中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

030415

<u>正多邊形母子面積比</u>

學校名稱：桃園縣立桃園國民中學

作者：	指導老師：
國二 林雅淇	王瑜君
國二 簡艾蘋	黃楷智
國二 張昌祐	
國二 游元環	

關鍵詞：<u>正 N 邊形</u>　<u>面積比</u>　<u>相似形</u>

作品名稱:正多邊形母子面積比

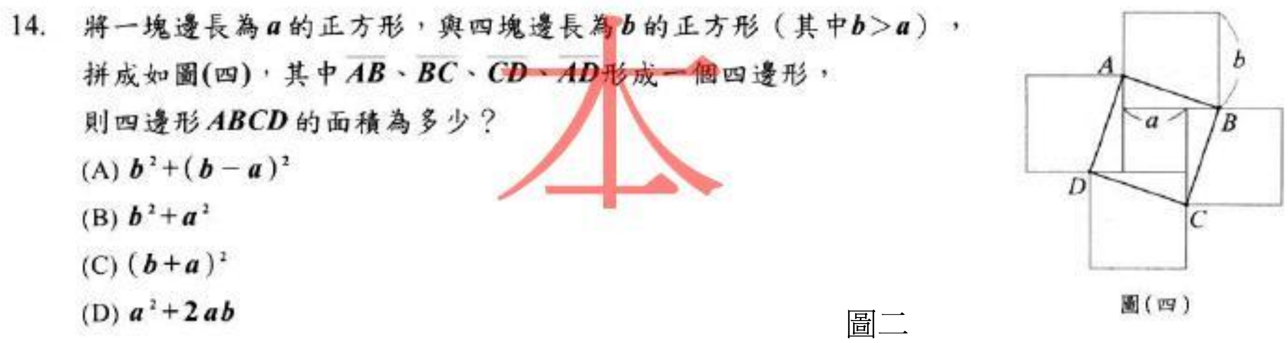
壹、 摘要

此研究是針對正Ｎ邊形各邊分點與頂點連線所形成的小正Ｎ邊形和原正Ｎ邊形的面積比，因商高定理的說明圖形為起源，所以先針對正方形作研究，剛開始我們利用切割法(研究過程中有介紹)找出正方形各邊分點與頂點連線所形成的小正方形和原正方形的面積比，再依同樣的切割法對正三角形、正五邊形、正六邊形作切割找出面積比，過程中有些正Ｎ邊形可以用此切割法求出面積比，在文中我們稱此圖形為**完美切割**，而無法用此切割法求出面積比的正Ｎ邊形，我們利用了鋪瓷磚方法和代數法解釋了哪些正Ｎ邊形可用此切割法求面積比和無法用切割法的正Ｎ邊形面積比公式。

貳、 研究動機

在國二上學期數學課程裡，商高定理是個不可忽略的重要數學知識，由商高定理延伸的數學問題千變萬化，因此，老師總會在商高定理課程中對學生補充許多課外知識。上商高定理這個單元時，老師曾在課堂上利用圖一說明商高定理，當時小蘋就對這樣的圖形大感興趣，且在90年國中第一次基測考題中，也出現過類似的圖形(如圖二) ，當時題目是求中央小正方形的面積為多少，針對這兩個圖形，我們改造題目成為這次研究的主題，**以切割法找出正N邊形各邊分點與頂點連線所形成的小正N邊形和原正N邊形的面積比**。

圖一


14. 將一塊邊長為 a 的正方形，與四塊邊長為 b 的正方形（其中 $b>a$），拼成如圖(四)，其中 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 形成一個四邊形，則四邊形 $ABCD$ 的面積為多少？

(A) $b^2+(b-a)^2$

(B) b^2+a^2

(C) $(b+a)^2$

(D) a^2+2ab

圖二

參、 研究目的

一、 以切割法(如研究過程中 GSP 作圖步驟)找出正方形各邊分點與頂點連線所形成的小正方形和原正方形的面積比。

二、 觀察是否每一正多邊形皆可以此切割法而達成完美切割。

完美切割之定義：依我們的切割法將原正N邊形和在中央形成的正N邊形切割成由同一種正多邊形所組成(如研究過程，包含虛線部份)，並可由此推算面積比。

三、 可否將切割法推廣至所有正多邊形，以得到原正多邊形和中央小正多邊形的面積比。

四、 切割法探討的是原正N邊形邊長切割比例為最簡整數比所得的面積比，除此之外，是否有公式適用於正多邊形邊長的任意比例切割(非整數比，如:邊長1: $\sqrt{2}$)。

肆、 研究設備及器材

一、　電腦

二、 電腦繪圖軟體 GSP

伍、 研究過程或方法

一、先從正方形開始，利用GSP作圖觀察正方形邊長比例切割後的圖形

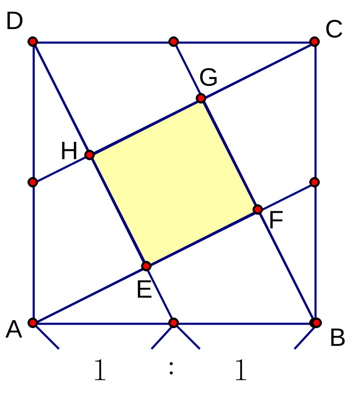
（一）例：正方形邊長1：1切割，GSP作圖步驟

步驟１.過D作直線L // $\overline{HG}$ 。

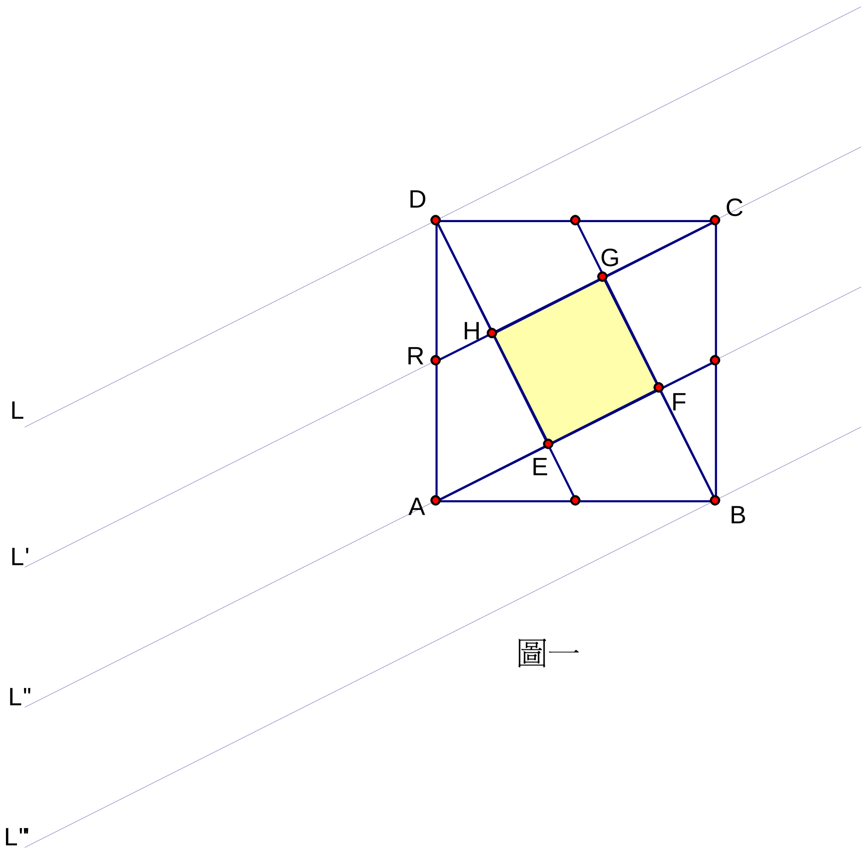
步驟２.將直線L平移向量DR(邊長切割中的一等份)得直線L'。

步驟３.依序將所得直線平移向量DR兩次得L"和L'"。

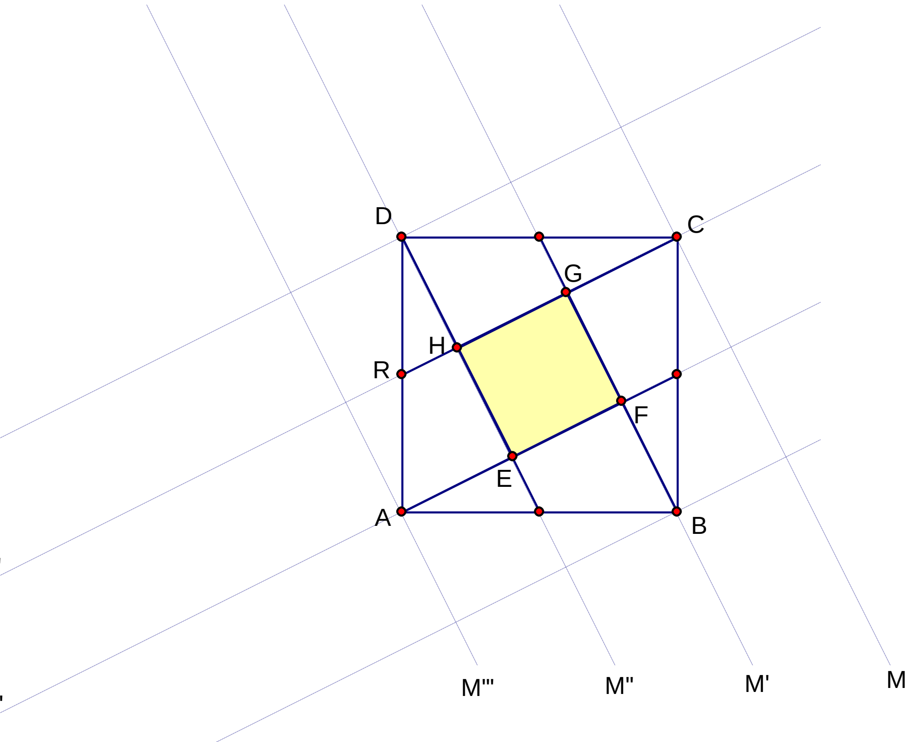
步驟４.同理，對C點重複(1)~(3)的步驟得M、M'、M"、M'"。



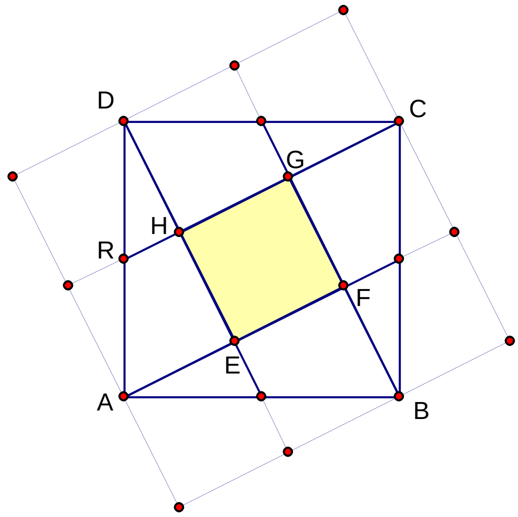
原圖



圖一

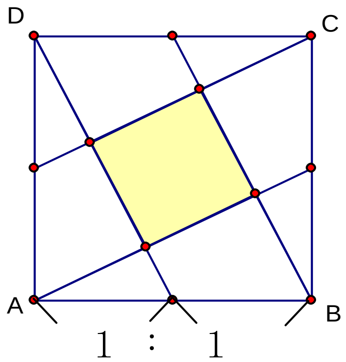


圖二

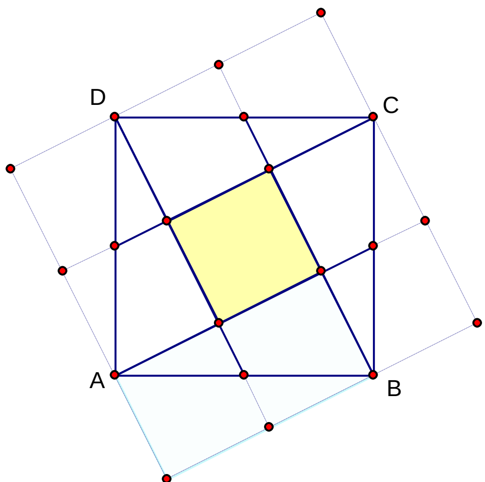


完成圖

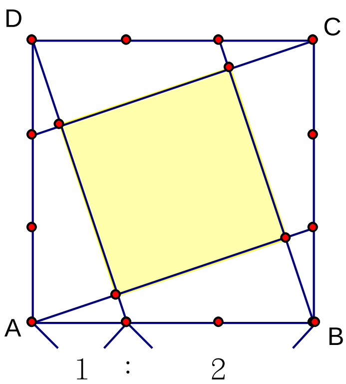
（二）由切割圖形推導原正方形邊長切割成M：N時，中央黃色正方形佔原正方形面積的多少？



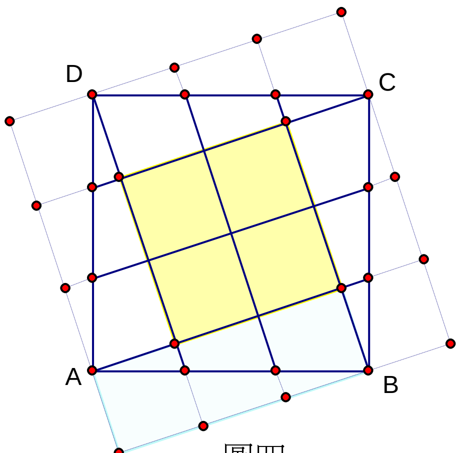
⇒



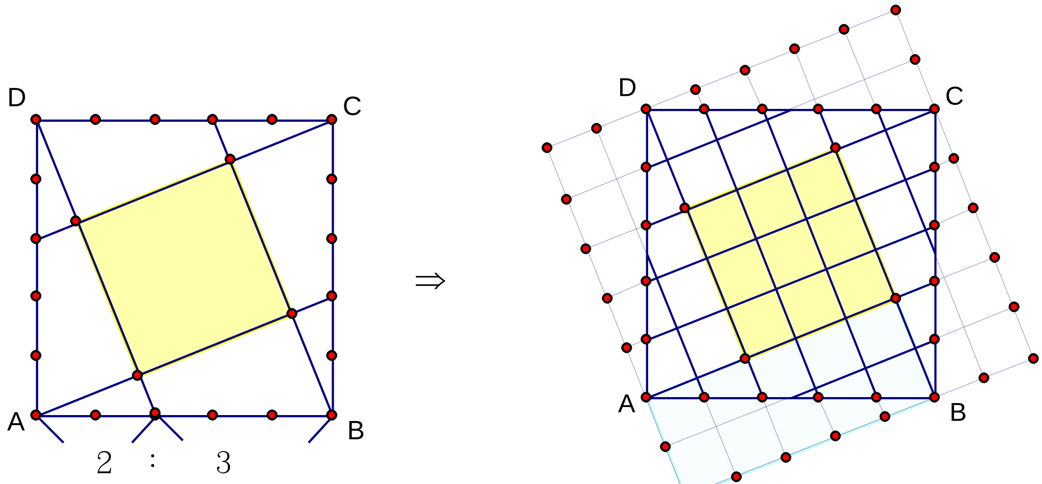
圖三



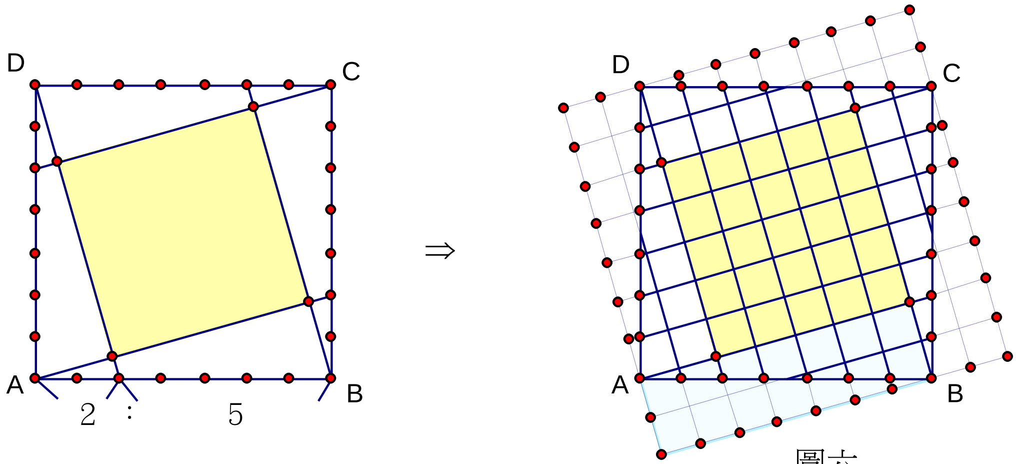
⇒



圖四



圖五



圖六

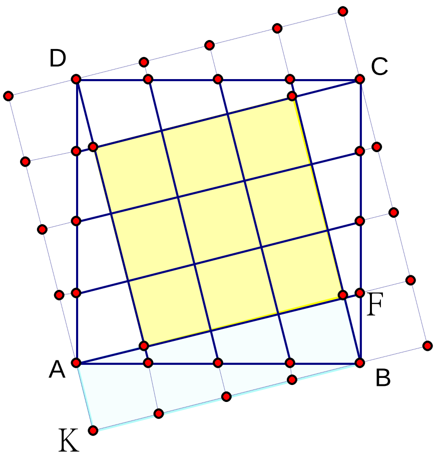
（三）觀察方法：

步驟 1：觀察圖三至圖六，當原正方形每邊分割成 1 : 1，1 : 2，2 : 3，2 : 5 等比例(如左邊圖形)，依序連線後(如右邊圖形)，分別把中央黃色正方形的邊長切割成若干等份。

步驟 2：正方形面積 ＝ 邊長×邊長，因此可推算出中央黃色小正方形面積所占的格子數。

步驟 3：原正方形依比例分割後，扣除中央黃色正方形後，剩餘部分爲四塊面積相同的直角三角形，依序連線後(如圖三至圖六)，可發現剩餘部分面積和虛線部分會形成四塊相同面積的長方形(如圖三至圖六的藍色部分)，且長方形的長所佔等份和原正方形邊長被分割的等份相等(即前項＋後項)，寬所佔等份爲邊長分割比例中的前項。

例：原正方形邊長分割比例 1 ： 3



1.長方形 AKBF 的長被切割爲 4 等份(即 1 ＋ 3)。
寬被切割爲 1 等份。
面積所佔格數爲 4 格。

2.原正方形扣除中央黃色正方形面積所剩面積
＝4×長方形 AKBF 面積÷2＝ 8 (格)。

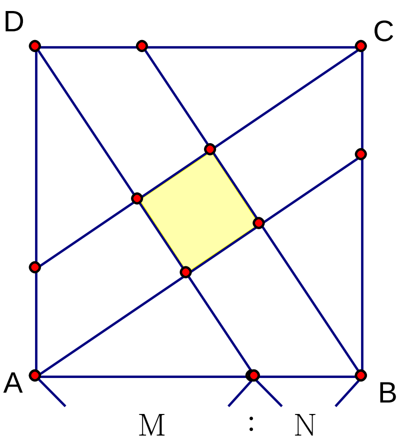
（四）觀察結果：

邊長切割比例	中央正方形邊長被分割等份	中央正方形所佔格數（一）	四塊長方形所佔格數 (4×長×寬)（二）	原正方形所佔格數 （一）＋$\frac{（二）}{2}$	面積比
1：1	1	1	4×2×1＝8	5	$\frac{1}{5}$
1：2	2	4	4×3×1＝12	10	$\frac{4}{10}$
1：3	3	9	4×4×1＝16	17	$\frac{9}{17}$
1：4	4	16	4×5×1＝20	26	$\frac{16}{26}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2：3	3	9	4×5×2＝40	29	$\frac{9}{29}$
2：5	5	25	4×7×2＝56	53	$\frac{25}{53}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

（五）結論：

若大正方形每邊分割成$M：N$，則中央黃色小正方形面積所佔格數爲N^2格

原正方形所佔格數爲$N^2+\dfrac{4\times(M+N)\times M}{2}=N^2+2M(M+N)$。



$$\Rightarrow \frac{\text{中央正方形面積}}{\text{原正方形面積}}=\frac{N^2}{N^2+2M(M+N)}$$

二、正三角形是否也能利用此切割方法求出面積比？

利用 GSP 作圖觀察正三角形邊長切割後的圖形。

（一）例：正三角形邊長１：１切割，無法形成中央小正三角形。

正三角形邊長１：２切割，GSP作圖步驟

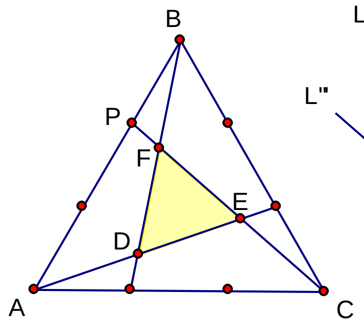
步驟１.過Ｂ作直線Ｌ $/\!/\overline{EF}$ 。

步驟２.將直線Ｌ沿著正三角形向量ＢＰ(邊長分割中的一等份)得直線Ｌ'。

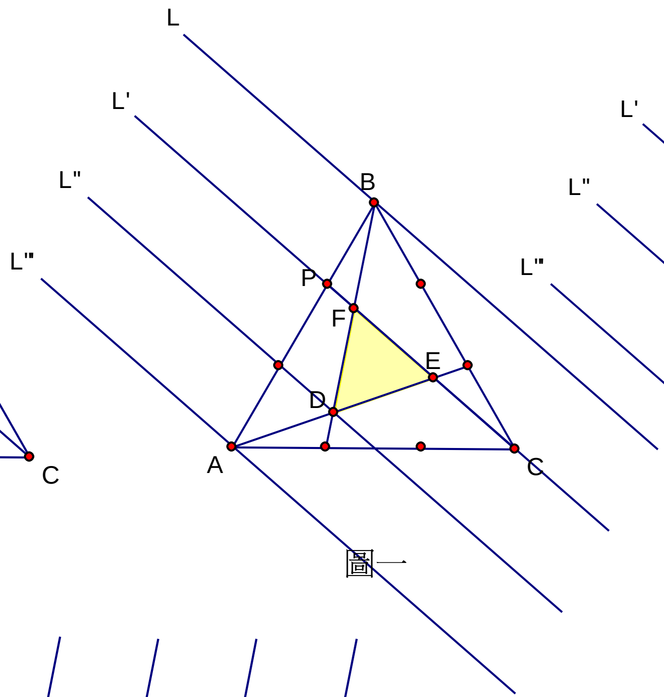
步驟３.依序將所得直線平移向量ＢＰ兩次得Ｌ"和Ｌ'"。

步驟４.同理，對Ａ點重複(1)~(3)的步驟得Ｍ、Ｍ'、Ｍ"、Ｍ'"。

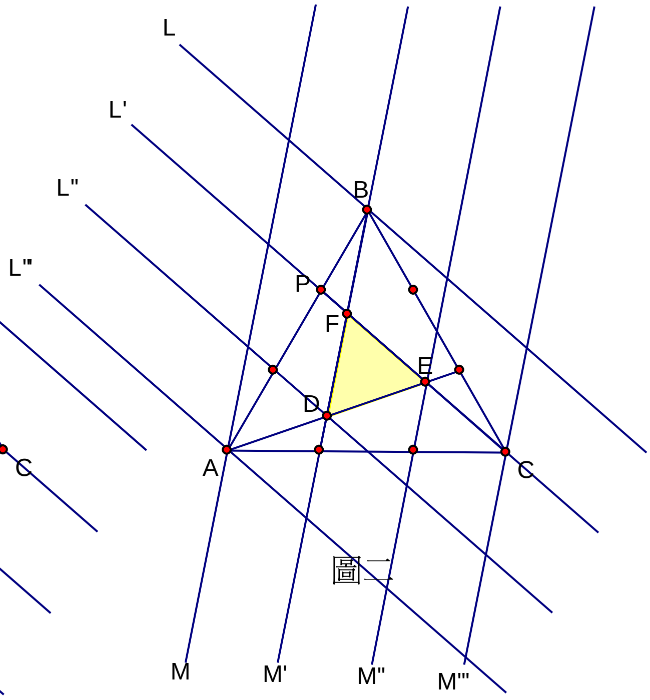
步驟５.同理，對Ｃ點重複(1)~(3)的步驟得Ｎ、Ｎ'、Ｎ"、Ｎ'"。



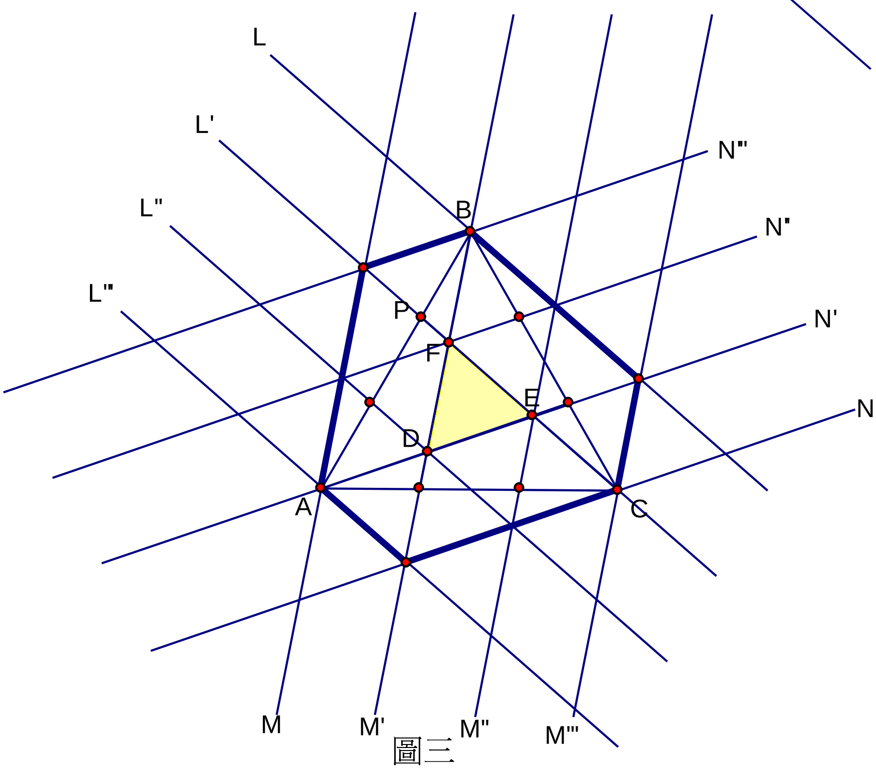
原圖



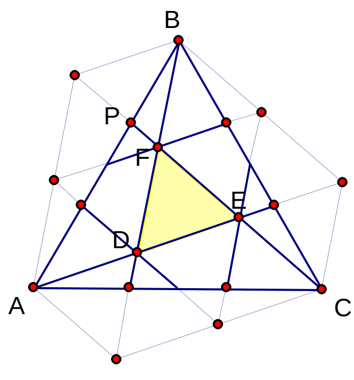
圖一



圖二

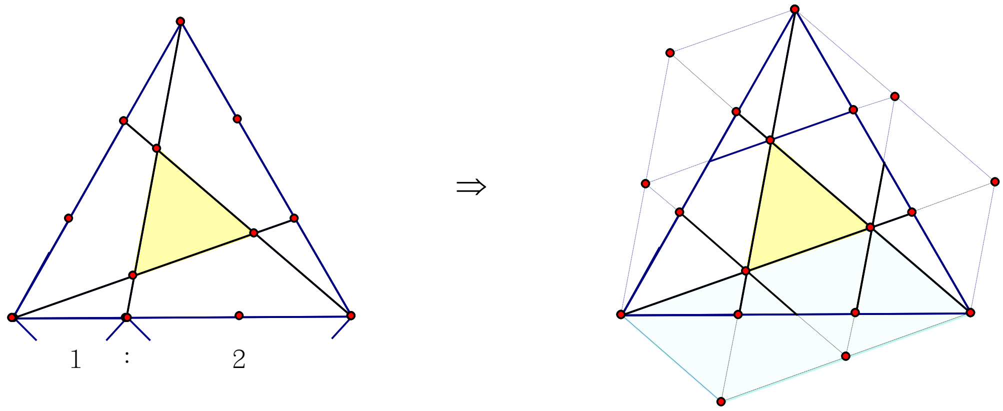


圖三

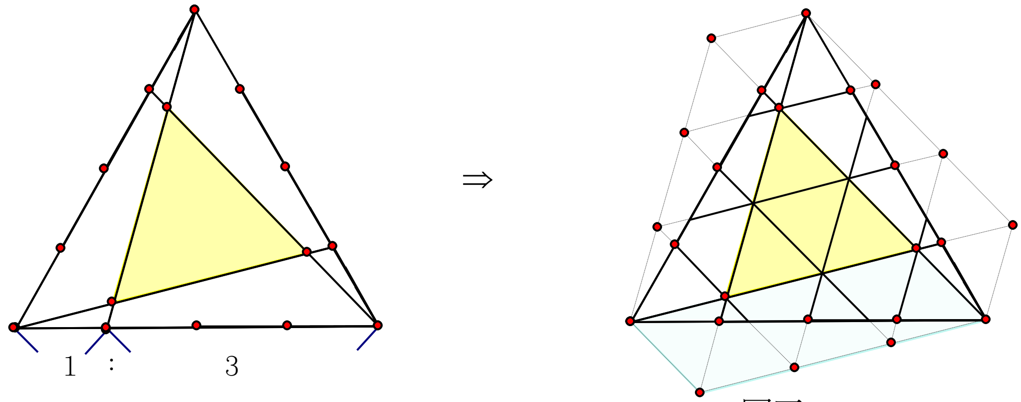


完成圖

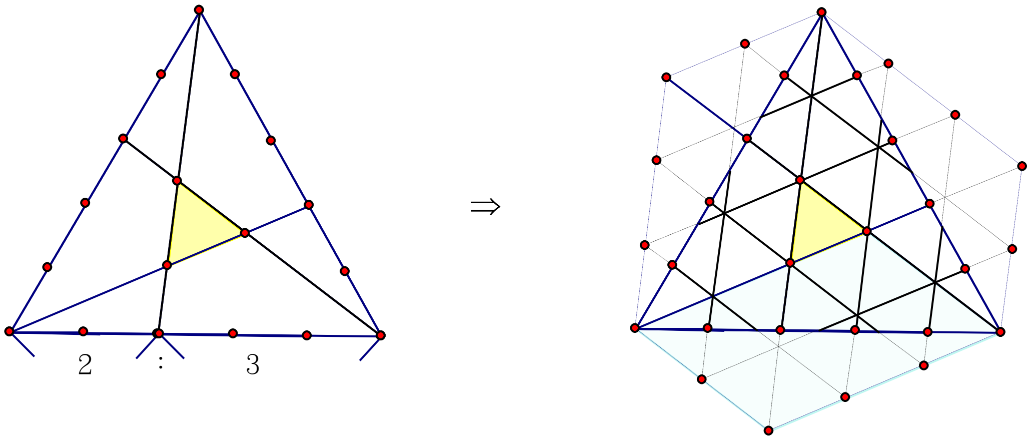
（二）由切割圖形推導原正三角形邊長切割成M：N時，中央黃色正三角形佔原正三角形面積的多少？



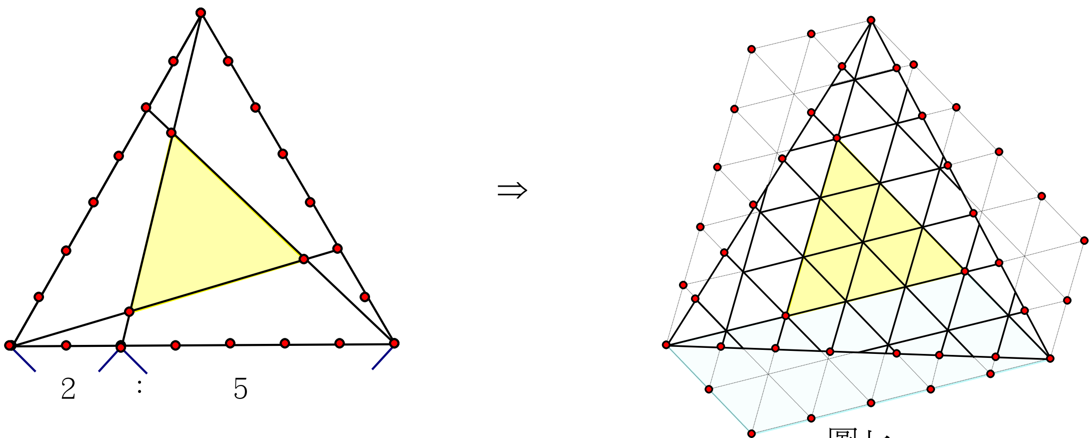
圖四



圖五



圖六



圖七

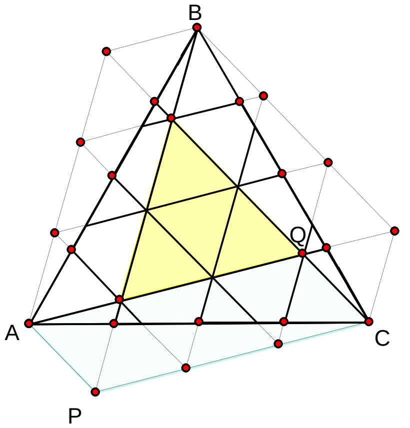
（三）觀察方法：

步驟 1：觀察圖四至圖七，當原正三角形每邊分割成 1 : 2，1 : 3，2 : 3，2 : 5 等比例(如左邊圖形)，依序連線後(如右邊圖形)，分別把中央黃色正三角形的邊長切割成若干等份。

步驟 2：中央黃色正三角形所佔格數=邊長切割等份的平方。

步驟 3：原正三角形依比例分割後，扣除中央黃色正三角形後，剩餘部分爲三塊面積相同的三角形，依序連線後(如圖四至圖七)，可發現剩餘部分面積和虛線部分會形成三塊相同面積的平行四邊形(如圖四至圖七的藍色部分)，且平行四邊形的長邊所佔等份和原正三角形邊長分割比例的後項相等，短邊所佔等份和邊長分割比例的前項相等。

例：原正三角形邊長分割比例 1 ： 3



1.平行四邊形 APCQ 的長邊被切割爲 3 等份。
短邊被切割爲 1 等份。
面積所佔格數爲 $3\times1\times2$ 格。

2.原正三角形扣除中央黃色正三角形面積所剩面積
$= 3\times$平行四邊形 APCQ 面積 $\div 2 = 9$ (格)。

（四）觀察結果：

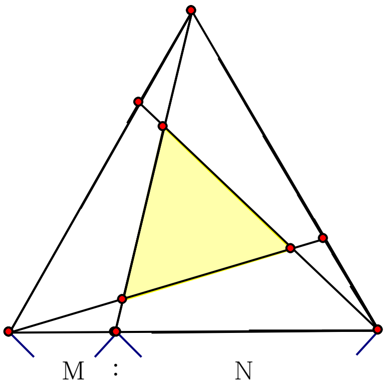
邊長切割比例	中央正三角形邊長被分割等份	中央正三角形所佔格數（一）	三塊平行四邊形所佔格數 (3×長邊×短邊×2)（二）	原正三角形所佔格數 $（一）+\frac{（二）}{2}$	面積比
1 ： 2	1	1	$3\times2\times1\times2=12$	7	$\frac{1}{7}$
1 ： 3	2	4	$3\times3\times1\times2=18$	13	$\frac{4}{13}$
1 ： 4	3	9	$3\times4\times1\times2=24$	21	$\frac{9}{21}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2 ： 3	1	1	$3\times3\times2\times2=36$	19	$\frac{1}{19}$
2 ： 5	3	9	$3\times5\times2\times2=60$	39	$\frac{9}{39}$

2：7	5	25	$3\times7\times2\times2=84$	67	$\frac{25}{67}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

（五）結論：

若原正三角形每邊分割成 $M:N$ ，則中央黃色正三角形面積所佔格數爲 $(N-M)^2$ 格。

原正三角形所佔格數爲 $(N-M)^2+\dfrac{3\times N\times M\times 2}{2}=(N-M)^2+3MN$。



$$\Rightarrow \frac{\text{中央正三角形面積}}{\text{原正三角形面積}}=\frac{(N-M)^2}{3MN+(N-M)^2}$$

三、繼續推導到正五邊形是否也能利用此切割方法求出面積比？

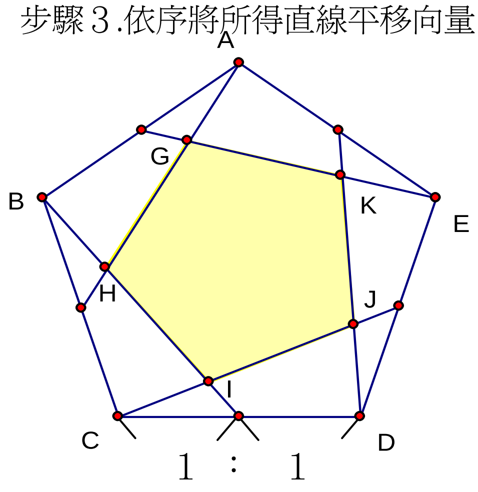
利用GSP作圖觀察正五邊形邊長切割後的圖形。

（一）例：正五邊形邊長1：1切割，GSP作圖步驟

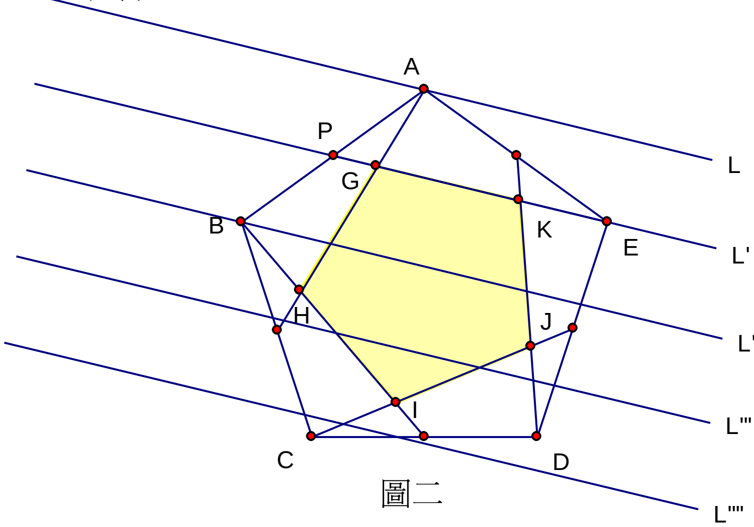
步驟1.過A作直線L $//\overline{GK}$ 。

步驟2.將直線L沿著正五邊形一等份點平移向量AP得直線L'。

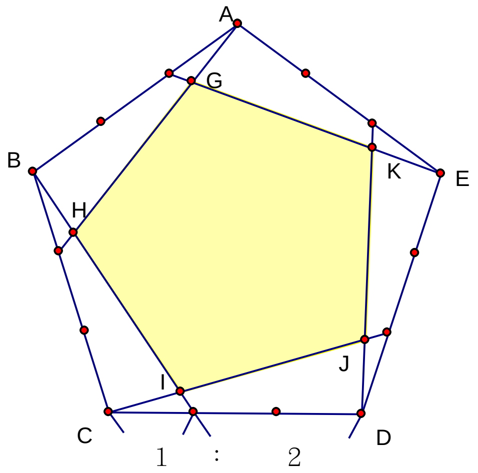
步驟3.依序將所得直線平移向量AP四次得L"、L'''、L""。



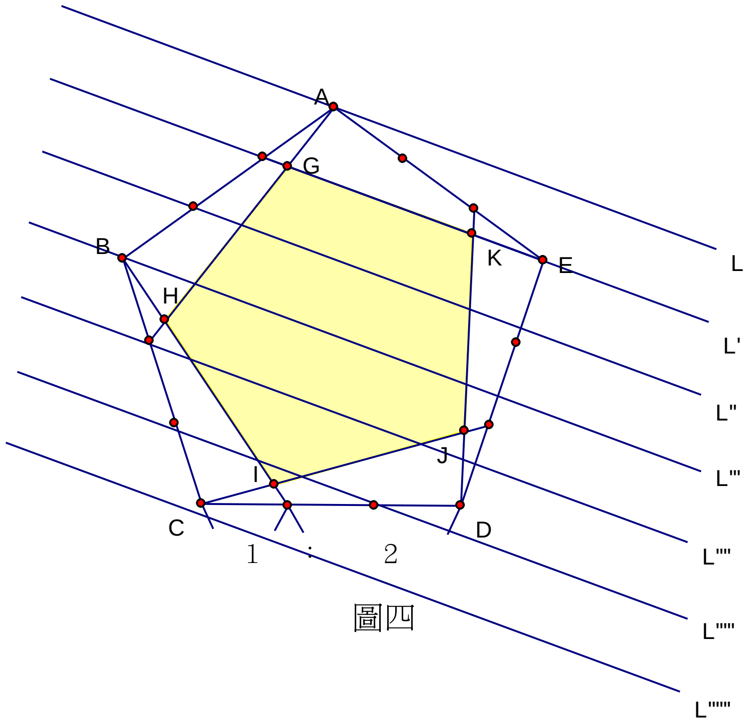
圖一



圖二



圖三



圖四

（二）結論：

依照正方形與正三角形的切割法，在正五邊形邊長１：１切割上，我們發現最後兩條平行線Ｌ"、Ｌ'''並未通過中央黃色正五邊形的頂點，以致於無法形成完美切割，為了了解是否其他比例的切割也會呈現如此情況，因此我們繼續做１：２的切割圖形(如圖四)，結果最後兩條平行線依然無法通過中央黃色正五邊形的頂點。

四、是否於正Ｎ邊形(Ｎ≥５且Ｎ為正整數)後，就不能完美切割了？針對這個疑問，我們又利用GSP觀察正六邊形是否能被完美切割並求出面積比？

（一）例：正六邊形邊長1：1切割，GSP作圖步驟

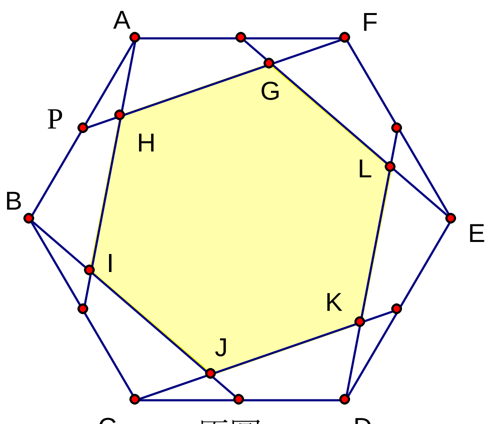
步驟１.過Ａ作直線M// $\overline{HG}$ 。

步驟２.將直線M沿著正三角形一等份點平移向量ＡＰ得直線Ｌ'。

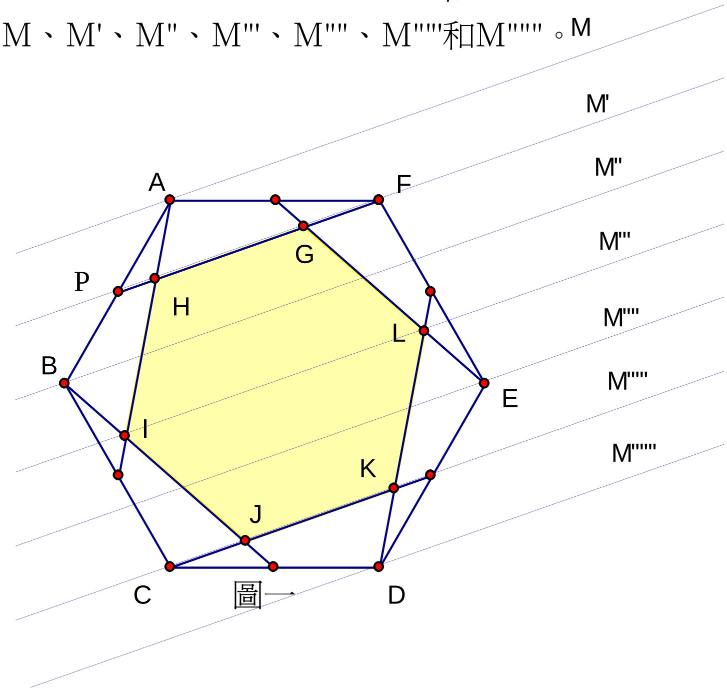
步驟３.依序將所得直線平移向量ＡＰ兩次得M"、M'''、M''''、M'''''和M''''''。

步驟４.同理，對Ｂ點重複(1)~(3)的步驟得Ｎ 、 N'、 N"、 N'''、 N''''、 N'''''和N''''''。

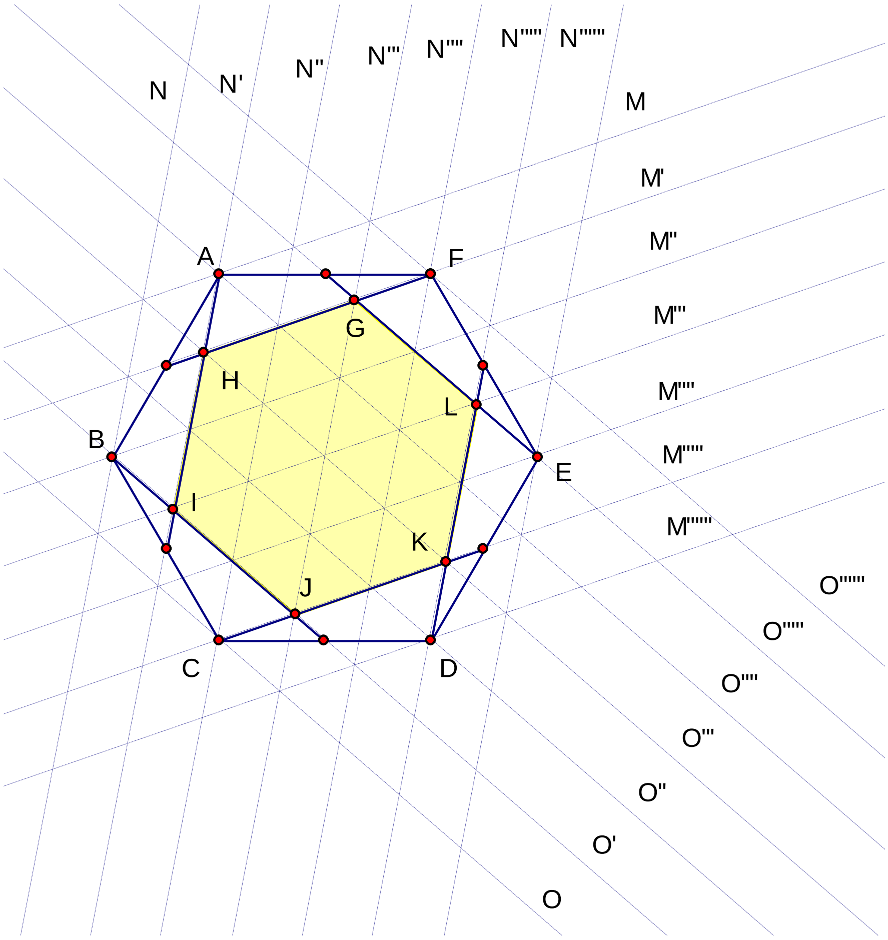
步驟５.同理，對Ｃ點重複(1)~(3)的步驟得M、M'、M"、M'''、M''''、M'''''和M''''''。



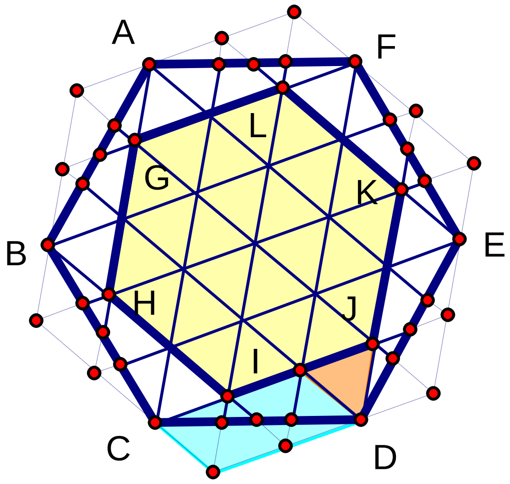
原圖



圖一

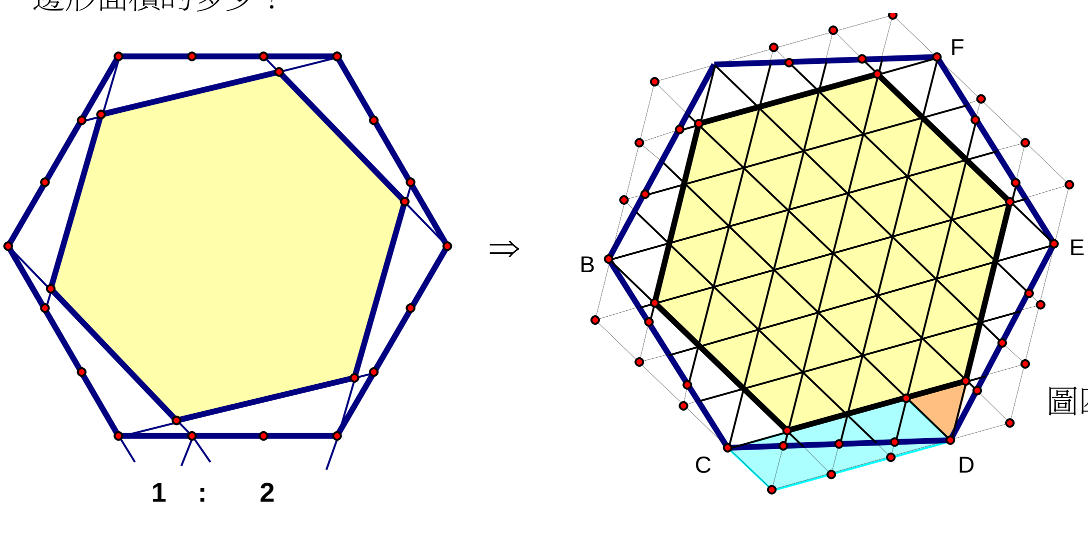


圖二

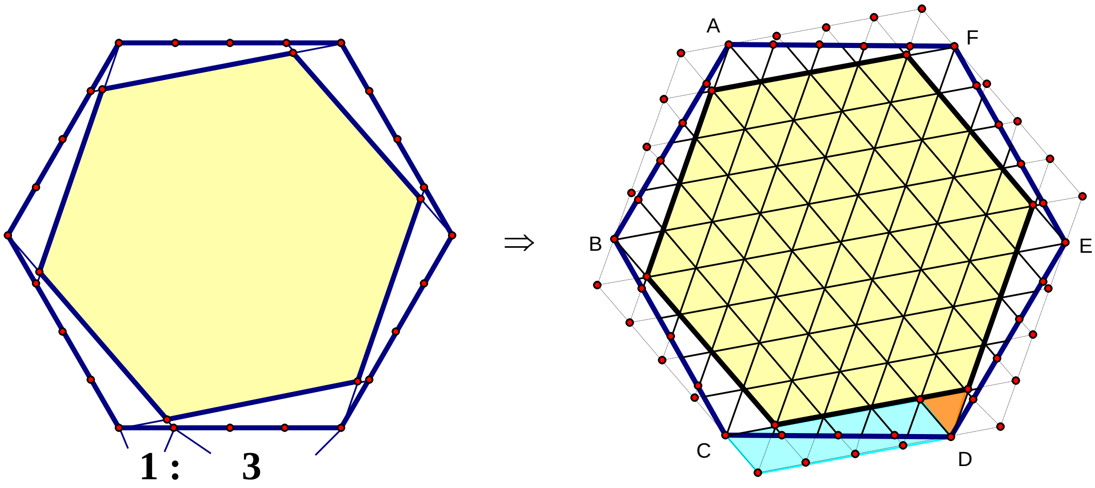


完成圖(圖三)

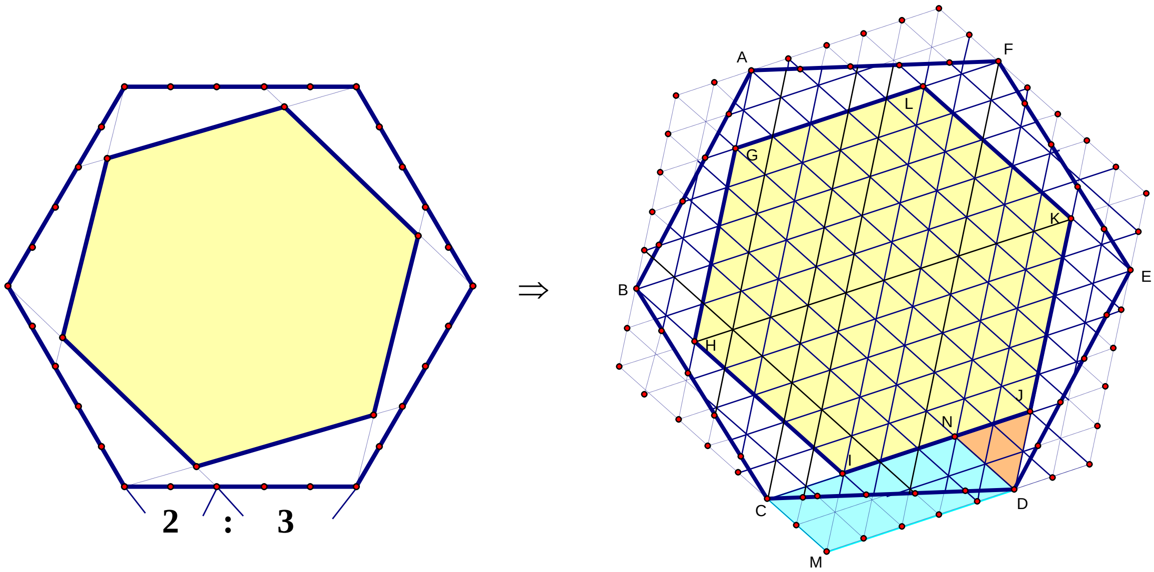
（二）由切割圖形推導原正六邊形邊長切割成整數比M：N時，中央黃色正六邊形佔原正六邊形面積的多少？



圖四



圖五



圖六

（三）觀察方法：

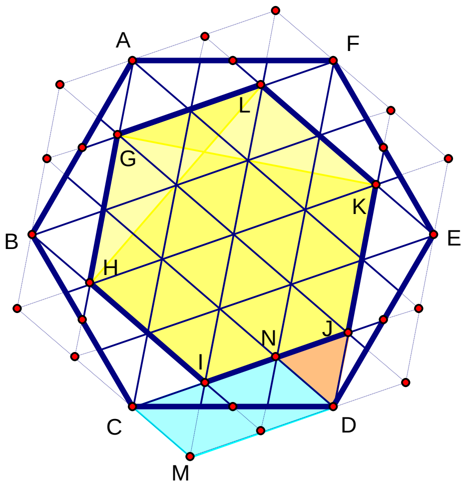
步驟 1：觀察圖三至圖六，當原正六邊形每邊分割成 1：1，1：2，1：3，2：3 比例(如左邊圖形)時，依序連線後(如右邊圖形)，分別把中央黃色小正六邊形的邊長切割成若干等份。

步驟 2：中央黃色正六邊形所佔格數(可看成由六個正三角形組成的)=邊長切割等份的平方×6 。

步驟 3：原正六邊形依比例分割，扣除中央黃色正六邊形後，剩餘部分爲六塊面積相同的三角形，依序連線後(如圖三至圖六)，可發現剩餘部分面積和虛線部分會形成六塊相同面積的平行四邊形(如圖三至圖六的藍色部分)和六個相同面積的正三角形(如圖三至圖六的橘色部分)，且平行四邊形的長邊所佔等份和原正六邊形邊長被分割的等份相等(即前項＋後項)，寬所佔等份爲邊長分割比例中的前項。

步驟 4：橘色小三角形的所佔格數=邊長切割等份的平方，且其邊長切割等份與藍色平行四邊形的寬所佔等份相同。

例：原正六邊形邊長分割比例 1：1



1.平行四邊形 CMDN 的長邊被切割為 2 等份。

短邊被切割為 1 等份。

面積所佔格數為 $2\times1\times2$ (格)。

2.橘色正三角形面積所佔格數為 $1\times1=1$ (格)。

3.原正六邊形扣除中央黃色正六邊形面積所剩面積

$=6\times$平行四邊形 CMDN 面積$\div2+6\times\Delta$NJD 面積

$=6\times4\div2+6\times1=18$ (格)。

（四）觀察結果

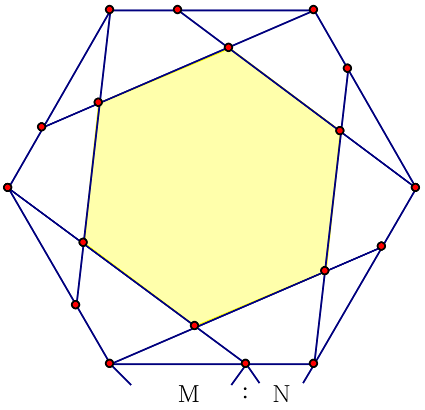
邊長切割比例	中央正六邊形邊長被分割等份	中央正六邊形所佔格數（一）	六塊平行四邊形所佔格數（6×長邊×短邊×2）（二）	原正六邊形所佔格數 $（一）+\frac{（二）}{2}+6$	面積比
1：1	2	$6\times2^2=24$	$6\times2\times1\times2=24$	42	$\frac{4}{7}$
1：2	3	$6\times3^2=54$	$6\times3\times1\times2=36$	78	$\frac{9}{13}$
1：3	4	$6\times4^2=96$	$6\times4\times1\times2=48$	126	$\frac{16}{21}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2：3	5	$6\times5^2=150$	$6\times3\times2\times2=72$	192	$\frac{25}{32}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

（五）結論：

若原正六邊形每邊分割成 $M：N$ ，則中央黃色正六邊形面積所佔格數為

$6(M+N)^2$ 格，原正六邊形所佔格數為 $6(M+N)^2+\frac{6\times(M+N)\times M\times2}{2}+6M^2$

$=6\left[(M+N)^2+2M^2+MN\right]$。



$\Rightarrow \dfrac{\text{中央正六邊形面積}}{\text{原正六邊形面積}} = \dfrac{(M+N)^2}{(M+N)^2+2M^2+MN}$

五、討論：

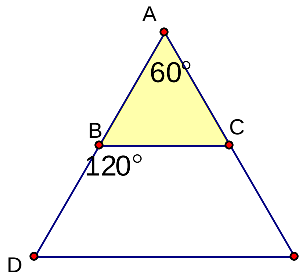
（一）經上列圖形知若正N邊形中央的黃色部分可由同一正多邊形鋪成，那原正N邊形即可被完美切割，且根據鋪瓷磚問題，所有正N邊形中，只有正三角形、正方形和正六邊形可鋪滿一平面，所以我們推測在這個研究主題裡，原圖形中也只有正三角形、正方形、正六邊形可以被完美切割並求出面積比，且應與其一內角爲多少有關，所以以下我們將利用鋪磁磚方法觀察中央的正N邊形有哪些可以由正多邊形鋪滿，進而說明原正N邊形有哪些可被完美切割？

1.探討利用正三角形所能鋪成的正N邊形有哪些？

(1)一個小正三角形可鋪滿內角爲60^o的大正三角形其中一角$\angle BAC$（如下圖）

剩下的角$\angle DBC=120^o$可再用兩個小正三角形鋪滿

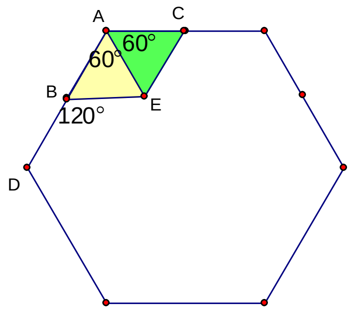
$\Rightarrow$利用小正三角形可鋪成大正三角形。



(2)二個正三角形可鋪滿內角爲120^o的正六邊形其中一角$\angle BAC$（如下圖）

剩下的角$\angle DBE=120^o$可再用兩個小正三角形鋪滿

$\Rightarrow$利用小正三角形可鋪成正六邊形。



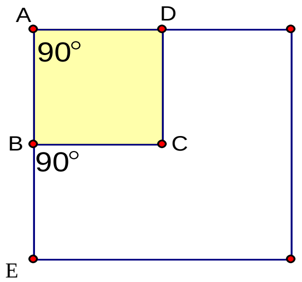
(3)三個正三角形組成的內角爲180^o，但沒有任何正N邊形一內角爲180^o。

2．探討利用正方形所能鋪成的正Ｎ邊形有哪些？

(1)一個小正方形可鋪滿內角爲90^o的大正方形其中一角$\angle BAD$(如下圖)

剩下的角$\angle EBC = 90^o$可再用一個小正方形鋪滿

⇒利用小正方形可鋪成大正方形

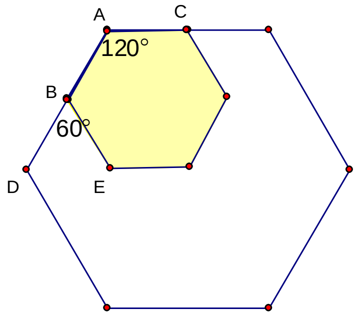


(2)二個正方形組成的內角爲180^o，但沒有任何正Ｎ邊形一內角爲180^o

3．探討利用正六邊形所能鋪成的正Ｎ邊形有哪些？

(1) 一個小正六邊形可鋪滿內角120^o爲的大正六邊形其中一角$\angle BAC$(如下圖)

剩下的角$\angle DBE = 60^o$無法再用一個小正六邊形鋪滿



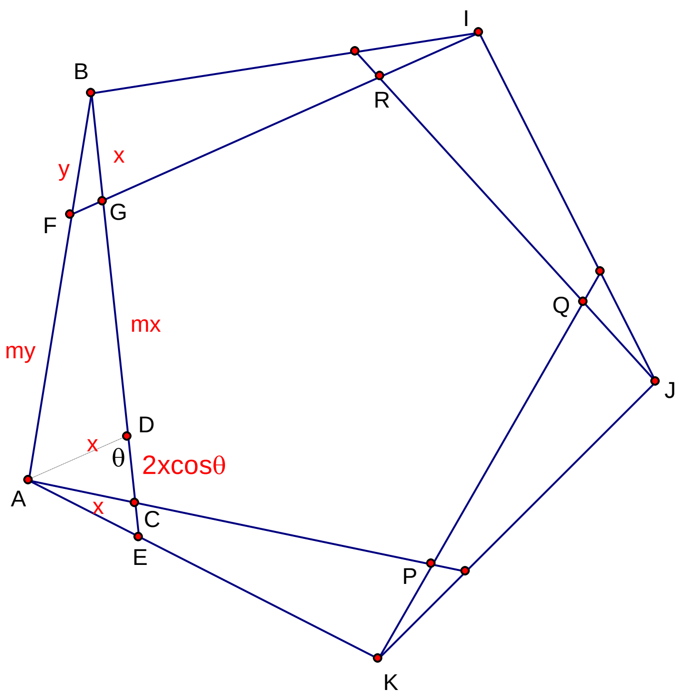
（二）結論：

由此可知，中央的正Ｎ邊形只有正三角形、正方形、正六邊形可以由同一種正多邊形組成，因此在我們的研究題目中也只有正三角形、正方形、正六邊形可以利用此切割法被完美切割求得面積比。

五、無法完美切割的正Ｎ邊形，將如何求得大小正Ｎ邊形的面積比？

因爲原正Ｎ邊形與中央所形成的正Ｎ邊形爲相似圖形，所以我們將利用相似形面積比＝邊長的平方比求得適用於正Ｎ邊形邊長任何比例(可非整數比)的切割。

（一）以下我們將針對正五邊形利用代數法直接推導公式



過 A 作 $\overline{AD} // \overline{FG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D

令 $\overline{BF} = y$，$\overline{FA} = my$，$\overline{BG} = x$ ，$\angle ADC = \theta$ ($\theta = 72^\circ$)

$\because \angle FGD = \angle ADC = \angle ACD = \theta$

$\therefore \overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BG} = x \Rightarrow \overline{CD} = 2x\cos\theta$

根據平行線截等比例線段

$\overline{GD} = mx$，$\overline{FG} = \dfrac{x}{1+m}$

又 $\Delta BFG \sim \Delta BEA$

$\therefore \overline{BG} : \overline{BA} = \overline{BF} : \overline{BE}$

$\Rightarrow x : (1+m)y = y : (1+m+2\cos\theta + \dfrac{1}{1+m})x$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{(1+m)^2}{1+(1+m)^2+2(1+m)\cos\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{正五邊形ABIJK面積}{正五邊形GCPQR面積} = \dfrac{(m+2\cos\theta)^2 x^2}{(1+m)^2 y^2} = \dfrac{(m+2\cos\theta)^2}{1+(1+m)^2+2(1+m)\cos\theta}$

（二）檢驗公式：

例：正方形($\theta = 90^o$)切割公式

$$\frac{(\frac{N}{M}+2\cos 90^\circ)^2}{1+(1+\frac{N}{M})^2+2(1+\frac{N}{M})\cos 90^o} = \frac{(\frac{N}{M})^2}{1+(1+\frac{N}{M})^2} = \frac{N^2}{M^2+(M+N)^2} = \frac{N^2}{N^2+2M(M+N)}$$

例：正三角形($\theta = 180^o - 60^o = 120^o$)切割公式

$$\frac{(\frac{N}{M}+2\cos 120^o)^2}{1+(1+\frac{N}{M})^2+2(1+\frac{N}{M})\cos 120^o} = \frac{(\frac{N}{M}-1)^2}{1+(1+\frac{N}{M})^2+2(1+\frac{N}{M})(-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{(N-M)^2}{M^2+(M+N)^2-(M^2+MN)} = \frac{(N-M)^2}{3MN+(N-M)^2}$$

例：正六邊形(θ＝$180^o - 120^o$＝60^o)切割公式

$$\frac{(\frac{N}{M}+2\cos 60^o)^2}{1+(1+\frac{N}{M})^2+2(1+\frac{N}{M})\cos 60^o} = \frac{(\frac{N}{M}+1)^2}{1+(1+\frac{N}{M})^2+2(1+\frac{N}{M})(\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{(N+M)^2}{M^2+(M+N)^2+(M^2+MN)}=\frac{(M+N)^2}{(M+N)^2+2M^2+MN}$$

（三）結論：

1.任何正多邊形依M：N($m=\frac{N}{M}$ ，可非整數比)的比例切割時，皆可使用公式

$$\frac{(m+2\cos\theta)^2}{1+(1+m)^2+2(1+m)\cos\theta}$$ 。

2.當 $\cos\theta$ 爲有理數時($0^o<\theta<180^o$)，則此正N邊形將可完美切割，因此只有正三角形、正方形、正六邊形，可被完美切割，與五、討論中利用鋪磁磚方法的結論相同。

（四）討論：

固定正N邊形的邊長切割比例，當N趨近於無限大時， θ 將趨近於０，則

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{(m+2\cos\theta)^2}{1+(1+m)^2+2(1+m)\cos\theta}=1$$

圖例：固定一圓爲正N邊形的內切圓(如圖黑色虛線的圓)，且固定邊長切割比例爲１：2

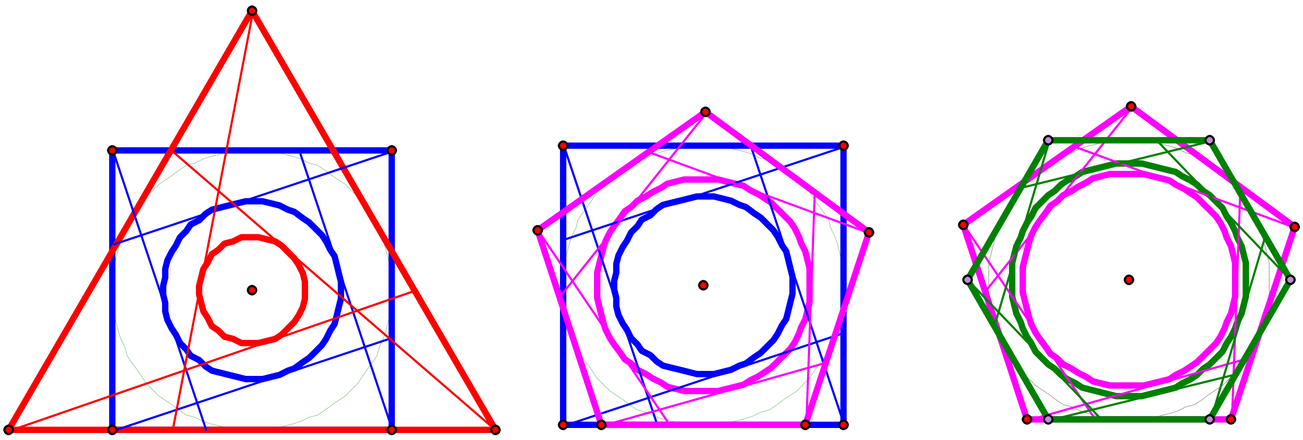
N=3，正三角形中央形成的小正三角形內切圓爲紅色(如圖)

N=4，正方形中央形成的小正方形內切圓爲藍色(如圖)

N=5，正五邊形中央形成的小正五邊形內切圓爲粉紅色(如圖)

N=6，正六邊形中央形成的小正六邊形內切圓爲綠色(如圖)

由圖可知，中央形成的小正N邊形內切圓與黑色虛線圓爲同心圓，且當N越來越大時，中央形成的小正N邊形內切圓將越來越趨近於黑色虛線圓，最後會成爲同一個圓，因此面積比=1。



陸、 研究結果

一、 只有正三角形、正方形、正六邊形可以被完美切割。

二、任何正多邊形依M：N($m=\dfrac{N}{M}$ ，可非整數比)的比例切割時，皆可使用公式

$$\frac{(m+2\cos\theta)^2}{1+(1+m)^2+2(1+m)\cos\theta}$$ 。

三、固定正N邊形的邊長切割比例，當N趨近於無限大時，θ將趨近於０，則

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{(m+2\cos\theta)^2}{1+(1+m)^2+2(1+m)\cos\theta}=1$$

柒、 參考資料及其他

一、國民中學數學科第五冊相似形 國立編譯館

二、高級中學數學科第二冊三角函數 國立編譯館

【評　語】　030415　正多邊形母子面積比

1. 母子正多邊形的討論相當有趣味性。

2. 討論還算完整。

3. 一般性及延伸性的探討可再加強。