# 中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

國中組　數學科

030416

滾動前進翻轉提升－探索圖形間的相切圍繞個數問題

學校名稱：金門縣立金城國民中學


| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國三 許婕相 | 宋文法 |
| 國三 楊閎宇 | 楊惠元 |
| 國三 吳芍霓 | |
| 國三 呂昀濃 | |


關鍵詞：正多邊形　相切圍繞　一般化

# 滾動前進、翻轉提升

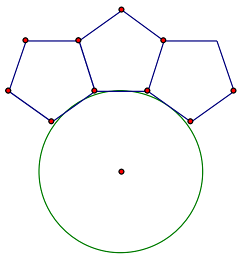
## －探討圖形間的相切圍繞問題

## 摘要：

這篇作品源自學校模擬考的題目，題目中所探討的是如何將正多邊形兩兩相鄰排列，**圍繞**在一圓上且每個正多邊形和圓恰好有一個接觸點（**相切**），我們除透了過排列和計算的方式找出這一題的圖形，也試著針對其他的正多邊形與圓相切，還有圓與圓相切找出彼此間的關係。並且我們發現正多邊形圍繞圓形的一般化結果：即$\frac{4}{n}+\frac{2}{m}=1$，其中 n 為正多邊形的邊數，m 為環繞的該正多邊形個數！！

## 壹、 研究動機：

在數學課練習基本學力測驗題目時，遇到了下面這個題目
小明有一些大小相同的五邊形，他用下列方式將五邊形擺在一圓周上，如圖一所示：
(1)每個正五邊形與相鄰的正五邊形皆有一邊緊密地放在一起
(2)每一個正五邊形皆有一邊與圓相切
若這些正五邊形正好將此圓全部圍住，則這些正五邊形最少有幾個？
題目中提到正五邊形最少有幾個？難道題目的答案不只一種嗎？



圖一

## 貳、 研究問題：

一、正五邊形相鄰圍繞與圓相切的排列方式不只一種嗎？所以正五邊形個數才不只一種嗎？
二、只有利用透過觀察圖形旋轉的方式才能確定嗎？可否利用計算的方式判斷？
三、如果將正五邊形換成其他的多邊形也可以符合這樣的排列方式嗎？所需要的個數又是如何呢？
四、如果是圓形與圓形可否圍繞相切，如果可以關係是如何呢？

## 參、 研究設備及器材：

GSP 動態幾何繪圖軟體、電腦、筆、紙

## 肆、 研究過程：

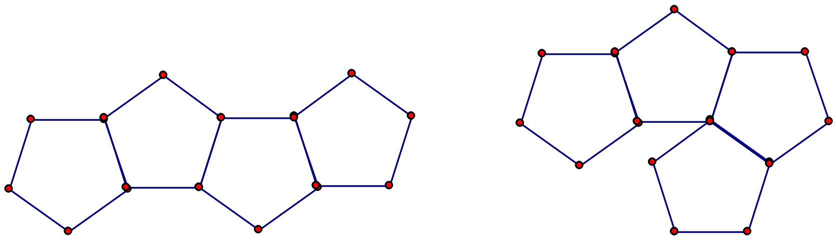
### 一、圖形如何相切？

這個題目的條件是外圍的正五邊形兩兩相鄰圍繞，而且每個正五邊形和圓形都有一

個切點。

二、這個題目排列的方式不只一種嗎？

（一）我們先利用 GSP 繪圖軟體嘗試其他的排列方式：

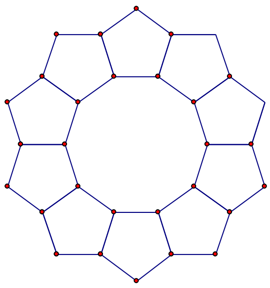


圖二

（二）把握正五邊形必須有一邊相鄰的原則，在 GSP 繪圖軟體的操作中，我們試著畫出其它的排列方式，而有些排列方式是無法圍成一圈（如圖二中的兩種圖形），而這原因是出現在甚麼地方呢？仔細觀察我們所畫出可以符合條件的圖形（如圖三），正五邊形完成圍的排列後，出現了一個多邊形的封閉區域。

（三）而圍繞的正五邊形的內角度數是 108 度，多邊形的角度也是可以確定的。

（四）又因為這個多邊形邊長的組成來自於周圍相鄰正五邊形的邊長，因此每個邊長相等。我們現在可以確定圖三中的封閉區域是正多邊形。



圖三

三、由外部的正多邊形找出題目的個數？

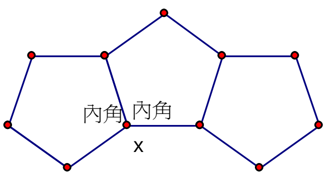
（一）尋找圖形規則：

1.由圖四來觀察，因為正五邊形兩兩相鄰，由兩個正五邊形內角和另一正多邊形內角圍成一周角360°（如圖四）。

2.首先假設圖四中未知的角度為 $x°$，

計算方式： $x° = 360° - 2 \times$ 正多邊形內角 。

3.又因為完成圍繞排列後，圖形中的正多邊形度數為 $x°$，再求出 x 的度數後就可以知道這是哪一種正多邊形的度數，而正多邊形的每個邊都來自於外面圍繞的每個正五邊形，正多邊形的邊數就等於外面正多邊形的個數。

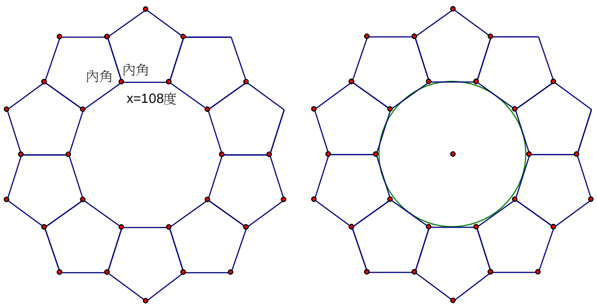



圖四

（二）計算如下：

$360°-2\times$ 正五邊形內角 $=360°-2\times 108°=144°$ 為十邊形之內角。

因此正十邊形的十個邊就代表可以十個正五邊形兩兩相鄰圍成一正十邊形並與一圓相切（圖五）

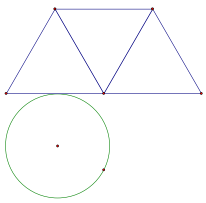



圖五

四、將正五邊形換成其他的正多邊形排列的圖形是如何呢？

（一）正三角形（不成立）：

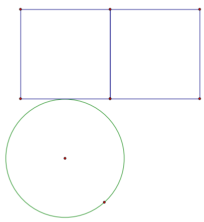
在正三角形相鄰排列後，圓形不可能和每個正三角形相切（如圖六所示）



圖六

（二）正方形（不成立）：

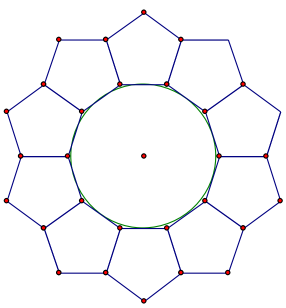
圓形無法與每個正方形相切（如圖七所示）



圖七

（三）正五邊形（成立）：

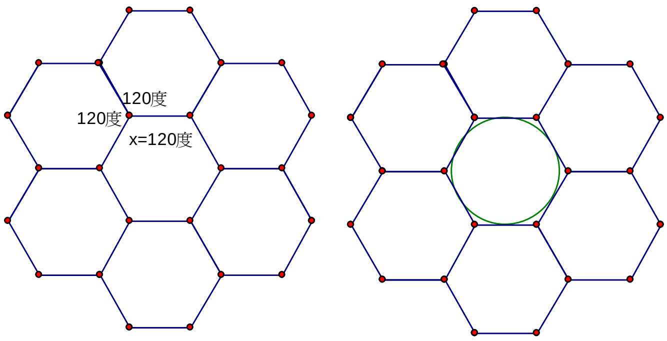
我們已經討論，是**十個**正五邊形鄰邊圍繞排列並與圓形相切的圖形（如圖八所示）



圖八

（四）正六邊形（成立）：

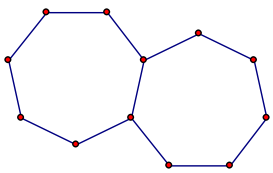
$360°-2\times$正六邊形內角$=360°-2\times120°=120°$為正六邊形之內角，代表用**六個**正六邊形可以完成兩兩相鄰圍繞，並且每個正六邊形都與這個圓形相切（如圖九所示）




圖九

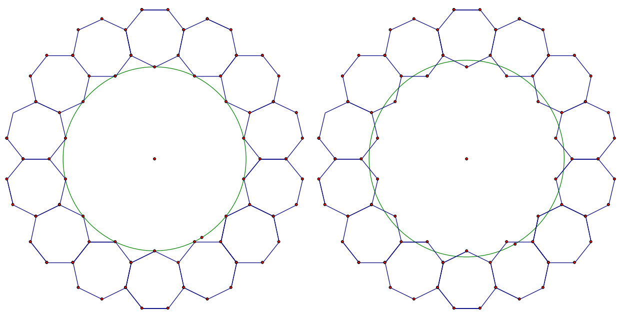
（五）正七邊形（不成立）：

$360°-2\times$正七邊形內角$=360°-2\times\frac{900}{7}°=\frac{720}{7}°$，這個不是正多邊形的內角度數（如圖十所示）



圖十

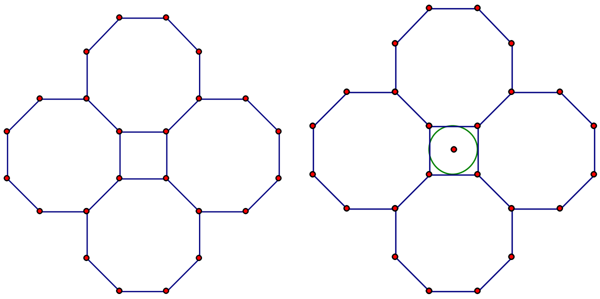
利用 GSP 動態幾何繪圖軟體我們完成正七邊形相鄰圍繞的圖形（如圖十一所示）但是與圓相切的切點並非在正七邊形的邊長上。



圖十一

（六）正八邊形（成立）：

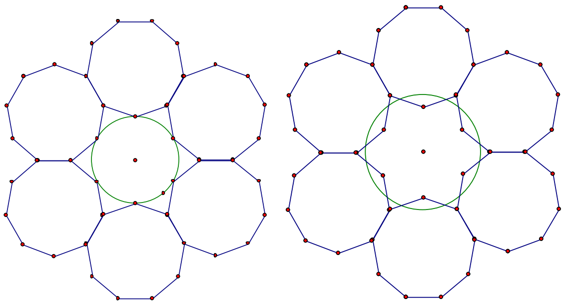
$360°-2\times$正八邊形內角$=360°-2\times135°=90°$為正方形之內角，代表用**四個**正八邊形可以完成兩兩相鄰圍繞，並且每個正八邊形都與這個圓形相切（如圖十二所示）



圖十二

（七）正九邊形（不成立）:

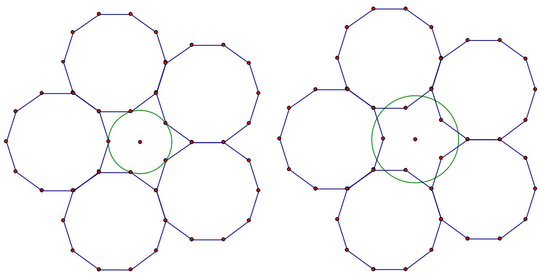
$360°-2\times$正九邊形內角$=360°-2\times140°=80°$不是正多邊形之內角，利用 GSP 動態幾何繪圖軟體我們完成正九邊形相鄰圍繞的圖形（如圖十三所示），但是與圓相切的切點不會在正九邊形的邊長上。



圖十三

（八）正十邊形（不成立）:

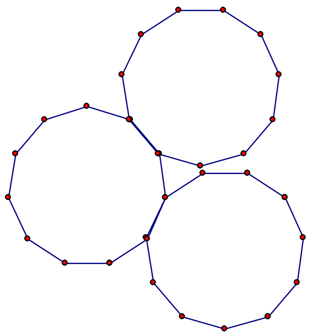
$360°-2\times$正十邊形內角$=360°-2\times144°=72°$不為正多邊形之內角，利用 GSP 動態幾何繪圖軟體畫出正十邊形相鄰圍繞與圓相切的關係（如圖十四所示），也不符合每個邊長都與圓形相切條件。



圖十四

（九）正十一邊形（不成立）:

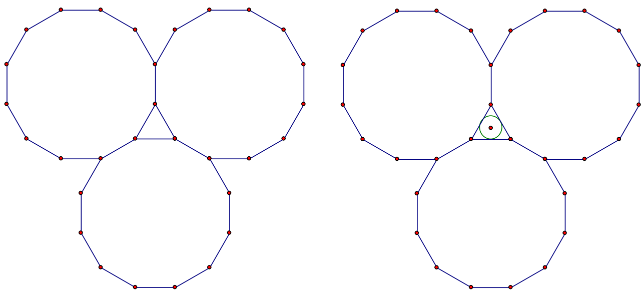
$360°-2\times$正十一邊形內角$=360°-2\times\dfrac{1620°}{11}=\dfrac{720°}{11}$不為正多邊形之內角（如圖十五所示）



圖十五

（十）正十二邊形（成立）：

$360° - 2\times$正十二邊形內角$= 360° - 2\times 150° = 60°$爲正三角形之內角，代表用**三個**正十二邊形可以完成兩兩相鄰圍繞，並且每個正八邊形都與這個圓形相切（如圖十六所示）



圖十六

就我們上述所發現從正三角形到正十二邊形完成相鄰圍繞，且符合每個正多邊形的邊長都與圓形相切的狀況記錄下來，如表一

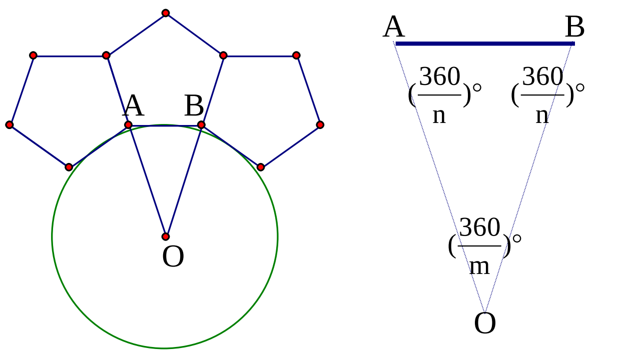
表一：

| | 正五邊形 | 正六邊形 | 正八邊形 | 正十二邊形 |
|---|---|---|---|---|
| 相鄰圍繞且與圓相切所需多邊形個數 | 10 | 6 | 4 | 3 |

就記錄上的數據似乎顯示，當用來圍繞的多正多邊形的邊數愈多，所需要的個數就愈少，而且至少要三個正多邊形才能完成題目中兩兩相鄰圍繞的條件，目前我們找出以上述的四種多邊形的相鄰圍繞與圓相切的狀況成立，那還有其他條件成立的圖形嗎？在下面我們針對一般化的圖形加以討論。

（十一）正 n 邊形的圍繞排列（一般化）：

1.隨著正三角形到正十二邊形的圍繞相切，圖形的排列已漸趨複雜，我們也想知道對於其他的正 n 邊形應如何判斷，並找出更一般化的判斷依據。




圖十七

2.設外面共需要 m 個正 n 邊形圍繞與圓形相切（爲降低複雜性，以題目所提供之圖形），我們連接圓心和其中一個正多邊形（如圖十七所示）的兩個頂點作出輔助線 $\overline{OA}$ 、$\overline{OB}$ ，並針對圖形中三角形 OAB 的度數作討論，其中兩個內角是正 n 邊形的外角，其度數爲 $(\frac{360}{n})°$，最後一個角度 $\angle AOB=(\frac{360}{m})°$（代表有 m 個正 n 邊形圍繞）

3.由三角形的三個內角和爲180°，我們可以列出下面的式子關係：

$$(\frac{360}{n})°\times 2+(\frac{360}{m})°=180°$$

並可以簡化成 $\frac{4}{n}+\frac{2}{m}=1$（m 和 n 當然必須是整數）

4.實際驗證上列式子的成立與否：

(1)以題目的正五邊形代入（n=5）

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{m}=1$$

$$\frac{2}{m}=\frac{1}{5}$$

$m=10$ 表示需要十個正五邊形

(2)以正六邊形代入(n=6)

$$\frac{4}{6}+\frac{2}{m}=1$$

$$\frac{2}{m}=\frac{1}{3}$$

$m=6$ 表示需要六個正六邊形

(3)以正八邊形代入(n=8)

$$\frac{4}{8}+\frac{2}{m}=1$$

$$\frac{2}{m}=\frac{1}{2}$$

$m=4$　　　　　表示需要四個正八邊形

(4)以正十二邊形代入(n=12)

$$\frac{4}{12}+\frac{2}{m}=1$$

$$\frac{2}{m}=\frac{1}{3}$$

$m=3$　　　　　表示需要三個正十二邊形

(5) 以正十三邊形代入(n=13)

$$\frac{4}{13}+\frac{2}{m}=1$$

$$\frac{2}{m}=\frac{9}{13}$$

$m=\frac{26}{9}$　　不成立（m 和 n 當然必須是整數）

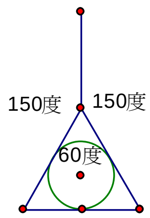
五、由內而外的找出正多邊形的形狀和個數的另證方法：

我們觀察在完成正多邊形的相鄰圍繞圖形後，圖形中有一個封閉的正多邊形，而且每個邊都與圓形相切，現在我們由內而外去探討，先假設內部的正多邊形形狀，由角度間的關係求得外部正多邊形角度，就可以找到應是何種正多邊形，以及正多邊形的個數。

計算方式：外部正多邊形內角度數：$\frac{360°-\text{內角度數}}{2}$

（一）封閉區域爲正三角形（3 個邊長）:

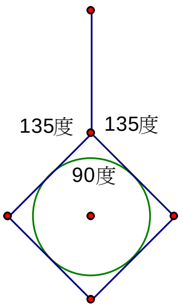
外部正多邊形內角度數：$\frac{360°-60°}{2}=150°$ 爲正十二邊形（如圖十八所示）




圖十八

（二）封閉區域爲正方形：(4 個邊長）

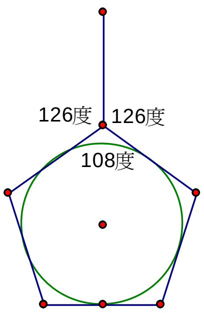
外部正多邊形內角度數：$\frac{360°-90°}{2}=135°$ 爲正八邊形（如圖十九所示）




圖十九

（三）封閉區域為正五邊形：（5 個邊長）

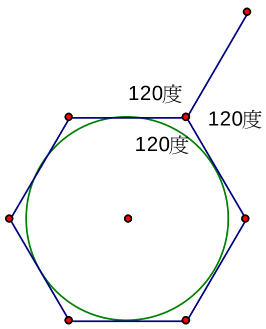
外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360^\circ - 108^\circ}{2} = 126^\circ$（不成立）（如圖二十所示）




圖二十

（四）封閉區域為正六邊形：（6 個邊長）

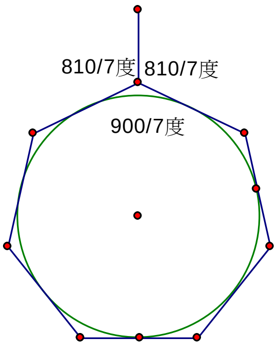
外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$ 為正六邊形（如圖二十一所示）




圖二十一

（五）封閉區域為七邊形：（7 個邊長）

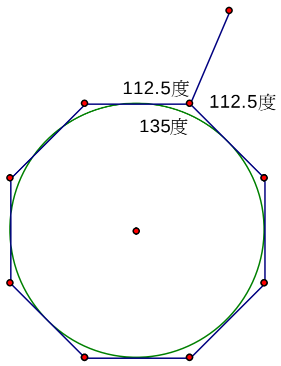
外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360^\circ - (\frac{900}{7})^\circ}{2} = (\dfrac{810}{7})^\circ$（不成立）（如圖二十二所示）




圖二十二

（六）封閉區域爲八邊形：（8 個邊長）

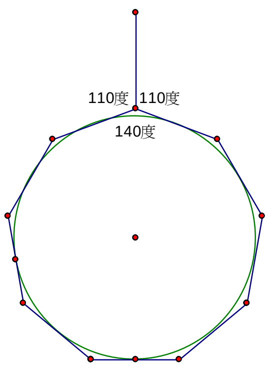
外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360°-135°}{2}=(\dfrac{225}{2})°=11.25°$（不成立）（如圖二十三所示）




圖二十三

（七）封閉區域爲九邊形：（9 個邊長）

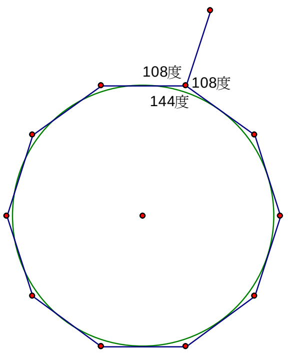
外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360°-140°}{2}=110°$（不成立）（如圖二十四所示）




圖二十四

（八）封閉區域爲十邊形：（10 個邊長）

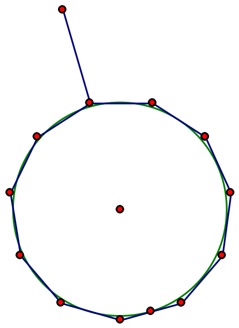
外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360°-144°}{2}=108°$ 爲正五邊形（如圖二十五所示）




圖二十五

（九）封閉區域爲十一邊形：(11 個邊長）

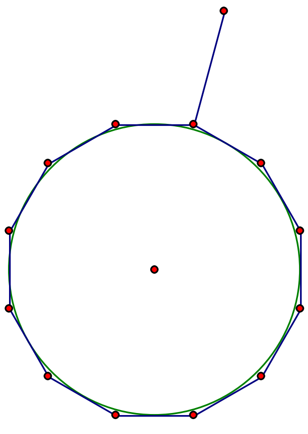
外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360^\circ-(\frac{1620}{11})^\circ}{2}=(\dfrac{1170}{11})^\circ$（不成立）(如圖二十六所示）



圖二十六

（十）封閉區域爲十二邊形：(12 個邊長）

外部正多邊形內角度數：$\dfrac{360^\circ-150^\circ}{2}=105^\circ$（不成立）(如圖二十七所示）



圖二十七

我們將可以符合條件的結果作一個整理，如表二

表二：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 圍繞所需多邊形個數 | 3 | 4 | 6 | 10 |
| 外部正多邊形形狀 | 正 12 邊形 | 正 8 邊形 | 正 6 邊形 | 正 5 邊形 |

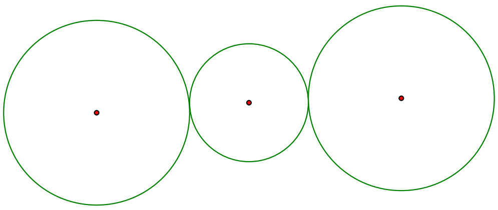
整理：表一和表二的相互對照表示這四種情況是成立的

1. 三個正十二邊形沿著圓形相鄰圍繞。
2. 四個正八邊形沿著圓形相鄰圍繞。
3. 六個正六邊形沿著圓形相鄰圍繞。
4. 十個正五邊形沿著圓形相鄰圍繞。

六、那麼圓形和圓形間相切又是什麼樣的情形呢？

思考：假設內部的圓形和外部的正多邊形皆改成圓形，圓形半徑大小不拘，圓形兩兩相切，如此外部可以圍繞幾個圓形，我們想找出（一）最少需要幾個圓？（二）最多可以圍繞幾個圓？

（一）透過 GSP 動態幾何繪圖軟體幫助我們先了解圓形的排列：



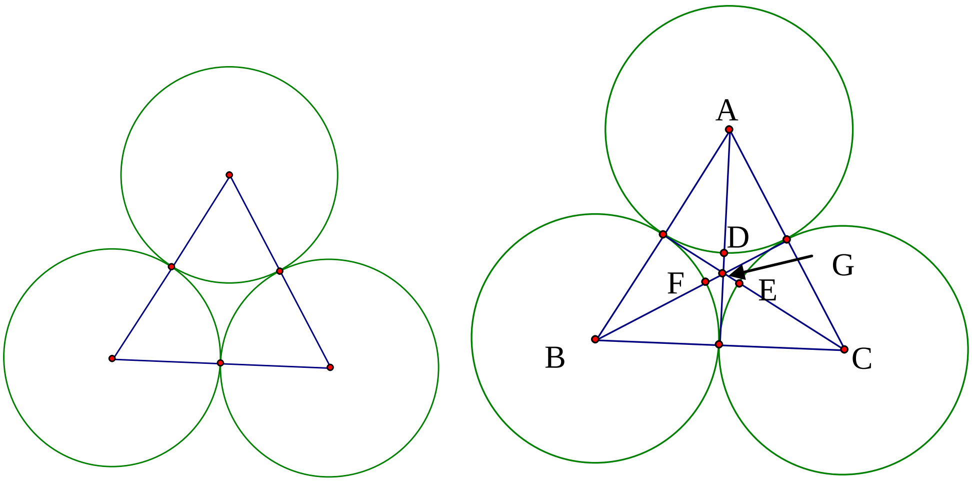
圖二十八

1. 兩個圓是否可成立：

如圖二十八，兩個圓形是無法完成圍繞的排列，並不符合我們的條件，那三個圓形可以嗎？

2. 三個圓形是否成立：

利用 GSP 動態幾何繪圖軟體作出下圖（圖二十九）

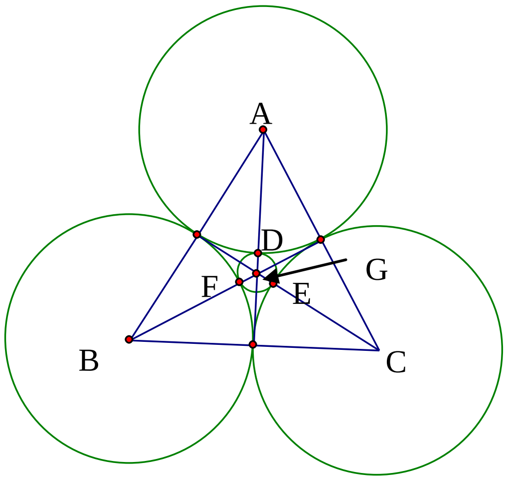



圖二十九

作法：我們先由外而內試著畫出三個圍繞的圓形（如圖二十九，連接圓心，我們看到圖形中有一正三角形 ABC（因連心線 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ ），接著作出三條中線，找出重心 G，哪可否以重心 G 爲圓心作一圓形與其他三個圓形相切呢？

證明：因爲正三角形 ABC 三中線等長，則 $\overline{\mathrm{AG}}=\overline{BG}=\overline{CG}=\frac{2}{3}$ 中線長，可以推得 $\overline{AG}$ – 圓半徑 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{BG}$ – 圓半徑 $\overline{BE}=\overline{CG}$ – 圓半徑 $\overline{CF}$

$\overline{\mathrm{DG}}=\overline{EG}=\overline{FG}$，因此以 G 爲圓心，$\overline{\mathrm{DG}}$ 爲半徑畫圓會與另外三個圓相切於 D、E、F 三個點（如圖三十）



圖三十

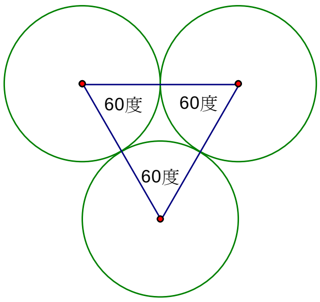
七、特定比例大小的圓就一定會相切嗎？

（一）先以規則的半徑比去探討：

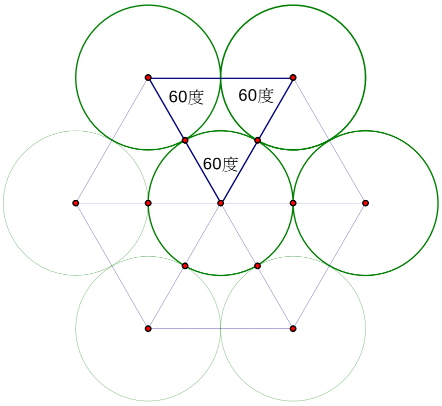
將相切兩圓心相連，則構成三角形，由三角形的邊長關係判斷角度大小

1. 當半徑比爲 1：1 時：

當內部和外部的圓半徑比爲 1：1 相等時，所圍成的三角形邊長比爲 1：1：1 爲正三角形（如圖三十一所示），內角皆爲 60 度，由 6 個 60 度的等角可圍成一周角 360 度，如此可判斷外圍可恰好放置 6 個圓形（如圖三十二所示）



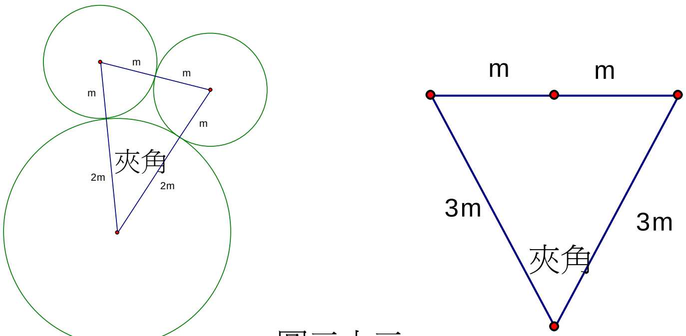

圖三十一




圖三十二

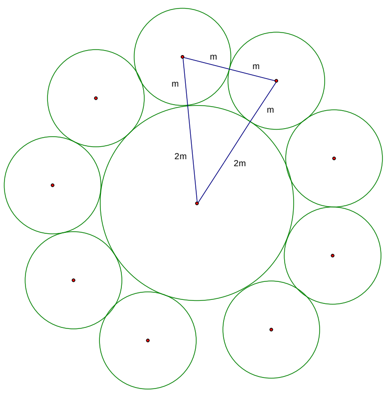
2. 當半徑比為 1：2 時：

當外部和內部的圓半徑比為 1：2 時，邊長比為 2：3：3（如圖三十三所示）




圖三十三

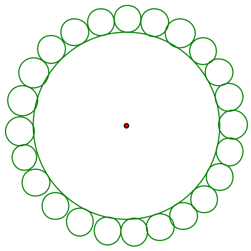
如圖已經知道三角形三個邊長比，我們想透過這個條件求得角度間的關係，確定圖形中夾角的大小，並找出以幾個夾角可以完成圍繞一周這個條件的數目，而在我們所學過的數學課程中沒有這一種特殊的邊角關係，因此我們先透過 GSP 繪圖軟體描繪出排列的結果（如圖三十四所示），我們發現無法沿著的圓相切圍繞一圈。




圖三十四

透過上面不成功的例子，我們發覺並非只要半徑比是整數的圓形就會符合條件，只能確定當外圍的圓愈小時，需要更多的圓才能夠達成此一條件，當外面的圓愈小時，比例相差極大時看起來就像密佈在元周上的點（如

圖三十五)。

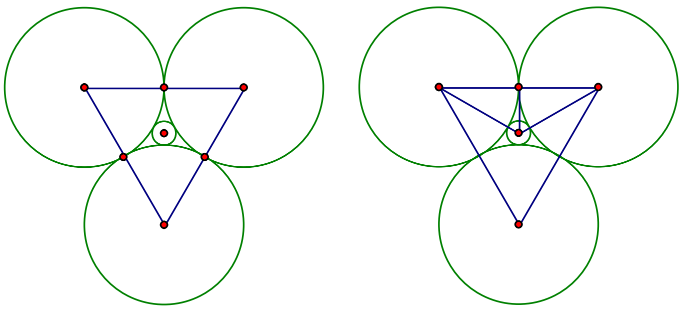


圖三十五

當外圍的圓半徑愈大時，欲達成條件所需的圓形個數愈少，那最少需要幾個呢？二個圓形似乎是不夠的，那三個有沒有可能呢？接下來要來討論在可以用三個四個或更多個圓與中心的圓形相切的圖形，圓的大小有什麼樣的關係。

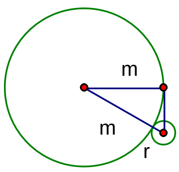
(四)試著由已經相切圓形的圖形找出半徑比的規則性：

1. 三個圓切一個圓：(如圖三十六)

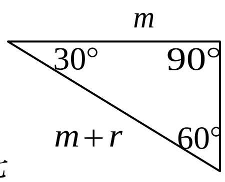


圖三十六

我們找出圖形中的直角三角形，如圖三十七




圖三十七




假設內外圓的半徑比爲 r：m，特殊直角三角形 30° - 60° - 90° 的邊長比爲

$1:\sqrt{3}:2$ ，因此 $m:(m+r)=\sqrt{3}:2$

利用比例式的性質：外項相乘等於內項相乘，可以得到：

$$\sqrt{3}m+\sqrt{3}r=2m$$

$$\sqrt{3}r=2m-\sqrt{3}m$$

$$\sqrt{3}r=(2-\sqrt{3})m$$

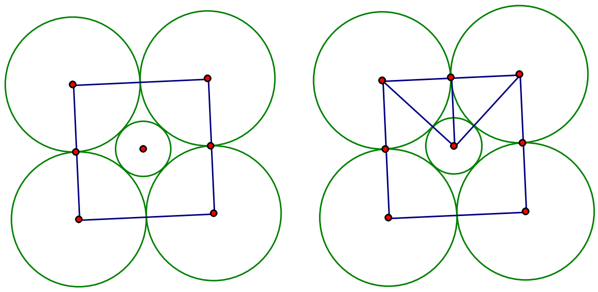
$$r=\frac{(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}m=(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)m$$

內外半徑比：

$$\mathrm{r}:m=(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)m:m$$

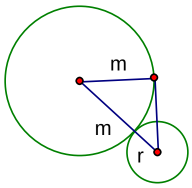
$$r:m=(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1):1$$

2. 四個圓切一個圓：（如圖三十八）

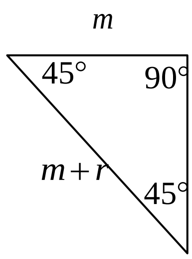


圖三十八

我們找出圖形中的直角三角形，如圖三十九




圖三十九




假設內外圓的半徑比爲 r：m，特殊直角三角形 45°-45°-90° 的邊長比爲

$1:1:\sqrt{2}$ ，因此 $\mathrm{m}:(\mathrm{m}+\mathrm{r})=1:\sqrt{2}$ ，

利用比例式的性質：外項相乘等於內項相乘，

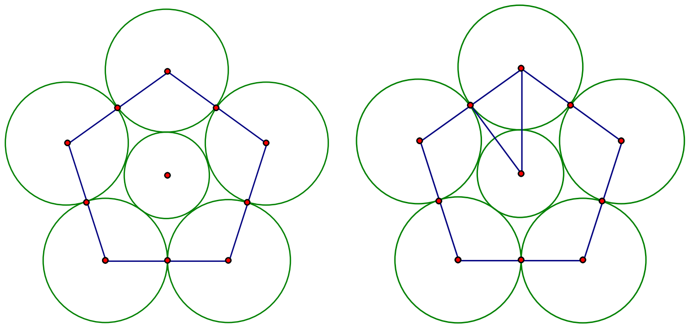
$$m+r=\sqrt{2}m$$

$$r=\sqrt{2}m-m=(\sqrt{2}-1)m$$

則 $r:m=(\sqrt{2}-1)m:m$

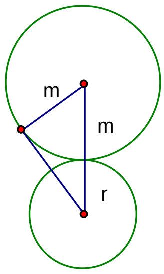
$$r:m=(\sqrt{2}-1):1$$

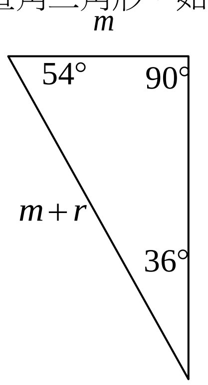
3. 五個圓切一個圓：（如圖四十）



圖四十

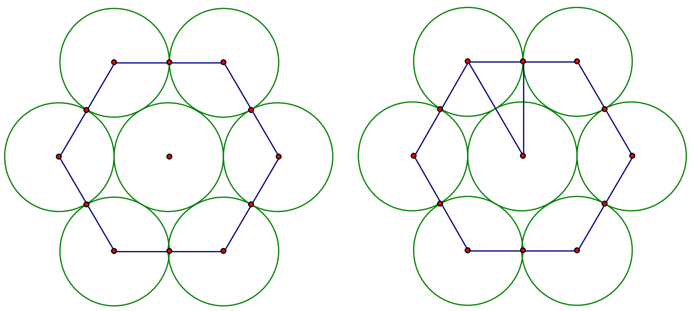
我們找出圖形中的直角三角形，如圖四十一



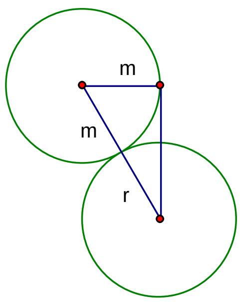

圖四十一

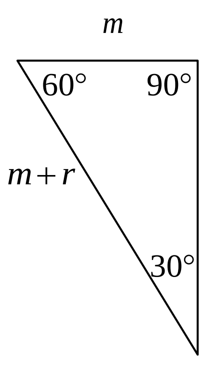
4. 五個圓切一個圓：（如圖四十二）



圖四十二

我們找出圖形中的直角三角形，如圖四十三




圖四十三

假設內外圓的半徑比爲 r：m 特殊直角三角形30° - 60° - 90° 的邊長比爲

$1:\sqrt{3}:2$ ，因此 $\mathrm{m}:(\mathrm{m}+\mathrm{r})=1:2$ ，

利用比例式的性質：外項相乘等於內項相乘，

$m+r=2m$

$r=m$

則 $m:r=m:m$

$m:r=1:1$

將所求得的內外圓半徑比記錄在表格三

表格三：

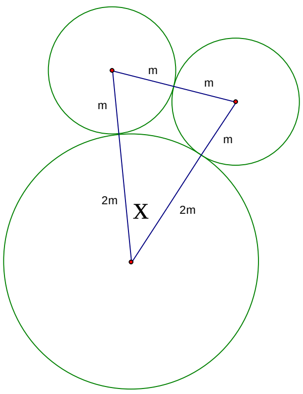
| 圖形 | 三個圓切一個圓 | 四個圓切一個圓 | 六個圓切一個圓 |
|---|---|---|---|
| 內部圓半徑 r 與外部圓半徑 m 的半徑比 | $r:m=(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1):1$ | $r:m=(\sqrt{2}-1):1$ | $r:m=1:1$ |

就表格三的結果我們發現圓形間的相切圖形，圓形之間的半徑大小關係伴隨著無理數的出現，顯示圓的大小關係並非呈現規則的狀況。

# 伍、 討論：

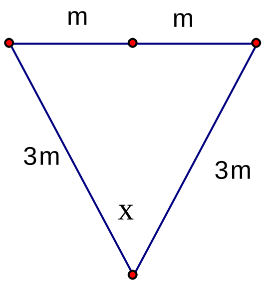
一、我們現在嘗試透過其他的計算方式找出圓與圓相切時可以在外部放置幾個圓形的個數：

（一）當外部和內部的圓半徑比爲 1：2（如圖四十四所示）




圖四十四

連接圓心所構成的三角形邊長比爲 2：3：3（如圖四十五所示）

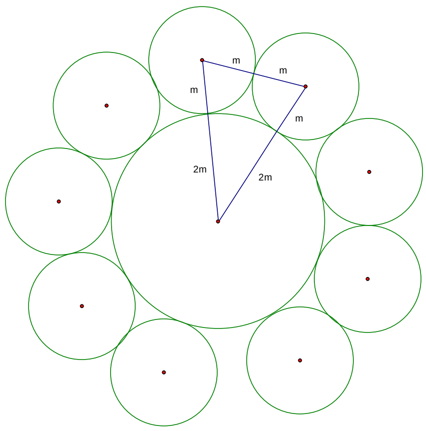



圖四十五

在這裡我們就必須透過高中課程中的餘弦定理公式去計算：

$$\cos x = \frac{兩鄰邊平方和方}{2倍鄰邊乘積} \quad \cos x = \frac{(3m)^2+(3m)^2-(2m)^2}{2\cdot 3m\cdot 3m} = \frac{7}{9} = 0.\bar{7}$$

，由查表判斷 x 的角度大約為 39 度，在圍繞一圓的周角 360 度大約可以擺上 9 個圓，如圖四十六所示




圖四十六

二、我們在前面探討正多邊形或是圓形與圓形圍繞相切的狀況，現在朝另外一個角度去思考，以角色互換的方式，去探索能不能以正多邊形或是圓形沿著正多邊形的邊長去圍繞，但是為了維持我們討論的方向，在這裡有兩個主要的限制條件必須保持：

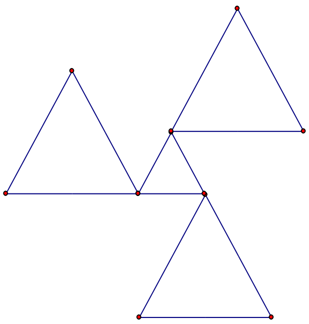
其一：相切性：內外圖形只相切於邊長上的一點。

其二、相鄰性：圖形以兩邊共用方式圍繞。

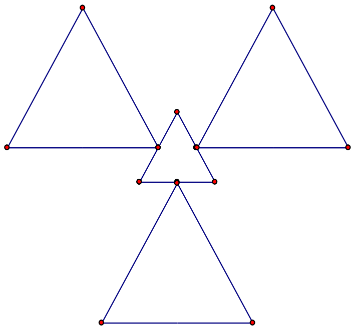
以下我們先就一些圖形進行探討：

（一）沿著正多邊形以正多邊形相鄰圍繞：

1. 內部正三角形與外部正三角形相切，且外部正三角形要以邊長相鄰圍繞，我們利 GSP 動態幾何繪圖軟體畫出的圖形，很明顯的內部正三角形與外部正三角以邊長和頂點相切，而切點在頂點上（如圖四十七）或是切點在邊長中點（如圖四十八），外圍的正三角形都無法以邊長相鄰圍繞

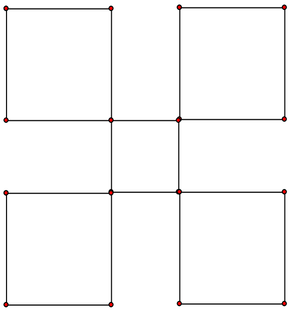


圖四十七

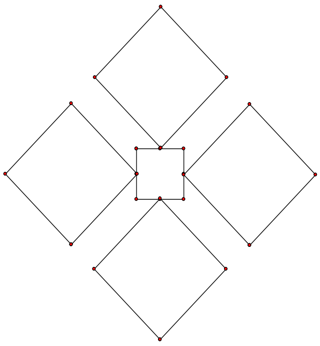


圖四十八

2. 內部正方形與外部正方形相切，且外部正方形要以邊長相鄰圍繞，我們利用 GSP 動態幾何繪圖軟體畫出的圖形，很明顯的內部正方形與外部正方形以邊長和頂點相切，而切點在頂點上（如圖四十九）或是切點在邊長中點（如圖五十），外圍的正方形都無法以邊長相鄰圍繞

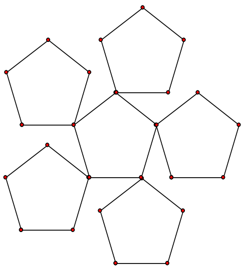


圖四十九

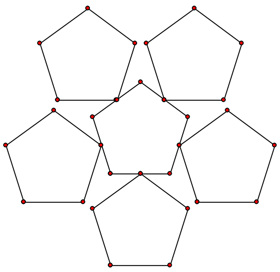


圖五十

3. 內部正五邊形與外圍正五邊形相切，且外圍正五邊形要以邊長相鄰圍繞，我們利用 GSP 動態幾何繪圖軟體畫出的圖形，很明顯的內部五邊形與外部正五邊形以邊長和頂點相切，而切點在頂點上（如圖五十一）或是切點在邊長中點（如圖五十二），外圍的正五邊形都無法以邊長相鄰圍繞。

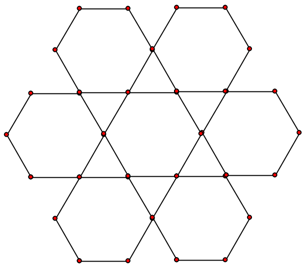


圖五十一

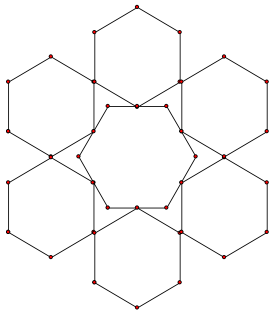


圖五十二

4. 內部正六邊形與外圍正六邊形相切，且外圍正六邊形要以邊長相鄰圍繞，我們利用 GSP 動態幾何繪圖軟體畫出的圖形，很明顯的內部六邊形與外部正六邊形以邊長和頂點相切，而切點在頂點上（如圖五十三）或是切點在邊長中點（如圖五十四），外圍的正六邊形都無法以邊長相鄰圍繞。



圖五十三



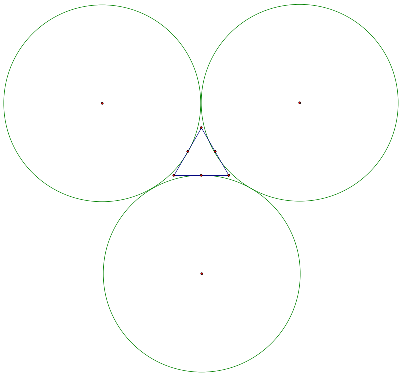
圖五十四

透過 GSP 動態幾何繪圖軟體我們畫出了以相同形狀的正多邊形圍繞相切的圖形，但是多邊形圖形間相切的定義較難界定並更為複雜，這部分就留待往後再行討論。

（二）以正多邊形為中心，圓形圍繞相切的狀況：

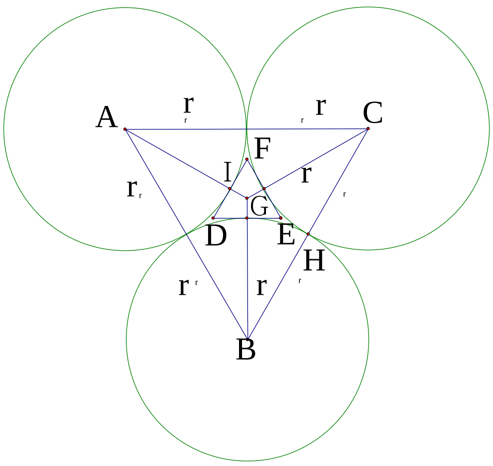
1. 以正三角形為中心：

如果以正三角形為中心，每個邊與圓相切，圓與圓之間兩兩相切（如圖五十五），那三角形與圓的大小有什麼樣的關係呢？

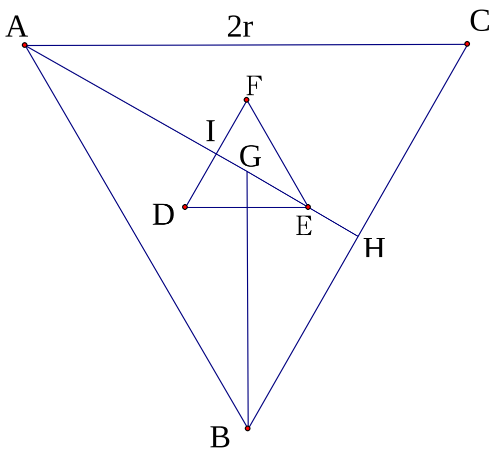


圖五十五

探討：首先連接兩兩相切圓的圓心，因為邊長相等，故為正三角形 ABC，而三角形的重心很明顯的就是整個圖形的中心。




圖五十六




圖五十七

設外切圓的半徑爲 r（如圖五十六），利用 $30°-60°-90°$ 直角三角形 AHC 的邊角關係（如圖五十七），由邊長 $\overline{AC}=2r$，$\overline{AH}:\overline{AC}=\sqrt{3}:2$，則 $\overline{AH}=\sqrt{3}r$

又 G 是△ABC 的重心（三中線交點），則 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{2}{3}\sqrt{3}r$ 。

又 $\overline{AI}=r$，$\overline{IG}=\overline{AG}-\overline{AI}=(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1)r$

又 G 是△DEF 的重心，則 $\overline{IG}=\frac{1}{3}\overline{IE}$，$\overline{IE}=3\overline{IG}=(2\sqrt{3}-3)r$

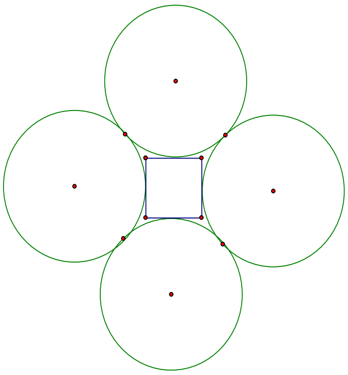
再利用 $30°-60°-90°$ 直角三角形 EIF 的邊角關係，由邊長 $\overline{IE}:\overline{EF}=\sqrt{3}:2$

則 $(2\sqrt{3}-3)r:\overline{EF}=\sqrt{3}:2$，求得 $\overline{EF}=(4-2\sqrt{3})r$

正三角形邊長 $\overline{EF}$ 與圓的半徑長 r 比爲 $(4-2\sqrt{3})$ ：1

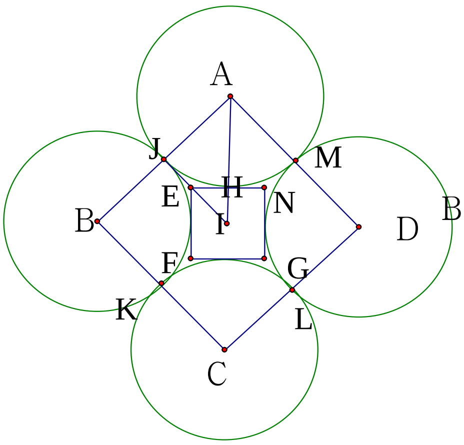
2. 以正方形爲中心，圓形圍繞相切：

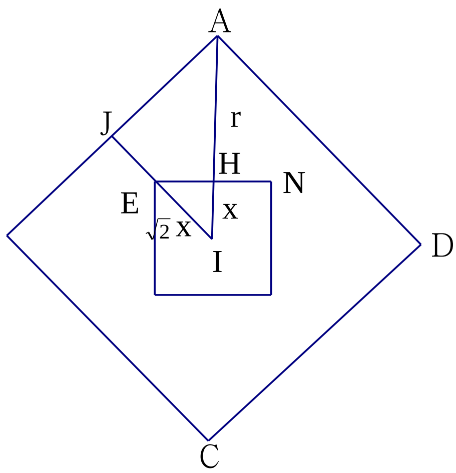
如果以正方形爲中心，每個邊與圓相切，圓與圓之間兩兩相切（如圖五十八），那正方形與圓的大小有什麼樣的關係呢？



圖五十八

首先連接兩兩相切圓的圓心，因爲邊長相等，故爲正方形 ABCD，而三角形的重心很明顯的就是整個圖形的中心。



圖五十九

設 $\overline{IH}=x$，利用 $45°$-$45°$-$90°$ 直角三角形 IHE 的邊角關係（如圖五十九）

則 $\overline{IH}:\overline{IE}=1:\sqrt{2}$ ，則 $\overline{IE}=\sqrt{2}x$

設圓形半徑爲 $r$，則 $\overline{AH}=r=\overline{IJ}$ ，$\overline{AI}=\overline{AH}+\overline{IH}=r+x$ 利用 $45°$-$45°$-$90°$ 直角三角形 AIJ 的邊角關係 $\overline{IJ}:\overline{AI}=1:\sqrt{2}$

$r:(r+x)=1:\sqrt{2}$

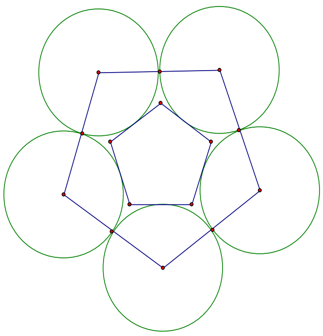
$r+x=\sqrt{2}r$

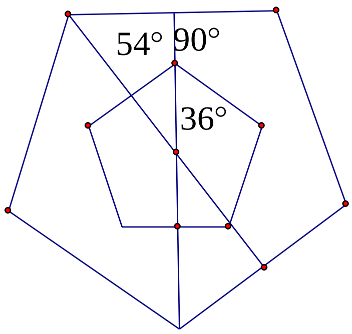
$x=(\sqrt{2}-1)r$

正方形邊長 $\overline{EN}=2\overline{IH}=2x=(2\sqrt{2}-2)r$

正方形邊長 $\overline{EH}$ 與圓的半徑長 r 比爲 $(2\sqrt{2}-2)$ ：1

3. 以正五邊形爲中心，圓形圍繞相切：
如果以正五邊形爲中心，每個邊與圓相切，圓與圓之間兩兩相切（如圖六十），那正五邊形與圓的大小有什麼樣的關係呢？

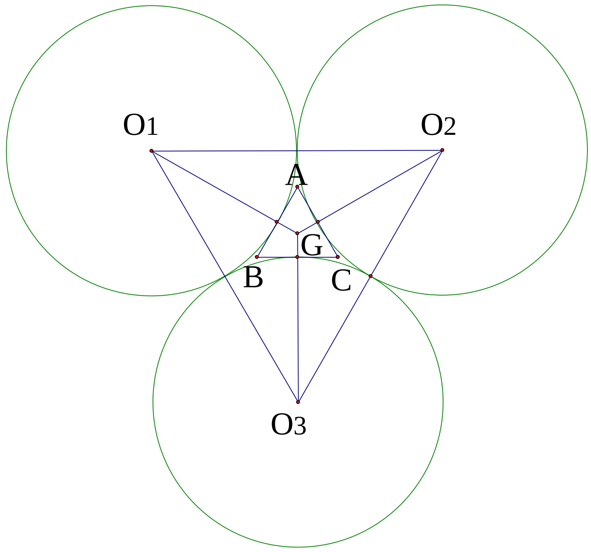

圖六十



圖六十一

在圖六十一中的 $36°$-$54°$-$90°$ 的直角三角形，老師說這個部分必須要藉由高中課程中的正弦定理再更深入研究，這部分我們就留待以後再行探討。

4. 一般化：正 n 邊形爲中心時，外部圍繞圓的個數又是多少呢？
猜測：我們認爲至少有 n 個。
下面是我們的觀察與說明：
我們現在利用 GSP 繪圖軟體作圖並且嘗試觀察內部正多邊形遞增的狀況：
(1)當內部爲正三角形 ABC 時：外部至少可排三個圓形，分別爲圓 $O_1$、圓 $O_2$、圓 $O_3$。(如圖六十二)

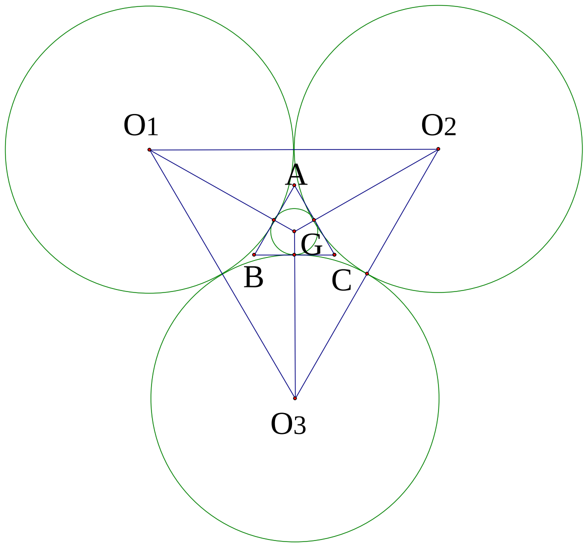



圖六十二

我們發現到此時三個圓的圓心連線正好爲正三角形，而 G 爲此正三角形 O1 O2 O3 的重心，且 G 亦爲正三角形 ABC 的重心，連接 $\overline{GO_1}$ 、 $\overline{GO_2}$ 、 $\overline{GO_3}$ ，

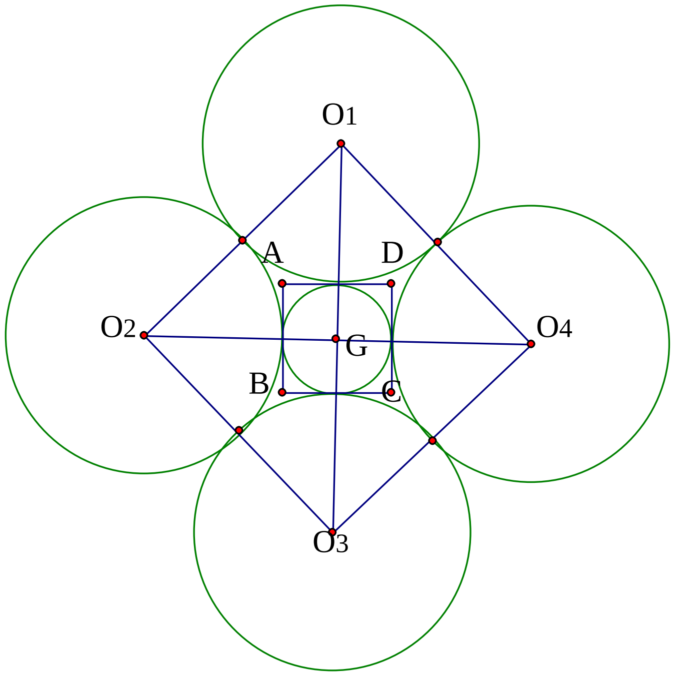
此時 $\angle O_1GO_2 = \angle O_2GO_3 = \angle O_3GO_1 = \frac{1}{3} \times 360° = 120°$

我們畫出正三角形 ABC 的內切圓，其結果如下：



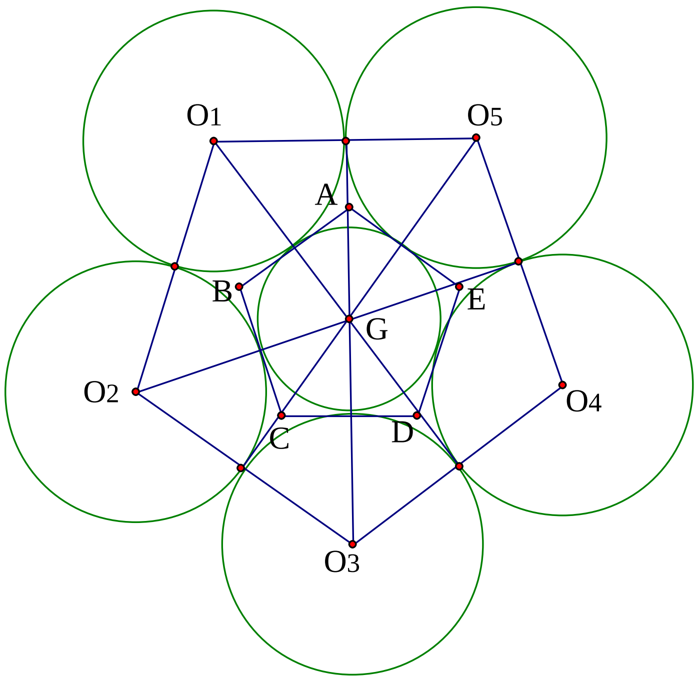

如此一來，在討論內部爲正多邊形，外部環繞圓的狀況，其實就是等價討論內部爲圓形，外部環繞圓的狀況。

例如：內部爲正方形 ABCD 時，外部至少可排四個圓形。(如圖六十三)
找出此內部正方形 ABCD 的內切圓 G，此時外部四個圓的圓心與 G 點的連線，把這個內切圓四等份，而圓心角 $= \frac{1}{4} \times 360° = 90°$




圖六十三

同理，當內部爲正五邊形時：外部至少可排五個圓形。(如圖六十四)




圖六十四

我們也可以找出此內部正五邊形 ABCDE 的內切圓 G，此時外部五個圓的圓心與 G 點的連線，把這個內切圓五等份，而圓心角$=\frac{1}{5}\times 360° = 72°$

以此類推……當內部爲正 n 邊形的時候，外部至少可排出幾個圓形呢？

由以上討論可知：這個問題就等價於去考慮此正 n 多邊形的內切圓的 n 等份問題。也就是說，當圓心角切割成 $\frac{360^\circ}{n}$ 時，外部就對應 n 個圓形。

## 陸、 結論 ：

一、內部爲圓，外部爲正多邊形或圓形的圍繞個數，我們有以下的發現：

（一）以正多邊形圍繞的個數：

1. 我們找出下列四種：

| 正多邊形形狀 | 正五邊形 | 正六邊形 | 正八邊形 | 正十二邊形 |
|---|---|---|---|---|
| 圍成多邊形封閉區域與圓相切的個數 | 10 | 6 | 4 | 3 |

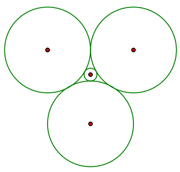
2. 推廣（一般化）：以正 n 邊形圍繞與圓形相切的個數 m 須符合下列式子：

$$(\frac{360}{n})^\circ \times 2 + (\frac{360}{m})^\circ = 180^\circ$$

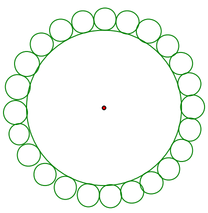
也可以簡化成 $\frac{4}{n} + \frac{2}{m} = 1$（m 和 n 必須是整數）

（二）以圓形圍繞的個數：

1. 至少需要三個圓形才能完成圍繞的排列



2. 隨著圍繞的圓形增加，內外的圓形大小比例相差更加懸殊，看起來就像是圓周上的小點。

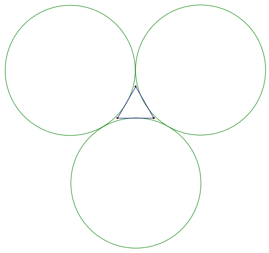


二、內部爲正多邊形，外部爲正多邊形或圓形的圍繞個數，我們有以下的發現：

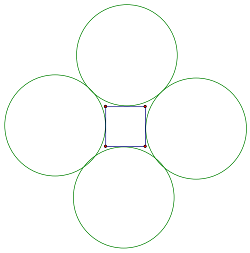
（一）若外部的正多邊形與內部的正多邊形相切，這部分在多邊形相切的定義上的較難界定。

（二）外部的圓形與內部的正多邊形相切的個數：

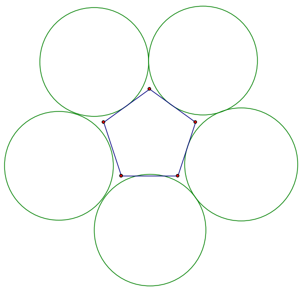
1.當內部爲正三角形時:：外部至少可排三個圓形。



2.當內部爲正方形時：外部至少可排四個圓形。



3.當內部爲正五邊形時：外部至少可排五個圓形。



4.當內部爲正 n 邊形時：外部至少須排 n 個圓形。

三、可以完成圍繞相切的圖形間大小關係的研究：

（一）圓形和圓形間相切的圖形，半徑間的比有無理數的出現，顯示出圓的大小關係並非呈現很規則的狀況。

（二）以正多邊形爲中心，以邊和外部的圓形相切的圖形，正多形邊長和圓的半徑大小關係並非呈現規則的狀態。

四、在做這次科展以前，我們只有在類似的題目中透過計算的方式去尋找答案，多邊形圍繞與圓形相切，或圓形圍繞與圓形相切的個數關係是如何，而沒有實際的去探索不成立的時候圖形是如何，也沒有透過繪圖軟體去驗證。而從這一次做科展的過程，我們了解到，除了運用算術的方式去尋求答案，也可利用相關工具包括電腦軟體去協助我們探索研究圖形的可能性！雖然說過程中遇到許多思考與圖形排列關係的疑問，但是在大家的共同腦力激盪下，終於完成了這件作品。

# 柒、 參考資料：

一、高中數學，南一書局，93 年 2 月出版，第二冊 P.79 －P156 第二章三角函數的基本概念

二、高中數學，南一書局，93 年 2 月出版，第二冊 p142-p146 餘弦定理

三、國中數學，翰林書局，第四冊第三章－三角形的內、外角

四、國中數學，康軒書局，第五冊圓

五、John Mason, Leone Burton & Kaye Stacey, Thinking Mathematically(數學思考，台北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學合譯)，p.162， 2000 年一版，九章出版社

六、黃宜敏&蘇芳柳編譯，神奇的腦袋瓜，心理出版社，台北，1988 年

【評　語】　030416　滾動前進翻轉提升－探索圖形間的相切圍繞個數問題

探討圖形間的相切圍繞個數，其研究問題的設計考慮周全，但內容若能再深入些，相信會是一件不錯的作品。