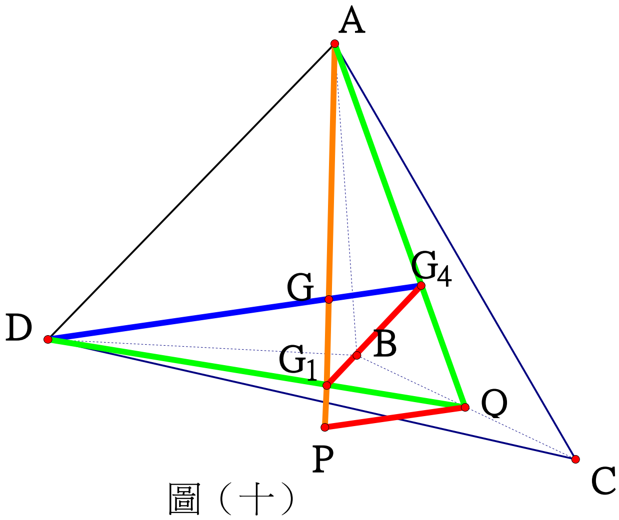
ΔG_1GD和ΔG_1PQ中

$\angle GG_1D = \angle PG_1Q$ ，$\overline{GG_1} : \overline{PG_1} = 2:1$（已知）

$\overline{DG_1} : \overline{QG_1} = 2:1$（$\because$ G 爲ΔBCD重心）

$\therefore \Delta G_1GD \sim \Delta G_1PQ$ （SAS 相似）

$\Rightarrow \overline{DG} // \overline{PQ}$（內錯角相等）



圖（十）

在ΔAGG_4和ΔAPQ中

$\overline{AG} : \overline{GP} = 2:1$（$\because G$ 爲三角錐 ABCD 重心，$\overline{AG} : \overline{GG_1} = 1:3$ ；$\overline{G_1P} = \frac{1}{2}\overline{GG_1}$ ）

$\overline{GG_4} // \overline{PQ}$ 根據三角形平行線定理$\overline{AG_4} : \overline{G_4Q} = 2:1$

在ΔABC中，$\overline{AQ}$爲中線，$\overline{AG_4} : \overline{G_4Q} = 2:1$ $\therefore$ G_4爲ΔABC的重心

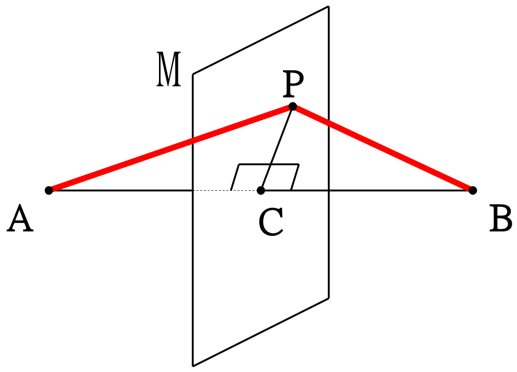
二、三角錐外心探索、介紹（三角錐外接球的圓心）

在三角形中，外心是由中垂線的交點而來，有了求三角錐重心的概念，我們朝著用**面**來做平分，由於外心是到三角錐的各頂點等距，所以有了以下的發現。

中垂面

在空間中，對邊做**垂直平分面**，**簡稱中垂面**，可以利用三角形的全等性質來證明**中垂面**上的任意一點到邊的兩端點等距。

證明：如**圖**（十一）：平面 **M 垂直平分** $\overline{AB}$ 且與 $\overline{AB}$ 相交於 C，C 爲 $\overline{AB}$ 的中點，P 爲平面 **M** 上任意一點，已知 $\overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle PCA=\angle PCB=90^0$，$\overline{PC}=\overline{PC}$ 由三角形 SAS 全等性質可得到 $\Delta PCA \cong \Delta PCB$，所以 $\overline{PA}=\overline{PB}$

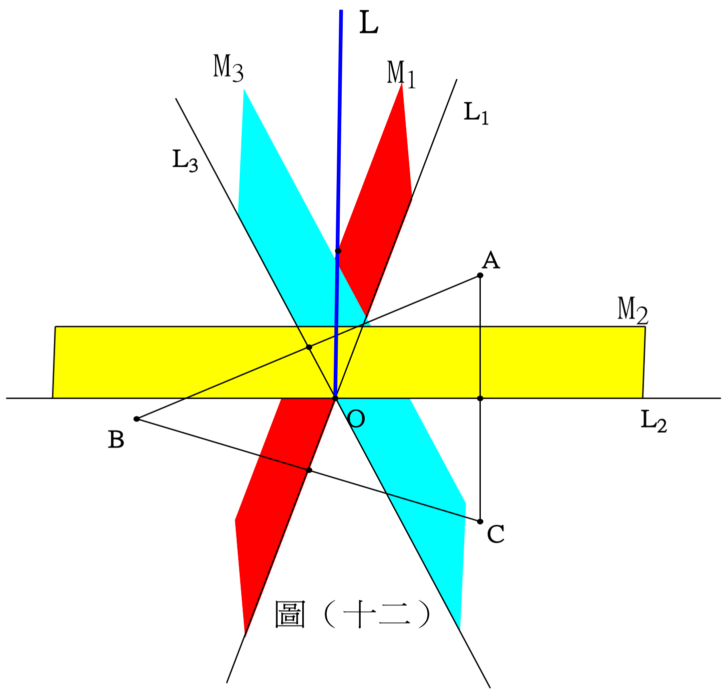


圖（十一）

因此三角錐邊上中垂面上的任一點到邊的兩端點等距，所以如果三角錐的六個邊上的中垂面交於一點，則此點到三角錐的四個頂點等距，此點即爲三角錐的外接球球心。

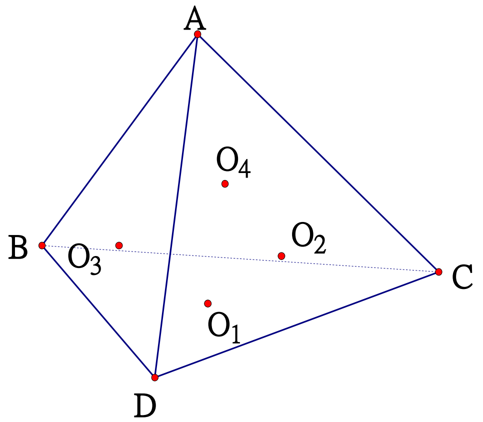
拿三角錐 ABCD 其中一面 ΔABC 爲例，如**圖**（十二），在空間中 L_1、L_2、L_3 分別爲三角形 ΔABC $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中垂線，三條直線交於 O 點，O 即爲 ΔABC 的外心。

對 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 三邊做出**中垂面** M_1、M_2、M_3，可發現三中垂面相交於一直線 L（**L 上任意一點到** ΔABC **三頂點等距**），L 通過 ΔABC 的外心，且與 ΔABC 所在的平面垂直。

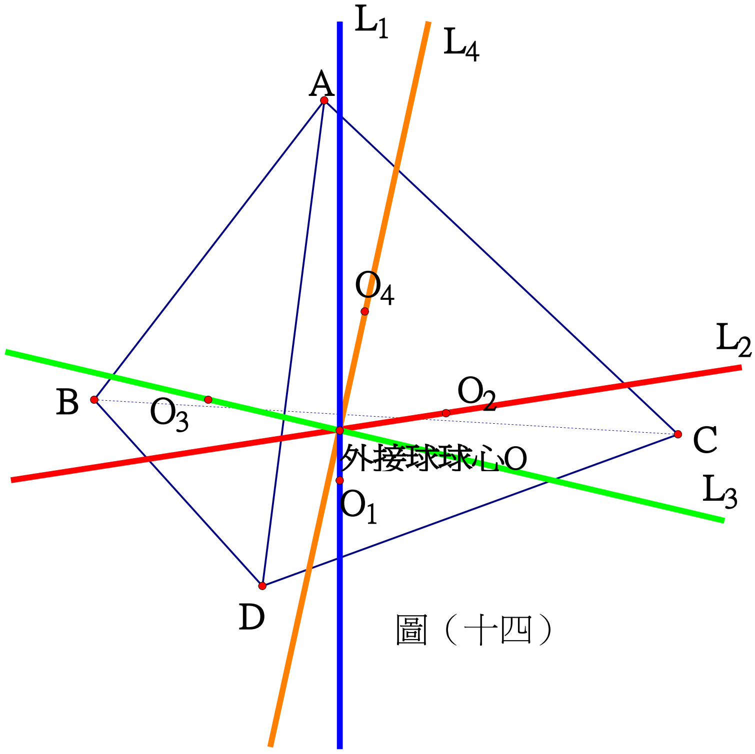


圖（十二）

如圖（十三），三角錐的四個三角形 ΔBCD、ΔACD、ΔABD、ΔABC 上的外心依序為 O_1、O_2、O_3、O_4，分別做出過 O_1、O_2、O_3、O_4 且分別與所在平面垂直的直線 L_1、L_2、L_3、L_4，如圖（十四），可得到 L_1、L_2、L_3、L_4 四線交於一點 O，則 O 點到三角錐的四個頂點 A、B、C、D 等距，所以可以以 O 為圓心做出一個球，通過 A、B、C、D 四點，故 O 即為三角錐 ABCD 外接球的球心，簡稱**三角錐的外心**。



圖（十三）



圖（十四）

三角錐外心求法：

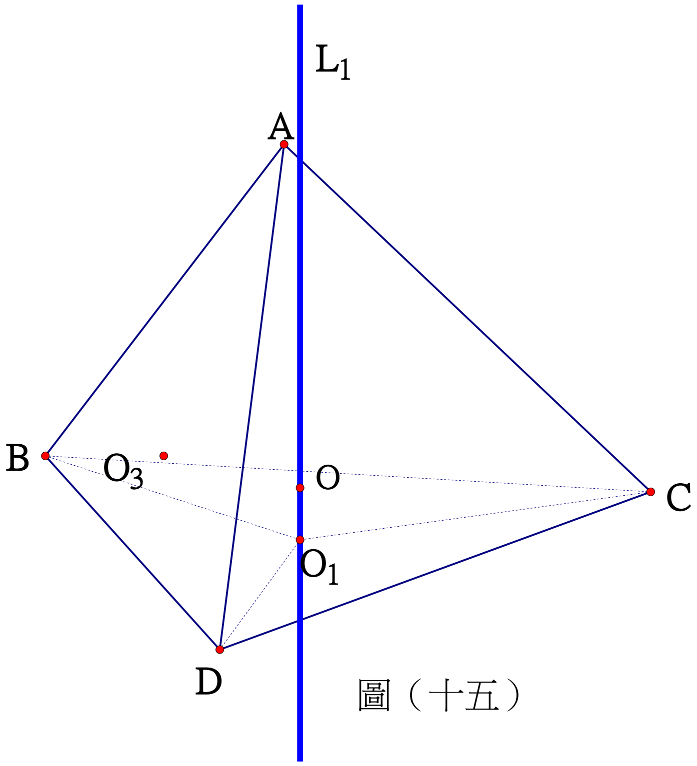
1. 做三角錐六個邊的中垂面相交於一點。
2. 過三角錐各面三角形的外心，做出與其平面垂直垂直的直線，交點即為三角錐外心。

三角錐外心性質

外心 O 到三角錐四頂點 ABCD 等距

已知：如**圖**（十五）O 爲三角錐 ABCD 的外心，O_1 爲 ΔBDC 外心，O_3 爲 ΔABD 外心

求證：$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$



圖（十五）

證明：$\because O_1$ 爲 ΔBDC 外心

$\therefore \overline{O_1B}=\overline{O_1C}=\overline{O_1D}$

在 ΔOO_1B 、ΔOO_1C 、ΔOO_1D 中 $\overline{O_1B}=\overline{O_1C}=\overline{O_1D}$ 、$\overline{OO_1}$ 爲共用邊

$\angle OO_1B=\angle OO_1C=\angle OO_1D=90^0$

$\therefore \Delta OO_1B\cong\Delta OO_1C\cong\Delta OO_1D$

（SAS 全等）

$\Rightarrow \overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ ⋯

同理可證 $\Delta OO_3A\cong\Delta OO_3B\cong\Delta OO_3D$

$\Rightarrow \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OD}$ ⋯ 根據 、 可得 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$

三角錐外心 L_1 、L_2 、L_3 、L_4 四線共點證明（L_1 、L_2 、L_3 、L_4 如圖（十四））

在三角錐 CD 中，L_1 、L_2 、L_3 、L_4 分別爲過 ΔBCD 、ΔACD 、ΔABD 、ΔABC 外心且與其平面垂直的直線。

要證明四線共點，首先必須證明任意兩線在空間中相交於一點，接著證明第三條線會通過前兩條線的交點即可。

L_1、L_2、L_3、L_4 任意兩線有交點

已知：如圖（十六）三角錐ABC中，
L_2、L_3分別爲ΔACD、ΔABD
三邊中垂面的交線
求證：L_2、L_3交於一點O

證明：平面S爲$\overline{AD}$中垂面，
由於L_2爲ΔACD三邊中垂面的交線$\Rightarrow$
落在平面S上

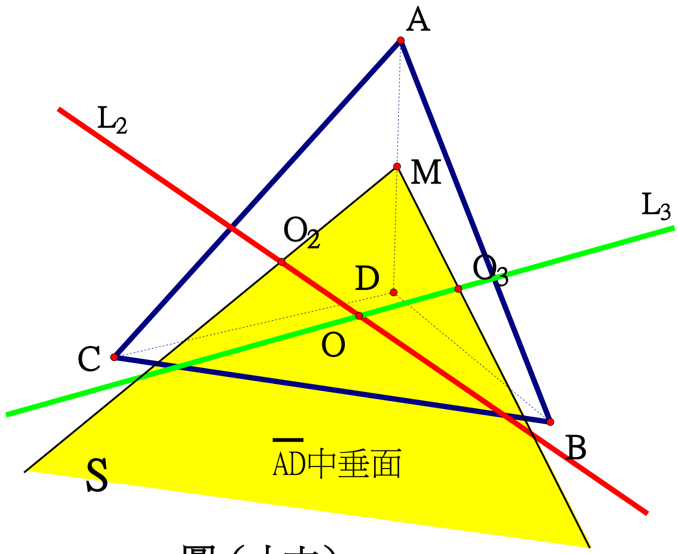
L_2

L_3爲ΔABD三邊中垂面的交線

$\Rightarrow$ L_3落在平面S上

L_2、L_3在同一平面上，且不平行、重疊

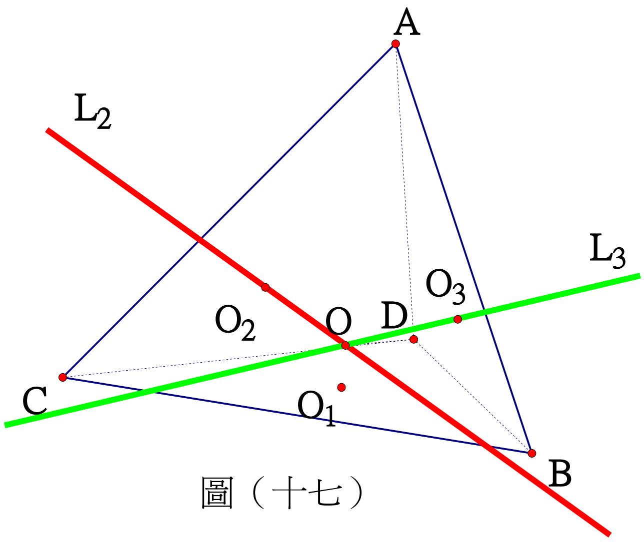
∴ 必有一交點O



圖（十六）

第三條線會通過前兩線的交點

已知：如圖（十七），L_2、L_3爲通過O_2、O_3
且分別與平面ADC、平面ADB垂直的
直線（O_2、O_3分別爲ΔADC、ΔADB的
外心）O_1爲O投影在平面BCD上的點



圖（十七）

求證：O_1爲ΔBCD的外心

證明：如圖（十八）在ΔOO_1D和ΔOO_1B中，

$\overline{OD}=\overline{OB}$（O 在 L_3 上），

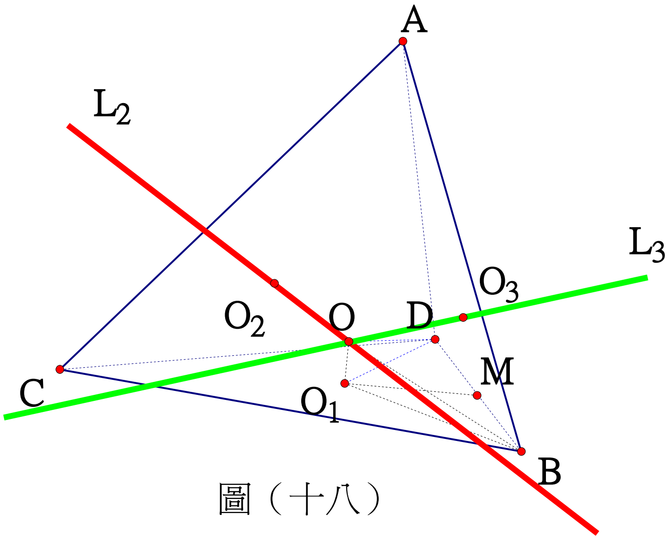
$\overline{OO_1}=\overline{OO_1}$（共用邊）

$\angle OO_1D=\angle OO_1B$

$\therefore \Delta OO_1D \cong \Delta OO_1B$（RHS 全等）

$\Rightarrow \overline{O_1D}=\overline{O_1B}$（對應邊相等）

取 M 爲 $\overline{BD}$ 中點，在 ΔO_1MD 和 ΔO_1MB



圖（十八）

中，$\overline{O_1D}=\overline{O_1B}$、$\overline{MD}=\overline{MB}$、$\overline{O_1M}=\overline{O_1M}$（共用邊）

$\therefore \Delta O_1MD \cong \Delta O_1MB$（SSS 全等）$\Rightarrow \angle O_1MD=\angle O_1MB=90^0$

$\therefore \overline{O_1M}$ 爲 $\overline{BD}$ 中垂線 … 1　同理可證，取 $\overline{CD}$ 中點 Q，$\therefore \overline{O_1Q}$ 爲 $\overline{CD}$ 中垂線 … 2

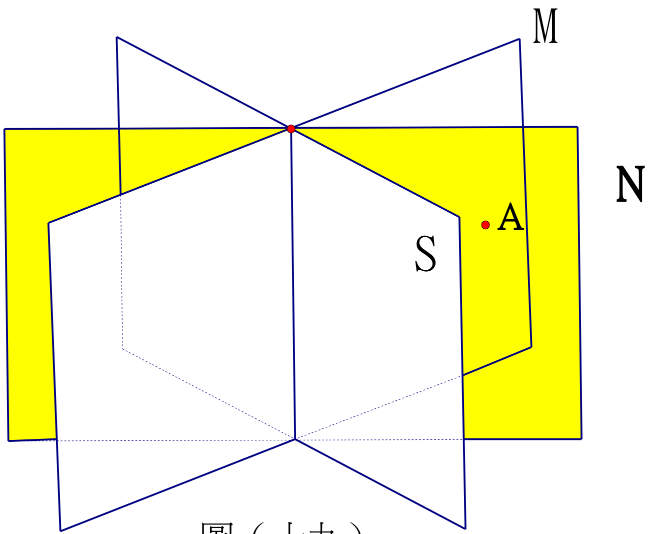
由 1、2 可得 O_1 爲 ΔBCD 的外心

三、三角錐內心探索、介紹（三角錐內切球的圓心）

三角形的內心是到三邊等距。對於三角錐來說，內切球球心必須到三角錐四個平面等距，到四平面等距，才能夠做出一個球與四個平面相切。於是我們朝著**點到面等距**的方向做思考。

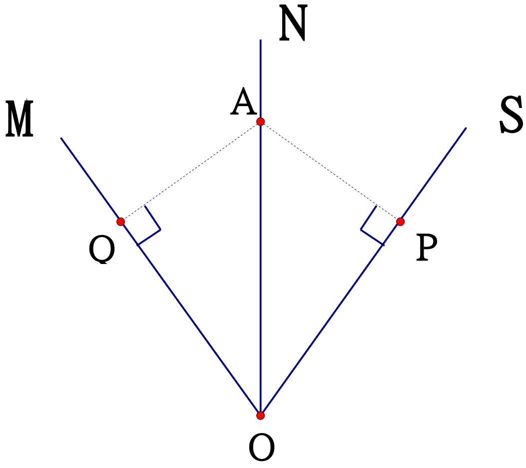
面平分面

三角錐是由四個平面所組成的圖形，因此任意取出兩個平面來做討論，兩個平面相交的情形如**圖（十九）**：M、S 爲空間中相交之兩平面，N 爲二平面 M、S 夾角的平分面，簡稱面平分面，A 爲平面 N 上任意一點，則 A 到 M、S 兩平面的距離相等。



圖（十九）

已知：承**圖**（十九），　、N、S爲三平面，N平分M、S兩平面所夾的角，A爲平面N上任意一點，P、Q爲A在M、S平面上的投影點



圖（二十）

求證：$\overline{AP} = \overline{AQ}$

證明：如**圖**（二十）

在ΔAOP和ΔAOQ中（A、P、Q三點形成的平面，交M、S平面的交線於O）

∵P、Q爲A在M、S平面上的投影點，

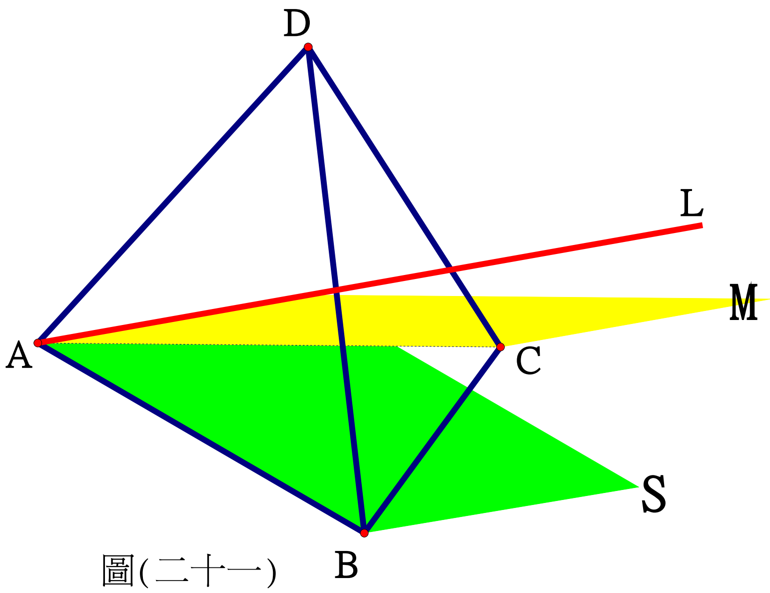
$\therefore \angle APO = \angle AQO = 90^0$ ，

又$\angle AOP = \angle AOQ$ ，$\overline{AO} = \overline{AO}$ ，

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta AOQ$ (AAS全等)

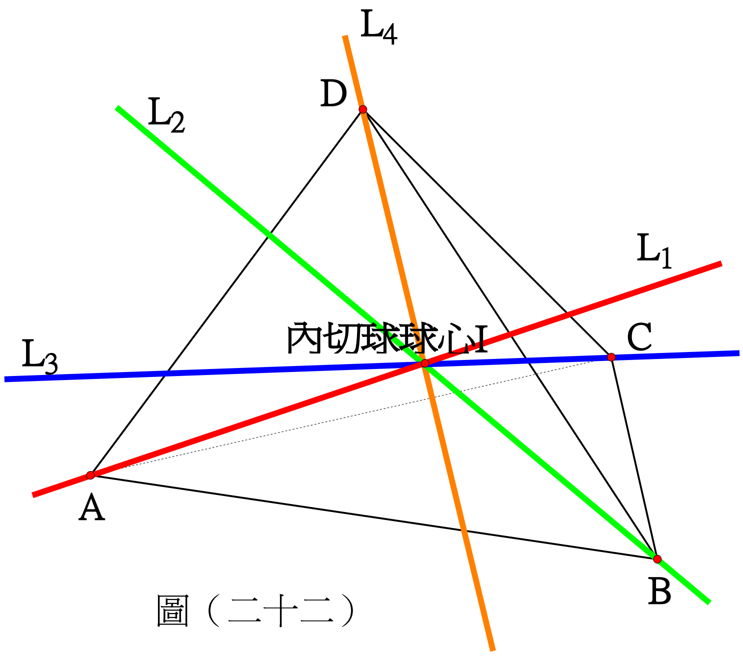
$\Rightarrow \overline{AP} = \overline{AQ}$ （對應邊相等）

. 承上敘述，如**圖**(二十一)，三角錐 CD中，平面M爲ACD與ACB二平面的**角平分面**，（平面M上任一點到ACD、ACB兩平面等距，）；平面S爲ABD與ABC二平面的**角平分面**，（平面S上任一點到ABD、ABC兩平面等距，）。兩平面M、S相交於一直線L，因爲L在平面M、S上，所以直線L上任一點到ABD、ABC、ACD三平面等距。



圖(二十一)

如圖（二十二），三角錐的四個頂點都可做出如L的直線 L_1、L_2、L_3、L_4，且四線會交於同一點I，I點到四平面ABC、ABD、ACD、BCD等距，所以以I為圓心可做出一球與三角錐的四個平面相切，I即為三角錐ABCD內切球的球心，



圖（二十二）

三角錐內心求法：1. 三角錐有四個面，做出任意兩平面的角平分面，共可做出六個角平分面，此六個角平分面相交於一點，此點即為內心。

2. 過三角錐的四個頂點，分別做出直線，線上任一點到頂點所鄰三面等距，此四直線交於一點，此點即為內心。

三角錐內心性質

內心I到三角錐四面等距

已知：如圖（二十三）I為三角錐ABCD的內心，P、Q、R、S分別為I到 Δ BCD、Δ ACD、Δ ABD、Δ ABC投影點

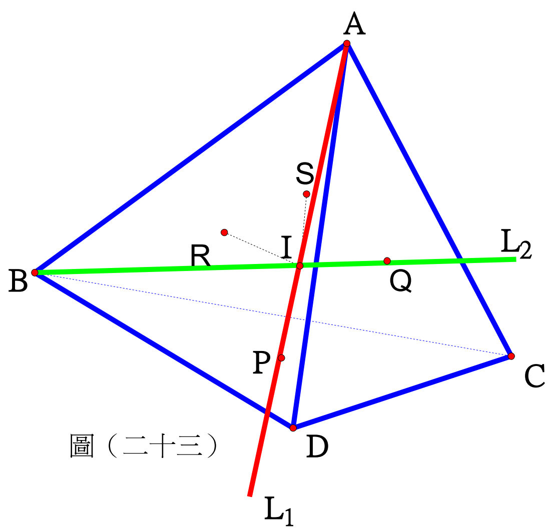
求證：$\overline{IP}=\overline{IQ}=\overline{IR}=\overline{IS}$

證明：如上所述I在直線 L_2 上所以

$\overline{IP}=\overline{IR}=\overline{IS}$ …（如圖二十一）

同理又I在直線 L_1 上所以 $\overline{IQ}=\overline{IR}=\overline{IS}$ …

根據、可得 $\overline{IP}=\overline{IQ}=\overline{IR}=\overline{IS}$



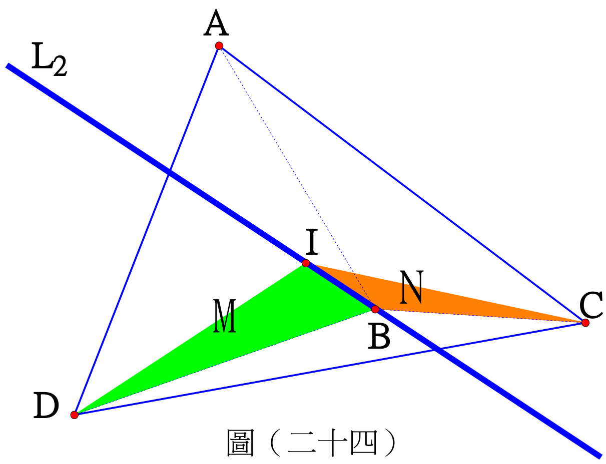
圖（二十三）

三角錐 L_1、L_2、L_3、L_4 四線共點證明（L_1、L_2、L_3、L_4 如圖（二十二））

三角錐任意頂點相鄰的三個面，可做出三個角平分面，我們知道在空間中，任意兩個不重疊、平行的平面相交於一直線，由於內心並不像重心（頂點與中線面）、外心（中垂面）三平面交於一線這麼直觀，所以在這裡，必須先證明三個角平分面共線才能繼續討論。

過三角錐任一頂點的三個面平分面共線證明

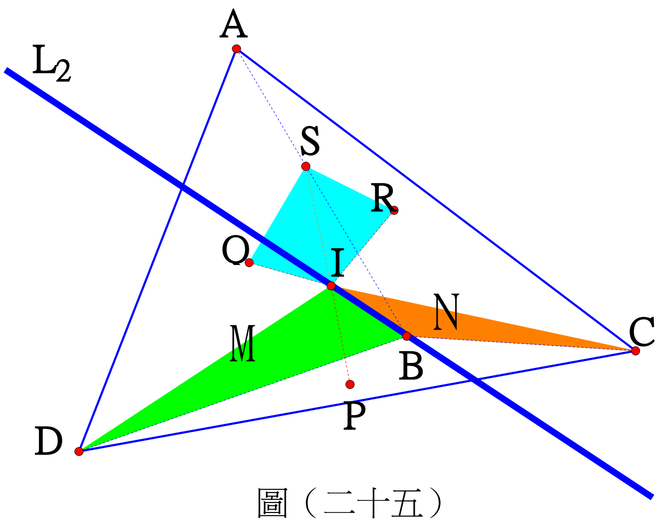
已知：如圖（二十四），平面 M 為平面 BDA、平面 BDC 之角平分面；平面 N 為平面 BCA、平面 BCD 之角平分面，L_2 為兩平面交線，I 為線上任一點。



圖（二十四）

求證：平面 IAB 為平面 ABD、平面 ABC 的角平分面

證明：如圖（二十五），做 P、Q、R 分別為 I 在 BCD、ABD，ABC 上的投影點。



圖（二十五）

$\overline{IP}=\overline{IQ}$（∵I 在平面 M 上）

$\overline{IP}=\overline{IR}$（∵I 在平面 N 上）

∴ $\overline{IP}=\overline{IQ}=\overline{IR}$

S 為平面 IQR 與 $\overline{AB}$ 的交點

在 ΔSIQ 和 ΔSIR 中

$\overline{IQ}=\overline{IR}$，$\overline{IS}=\overline{IS}$（共用邊）

$\angle IQS=\angle IRS=90^0$

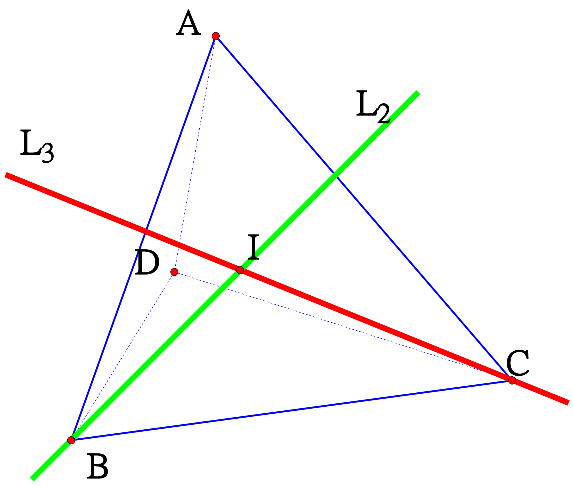
（∵Q、R 為投影點）

∴ $\Delta SIQ \cong \Delta SIR$（RHS 全等）

⇒ $\angle ISQ=\angle ISR$（對應角相等）

∴ 平面 IAB 為平面 ABD、平面 ABC 的角平分面

L_1、L_2、L_3、L_4 任意兩線有交點



圖（二十六）

已知：如圖（二十六）

L_2 爲 B 點相鄰三個面平分面的交線；

L_3 爲 C 點相鄰三個面平分面的交線。

求證：L_2、L_3 兩直線相交於一點 I

證明：L_2 會落在平分**平面 BCD** 與**平面 BCA** 夾角

的面平分面上

L_3 會落在平分**平面 BCD** 與**平面 BCA** 夾角

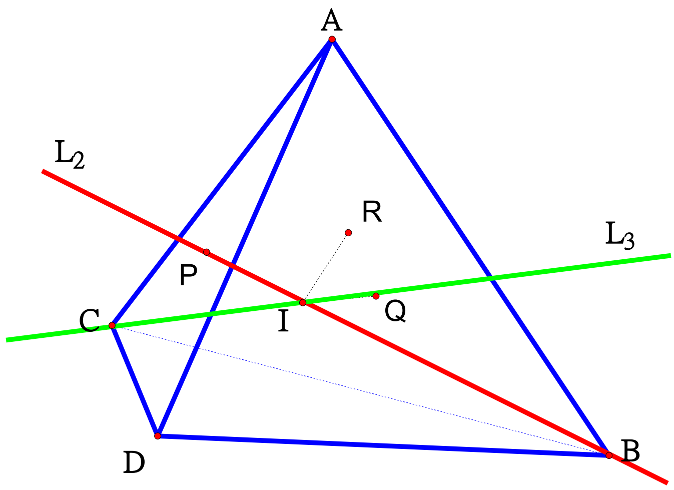
的面平分面上

$\therefore$ L_2、L_3 兩直線在同一平面上，且不平

行、重疊

$\therefore$ L_2、L_3 會相交於一點 I

第三條線會通過前兩線的交點



圖（二十七）

已知：如圖（二十七）

I 爲 L_2、L_3 的交點，（L_2、L_3 分別爲

爲通過頂點 B、C 相鄰面角平分面的

交線），P、Q、R 分別爲 I 點 ΔACD、

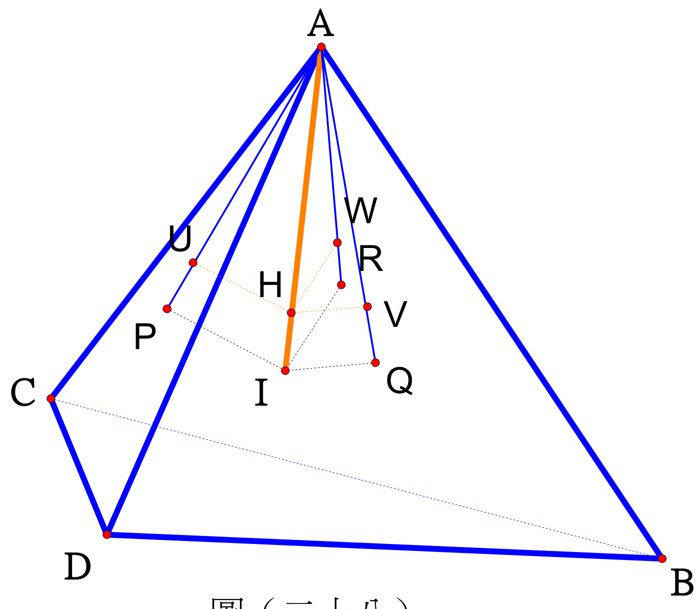
ΔABD、ΔABC 的投影點。

求證：$\overline{AI}$ 上任一點到

ABC、ABD、ACD

三平面等距。

證明：如圖（二十八）



圖（二十八）

在ΔAIP、ΔAIQ、ΔAIR中

$\overline{IP}=\overline{IQ}=\overline{IR}$（∵ I 點在$L_2$、$L_3$上）

$\overline{AI}=\overline{AI}=\overline{AI}$（共用邊）

$\angle API=\angle AQI=\angle ARI=90^0$

∴ $\Delta AIP\cong\Delta AIQ\cong\Delta AIR$（RHS 全等）

⇒ $\angle PAI=\angle QAI=\angle RAI$

（對應角相等）

取 H 為$\overline{AI}$上任一點

U、V、W 分別為 H 點在

ΔACD、ΔABD、ΔABC上的投影點

在ΔAHU、ΔAHV、ΔAHW中

$\angle PAI=\angle QAI=\angle RAI$，

$\angle AUH=\angle AVH=\angle AWH=90^0$，

$\overline{AH}=\overline{AH}=\overline{AH}$（共用邊）

∴ $\Delta AHU\cong\Delta AHV\cong\Delta AHW$（AAS 全等）⇒ $\overline{HU}=\overline{HV}=\overline{HW}$（對應邊相等）

伍、研究結果

經由一連串的研究、討論，我們發現了三角錐的重心、外心、內心的確是存在，在三角形中是三線交於一點，而三角錐中則是六面交於一點或是四線交於一點在性質方面也都相似、雷同，而且可利用幾何證明來證明共點，再利用 GSP 繪圖來驗證，使討論更加完備。

陸、討論

經過一番討論之後我們認為，在平面上要圍出一個面積不為零的區域，至少需要三個邊，也就是圍成三角形。在空間中要圍出一個體積不為零的區域，至少需要四個面，也就是圍成三角錐。因此，三角形在平面幾何的特性就如同三角錐在空間幾何中一般，只要把互相對應的部分找出來，加以模擬、實驗，就可以發現其中的關係。

柒、結論

我們拿三角形與三角錐三心的由來做比較

<table>
<tr><td rowspan="5">三角形</td><td colspan="3">線的形式</td></tr>
<tr><td>中線平分面積</td><td>中垂線上任一點到邊兩端點等距</td><td>角平分線上任一點到兩邊等距。</td></tr>
<tr><td colspan="3">心的由來</td></tr>
<tr><td>重心</td><td>外心</td><td>內心</td></tr>
<tr><td>三中線交點</td><td>三中垂線交點</td><td>三角平分線交點</td></tr>
<tr><td>性質</td><td>平分面積
線段比 2 :1</td><td>到三頂點等距</td><td>到三邊等距</td></tr>
<tr><td rowspan="5">三角錐</td><td colspan="3">面的形式</td></tr>
<tr><td>頂點－中線面
平分體積</td><td>邊的中垂面到邊兩點等距</td><td>兩面夾角平分面上任一點到兩面等距</td></tr>
<tr><td colspan="3">心的由來</td></tr>
<tr><td>重心</td><td>外心</td><td>內心</td></tr>
<tr><td>六個頂點－中線面
交點</td><td>六的邊的中垂面交點</td><td>六個面－面夾角平分面交點</td></tr>
<tr><td>性質</td><td>平分體積
線段比 3 :1</td><td>到四頂點等距</td><td>到四面等距</td></tr>
</table>

經過比較可發現兩者非常相似，只是三角形是在二維空間討論，而三角錐是在三維空間中討論，其中有許多相對應之處，與我們所預期的結果一樣。在研究的過程中，由於國中尚未提及許多有關空間的概念，因此，包括在作圖、證明上都曾遇到很大的瓶頸，讓大家苦思不解，索性經過一番討論、實驗與老師的指點之下，問題才慢慢迎刃而解，經過了這次的研究，更增加了我們對於幾何方面的知識與興趣。

捌、參考資料

國民中學數學課本第五冊/康軒出版社/民國 94 年

高級中學數學課本第三冊/南一出版社/民國 95 年

【評　語】　030418　心發現

將三角形的三心(重心、內心、外心)性質推廣至三角錐來探討，證明過程也很完整，可惜的是此問題過去已討論過。