中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030412

<u>柏拉圖送禮</u>

學校名稱：臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳柏勳	王晞安
國二 趙千嫣	鄭釧鋒
國二 劉威傑	
國二 刁珮茹	

關鍵詞：<u>正多面體</u>　<u>展開圖</u>　<u>外接正方形</u>

柏拉圖送禮

摘要：

本研究探討「以正方形紙包裝正多面體」的問題。藉由拆解正多面體爲展開圖的想法，將立體問題轉化爲平面，再進一步分析展開圖的各種樣式，並利用各種方法找出展開圖的最小覆蓋正方形，得到本研究的答案。其中本文所提及之「四邊形固定法」與「貼邊固定法」可作爲一般化尋求最小覆蓋正方形的工具。

壹、研究動機：

每逢同學生日、過聖誕節…等等，常常都會送禮物。這時禮物的包法常常是我們的困擾，手既不靈巧，也不知該怎麼包才會節省材料。記得剛開學時我們就爲了包一位同學的生日禮物吵得不可開交。這時老師對我們說：「你們這張包裝紙夠大嗎？真的包得下嗎？」這個問題引發了我們對探討實體包裝方法的興趣：也許我們都是白吵的，因爲包裝紙根本就太小了啊！那麼，到底最少要多大的包裝紙才可以將這個禮物包起來？又到底要怎麼包呢？我們在國中數學課本第四冊「生活中的立體圖形」單元，得到了解決這個問題的靈感。

貳、研究目的：

因問題涉及的變數過多，凡包裝紙的形狀與大小、被包裝物的形狀與大小，都會影響結果，因此不妨針對一些典型例子討論：比如禮物是正方體的情況。經過老師的介紹，得知在數學上恰好只有五個正多面體(柏拉圖正多面體)，其中每個面都是由相同的正多邊形所組成的，因此我們決定以這個特別的例子出發討論。另外，包裝紙則採用正方形。

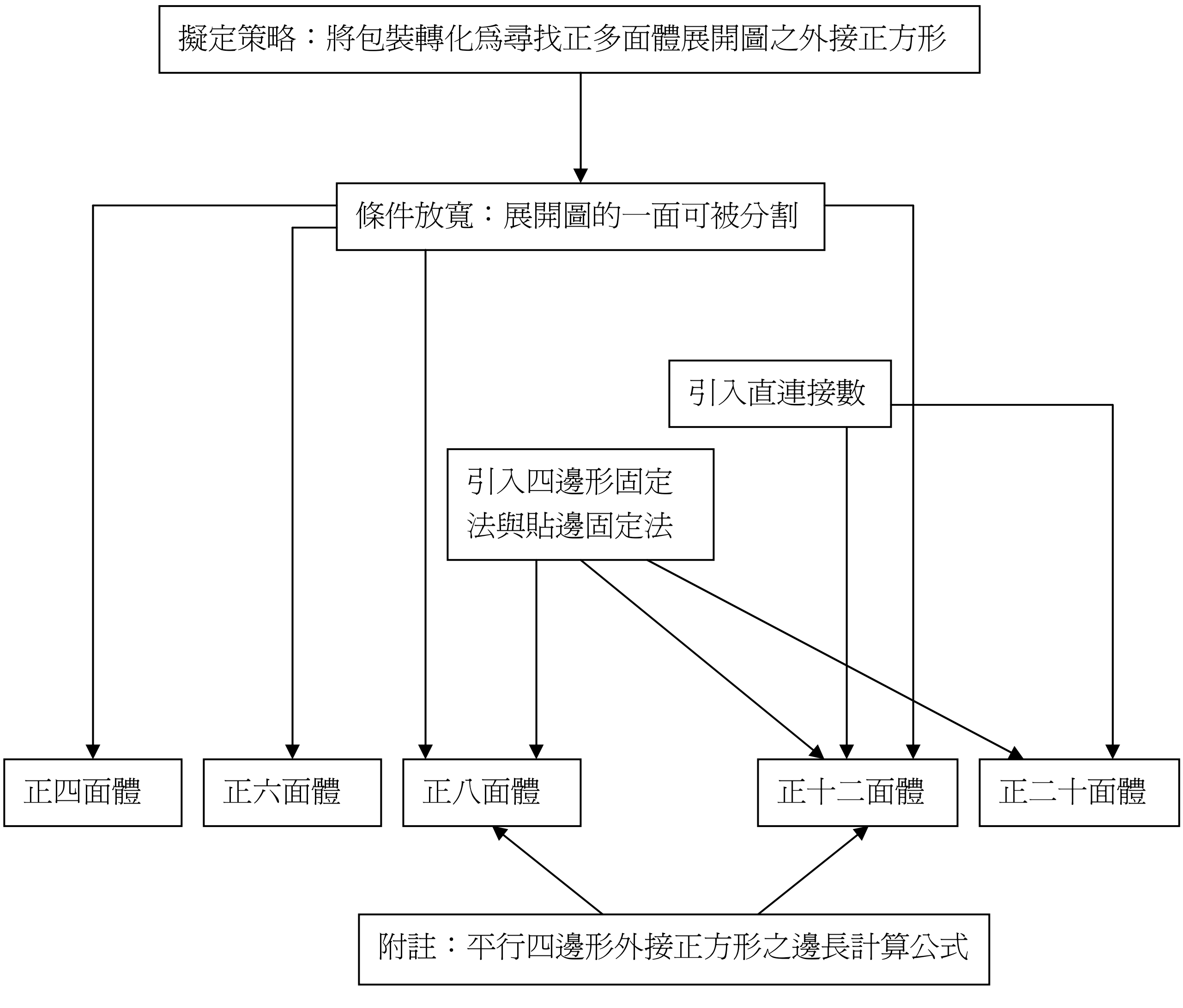
<u>研究目的：尋找正多面體最小覆蓋正方形。</u>

參、研究器材：

紙、筆、電腦、GSP、正多面體模型。

肆、研究過程：

本研究之架構如下圖



一、擬定尋找包裝紙大小的策略

(一)、包裝問題可被轉化為尋找展開圖覆蓋正方形之問題

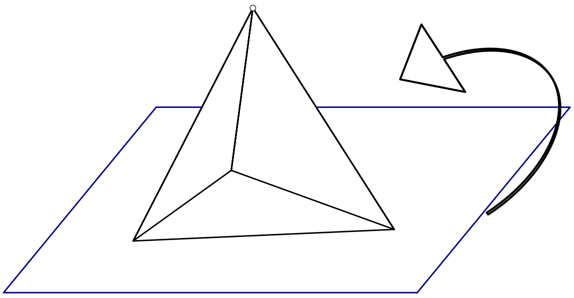


圖 1-1

一般要將一個物體完全包住時，我們是將紙摺上來，使得紙的一個部份貼在物體的其中一面上，接著進行第二個面、第三個面…，最後將所有的面完全包覆後就完成了！意即包裝紙與物體的面之間存在對應關係。同樣當情況為正多面體時，也會具有相同的性質。

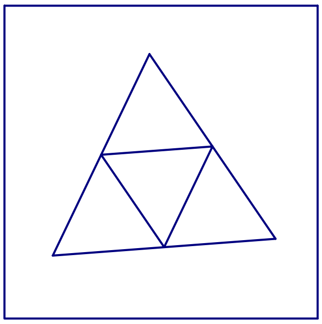


圖 1-2

【觀察】將上圖 1-1 中的正四面體展開後，可將四個面攤平在包裝紙上，對應到包裝紙的四個部份，於是我們發現：「包裝和展開是一體兩面」。故探討包裝紙能否將正多面體完全包覆，意義等同於正多面體展開時，能否被容納在這個正方形包裝紙之內(如圖 1-2)。

(二)、方法解析

據上述，可將原本的問題轉化成「尋找可以容納正多面體展開圖的正方形」。但由於正多面體的展開方式並不唯一，因此尋找合適的展開方式將變成非常重要的事，同時展開後的擺放方式也將是我們尋求的重點。最後根據這些得到的線索，再推估出正方形包裝紙究竟需要多大才行。因此我們要由內而外來確定紙的大小。

(三)、名詞定義

【定義一】**展開圖最小覆蓋正方形**：

對於任意一個正多面體的展開圖，只要給定足夠大的正方形，就必定能完全覆蓋住此展開圖。其中最小可覆蓋住此展開圖的正方形，稱為此展開圖的「最小覆蓋正方形」。

【定義二】**正 N 面體最小覆蓋正方形**(N=4、6、8、12、20)：

正 N 面體的每一種展開圖(本研究限定範圍下產生的展開圖)，皆有其最小覆蓋正方形。在這些正方形中最小者，稱為「正 N 面體最小覆蓋正方形」。

二、條件放寬時的包裝方式探討

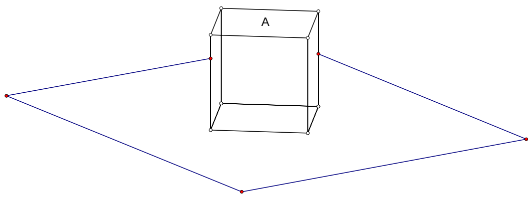


圖 2：正立方體與包裝紙

(一)、條件的放寬

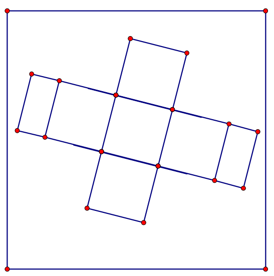
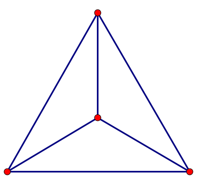


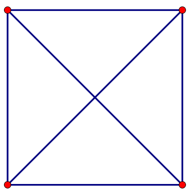
圖 3

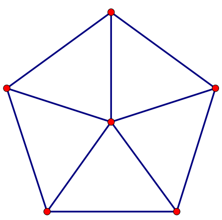
如上圖 2，我們可以先完成其他的五個面，最後包裝紙剩餘的部份再蓋住最上層的 A 面即可，就算是由不同方向的紙張所聯合覆蓋也沒有關係。根據包裝與展開是一體兩面的思考原則，A 面的展開圖即能夠被切割成數個部份，如圖 3：正六面體展開之後，A 面可以被切割為兩個長方形，但包裝仍然可以完成。

基於以上的觀察，我們將正多面體平常所見的「面未經切割的展開圖」，條件放寬如下：

本研究展開圖條件：展開圖可以不分割，但也可以將其中一個面做中心分割







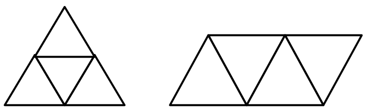
(左)圖 4：正四面體、正八面體、正二十面體的每個面都使用正三角形
(中)圖 5：正六面體的面使用正方形
(右)圖 6：正十二面體的面使用正五邊形

五種正多面體的每個面只會使用到三種正多邊形(正三角形、正方形、正五邊形)，如前頁之圖 4、圖 5、圖 6，分別以這三種正多邊形的中心，向各頂點做出分割，我們稱這樣的分割為「***中心分割***」。如此一來就可以避免處理任意分割，使得具有無限多種展開圖的問題。

(二)、五種正多面體的分別探討

1. 正四面體

正四面體未經分割的展開圖種類有下列兩種(如圖 7-1 及圖 7-2)



(左)圖 7-1
(右)圖 7-2

(1)圖 7-1 的最小覆蓋正方形：

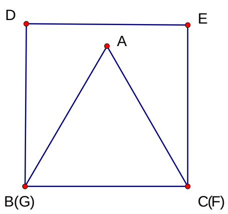


圖 7-1-1

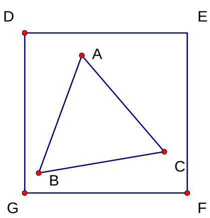


圖 7-1-2

ΔABC 在大小固定的前提下，$DEFG$ 是否為最小可框住 ΔABC 的正方形呢？圖 7-1-1 是我們最初猜想的擺放方式，但似乎並不是最佳的答案。

接著嘗試挪動 ΔABC，成為圖 7-1-2。若將圖 7-1-2 中的正方形 $DEFG$，以展開圖上適當一點為中心做逆時鐘旋轉，則正方形的邊長必定就有再縮小之餘地。***(註：此適當一點並非指三角形的頂點，而是包含了頂點、邊上或內部)***

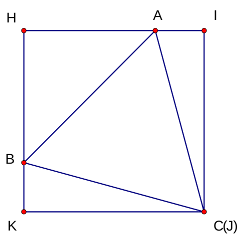
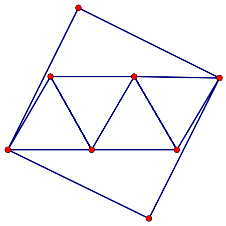


圖 7-1-3

根據上述推論，若 ΔABC 尚能夠在某一個正方形內部挪動，則此正方形就還不是我們要找的最小覆蓋正方形(因 ΔABC 挪動後，正方形可以適當地縮小其邊長)。這樣的推論提供了一種很重要的思考方向，讓我們去尋找正四面體的最小覆蓋正方形：擺放的三角形若無法再被挪動，應該會比能平移又能以展開圖上之某一點旋轉時要來得小。我們找出如圖 7-1-3 的擺放方式，$HIJK$ 即為本展開圖之「最小覆蓋正方形」(此時 C 與 J 重合)。

(2)圖 7-2 的最小覆蓋正方形：



根據處理圖 7-1 的經驗，將圖 7-2 的展開圖其中兩個頂點連接，當做正方形的對角線，則很容易可以確定出其擺放方式如圖 7-2-1。

圖 7-2-1

(3)經過單一面中心分割後的展開圖，及其最小覆蓋正方形：

將圖 7-1 的其中一個面分割，並依照正四面體的組合方式，適當地將其中兩個小三角形轉移至另外兩個邊上，而成爲圖 7-3。

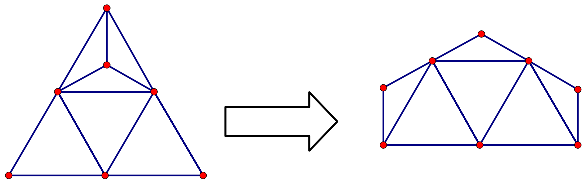
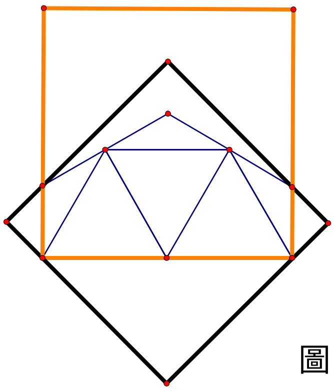


圖 7-3：分割後的正四面體展開圖



左圖 7-3-1 是針對圖 7-3 展開圖所找的覆蓋正方形，紅色正方形和黑色正方形都能夠框住此展開圖(但此展開圖在紅色正方形的內部尚能夠被移動)。經過比較之後，我們可以確定出黑色正方形是此展開圖的最小覆蓋正方形。

圖 7-3-1：黑色正方形比紅色正方形小

(4)比較：

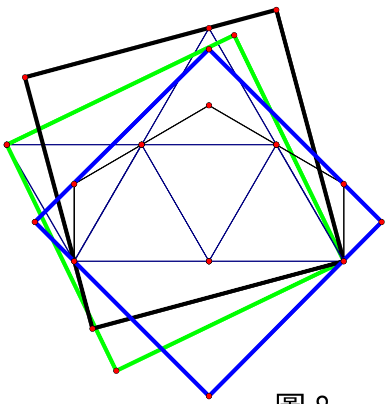


圖 8

由於分割條件的限制(即中心分割)，我們可以確定正四面體僅有上述(1)(2)(3)三種展開模式，圖 8 是綜合三者的比較，黑色正方形爲(1)的最小覆蓋正方形、綠色正方形爲(2)的最小覆蓋正方形、藍色正方形爲(3)的最小覆蓋正方形。

經過比較可知藍色正方形邊長最小，故(3)中的展開圖及其擺放方式，就是我們所要求的正四面體最小覆蓋正方形。

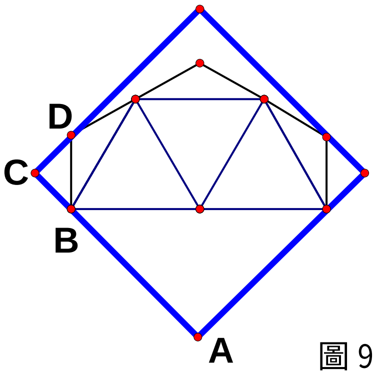


圖 9

(5)小結，求出正四面體最小覆蓋正方形邊長的大小：

如圖 9，假設原正四面體的稜長為 1cm，

注意 $\overline{AB}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

且 $\overline{BC}=\overline{BD}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

故 $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$。

意即想要包裝一個稜長為 1cm 大小的正四面體，只需要邊長 $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}cm$ 的正方形包裝紙。

2. 正六面體：根據資料，正六面體的展開圖共有 11 種(如下圖 10-1)

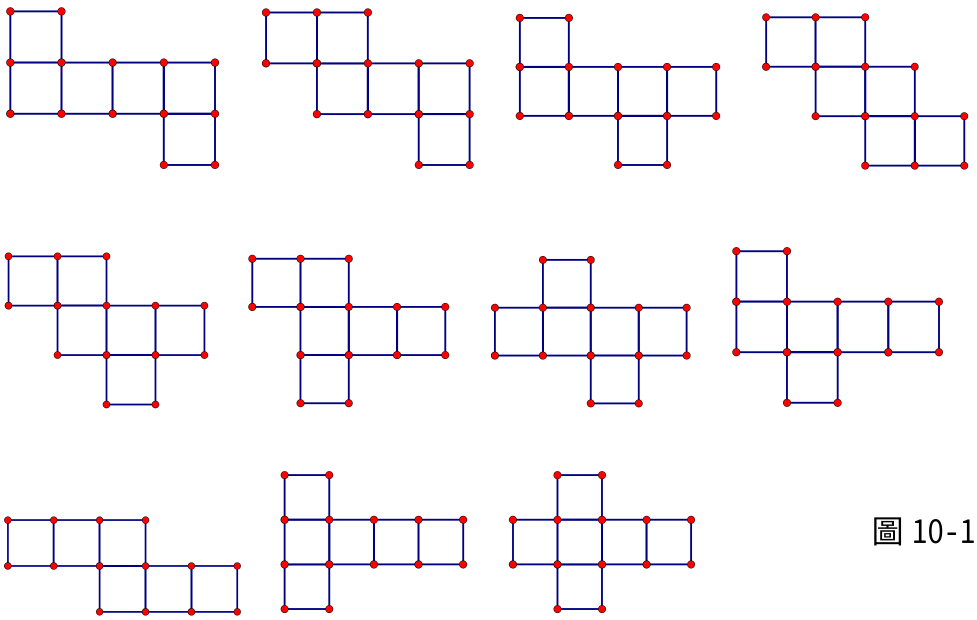


圖 10-1：正六面體的 11 種展開圖

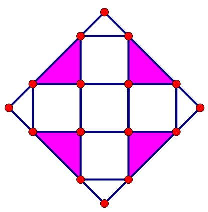


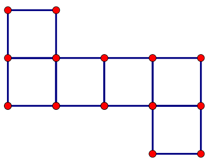
圖 10-2 是有一個面被中心分割後的展開圖，假設正六面體的稜長為 $1\,cm$。我們發現若將外部連接起來，則恰好可以形成一個正方形，紫色部份即為包裝過程中未使用到的剩餘部份，並且可知剩餘的面積為 $2\,cm^2$。

圖 10-2：分割後的正六面體展開圖及外部連線

因爲正六面體的表面積爲 $6\,cm^2$，可知外部連線形成的覆蓋正方形面積即爲 $2+6=8\,cm^2$，故它的邊長爲 $2\sqrt{2}\ cm$。顯然圖 10-2 外部連線的正方形，就是此展開圖的最小覆蓋正方形。

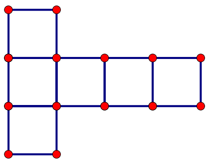
【思考】圖 10-2 僅針對了一個特別分割過的展開圖，那麼針對其他 10 種展開圖及其中心分割，是不是有更小的覆蓋正方形存在？

(1) 因爲圖 10-2 中的覆蓋正方形邊長爲 $2\sqrt{2}\ cm$，比 $3\,cm$ 來得要小，故最小邊長大於等於 $3\,cm$ 的正方形都不正確。



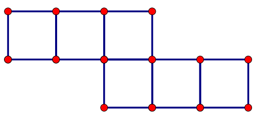
舉例：左邊這個展開圖，無論如何擺放，或是分割掉最上方(最下方)的正方形，都會使得覆蓋正方形的邊長超過 $3\,cm$。

(2) 圖 10-2 中的覆蓋正方形對角線長爲 $4\,cm$，因此其他展開圖各頂點任意連線，只要超過 $4\,cm$ 都不正確。



舉例：左邊這個展開圖無論如何擺放，或分割掉最右一塊小正方形，都將使覆蓋正方形之對角線超過 $4\,cm$ 長。

(3) 容納了展開圖後的覆蓋正方形，剩餘部份面積超過 $2\,cm^2$ 者都不正確。



舉例：左邊這個展開圖無論如何擺放，或分割掉最左(最右)一塊小正方形，都將使容納了展開圖後的覆蓋正方形，剩餘部份面積超過 $2\,cm^2$。

(4)其他經過分割後的，仍可用以上三種方式檢驗，在此省略逐一說明的步驟。

(5)小結：

經由(1)(2)(3)(4)的檢驗，我們確定出圖 10-2 外部連線的正方形，就是正六面體最小覆蓋正方形。且當正六面體的稜長爲 $1\,cm$ 時，正六面體最小覆蓋正方形的邊長爲 $2\sqrt{2}\ cm$。

3. 正八面體：根據資料，正八面體的展開圖共有 11 種(如下圖 11-1~11)

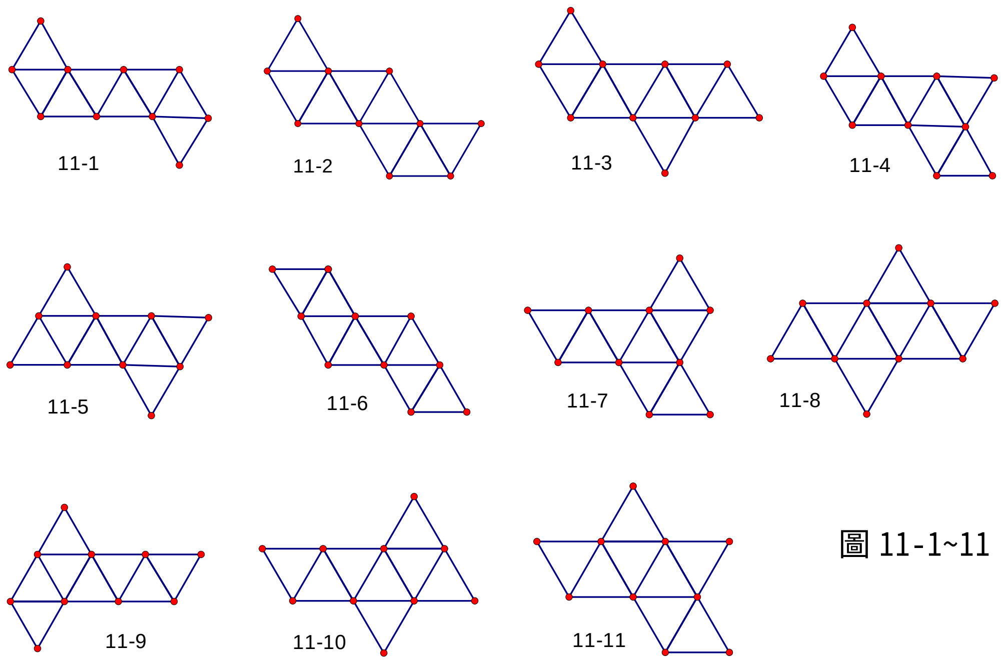


圖 11-1~11：正八面體的 11 種展開圖

前文提到檢驗覆蓋正方形的所需最小邊長或展開圖任意頂點連線長度，是幫助我們找出最小覆蓋正方形的方式。此外，擺放時要盡可能地去固定住展開圖的邊或是角，因爲只要展開圖還能以其上某一點爲中心旋轉之後再平移，則這個正方形就還不是我們想要的答案。在正八面體的圖 11-6 中，左上和右下的頂點連線過長，故可立即排除這個展開圖的可能性，圖 11-2 也可因延展過長排除它。接下來選定圖 11-8 作爲比較基準，分類說明如下：

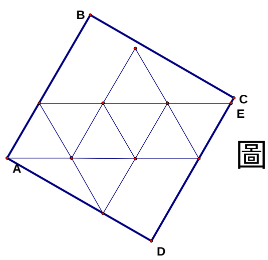


圖 12-1：圖 11-8 之展開圖及其擺放方式

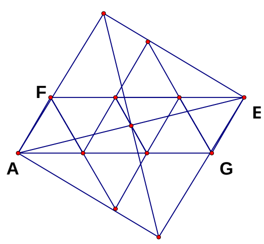


圖 12-2：$\overline{AF}$ 與 $\overline{EG}$ 已超出覆蓋正方形

(1) 圖 12-1 之正方形 $ABCD$，是將展開圖 11-8 的兩個邊固定在正方形的邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 上。分割任一小三角形會使展開圖超過 $ABCD$ 之範圍，使所需正方形邊長變大；以 $\overline{AE}$ 作爲覆蓋正方形之對角線，則如圖 12-2，展開圖部份範圍會超出覆蓋的正方形。

設正八面體的稜長均為 1，則圖 12-1 中的正方形邊長為 $\sqrt{3^2-(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}<3$。

我們發現展開圖似乎可以以 AE 與 GF 的交點為中心旋轉，假使讓展開圖的上的四個點分別固定在正方形的四個邊上，使其不能夠再滑動，則滿足這個條件的正方形是否會更小？如圖 12-2，我們想到固定 $AGEF$ 這個平行四邊形：

平行四邊形固定法

【思考】如何固定住平行四邊形 $ABCD$，使得 $ABCD$ 四個頂點分別落在正方形的四個邊上？作法與證明如下。

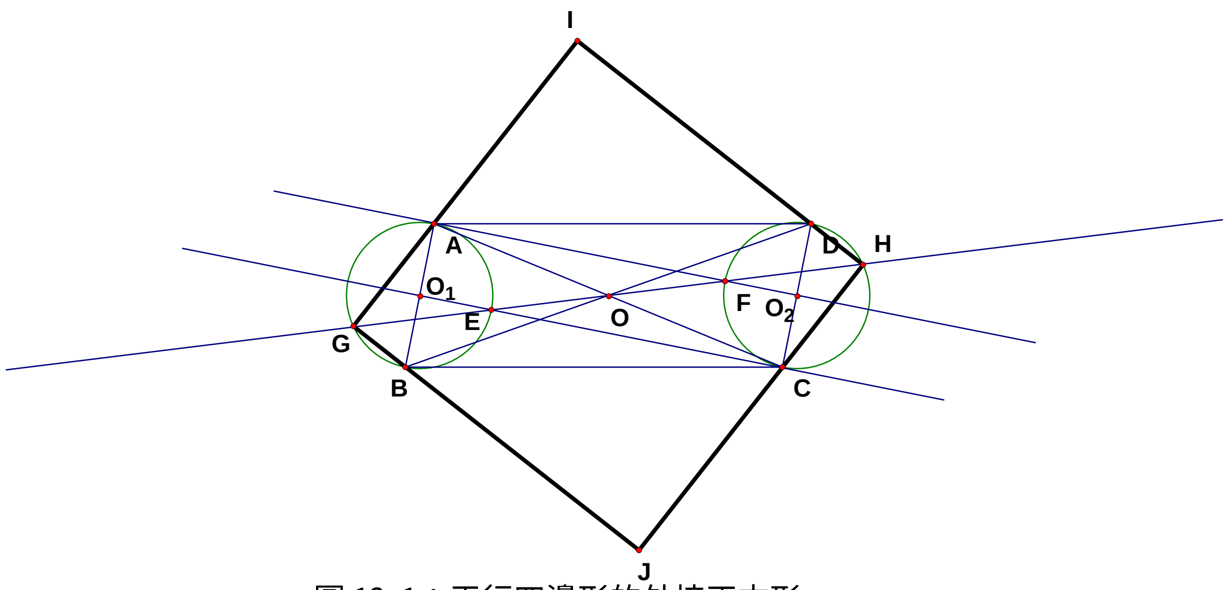


圖 13-1：平行四邊形的外接正方形

a.給定平行四邊形 $ABCD$，分別以 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 為直徑畫圓，圓心分別為 O_1 及 O_2。

b.過 O_1 與 O_2 分別作 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的垂線，交四邊形 $ABCD$ 的內側於 E、F。

c.連 $\overline{EF}$，分別交圓 O_1 及圓 O_2 於 G 及 H。($\overline{EF}$ 會通過平行四邊形的中心 O)

d.連 $\overline{GA}$、$\overline{HD}$，兩線交於 I 點；連 $\overline{GB}$、$\overline{HC}$，兩線交於 J 點。

e.則 $GIHJ$ 為固定住平行四邊形 $ABCD$ 的正方形，$ABCD$ 四個頂點分別落在 $GIHJ$ 四個邊上。

注意：由作法可知，作圖的限制條件至少有「$ABCD$ 四個角均不得小於 45°」，否則無法作圖。

(但即使 $ABCD$ 四個角均不小於 45°，仍舊會出現不可作圖的情況。故並非所有滿足此條件的平行四邊形都具有外接正方形。)

理由：舉例來說，若 $\angle ABC < 45^{\circ}$，則 $\overline{EF}$ 與圓 O_1 的交點會在 $\overline{AB}$ 的右側，

=> $GIHJ$ 不會外接平行四邊形 $ABCD$。

證明：

注意 $\angle EGB = \frac{1}{2}\angle EO_1B = 45^{\circ}$，且 $\angle FHC = \frac{1}{2}\angle FO_2C = 45^{\circ}$；

同理 $\angle IGH = \angle IHG = 45^{\circ}$，

故 ΔIGH 及 ΔGHJ 爲全等的等腰直角三角形 => $GIHJ$ 爲正方形。

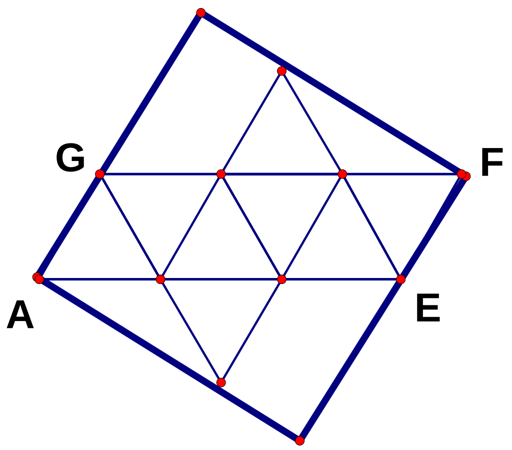


圖 14：由[平行四邊形固定法]找到圖 11-8 的最小覆蓋正方形

這個固定住平行四邊形的正方形之工具，能幫助我們找出一個展開圖的最小覆蓋正方形，進而得到正方形的邊長。我們將其簡稱爲[平行四邊形固定法]。

續(1)

利用[平行四邊形固定法]，將 $AGFE$ 固定後(無法再被移動或轉動，可以得到如圖 14，且其正方形邊長會略小於圖 12-1，因此圖 14 的正方形即可確定爲圖 11-8 的最小覆蓋正方形。

但我們觀察到，展開圖 11-3,4,11 似乎也可被四個點所固定，但選出來的特定四個點僅會形成梯形或是不規則四邊形而已。故我們有必要解決問題：如何固定住一個四邊形，使得四個頂點分別落在正方形的四個邊上？

更爲一般化的四邊形固定法

我們透過研究平行四邊形外接正方形的方式，找出更一般化的四邊形外接正方形。

作法與證明如下：

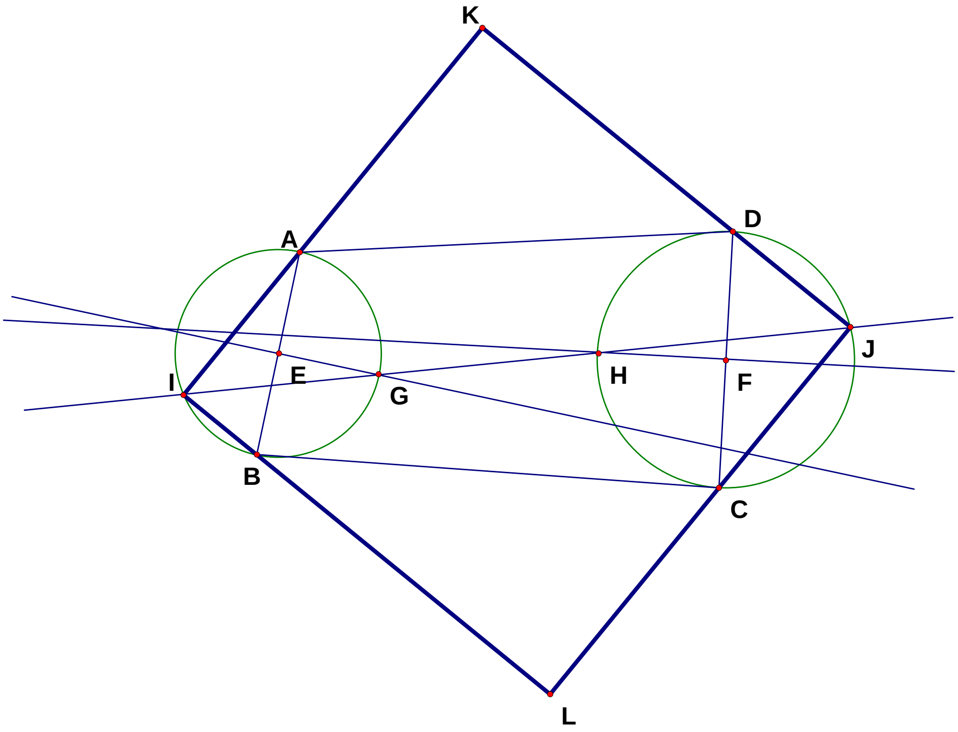


圖 13-2：四邊形的外接正方形

a.給定四邊形 $ABCD$ ，分別以 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 為直徑畫圓，圓心分別為 E 及 F 。

b.過 E 與 F 分別作 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的垂線，交四邊形 $ABCD$ 的內側於 G 、 H 。

c.連 $\overline{GH}$ ，分別交圓 E 及圓 F 於 I 及 J 。

d.連 $\overline{IA}$ 、 $\overline{JD}$ ，兩線交於 K 點；連 $\overline{IB}$ 、 $\overline{JC}$ ，兩線交於 L 點。

e.則 $IKJL$ 即為固定住四邊形 $ABCD$ 的正方形，且 $ABCD$ 四個頂點分別落在 $GIHJ$ 的四個邊上。

注意：由作法可知，作圖的限制條件至少有「 $ABCD$ 四個角均不得小於 45° 」，否則無法作圖。

(但即使 $ABCD$ 四個角均不小於 45° ，仍舊會出現不可作圖的情況。故並非所有滿足此條件的四邊形都具有外接正方形。)

理由：舉例來說，若 $\angle ABC < 45^\circ$ ，則 $\overline{GH}$ 與圓 E 的交點會在 $\overline{AB}$ 的右側，

=> $IKJL$ 不會外接四邊形 $ABCD$ 。

證明：

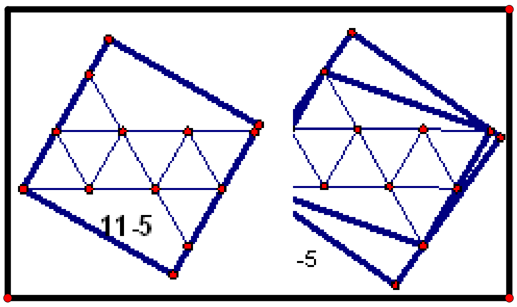
注意 $\angle GIB=\frac{1}{2}\angle GEB=45^{\circ}$，且 $\angle HJC=\frac{1}{2}\angle HFC=45^{\circ}$；

同理 $\angle HJD=\angle HJC=45^{\circ}$，

故 ΔIKJ 及 ΔILJ 為全等的等腰直角三角形，

=> $IKJL$ 為正方形。

我們將這個藉由四邊形外接正方形之作圖，用來找尋展開圖最小覆蓋正方形的方式為[四邊形固定法]。

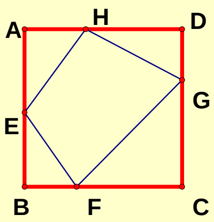


但並非使用了[四邊形固定法]得到的就一定是此展開圖的最小覆蓋正方形。如圖 15 所示，以展開圖的平行線間距離作為正方形的邊長，就會來得比使用[四邊形固定法]得到的正方形要小。

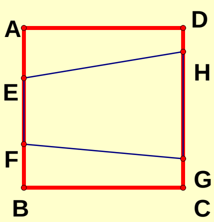
圖 15：圖 11-5 中，以展開圖一組平行線距離作為正方形邊長，比以[四邊形固定法]得到的正方形要小。

【觀察】由圖 15-1 及圖 15-2 中我們可以發現以下三個性質：

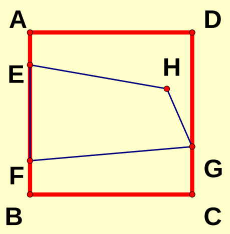
給定正方形 $ABCD$：



性質一：分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 上，取點 E、F、G、H，造四邊形 $EFGH$。則四邊形 $EFGH$ 無法在維持 E、F、G、H 分別落在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的四個條件之下，再被旋轉。



性質二：在 $\overline{AB}$ 上取點 E、F；在 $\overline{CD}$ 上取點 G、H，造四邊形 $EFGH$。則四邊形 $EFGH$ 無法在維持 E、F 落在 $\overline{AB}$ 上；G、H 落在 $\overline{CD}$ 上的兩個條件之下，再被旋轉。



<u>**性質三**</u>**：**分取點 E、F；在 $\overline{CD}$ 取點 G；在 $ABCD$ 內部任取一點 H 造四邊形 $EFGH$。則四邊形 $EFGH$ 無法在維持 E、F 落在 $\overline{AB}$ 上、G 落在 $\overline{CD}$ 上；H 落在 $ABCD$ 內部的三個條件之下，再被旋轉。

貼邊固定法

我們可以運用這三個性質，以尋找展開圖最小覆蓋正方形。選取出展開圖上特別的四個點後，**性質一**即相當於使用**[四邊形固定法]**後，展開圖「不可再被平移與旋轉」；**性質二**與**性質三**即代表展開圖僅能再被平移但不能再被旋轉，因為可知四邊形至少會有一個邊與正方形重疊，故我們簡稱這個第二種固定住展開圖的方法為**[貼邊固定法]**。

因此找尋正多面體最小覆蓋正方形的流程即為：

第一：找尋這個正多面體的各個展開圖。

第二：各找出使展開圖「不可再被平移與旋轉」(含**[四邊形固定法]**)及**[貼邊固定法]**)的正方形，然後比較兩種方法的大小關係。較小者即為此展開圖的最小覆蓋正方形。

第三：在所有展開圖的最小覆蓋正方形中，邊長最小者，即為此正多面體的最小覆蓋正方形。

(2) 圖 11-7,9,10：

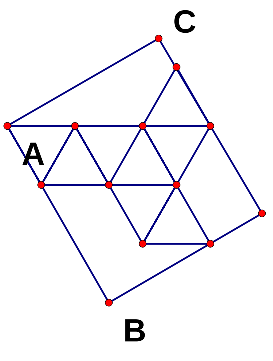


圖 16

如圖 16，外圍覆蓋的是長方形而非正方形，且 $\overline{AC} < \overline{AB}$。因為 $\overline{AC} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$，所以若要使得覆蓋的形狀由長方形變至正方形，則正方形的邊長必定比 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 要來得大，故圖 11-7 未分割的展開圖之最小覆蓋正方形，仍然沒有比圖 12-1 小，因此當然也不會比圖 14 要來得小。雖然圖 11-9,10 無法以**[四邊形固定法]**處理，不過我們仍可以仿照圖 16 的方法，間接證明它們的最小覆蓋正方形都要比 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 來得大，因此都不會是正八面體的最小覆蓋正方形。

(3) 圖 11-7 的分割：

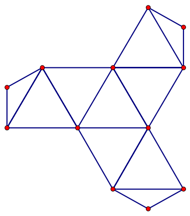


圖 17

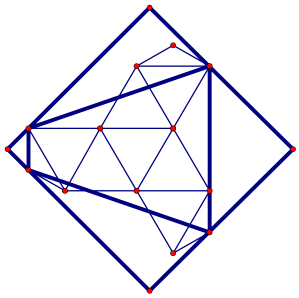
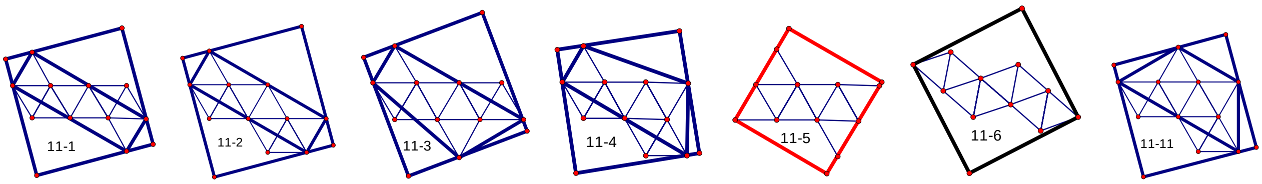


圖 18

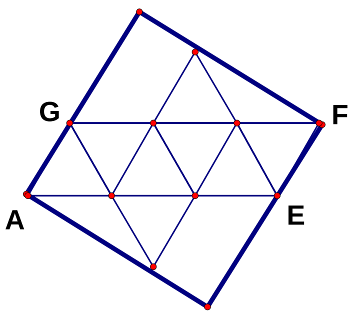
特別地，圖 11-7 的一種分割可以將展開圖分割成具有對稱性質的圖形(如圖 17)，透過**[四邊形固定法]**，我們發現它的最小覆蓋正方形如圖 18。但經由比較邊長大小，發現還是要比圖 14 的結果來得大。

(4) 據上述流程，找出其他七種展開圖的最小覆蓋正方形如下：



而它們最小覆蓋正方形大小的結果，最終仍然沒有比圖 14 來得小。

(5)小結：



回顧圖 14

故經過中心分割的展開圖，其最小覆蓋正方形不一定比其他未分割展開圖之正方形要小。其餘展開圖經過分割的最小覆蓋正方形，藉以上(1)~(4)點的方法即可找出，但它們均未小於圖 14 之結果。最終，我們確定出圖 14 的正方形，就是正八面體的最小覆蓋正方形。

<u>我們將在說明書末的附註中給出計算平行四邊形外接正方形邊長公式的說明。</u>

假設它的稜長爲$1cm$，代入$a=1$、$b=3$、$\theta=60^\circ$：

則正八面體最小覆蓋正方形邊長可得爲$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{31-12\sqrt{3}}{10-3\sqrt{3}}}+\sqrt{10-3\sqrt{3}}\right)cm$。

4. 正十二面體

研究正十二面體最小包裝方式前，我們曾經想先尋找它所有的展開圖資料，但遺憾的是並沒有相關文獻的記載，因此我們轉而從已知的展開圖範例，經由分析邊與邊接合的對應關係，產生一些新的展開圖，並設法求出正十二面體最小覆蓋正方形。

<u>**由於並沒有正十二面體展開圖的完整資料，因此對單面中心分割的情況未做太多討論。**</u>

(1) 常見的正十二面體展開圖分析：

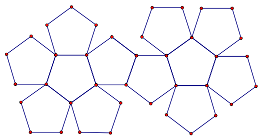


圖 19-1

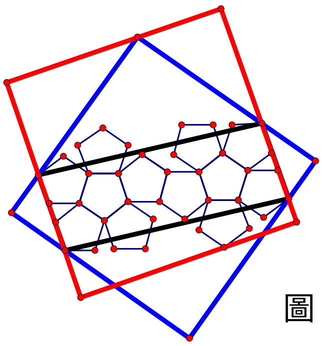


圖 19-2

[貼邊固定法]與[四邊形固定法]的比較

圖 19-1 是常見的正十二面體的展開圖之一，圖 19-2 中，紅色正方形爲**[貼邊固定法]**的結果、藍色正方形爲**[四邊形固定法]**的結果。兩相比較之下，**[四邊形固定法]**所得的正方形會較小，因此藍色正方形就是此展開圖的最小覆蓋正方形。

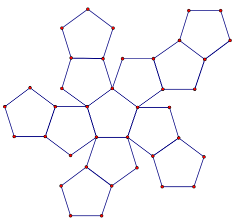


圖 20-1

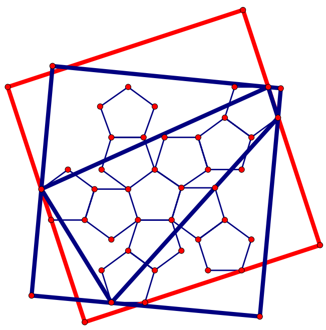


圖 20-2

貼邊固定法與四邊形固定法的比較

第二種展開圖在圖 20-2 中的兩種方式比較中，以**[四邊形固定法]**得到的藍色正方形較小。

如下頁，圖 20-1 的展開圖可看成由內而外共 1--5--5 個正五邊形的結構(圖 21)，外部再接上第 12 個，故對外部的正五邊形分割後，可形成一對稱的圖形(圖 22)，它的外圍頂點連線可

知為一個正五邊形(圖 23)。由**[四邊形固定法]**得到圖 24 的藍色正方形，它是圖 22 展開圖的最小覆蓋正方形。

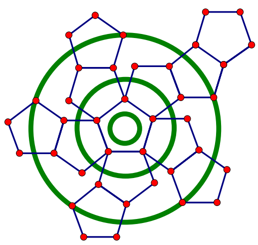


圖 21

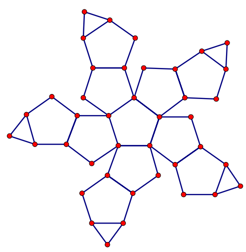


圖 22

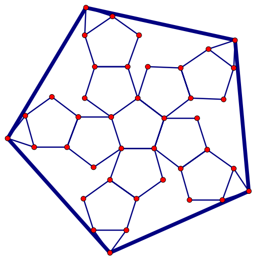


圖 23

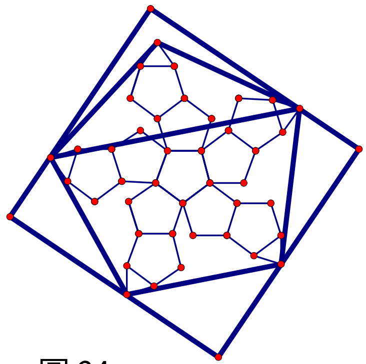
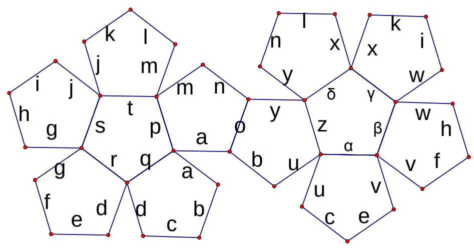


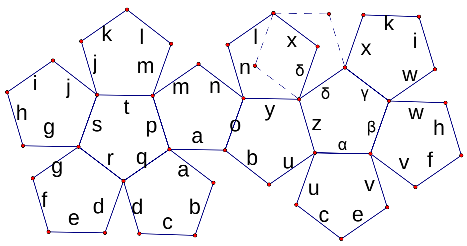
圖 24

(2)給定一個多面體的展開圖，可知邊與邊都會存在著接合的對應關係，只要掌握此對應關係，就能衍生出其他的展開圖。我們嘗試從圖 19-1 出發，將其各邊標上對應關係(圖 25)。

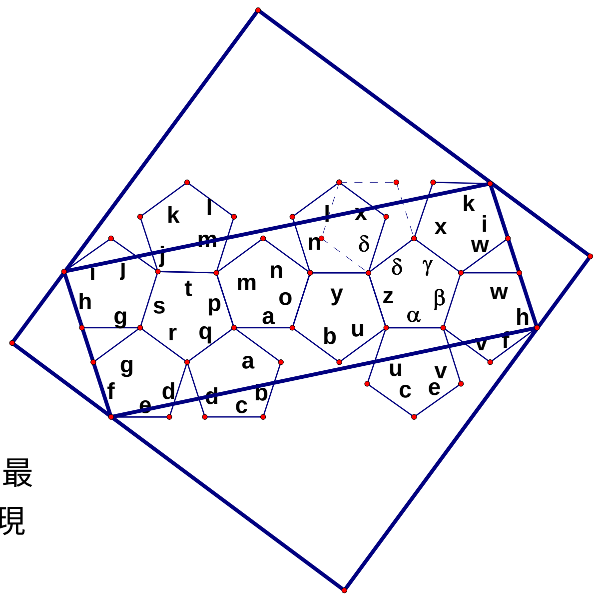
圖 25：將要被接合的兩個邊，標上相同的文字對應。



嘗試將面 *δynlx* 重新連接至 *obuzy*，則可以得到一個新的展開圖(圖 26)。



(上)圖 26：重新連接一個面後的正十二面體展開圖



(右)圖 27：圖 19-2 展開方式的最小覆蓋正方形，發現與圖 27 相同。

圖 26 中，固定展開圖的四個點其位置並沒有變動，故我們仍可根據**[四邊形固定法]**，作出如圖 27 的樣式。而且被挪動的$\delta ynlx$的新位置，並不會影響到外圍的藍色正方形，因此得到：圖 27 這個新展開圖的最小覆蓋正方形，會與圖 19-2 的最小覆蓋正方形大小相等。

【構想】

假使使用窮舉的方式，整個研究的效率將會大大降低。若使用上述分析的方式，就不需要去列舉正十二面體的所有展開圖，而能夠較有效率地尋找正十二面體最小覆蓋正方形(因爲某些展開圖的最小覆蓋正方形具有相同大小)。

不論新的正十二面體展開圖如何經由邊與邊接合的對應關係產生，可發現如圖 28 所示：有如一直線持續連接的個數，都不會超過六個，也不低於三個。它們看起來就好像接成一個長條般，故我們將其簡稱爲「**直連接**」，因此在正十二面體中，直連接有以下 28-1~5 五種：

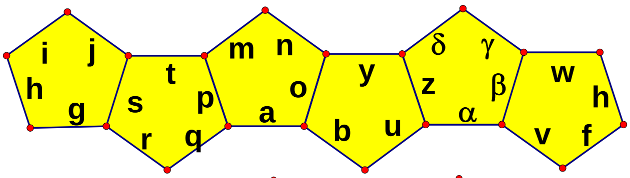


圖 28-1：直連接數為 6

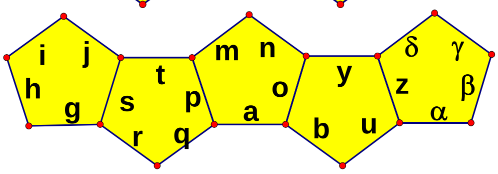


圖 28-2：直連接數為 5

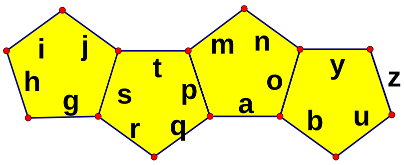


圖 28-3：直連接數為 4

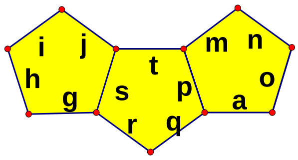


圖 28-4：直連接數為 3

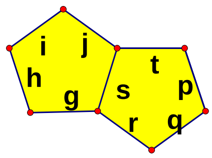
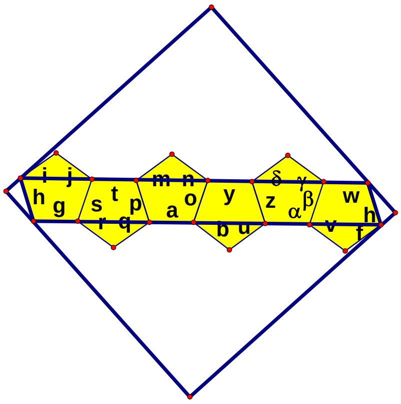


圖 28-5：直連接數為 2

【定義】**最長直連接數**：

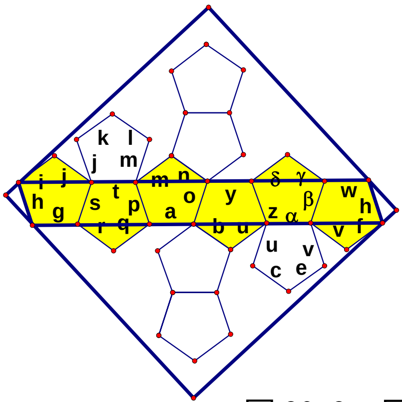
如上文說明，正多面體展開圖中有許多的「直連接」。一種展開圖裡，直連接最多個面的數量，稱爲「最長直連接數」。

(3)最長直連接數為 6，且完全由此最長直連接固定的展開圖：



前文提及，我們可以觀察到正十二面體的所有展開圖，最長直連接數最多只能為 6，因此我們可先單獨考慮這組直連接圖形，並利用平行四邊形固定法，找到固定這個圖形的正方形，如圖 29-1。再根據邊與邊接合的對應關係，設法在此正方形範圍內，衍生出完整的正十二面體展開圖。如下圖 29-2，我們確實能夠找出範圍不超過此正方形的展開圖。

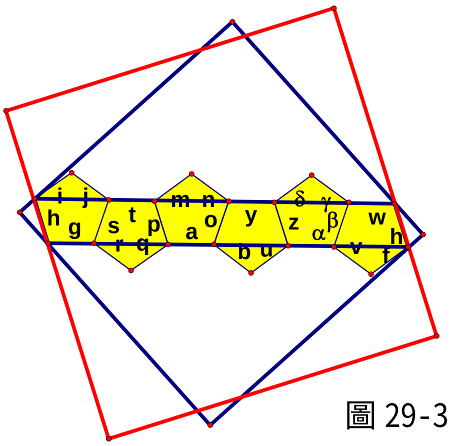
圖 29-1：直連接為 6 的圖形，與固定住此圖形的正方形



同時，圖 29-2 的正方形，也就恰好是這個展開圖的最小覆蓋正方形。並且可以發現，雖然圖 27 的最長直連接數也是 6，但其展開圖並非完全由此直連接所固定，因此它的最小覆蓋正方形會比圖 29-2 要來得大。

圖 29-2：展開圖的最小覆蓋正方形，被最長直連接數為 6 的部份所決定

<u>(3)以下的狀況我們開始以圖 29-2 為基準點做比較</u>



如圖 29-3，我們不需考慮由此直連接所決定的貼邊固定及衍生的展開圖種類，因其所決定的紅色正方形已比[四邊形固定法]決定的藍色正方形要來得大。

圖 29-3：直連接為 6 的圖形，不需考慮貼邊固定的情況

(4)最長直連接數為 5，且完全由此最長直連接固定的展開圖：

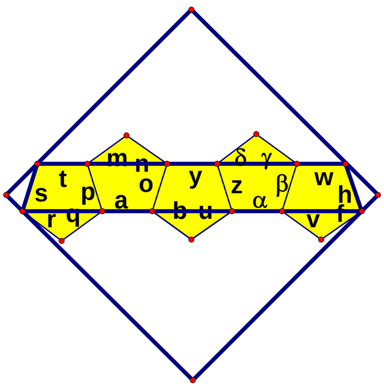


圖 30-1：最長直連接數為 5 的圖形，及固定住它的正方形

圖 30-1 是直連接數為 5 的圖形，及固定住它的正方形，雖然這個正方形顯然要比圖 29-2 之正方形來得小，但我們並沒有辦法找到一個正十二面體的展開圖，範圍完全在此正方形之內，如圖 30-2。

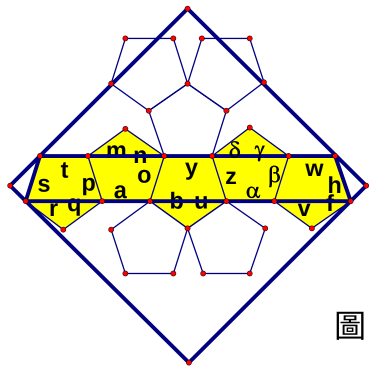


圖 30-2

另外因為直連接為 5 的圖形不可被貼邊固定，故不需考慮它貼邊固定所衍生的的展開圖種類。

(5)最長直連接數為 5，但僅部份由此最長直連接固定的展開圖：

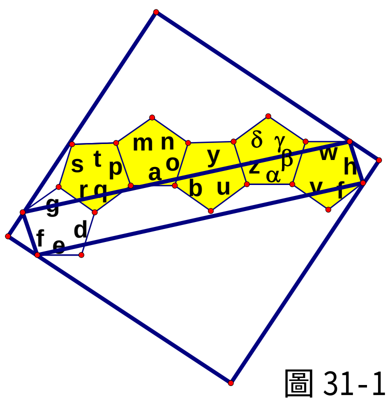


圖 31-1

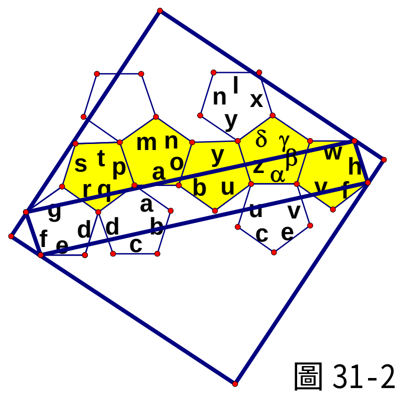
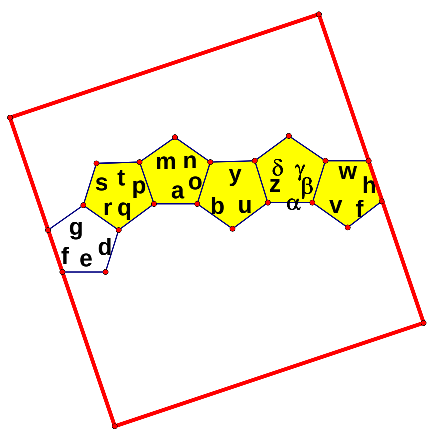


圖 31-2

圖 31-1 是直連接數為 5 的圖形，但展開圖不完全由此直連接固定住。這個正方形的大小介於圖 30-1 到圖 29-1 之間，但卻沒有辦法找到一個展開圖範圍在此正方形之內，如圖 31-2。



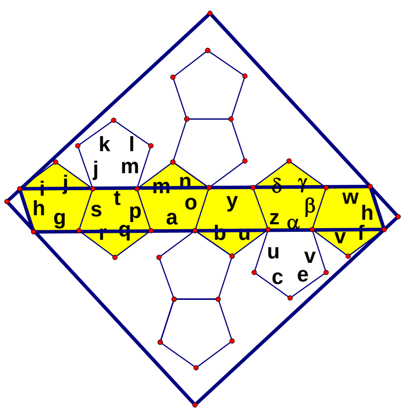


圖 31-3：圖 31-1(左)貼邊固定方式所決定的正方形已比圖 29-2(右)之正方形要來得大

承接圖 31-1，直接連爲 5 且外加一個正五邊形，它的貼邊固定紅色正方形如圖 31-3。不過因爲此紅色正方形，已比圖 29-2 單由直連接爲 6 決定的藍色正方形要來得大，故不必再討論由圖 31-3 衍生的展開圖種類。

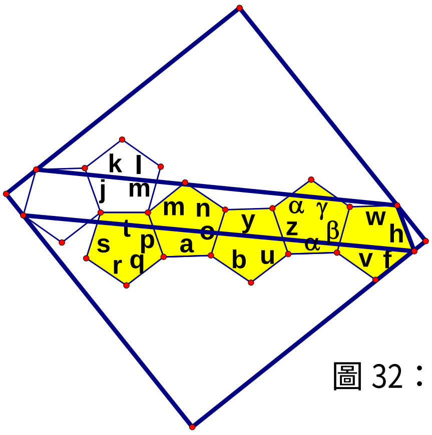


圖 32 是另一個類似的情形，不過由於固定住它的正方形已經比圖 29-1 要來得大，因此可以不必再討論由此圖形衍生的展開圖。

圖 32：最長直連接數為 5，但部份由其他面所固定

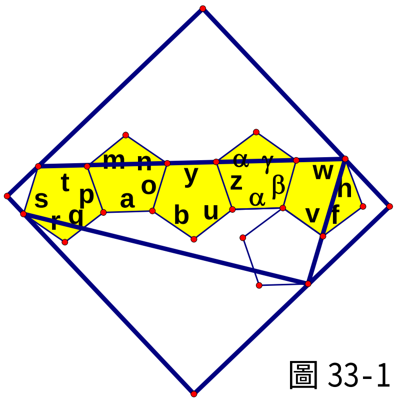


圖 33-1 是另一個類似的情形，且與圖 31-1 及圖 31-2 相同，無法找到一個展開圖被容納在此正方形內，如圖 33-2。

圖 33-1

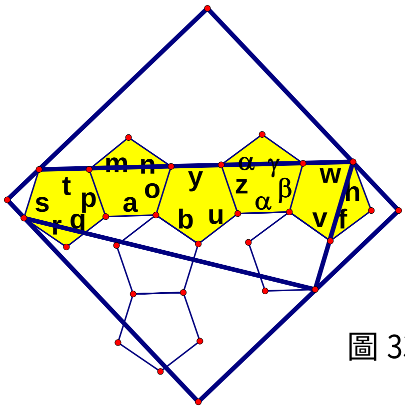


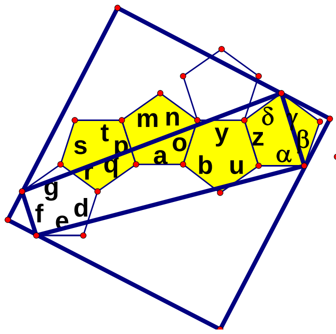
圖 33-2

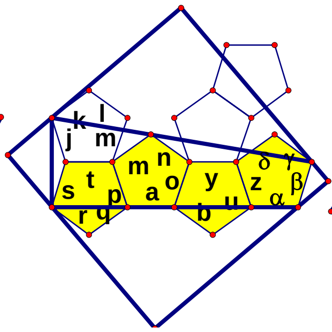
以上圖 32 及圖 33-1、33-2，均無法做出使圖形貼邊固定的正方形，故不需再討論。

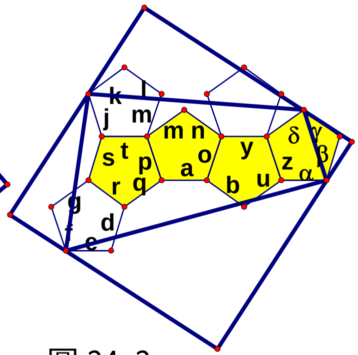
(6)最長直連接數爲 4，且完全由此最長直連接固定的展開圖：

由(5)間接得證，既然無法找到最長直連接數爲 5 且由此最長直連接固定的展開圖，則固定最長直連接數爲 4 的正方形，自然也不可能在其內部衍生出正十二面體的展開圖。

(7)最長直連接數為 4，但僅部份由此最長直連接固定的展開圖：







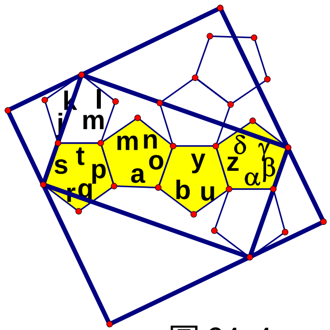
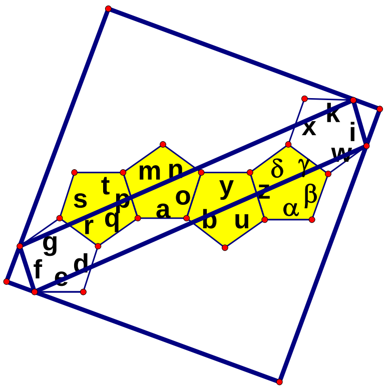


圖 34-1　圖 34-2　圖 34-3　圖 34-4

上圖 34-1~34-4 中，都是部份由此最長直連接數為 4 的圖形，所決定出的正方形。可以發現到它們都無法在這些正方形內部衍生出正十二面體的展開圖。

並且，這四個圖形都無法做出貼邊固定的正方形。

(8)最長直連接數為 4，但完全不由此最長直連接固定的展開圖：



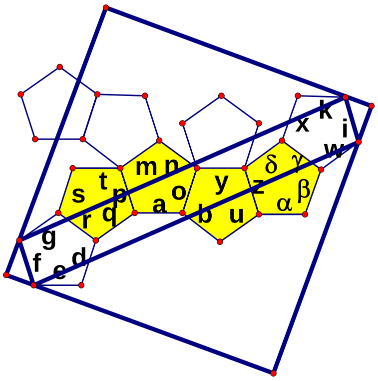


圖 35-1

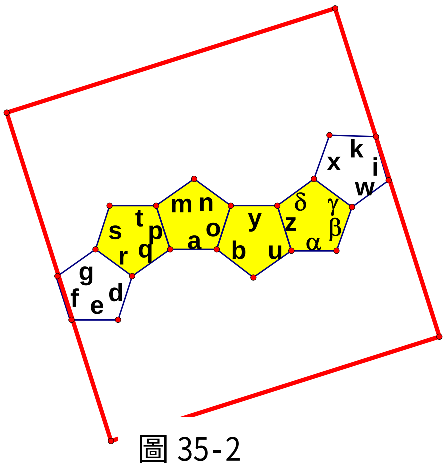


圖 35-2

上圖 35-1 中的最長直連接數仍為 4。使用**[四邊形固定法]**時，整個圖形已完全不由最長直連接固定，但是卻無法由此圖形在正方形內部衍生出展開圖(如圖 35-2)；圖 35-3 則是貼邊固定法找出的紅色正方形，不過因為已來得比圖 29-2 的正方形要大，故不必再做討論。

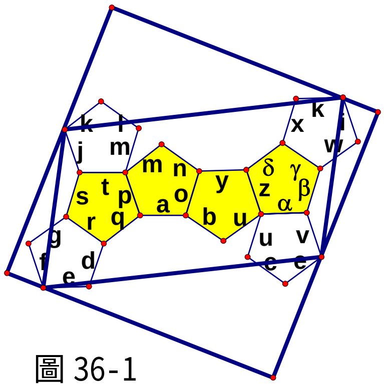


圖 36-1

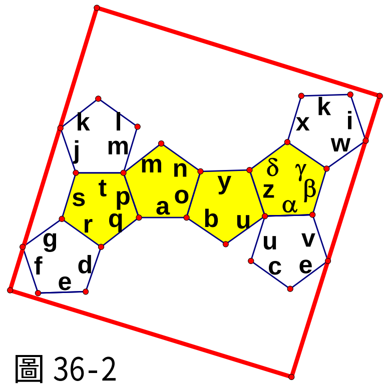


圖 36-2

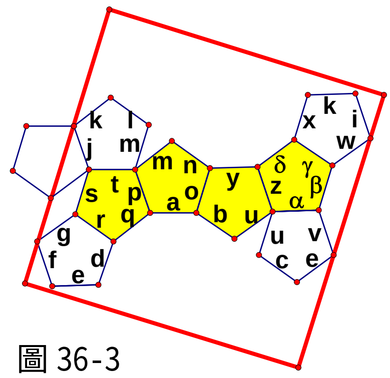


圖 36-3

圖 36-1 是另一種完全不由最長直連接數 4 的圖形，以**[四邊形固定法]**決定的正方形，但它已大於圖 29-2 的正方形，故不需再討論；圖 36-2 則是利用**[貼邊固定法]**決定的正方形，雖它略小於圖 29-2 的正方形，但卻無法據此衍生出完整的展開圖(如圖 36-3)。

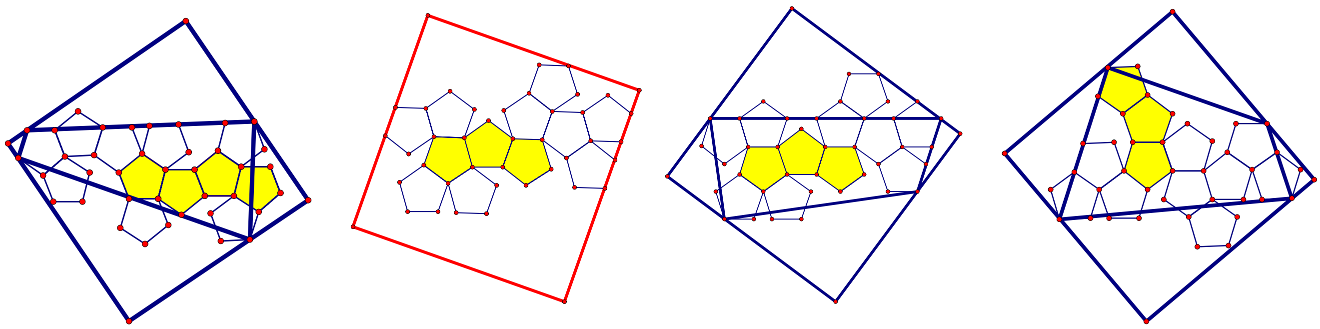
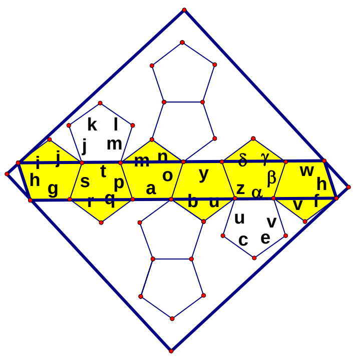


圖 37：最長直連接數為 4 和 3 的圖形，仍找不到其最小覆蓋正方形來得比完全由最長直連接數為 6 所決定的正方形要小者(即圖 29-2)



回顧圖 29-2

(8)小結：

我們發現其他最長直連接數爲 4 與 3 的展開圖，許多都因決定正方形的圖形過長，而使得其最小覆蓋正方形過大(如圖 37)。<u>目前所得到的正十二面體最小覆蓋正方形即爲圖 29-2 之正方形</u>。若假設稜長爲 1 cm，則將 a、b、θ 代入附註中的公式，可知其邊長爲：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{1-\frac{\left(\frac{15+3\sqrt{5}}{2}\right)^2\cos^2 72^\circ}{1+\left(\frac{15+3\sqrt{5}}{2}\right)^2-(15+3\sqrt{5})\sin 72^\circ}}+\sqrt{1+\left(\frac{15+3\sqrt{5}}{2}\right)^2-(15+3\sqrt{5})\sin 72^\circ}\right)cm$$ 。

5. 正二十面體

正二十面體展開圖同樣也不具完整資料，故我們仍採用上文中，以最長直連接數分析的方式，尋求正二十面體最小覆蓋正方形。

如圖 38，每個正三角形的面有如成一直線地連接，我們同樣稱它爲「直連接」。在正二十面體中，可以發現最長直連接數不會大於 10。

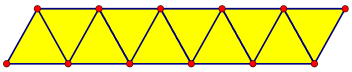


圖 38：正二十面體展開圖中的直連接

首先來看看兩個常見的展開圖情形：

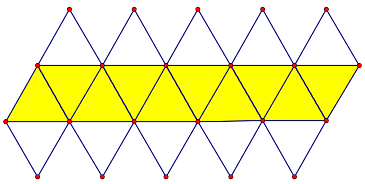


圖 39-1

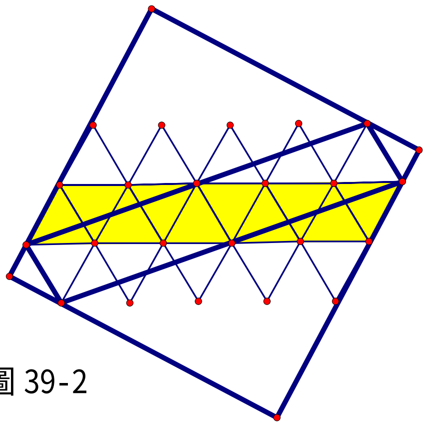


圖 39-2

(1) 圖 39-1 是最常見的正二十面體展開圖及以**[四邊形固定法]**找到的最小覆蓋正方形(圖 39-2)，它是屬於最直連接數爲 10 的一種。

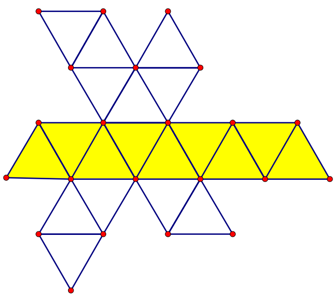


圖 40-1

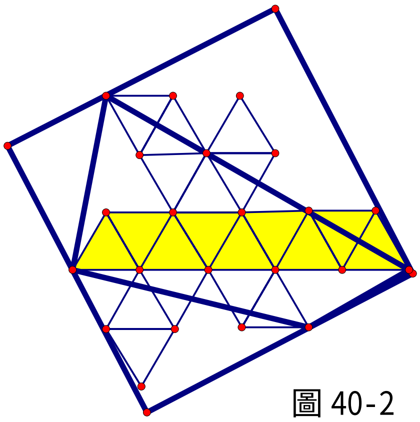


圖 40-2

(2)第二種常見的正二十面體展開圖 40-1，其最小覆蓋正方形如圖 40-2，而它是屬於最長直連接數爲 9 的一種。

(3)最長直連接數爲 10，且完全由此最長直連接固定的展開圖：

如圖 41，可以同樣將正二十面體的 30 個稜邊標上記號，以做爲衍生新展開圖時的對應依據。

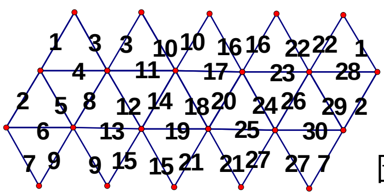
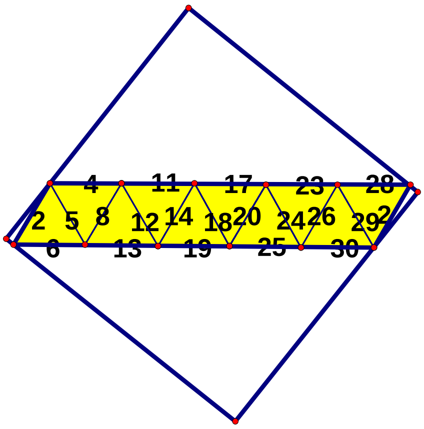


圖 41



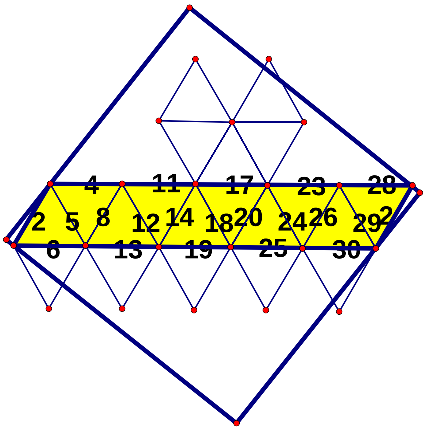
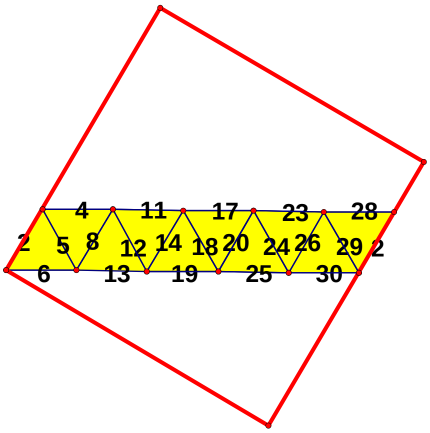
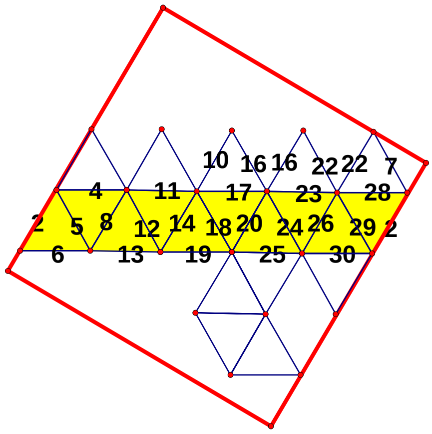


圖 42-1

圖 42-2：無法由直連接數為 10 的圖形衍生出展開圖

圖 42-1，我們由**[四邊形固定法]**找出固定此最長直連接的正方形。不過如圖 42-2，無法由此圖形衍生出範圍在正方形內部的展開圖。





(左)圖 43-1

(右)圖 43-2

再考慮貼邊固定此最長直連接數為 10 的紅色正方形(如圖 43-1)，雖然略大於圖 42-1 中四邊形固定法所得的藍色正方形，但不同的是，我們可以造出範圍在紅色正方形內部的展開圖。也就是說，這是屬於一個能夠包裝正二十面體的情形。

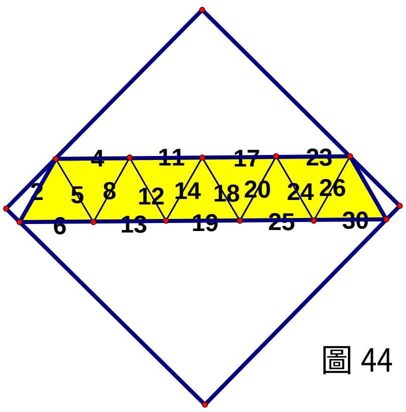


圖 44

(4)最長直連接數為 9，且完全由此最長直連接固定的展開圖：

圖 44 我們以**[四邊形固定法]**，做出由直連接數為 9 所決定的正方形。但上圖 42-2，既然直連接數為 10 時，使用四邊形固定法已無法在正方形範圍內衍生出展開圖，故直連接數為 9 以下也不行。另外直連接數為 9 的圖形亦無法貼邊固定。

(5)最長直連接數為 8，且完全由此最長直連接固定的展開圖：

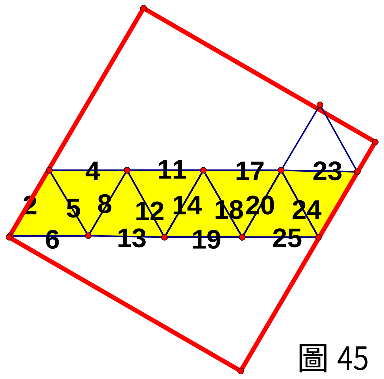
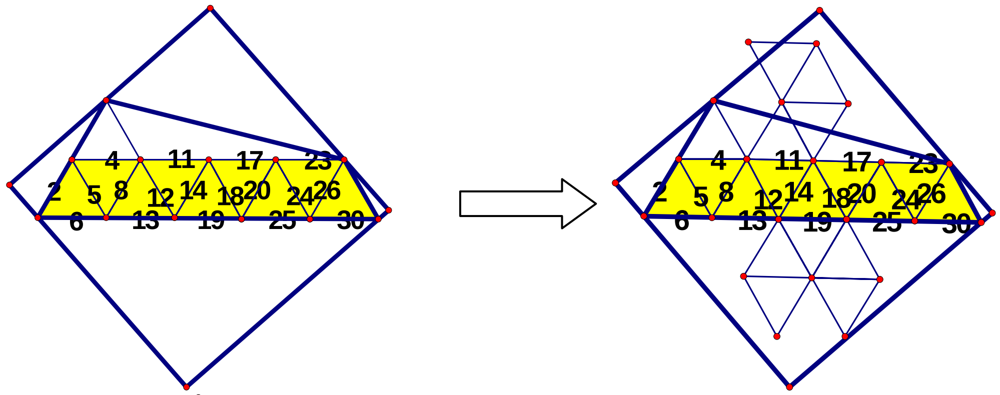


圖 45

承(4)，當直連接數為 8 時，已知無法以**[四邊形固定法]**固定後，衍生出正方形範圍內的展開圖。那貼邊固定呢？如圖 45 所示，一樣無法在範圍內衍生出展開圖。

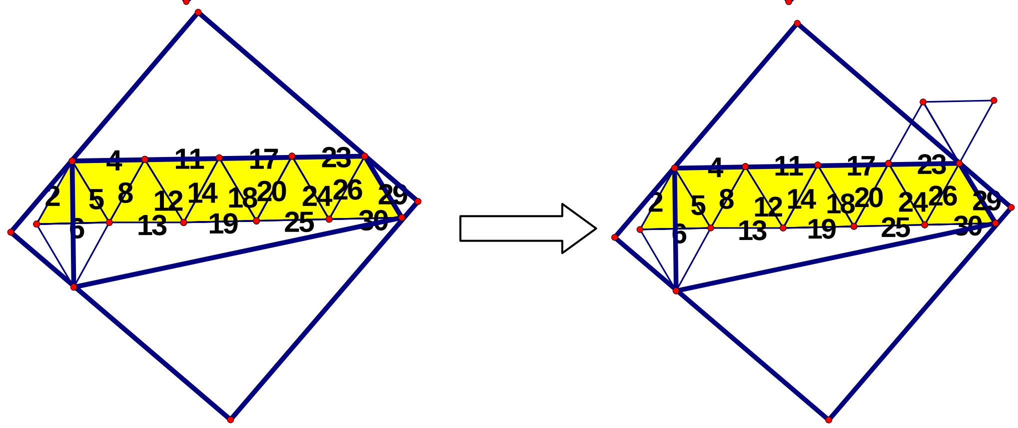
綜合(4)(5)，可確定不再需要討論展開圖僅由單一直連接固定的情形，因其均不足以衍生出在正方形範圍內的展開圖。

(6)最長直連接數為 9，但僅部份由此最長直連接固定的展開圖：



(左)圖 46-1

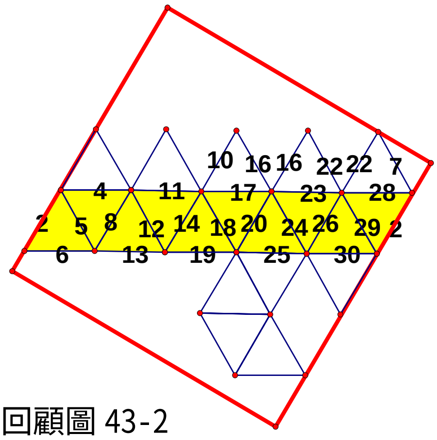
(右)圖 46-2



(左)圖 47-1

(右)圖 47-2

圖 46-1 的直連接數為 9，且外加了一個三角形，它僅能夠使用**[四邊形固定法]**，而不能使用**[貼邊固定法]**。可以發現如圖 46-2，此圖形仍然無法在正方形內衍生出展開圖；另外圖 47-1 及圖 47-2 也具有類似的情況。經由類似步驟的測試，我們沒有再發現外部正方形來得比圖 43-2 小，又能夠在其內部衍生出完整的正二十面體展開圖的情況。



回顧圖 43-2

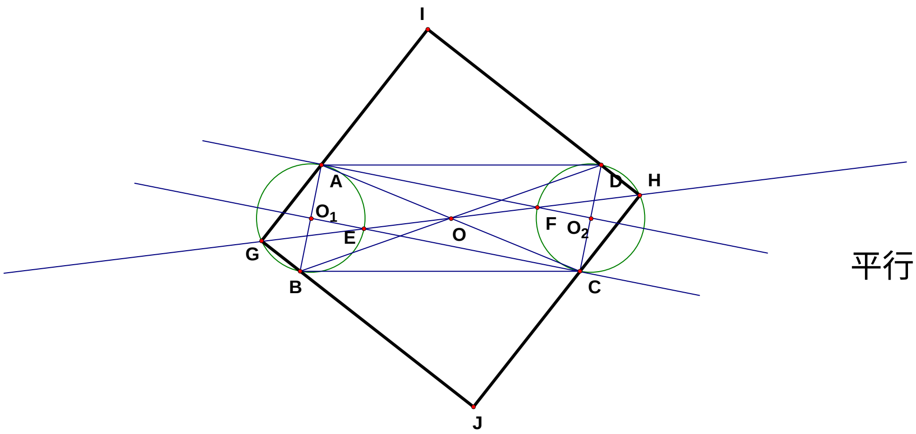
(7)小結

目前得到的正二十面體最小覆蓋正方形為圖 43-2 之正方形，若設此正二十面體的稜長為 $1\,cm$ ，則可知其小覆蓋正方形的邊長為 $5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}cm$ 。

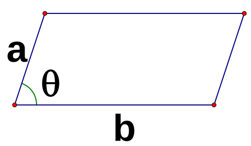
未來我們尚可以分析最長直連接數為 9 以下，且由兩個以上直接連所衍生的展開圖及其最小覆蓋正方形。

伍、附註：

使用**[平行四邊形固定法]**尋找展開圖最小覆蓋正方形時，我們可以直接根據「此平行四邊形的兩鄰邊長度與兩鄰邊夾角」來找出正方形邊長。



回顧圖 13-1：
平行四邊形的外接正方形



如右圖，設平行四邊形的兩鄰邊分別為 a 與 b 、 a 與 b 的夾角為 θ ：

利用定坐標的解析方式，我們可以找出 $\overline{EF}$ 的直線方程式，

再進一步得到正方形邊長 $\overline{GJ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{GH}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{GE}+\overline{EF}+\overline{FH})$ ，最後得知：

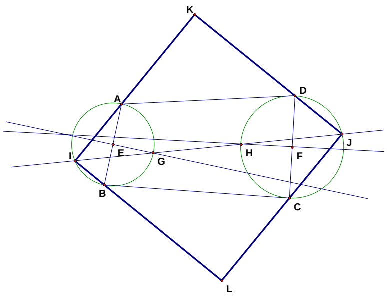
$$\text{正方形邊長}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2a\sqrt{1-\frac{b^2\cos^2\theta}{a^2+b^2-2ab\sin\theta}}+\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\theta}\right)$$ (過程略)

前文中的正八面體與正十二面體最小覆蓋正方形邊長，均是以此方式求出。

陸、總結：

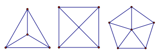
一、以**[貼邊固定法]**與**[四邊形固定法]**為兩大判斷依據，尋找正多面體最小覆蓋正方形。

二、能夠被廣泛使用的四邊形外接正方形作圖(平行四邊形外接正方形作圖的推廣)：

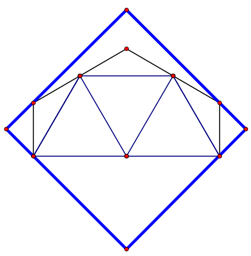
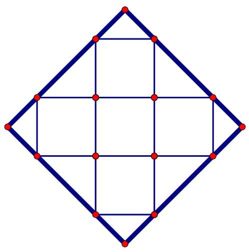
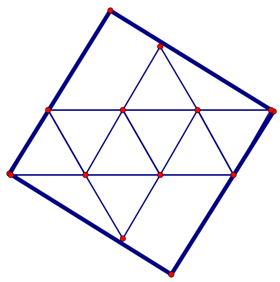


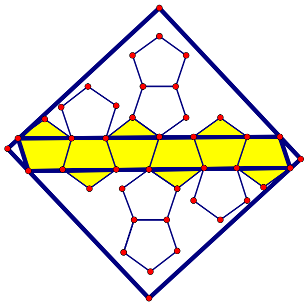
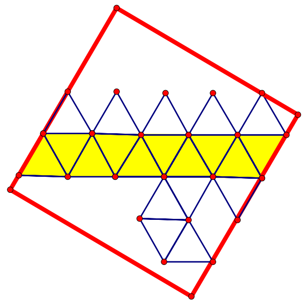
發展成為本研究的**[四邊形固定法]**，

而已知的限制條件為「四邊形四個內角均需大於 45 度」。

三、在分割方式最多使用中心分割的情況下(如)，

假設五種正多面體的稜長均為 1 cm ，可知：

	正四面體	正六面體	正八面體
最佳包裝方式			
包裝紙大小	$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}cm$	$2\sqrt{2}\ cm$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{31-12\sqrt{3}}{10-3\sqrt{3}}}+\sqrt{10-3\sqrt{3}})cm$

	正十二面體	正二十面體
最佳包裝方式		
包裝紙大小	$\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{1-\frac{(\frac{15+3\sqrt{5}}{2})^2\cos^2 72^\circ}{1+(\frac{15+3\sqrt{5}}{2})^2-(15+3\sqrt{5})\sin 72^\circ}}+\sqrt{1+(\frac{15+3\sqrt{5}}{2})^2-(15+3\sqrt{5})\sin 72^\circ})cm$	$\frac{5}{2}\sqrt{3}cm$

柒、展望：

一、完整探討正十二面體及正二十面體可做中心分割時的最佳包裝方式。

二、在展開圖可任意分割的條件放寬下尋求最佳包裝方式。

三、改變包裝紙的樣式(如正多邊形、圓形…etc)，發展出類似「N 邊形固定法」或「圓形固定法」的工具。

捌、參考資料：

一、洪有情等(民 96)。生活中的立體圖形(87 頁)。康軒國民中學數學課本第四冊(初版)。康軒文教事業。

二、鄭凱元等：臺北市大安區私立復興國民小學(民 95)。柏拉圖的天空—正多面體展開圖之研究。中華民國第四十六屆中小學科學展覽會國小組數學科作品。

三、陳創義副教授網站：http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc。國立臺灣師範大學數學系。

【評　語】　030412　柏拉圖送禮

1. 主題選取相當有創意。

2. 討論相當充實完整。

3. 應可進一步討論一般的凸多面體。