中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030410

變色球遊戲的探討

學校名稱：臺北縣立永和國民中學

作者：	指導老師：
國二 沈英琪 國一 郭元富 國二 王德慈 國二 葉子寧	王天和

關鍵詞：不等式　同餘(mod)

摘要

本研究是根據遊戲規則找出三色球的相關性質。利用此相關性質，分析所有情況的差異，討論是否有解，並找出最少的操作次數。我們先從基本的三色球開始研究，接著轉換成較爲複雜的四色球，最後利用三、四色球之間的關連性分析出n色球的研究，完成之後，寫出研究的結論。

壹、研究動機

有一次上課，老師講解資優數學的題目，是有關於變色龍遊戲的問題。結果大家都找不到最佳的操作方法，於是我們對這方面的問題產生了許多疑問與好奇心，在老師的指導下，展開了一連串艱辛但卻充滿快樂的研究。(註：變色球遊戲則是我們另外新訂的名稱)

貳、研究目的

(一)探討三色球的相關性質及最佳操作方法。

(二)利用三色球的相關性質，找出四色球的最佳操作方式。

(三)試著推廣到探討 n 色球的最佳操作策略。

參、研究設備與器材

筆記型電腦、計算機、計算紙、筆。

肆、研究過程或方法

一、【規則介紹】:

對於三堆以上不同顏色的變色球，任兩堆取等量碰撞，可變成第三種顏色，且球數總量不變，經過多次碰撞結合，使全部的變色球變成同一種顏色，如果能做出答案，稱「有解」；反之，如果做不出來，則稱「無解」。

二、【符號定義】:

A (a)：表示 A 堆數量有 a 顆

T_k ：表示第 k 次的操作

依照上述的遊戲規則，是否可經過若干次操作，使三種不同顏色的變色球變成同一種顏色？來試做一個例題如下：

三、【實際操作】:

[例題 1-1]：

紅色	藍色	綠色	次數
4	5	7	T_0

[方法 1]

R(4)	B(5)	G(7)	T_0	球數增減
0	1	15	T_1	R(-4) B(-4) G(+8)
2	0	14	T_2	R(+2) B(-1) G(-1)
0	4	12	T_3	R(-2) B(+4) G(-2)
8	0	8	T_4	R(+8) B(-4) G(-4)
0	16	0	T_5	R(-8) B(+16) G(-8)

[方法 2]

R(4)	B(5)	G(7)	T_0	球數增減
14	0	2	T_1	R(+10) B(-5) G(-5)
12	4	0	T_2	R(-2) B(+4) G(-2)
8	0	8	T_3	R(-4) B(-4) G(+8)
0	16	0	T_4	R(-8) B(+16) G(-8)

[方法 3]

R(4)	B(5)	G(7)	T_0	球數增減
6	4	6	T_1	R(+2) B(-1) G(-1)
0	16	0	T_2	R(-6) B(+12) G(-6)

[方法 1]：最後變成藍色，共需五次完成。

[方法 2]：最後變成藍色，共需四次完成。

[方法 3]：最後變成藍色，共需兩次完成。

顯然，不同的操作方法，可能會得到不同的操作次數，但球數總和不變。至於，可否完成操作？及當可完成時的最少操作次數，是我們底下所要探討的。

[例題 1-2]

紅色(12)	藍色(22)	綠色(17)	次數	球數增減
0	46	5	T_1	R(-12) B(+24) G(-12)
10	41	0	T_2	R(+10) B(-5) G(-5)
?	?	?	?	?

此題無論操作到第幾次，三色球數量除以 3 之餘數任兩個均不相等，故無解。

以上的例子中，我們發現：(一)不同的操作方式，操作完成的次數可能不同。

(二)存在可能無解的情況。

(三)每次操作後任兩堆的數量差距除以 3 之餘數具有不變性。

主題一:三色球的碰撞結合研究

一、【性質一】:

A (a)	B (b)	C (c)	次數
$a-k$	$b-k$	$c+2k$	T_1

$\Rightarrow$ $[(a-k)-(b-k)]\equiv(a-b)\pmod 3$

$[(a-k)-(c+2k)]\equiv(a-c)\pmod 3$

$[(b-k)-(c+2k)]\equiv(b-c)\pmod 3$

二、【性質二】:

由[性質一]可知經過多次操作，任兩堆的數量差距除以 3 之餘數永遠不變。

所以，若可完成操作，則其中至少有兩堆原來的數量除以 3 之餘數相同。

反之，若原來三堆數量除以 3 之餘數皆不同，則無法操作完成。

我們回到右圖的[例題 1-2]，得到[性質二]。

紅色	藍色	綠色	次數
12	22	17	T_0

若 A(a)、B(b)、C(c)，且 $a\equiv r_1 \pmod 3$，$b\equiv r_2 \pmod 3$，$c\equiv r_3 \pmod 3$，$r_1\neq r_2\neq r_3$，則無解。

我們以下列例子來做說明：

◎ 例題：紅色(5) 藍色(12) 綠色(15)

因爲$15\equiv 12\pmod 3$，所以藍色和綠色可歸零，

即最後完成操作到紅色。操作如右：

紅色	藍色	綠色	次數
5	12	15	T_0
4	14	14	T_1
32	0	0	T_2

三、【性質三】:

利用[性質一]，我們推得[性質三]

若 A(a)、B(b)、C(c)，且$(b-c)\equiv 0 \pmod 3$，我們可以確定有解，且操作完成在 A，但要先使 B、C 兩堆的數量相等。

至於在可完成操作的狀況下，其最佳(最少)操作次數，如何得出？以下爲操作 k 次之結果：

A (a)	B (b)	C (c)	次數
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a'	b'	c'	T_k

四、【判斷式】：

若滿足 $b'+2x=c'-x$（$a'\ge x$，$c'>b'$）

則 $3x = c'-b' \Rightarrow x=\dfrac{c'-b'}{3}$

推得 $a'-\dfrac{c'-b'}{3}\ge 0 \Rightarrow 3a'-c'+b'\ge 0 \Rightarrow 3a'+b'\ge c'$

所以當 $3a'+b'\ge c'>b'$ 時，再兩次操作即可完成。我們將上列分析稱為[判斷式]。

由以上的證明可知，當 A(a)、B(b)、C(c)且 a≡b≡c(mod3)時，必滿足[判斷式]。

五、【三色球討論】：利用上述結論，我們分成幾種情況討論：

1. 當 a、b、c 三數除以 3 之餘數任兩個皆不相同，則無解。(根據[性質二])

2. 當 a、b、c 存在兩數量相等時，則可直接一次完成操作。

3. 當 b≡c(mod3)，且 $3a+b\ge c>b$ 時，根據[判斷式]，則可兩次完成操作。

4. 當 b≡c(mod3)，$3a+b<c$，且 a<b<c

【公式分析 1】：當第一次操作使得顏色 B 數量歸零，操作如下表：

<table>
<tr><td>A (a)</td><td>B (b)</td><td>C (c)</td><td>次數</td></tr>
<tr><td>$a_1=2^0(a+2b)$</td><td>0</td><td>$c-b$</td><td>T_1</td></tr>
<tr><td>$a_2=0$</td><td>$2^1(a+2b)$</td><td></td><td>T_2</td></tr>
<tr><td>$a_3=2^2(a+2b)$</td><td>0</td><td></td><td>T_3</td></tr>
<tr><td>$a_4=0$</td><td>$2^3(a+2b)$</td><td></td><td>T_4</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>$a_{k+1}=2^k(a+2b)$</td><td>0</td><td>$a+b+c-a_{k+1}$</td><td>T_{k+1}</td></tr>
<tr><td colspan="4">令操作到第 $k-1$ 次時還沒滿足[判斷式]，第 $k+1$ 次時滿足[判斷式]。根據[判斷式]，
$3a_{k+1}\ge a+b+c-a_{k+1}\Rightarrow 4a_{k+1}\ge a+b+c\Rightarrow 2^2[2^k(a+2b)]\ge a+b+c\Rightarrow$
$2^{k+2}(a+2b)\ge a+b+c\Rightarrow 2^{k+2}\ge\dfrac{a+b+c}{a+2b}$ (k 取最小偶數值) [公式一]</td></tr>
<tr><td>$a+b+c-2y$</td><td>y</td><td>y</td><td>T_{k+2}</td></tr>
<tr><td>$a+b+c$</td><td>0</td><td>0</td><td>T_{k+3}</td></tr>
</table>

【公式分析 2】：當第一次操作使得顏色 A 數量歸零，操作如下表：

<table>
<tr><td>A (a)</td><td>B (b)</td><td>C (c)</td><td>次數</td></tr>
<tr><td>$a_1=0$</td><td>$b+2a$</td><td>$c-a$</td><td>T_1</td></tr>
<tr><td>$a_2=2(b+2a)$</td><td>0</td><td></td><td>T_2</td></tr>
<tr><td>$a_3=0$</td><td>$2^2(b+2a)$</td><td></td><td>T_3</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>$a_{k+1}=2^k(b+2a)$</td><td>0</td><td>$a+b+c-a_{k+1}$</td><td>T_{k+1}</td></tr>
<tr><td colspan="4">令操作到第$k-1$次時還沒滿足[判斷式]，第$k+1$次時滿足[判斷式]。根據[判斷式]，
$3a_{k+1}\ge a+b+c-a_{k+1}\Rightarrow 4a_{k+1}\ge a+b+c\Rightarrow 2^2[2^k(b+2a)]\ge a+b+c\Rightarrow$
$2^{k+2}(b+2a)\ge a+b+c\Rightarrow 2^{k+2}\ge\dfrac{a+b+c}{b+2a}$(k 取最小奇數值) [公式二]</td></tr>
<tr><td>$a+b+c-2z$</td><td>z</td><td>z</td><td>T_{k+2}</td></tr>
<tr><td>$a+b+c$</td><td>0</td><td>0</td><td>T_{k+3}</td></tr>
</table>

接下來要分析何時用[公式一]，何時用[公式二]：

$\because (a+2b)-(b+2a)=b-a>0\quad \therefore a+2b>b+2a\Rightarrow\dfrac{a+b+c}{a+2b}<\dfrac{a+b+c}{b+2a}$

(1) 當 $1<\dfrac{a+b+c}{a+2b}\le 2^2$，[公式一]中$k=0$，無需代[公式二]。即$k+3=3$次完成操作。

(2) 當$2^2<\dfrac{a+b+c}{a+2b}<2^3$，[公式一]中$k=2$，

$\because\dfrac{a+b+c}{a+2b}<\dfrac{a+b+c}{b+2a}\quad\therefore\dfrac{a+b+c}{a+2b}<\dfrac{a+b+c}{b+2a}\le 2^3$([公式二]中$k=1$)或

$\dfrac{a+b+c}{b+2a}>2^3$([公式二]中 k 至少爲 3)

所以需代[公式二]，取[公式一]、[公式二]之k值較小者，得$k+3$次爲最少操作次數。

(3) 當$2^3\le\dfrac{a+b+c}{a+2b}\le 2^4$，[公式一]中$k=2$，無需代[公式二]。即$k+3=5$次完成操作。

(4) 當$2^4<\dfrac{a+b+c}{a+2b}<2^5$，[公式一]中$k=4$，

$\because\dfrac{a+b+c}{a+2b}<\dfrac{a+b+c}{b+2a}\quad\therefore\dfrac{a+b+c}{a+2b}<\dfrac{a+b+c}{b+2a}\le 2^5$([公式二]中$k=3$)或

$\dfrac{a+b+c}{b+2a}>2^5$([公式二]中 k 至少爲 5)

所以需代[公式二]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

(5) 當 $2^5 \le \dfrac{a+b+c}{a+2b} \le 2^6$ ，[公式一]中 $k=4$ ，無需代[公式二]。即 $k+3=7$ 次完成操作。

(6) 當 $2^6 < \dfrac{a+b+c}{a+2b} < 2^7$ ，[公式一]中 $k=6$ ，

$\because \dfrac{a+b+c}{a+2b} < \dfrac{a+b+c}{b+2a}$ $\therefore \dfrac{a+b+c}{a+2b} < \dfrac{a+b+c}{b+2a} \le 2^7$ ([公式二]中 $k=5$)或

$\dfrac{a+b+c}{b+2a} > 2^7$ ([公式二]中 k 至少爲 7)

所以需代[公式二]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

⋮

由[性質三]、[判斷式] 、[公式分析一]、[公式分析二]及上述分析，得最少操作次數爲 k+3 次。

所以當 b≡c(mod3)，$3a+b<c$ 且 a＜b＜c，由上述的分析，我們可得下列結論：

① 當 $1 < \dfrac{a+b+c}{a+2b} \le 2^2$ ，無需代[公式二] 。k=0，即三次完成操作。

② 當 $2^{2n-1} \le \dfrac{a+b+c}{a+2b} \le 2^{2n}$ (n 爲大於 1 的正整數)，無需代[公式二]，取[公式一]所得的 k 值，k+3 次爲最少操作次數。

③ 當 $2^{2n} < \dfrac{a+b+c}{a+2b} < 2^{2n+1}$ (n 爲正整數)，需代[公式二]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 k+3 次爲最少操作次數。

[例題 1-3]

以[公式一]可求得 $2^{k+2} \ge \dfrac{7+207+2007}{7+2\times 207} = 5\dfrac{116}{421}$ $\because$k 爲偶數 $\therefore k$ 取 2，即 2+3=5(次)完成操作。$\because 2^2 < 5\dfrac{116}{421} < 2^3$ ，依 4.之結論需再代入[公式二]。對照[例題 1-4]

紅色(7)	藍色(207)	綠色(2007)	次數	球數增減
421	0	1800	T_1	R(+414) B(-207) G(-207)
0	842	1379	T_2	R(-421) B(+842) G(-421)
1684	0	537	T_3	R(+1684) B(-842) G(-842)
1505	358	358	T_4	R(-179) B(+358) G(-179)

2221	0	0	T_5	R(+716) B(-358) G(-358)

[例題 1-4]

以[公式二]可求得 $2^{k+2} \geq \dfrac{7+207+2007}{207+7\times 2} = 10\dfrac{11}{221}$ ∵k 為奇數 ∴ k 取 3，即 3+3=6(次)

可完成操作。由以上計算及操作得最少操作次數為 5 次。

紅色(7)	藍色(207)	綠色(2007)	次數	球數增減
0	221	2000	T_1	R(-7) B(+14) G(-7)
442	0	1779	T_2	R(+442) B(-221) G(-221)
0	884	1337	T_3	R(-442) B(+884) G(-442)
1768	0	453	T_4	R(+1768) B(-884) G(-884)
1617	302	302	T_5	R(-151) B(+302) G(-151)
2221	0	0	T_6	R(+604) B(-302) G(-302)

5. 當 b≡c(mod3)，$3a+b<c$ ，且 b＜a＜c，由 4.可得：

$2^{k+2} \geq \dfrac{a+b+c}{a+2b}$ (k 取最小值，且 k 為偶數)→[公式一]

$2^{k+2} \geq \dfrac{a+b+c}{b+2a}$ (k 取最小值，且 k 為奇數)→[公式二]

$\because b+2a > a+2b \quad \therefore \dfrac{a+b+c}{b+2a} < \dfrac{a+b+c}{a+2b}$

(1) 當 1<$\dfrac{a+b+c}{b+2a} < 2^2$ ，[公式二]中 $k=1$ ，

$\because \dfrac{a+b+c}{b+2a} < \dfrac{a+b+c}{a+2b} \quad \therefore \dfrac{a+b+c}{b+2a} < \dfrac{a+b+c}{a+2b} \leq 2^2$ ([公式一]中 $k=0$)或

$\dfrac{a+b+c}{a+2b} > 2^2$ ([公式一]中 k 至少為 2)。

所以需代[公式一]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次為最少操作次數。

(2) 當 $2^2 \leq \dfrac{a+b+c}{b+2a} \leq 2^3$ ，[公式二]中 $k=1$ ，無需代[公式一]。即 $k+3=4$ 次完成操作。

(3) 當 $2^3 < \dfrac{a+b+c}{b+2a} < 2^4$ ，[公式二]中 $k=3$ ，

$\because \dfrac{a+b+c}{b+2a} < \dfrac{a+b+c}{a+2b} \quad \therefore \dfrac{a+b+c}{b+2a} < \dfrac{a+b+c}{a+2b} \leq 2^4$ ([公式一]中 $k=2$)或

$\dfrac{a+b+c}{a+2b} > 2^4$ ([公式一]中 k 至少爲 4)。

所以需代[公式一]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

(4) 當 $2^4 \le \dfrac{a+b+c}{b+2a} \le 2^5$ ，[公式二]中 $k=3$ ，無需代[公式一]。即 $k+3=6$ 次完成操作。

(5) 當 $2^5 < \dfrac{a+b+c}{b+2a} < 2^6$ ，[公式二]中 $k=5$ ，

$\because \dfrac{a+b+c}{b+2a} < \dfrac{a+b+c}{a+2b}$ $\therefore \dfrac{a+b+c}{b+2a} < \dfrac{a+b+c}{a+2b} \le 2^6$ ([公式一中 $k=4$)或

$\dfrac{a+b+c}{a+2b} > 2^6$ ([公式一]中 k 至少爲 6)。

所以需代[公式一]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

(6) 當 $2^6 \le \dfrac{a+b+c}{b+2a} \le 2^7$ ，[公式二]中 $k=5$ ，無需代[公式一]。即 $k+3=8$ 次完成操作。

⋮

由[性質三]、[判斷式] 、[公式分析一]、[公式分析二]及上述分析，得最少操作次數爲 k+3 次。

所以當 b≡c(mod3)， $3a+b<c$ ，且 b＜a＜c，由上述的分析，我們可得下列結論：

① 當 $2^{2n} \le \dfrac{a+b+c}{b+2a} \le 2^{2n+1}$ (n 爲正整數)，無需代[公式一]，取[公式二]所得的 k 值，k+3 次爲最少操作次數。

② 當 $1 < \dfrac{a+b+c}{b+2a} < 2^2$ ，需代[公式一] ，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

③ 當 $2^{2n-1} < \dfrac{a+b+c}{b+2a} < 2^{2n}$ (n 爲大於 1 的正整數)，需代[公式一]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 k+3 次爲最少操作次數。

[例題 1-5]

以[公式二]可求得 $2^{k+2} \ge \dfrac{100+33+2004}{33+2\times100} = 9\dfrac{40}{233}$ ∵k 爲奇數 ∴ k 取 3，即 3+3=6(次)

可完成操作。∵ $2^3 < 9\dfrac{40}{233} < 2^4$ ，依 5.之結論需再代入[公式一]。對照[例題 1-6]

紅色(100)	藍色(33)	綠色(2004)	次數	球數增減
0	233	1904	T_1	R(-100) B(+200) G(-100)
466	0	1671	T_2	R(+466) B(-233) G(-233)
0	932	1205	T_3	R(-466) B(+932) G(-466)
1864	0	273	T_4	R(+1864) B(-932) G(-932)
1773	182	182	T_5	R(-91) B(+182) G(-91)
2137	0	0	T_6	R(+364) B(-182) G(-182)

[例題 1-6]

以[公式一]可求得 $2^{k+2} \geq \dfrac{100+33+2004}{100+2\times33} = 12\dfrac{145}{166}$ ∵k 爲偶數 ∴ k 取 2，即 2+3=5(次)

可完成操作。由以上計算及操作得最少操作次數爲 5 次。

紅色(100)	藍色(33)	綠色(2004)	次數	球數增減
166	0	1971	T_1	R(+66) B(-33) G(-33)
0	332	1805	T_2	R(-166) B(+332) G(-166)
664	0	1473	T_3	R(+664) B(-332) G(-332)
173	982	982	T_4	R(-491) B(+982) G(-491)
2137	0	0	T_5	R(+1964) B(-982) G(-982)

我們重新整理，將上述分析結果寫成：

對於三色球 A(a)、B(b)、C(c)，當 $a \neq b \equiv c \pmod 3$，且 b＜c，則

(1)符合[判斷式]，則兩次可完成操作。

(2)未符合[判斷式]，則分爲 a<b<c(先代[公式一]，再依 4.的結論，決定是否需要代[公式二]) 及 b<a<c(先代[公式二]，再依 5.的結論，決定是否需要代[公式一])，求最少操作次數。

爲了方便說明，我們將此結果命名爲「**三色球之最佳操作法**」

主題二：四色球的碰撞結合研究

令四色球數量分別為 A(a)、B(b)、C(c)、D(d)

一、【四同分析】：$a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv r(\bmod 3)$ ，$a \le b \le c \le d$

1. 當 $r \neq 0$ ，我們分為[case1~12]來討論。

	A(a)	B(b)	C(c)	D(d)
case1	0	b-a≡0(mod3)	c+2a≡0(mod3)	d≡r(mod3)
case2	0	b-a≡0(mod3)	c≡r(mod3)	d+2a≡0(mod3)
case3	0	b+2a≡0(mod3)	c-a≡0(mod3)	d≡r(mod3)
case4	0	b≡r(mod3)	c-a≡0(mod3)	d+2a≡0(mod3)
case5	0	b+2a≡0(mod3)	c≡r(mod3)	d-a≡0(mod3)
case6	0	b≡r(mod3)	c+2a≡0(mod3)	d-a≡0(mod3)
case7	a+2b≡0(mod3)	0	c-b≡0(mod3)	d≡r(mod3)
case8	a≡r(mod3)	0	c-b≡0(mod3)	d+2b≡0(mod3)
case9	a+2b≡0(mod3)	0	c≡r(mod3)	d-b≡0(mod3)
case10	a≡r(mod3)	0	c+2b≡0(mod3)	d-b≡0(mod3)
case11	a+2c≡0(mod3)	b≡r(mod3)	0	d-c≡0(mod3)
case12	a≡r(mod3)	b+2c≡0(mod3)	0	d-c≡0(mod3)

(1) 當 $d-c=3a$、$d-c=3b$、$d-b=3a$、$d-b=3c$、$d-a=3b$、$d-a=3c$、$c-a=3b$、$c-b=3a$ 時，兩次完成操作。

(2) 若無(1)之情形發生，由[case1]可得 $3d+(b-a)>c+2a$ ，滿足[判斷式]，再兩次完成操作，共三次完成操作。

2. 當 $r=0$ ，由[case1~12]操作可得

(1) 當 $d-c=3a$、$d-c=3b$、$d-b=3a$、$d-b=3c$、$d-a=3b$、$d-a=3c$、$c-a=3b$、$c-b=3a$、$d-c=2a$、$d-b=2a$、$d-a=2b$、$c-a=2b$、$c-b=2a$、$d=b+c$、$d=a+c$、$d=a+b$、$c=a+b$ 時，兩次完成操作。

(2) 若無(1)之情形發生，[case1~12]都滿足[判斷式]，再兩次完成操作，共三次完成操作。

二、【三同分析】：$a \equiv b \equiv c \equiv r_1(\bmod 3)$ ，$d \equiv r_2(\bmod 3)$ ，且 $r_1 \neq r_2$

1. 當 $r_1 = 0$

(1) 當 $a \le b \le c < d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $c-b=3a$ 、$c-a=3b$ 、$c-b=2a$ 、$c-a=2b$ 、$c=a+b$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，由[case1]可得：

A(a)	B(b)	C(c)	D(d)	次數
0	$b-a\equiv 0(\bmod 3)$	$c+2a\equiv 0(\bmod 3)$	$d\equiv r_2(\bmod 3)$	T_1

$\because 3d+(b-a)>c+2a$，滿足[判斷式]，共三次完成操作。

(2) 當$a\le b<d<c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-a=3b$、$c-a=3d$、$c-b=3a$、$c-b=3d$、$c-b=2a$、$c-a=2b$、$c=a+b$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，因爲[case1~12]沒有必滿足[判斷式]的情形，所以用「三色球之最佳操作法」，若有 case 滿足[判斷式]，共三次完成操作，否則取[case1~12]中所得k值最小者，共$k+4$次完成操作。

(3) 當$a<d<b\le c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-b=3a$、$c-b=3d$、$c-a=3d$、$c-a=3b$、$b-a=3d$、$c-b=2a$、$c=a+b$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，由[case7]可得：

A(a)	D(d)	B(b)	C(c)	次數
$a+2d\equiv(3-r_2)(\bmod 3)$	0	$b-d\equiv(3-r_2)(\bmod 3)$	$c\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

$\because 3c+(b-d)>a+2d$，滿足[判斷式]，共三次完成操作。

(4) 當$d<a\le b\le c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-a=3d$、$c-a=3b$、$c-b=3d$、$c-b=3a$、$b-a=3d$、$c=a+b$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，由[case1]可得：

D(d)	A(a)	B(b)	C(c)	次數
0	$a-d\equiv(3-r_2)(\bmod 3)$	$b+2d\equiv(3-r_2)(\bmod 3)$	$c\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

$\because 3c+(a-d)>b+2d$，滿足[判斷式]，共三次完成操作。

2. 當$r_2=0$

(1) 當$a\le b\le c<d$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-b=3a$、$c-a=3b$、$d-c=2a$、$d-a=2b$、$d-b=2a$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	C(c)	D(d)	次數
0	$b-a\equiv 0(\bmod 3)$	$c+2a\equiv 0(\bmod 3)$	$d\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

(2) 當$a\le b<d<c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-a=3d$、$c-a=3b$、$c-b=3d$、$c-b=3a$、$d-a=2b$、$d-b=2a$、$c=a+d$、$c=b+d$，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	D(d)	C(c)	次數
0	$b-a\equiv 0(\bmod 3)$	$d\equiv 0(\bmod 3)$	$c+2a\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

(3) 當$a<d<b\le c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-a=3d$、$c-a=3b$、$c-b=3d$、$c-b=3a$、$b-a=3d$、$c-a=2d$、$b-a=2d$、$c=b+d$、$c=a+d$、$b=a+d$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	D(d)	B(b)	C(c)	次數
0	$d\equiv 0(\bmod 3)$	$b-a\equiv 0(\bmod 3)$	$c+2a\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

(4) 當$d<a\le b\le c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-a=3d$、$c-a=3b$、$c-b=3d$、$c-b=3a$、$b-a=3d$、$c-b=2d$、$c-a=2d$、$b-a=2d$、$c=a+d$、$c=b+d$、$b=a+d$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	A(a)	B(b)	C(c)	次數
0	$a-d\equiv r_1(\bmod 3)$	$b+2d\equiv r_1(\bmod 3)$	$c\equiv r_1(\bmod 3)$	T_1

3. 當$r_1=1$，$r_2=2$

(1) 當$a\le b\le c<d$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-b=3a$、$c-a=3b$、$d=a+b$、$d=a+c$、$d=b+c$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	C(c)	D(d)	次數
0	$b-a\equiv 0(\bmod 3)$	$c+2a\equiv 0(\bmod 3)$	$d\equiv 2(\bmod 3)$	T_1

(2) 當$a\le b<d<c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-b=3a$、$c-b=3d$、$c-a=3b$、$c-a=3d$、$c-d=2a$、$d=a+b$，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	D(d)	C(c)	次數
0	$b\equiv 1(\bmod 3)$	$d-a\equiv 1(\bmod 3)$	$c+2a\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

(3) 當$a<d<b\le c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-b=3a$、$c-b=3d$、$c-a=3b$、$c-a=3d$、$b-a=3d$、$c-d=2a$、$b-d=2a$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	D(d)	B(b)	C(c)	次數
0	$d-a\equiv 1(\bmod 3)$	$b\equiv 1(\bmod 3)$	$c+2a\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

(4) 當$d<a\le b\le c$時，由[case1~12]操作可得

①當$c-a=3b$、$c-a=3d$、$c-b=3a$、$c-b=3d$、$b-a=3d$、$c-d=2a$、$b-d=2a$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	A(a)	B(b)	C(c)	次數
0	$a-d\equiv 2(\bmod 3)$	$b+2d\equiv 2(\bmod 3)$	$c\equiv 1(\bmod 3)$	T_1

4. 當$r_1=2$，$r_2=1$，其分析結果與$r_1=1$，$r_2=2$相同。

三、【雙二同分析】：$a\equiv b\equiv r_1(\bmod 3)$，$c\equiv d\equiv r_2(\bmod 3)$，且$r_1\ne r_2$

1. 當$r_1=0$，$r_2=1$

(1) 當$a\le b<c\le d$時，由[case1~12]操作可得

①當$d-c=3a$、$d-c=3b$、$d-c=2a$、$d=a+c$、$d=b+c$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，因爲[case1~12]沒有必滿足[判斷式]的情形，所以用「三色球之最佳操作法」，若有 case 滿足[判斷式]，共三次完成操作，否則取[case1~12]中所得k值最小者，共$k+4$次完成操作。

(2) 當$a<c\le d<b$時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $d-c=3a$ 、 $d-c=2a$ 、 $d=a+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	D(d)	B(b)	次數
0	$c-a\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	$d+2a\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	$b\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

(3) 當 $a<c<b<d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $d-c=3a$ 、 $d-c=3b$ 、 $b-a=3c$ 、 $d-c=2a$ 、 $d=a+c$ 、 $d=b+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case7]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	B(b)	D(d)	次數
$a+2c\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	0	$b-c\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	$d\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

2. 當 $r_1=0$ ， $r_2=2$ ，其分析結果同 $r_1=0$ ， $r_2=1$ 。

3. 當 $r_1=1$ ， $r_2=0$

(1) 當 $a\le b<c\le d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $d-c=3a$ 、 $d-c=3b$ 、 $d-a=2b$ 、 $d-b=2a$ 、 $c-a=2b$ 、 $c-b=2a$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	C(c)	D(d)	次數
0	$b-a\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$	$c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$	$d+2a\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

(2) 當 $a<c\le d<b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $d-c=3a$ 、 $d-a=2a$ 、 $b=a+c$ 、 $b=a+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	D(d)	B(b)	次數
0	$c-a\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	$d+2a\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	$b\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

(3) 當 $a<c<b<d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $d-c=3b$ 、 $d-c=3a$ 、 $b-a=3c$ 、 $d-b=2a$ 、 $b-a=2c$ 、 $b=a+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	B(b)	D(d)	次數
0	$c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ 0	$b - a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$	$d + 2a \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$	T_1

4. 當 $r_1 = 2$ ， $r_2 = 0$ ，其分析結果與 $r_1 = 1$ ， $r_2 = 0$ 相同。

5. 當 $r_1 = 1$ ， $r_2 = 2$

(1) 當 $a \le b < c \le d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $d - c = 3a$ 、 $d - c = 3b$ 、 $d = a + b$ 、 $c = a + b$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	C(c)	D(d)	次數
0	$b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	$c - a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	$d + 2a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	T_1

(2) 當 $a < c \le d < b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $d - c = 3a$ 、 $b - a = 3c$ 、 $b - a = 3d$ 、 $b - d = 2a$ 、 $b - c = 2a$ 、 $d - a = 2c$ 、 $b = c + d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	D(d)	B(b)	次數
0	$c - a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	$d + 2a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	$b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	T_1

(3) 當 $a < c < b < d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $d - c = 3a$ 、 $d - c = 3b$ 、 $b - a = 3c$ 、 $d - c = 2a$ 、 $d - c = 2a$ 、 $d - a = 2c$ 、 $d = a + b$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	B(b)	D(d)	次數
0	$c - a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	$b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	$d + 2a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$	T_1

6. 當 $r_1 = 2$ ， $r_2 = 1$ ，其分析結果與 $r_1 = 1$ ， $r_2 = 2$ 相同。

四、【單二同分析】： $a \equiv b \equiv r_1 (\mathrm{mod}\, 3)$ ， $c \equiv r_2 (\mathrm{mod}\, 3)$ ， $d \equiv r_3 (\mathrm{mod}\, 3)$ ，且 $r_1 \ne r_2 \ne r_3$

1. 當 $r_1 = 0$ ， $r_2 = 1$ ， $r_3 = 2$

(1) 當 $a \le b < c < d$ 時，由[case1~12]操作可得，四色球經第一次操作後變成三色球，此時

三色球數量分別除以 3 之餘數均爲{0,1,2}(註)，故需經過一次的修正操作，將原四色球數量分別除以 3 之餘數從$\{0,0,1,2\} \xrightarrow{T_1} \{1,1,1,0\}$(四色球)$\xrightarrow{T_2} \{0,0,0\}$或{1,1,1}(三色球)，由二、【三同分析】之 2.可知，若T_2後有兩色球數量相等，則三次完成操作，否則四次完成操作。

註：定義$\{r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n\}$表示 n 色球數量分別除以 3 之餘數所成的[集合]。

(2) 當$a \le b < d < c$時，分析同(1)，共三次或四次完成操作。

(3) 當$a < c < b < d$時，由[case1~12]操作可得

①當$b-a=3c$ 、 $d-a=2c$ ，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case7]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	B(b)	D(d)	次數
$a+2c \equiv 2\,(\mathrm{mod}3)$	0	$b-c \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	$d \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

(4) 當$a < d < b < c$時，由[case1~12]操作可得

①當$b-a=3d$ 、 $c-a=2d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case7]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	D(d)	B(b)	C(c)	次數
$a+2d \equiv 1\,(\mathrm{mod}3)$	0	$b-d \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	$c \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

(5) 當$a < c < d < b$時，由[case1~12]操作可得

①當$b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $d-a=2c$ 、 $b=c+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case9]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	D(d)	B(b)	次數
$a+2c \equiv 2\,(\mathrm{mod}3)$	0	$d \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	$b-c \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

(6) 當$a < d < c < b$時，由[case1~12]操作可得

①當$b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $c-a=2d$ 、 $b=c+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case9]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	D(d)	C(c)	B(b)	次數
$a+2d \equiv 1\,(\mathrm{mod}3)$	0	$c \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	$b-d \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	T_1

(7) 當$c < a \le b < d$時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $d-a=2c$ 、 $d-b=2c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

C(c)	A(a)	B(b)	D(d)	次數
0	$a-c\equiv 2\ (\text{mod}3)$	$b+2c\equiv 2(\text{mod}\,3)$	$d\equiv 2(\text{mod}\,3)$	T_1

(8) 當 $c<a<d<b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3d$ 、 $b=c+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

C(c)	A(a)	D(d)	B(b)	次數
0	$a-c\equiv 2\ (\text{mod}3)$	$d\equiv 2(\text{mod}\,3)$	$b+2c\equiv 2(\text{mod}\,3)$	T_1

(9) 當 $c<d<a\le b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $a=c+d$ 、 $b=c+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

C(c)	D(d)	A(a)	B(b)	次數
0	$d\equiv 2\ (\text{mod}3)$	$a-c\equiv 2(\text{mod}\,3)$	$b+2c\equiv 2(\text{mod}\,3)$	T_1

(10) 當 $d<a\le b<c$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $c-b=2d$ 、 $c-a=2d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	A(a)	B(b)	C(c)	次數
0	$a-d\equiv 1(\text{mod}3)$	$b+2d\equiv 1(\text{mod}\,3)$	$c\equiv 1(\text{mod}\,3)$	T_1

(11) 當 $d<a<c<b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $c-a=2d$ 、 $b=c+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	A(a)	C(c)	B(b)	次數
0	$a-d\equiv 1(\text{mod}3)$	$c\equiv 1(\text{mod}\,3)$	$b+2d\equiv 1(\text{mod}\,3)$	T_1

(12) 當 $d<c<a\le b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $a=c+d$ 、 $b=c+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	C(c)	A(a)	B(b)	次數
0	$c \equiv 1 \pmod 3$	$a-d \equiv 1 \pmod 3$	$b+2d \equiv 1 \pmod 3$	T_1

2. 當 $r_1 = 1$，$r_2 = 0$，$r_3 = 2$

(1) 當 $a \le b < c < d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $c-a=2b$、$c-b=2a$、$d-c=2a$、$d=a+b$，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	C(c)	D(d)	次數
0	$b-a \equiv 0 \pmod 3$	$c \equiv 0 \pmod 3$	$d+2a \equiv 1 \pmod 3$	T_1

(2) 當 $a \le b < d < c$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $c-b=2a$、$c-a=2b$、$c=a+d$、$c=b+d$、$d=a+b$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	B(b)	D(d)	C(c)	次數
0	$b \equiv 1 \pmod 3$	$d-a \equiv 1 \pmod 3$	$c+2a \equiv 2 \pmod 3$	T_1

(3) 當 $a < c < b < d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$、$b-a=2c$、$d-c=2a$、$b=a+c$、$d=a+b$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	B(b)	D(d)	次數
0	$c \equiv 0 \pmod 3$	$b-a \equiv 0 \pmod 3$	$d+2a \equiv 1 \pmod 3$	T_1

(4) 當 $a < d < b < c$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3d$、$c-b=2a$、$b-d=2a$、$c=b+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	D(d)	B(b)	C(c)	次數
0	$d-a \equiv 1 \pmod 3$	$b \equiv 1 \pmod 3$	$c+2a \equiv 2 \pmod 3$	T_1

(5) 當 $a < c < d < b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3d$、$b-a=3c$、$b-d=2a$、$b-a=2c$、$d-c=2a$、$b=a+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	C(c)	D(d)	B(b)	次數
0	$c-a \equiv 2 \pmod 3$	$d \equiv 2 \pmod 3$	$b+2a \equiv 0 \pmod 3$	T_1

(6) 當 $a<d<c<b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3d$ 、 $b-a=3c$ 、 $b-d=2a$ 、 $c=a+d$ 、 $b=a+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

A(a)	D(d)	C(c)	B(b)	次數
0	$d \equiv 2 \pmod 3$	$c-a \equiv 2 \pmod 3$	$b+2a \equiv 0 \pmod 3$	T_1

(7) 當 $c<a\le b<d$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $b-a=2c$ 、 $d-c=2a$ 、 $d=a+c$ 、 $b=a+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

C(c)	A(a)	B(b)	D(d)	次數
0	$a-c \equiv 1 \pmod 3$	$b+2c \equiv 1 \pmod 3$	$d \equiv 2 \pmod 3$	T_1

(8) 當 $c<a<d<b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $b-a=2c$ 、 $d-c=2a$ 、 $b=a+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，因爲[case1~12]沒有必滿足[判斷式]的情形，所以用「三色球之最佳操作法」，若有 case 滿足[判斷式]，共三次完成操作，否則取[case1~12]中所得 k 值最小者，共 $k+4$ 次完成操作。

(9) 當 $c<d<a\le b$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3c$ 、 $b-a=3d$ 、 $b-a=2c$ 、 $b-c=2d$ 、 $a-c=2d$ 、 $b=a+c$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，因爲[case1~12]沒有必滿足[判斷式]的情形，所以用「三色球之最佳操作法」，若有 case 滿足[判斷式]，共三次完成操作，否則取[case1~12]中所得 k 值最小者，共 $k+4$ 次完成操作。

(10) 當 $d<a\le b<c$ 時，由[case1~12]操作可得

①當 $b-a=3d$ 、 $b-d=2a$ 、 $c=b+d$ 、 $c=a+d$ 時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case1]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	A(a)	B(b)	C(c)	次數
0	$a-d\equiv 2(\bmod 3)$	$b+2d\equiv 2(\bmod 3)$	$c\equiv 0(\bmod 3)$	T_1

(11) 當$d<a<c<b$時，由[case1~12]操作可得

①當$b-a=3d$、$b-a=3c$、$b-c=2d$、$b-d=2a$、$c=a+d$、$b=a+c$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case4]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	A(a)	C(c)	B(b)	次數
0	$a\equiv 1(\bmod 3)$	$c-d\equiv 1(\bmod 3)$	$b+2d\equiv 2(\bmod 3)$	T_1

(12) 當$d<c<a\le b$時，由[case1~12]操作可得

①當$b-a=3d$、$b-a=3c$、$b-c=2d$、$a-c=2d$、$b=a+c$時，兩次完成操作。

②若無①之情況發生，[case2]滿足[判斷式]，共三次完成操作。

D(d)	C(c)	A(a)	B(b)	次數
0	$c-d\equiv 1(\bmod 3)$	$a\equiv 1(\bmod 3)$	$b+2d\equiv 2(\bmod 3)$	T_1

3. 當$r_1=2$，$r_2=0$，$r_3=1$，其分析結果與$r_1=1$，$r_2=0$，$r_3=2$相同。

五、【四色球討論】:利用上述結論，我們分成幾種情況討論：

1. 四色球可二次完成操作發生在有兩色球數量之差為另一色球數量之 3 倍,2 倍或 1 倍時。

2. (1)當① $a\equiv b\equiv c\equiv 0(\bmod 3)$，$d\equiv r(\bmod 3)$，$r\neq 0$，且$a\le b<d<c$

② $a\equiv b\equiv 0(\bmod 3)$，$c\equiv d\equiv r(\bmod 3)$，$r\neq 0$，且$a\le b<c\le d$

③ $a\equiv b\equiv r_1(\bmod 3)$，$c\equiv 0(\bmod 3)$，$d\equiv r_3(\bmod 3)$，$r_1\neq r_3\neq 0$，且$c<a<d<b$

④ $a\equiv b\equiv r_1(\bmod 3)$，$c\equiv 0(\bmod 3)$，$d\equiv r_3(\bmod 3)$，$r_1\neq r_3\neq 0$，且$c<d<a\le b$

[case1~12]中若有任意二色球數量相等，二次完成操作；若無上述情形，用「三色球之最佳操作法」，若有 case 滿足[判斷式]，共三次完成操作；否則取[case1~12]中所得k值最小者，共$k+4$次完成操作。

(2)當① $a\equiv b\equiv 0(\bmod 3)$，$c\equiv 1(\bmod 3)$，$d\equiv 2(\bmod 3)$，且$a\le b<c<d$

② $a\equiv b\equiv 0(\bmod 3)$，$c\equiv 1(\bmod 3)$，$d\equiv 2(\bmod 3)$，且$a\le b<d<c$

先經過一次操作變為$a\equiv b\equiv c\equiv 1(\bmod 3)$，$d\equiv 0(\bmod 3)$，共 3 次或 4 次完成操作。

(3)除了(1)(2)中的情形之外其餘四色球碰撞的操作皆 2 次或 3 次完成操作。

3. (1) $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 3$，$d \equiv 2 \pmod 3$ 與 $a \equiv b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$，$d \equiv 1 \pmod 3$ 操作結果相同。

(2) $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$，$c \equiv d \equiv 2 \pmod 3$ 與 $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$，$c \equiv d \equiv 1 \pmod 3$ 操作結果相同。

(3) $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$ ，$c \equiv 0 \pmod 3$ ，$d \equiv 2 \pmod 3$ 與 $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$ ，$c \equiv 0 \pmod 3$ ，$d \equiv 1 \pmod 3$ 操作結果相同。

4. 四色球碰撞操作必有解。

主題三: n(n≥5)色球的碰撞結合研究

研究一：

從上面的研究得知，爲了要完成最少操作次數，則要注意下面兩原則：

[原則一]：當 n 色球操作成 3 色球，須存在有解情況，即不能﹛0,1,2﹜。

[原則二]：以最少操作次數，讓 n 色球變成三色球。

（1）四色球的研究，可知必能將 n(n≥5)色球操作到符合[原則一]，即 n≥5 之操作必有解。

（2）由[原則二]可知，當 n(n≥5)色球存在兩種以上的顏色球，其數量相等，則優先考慮操作。如此每經一次操作可將顏色球數量少 2 種。我們將此情況寫成：「對於 n (n≥5)色球，當存在兩種以上的顏色球，其數量相等。」我們稱此爲【特別性原則】；反之，若 n (n≥5)色球，不存在【特別性原則】，則稱爲【一般性原則】。

【最少操作策略】：

利用這些原則，我們寫出 n(n≥5)色球的「最少操作策略」，其步驟如下：

1. 優先處理【特別性原則】，直到無【特別性原則】。(令<步驟1>經過 p_1 次操作)
2. 從【一般性原則】中，造出【特別性原則】。(令<步驟2>經過 q_1 次操作)
3. 再處理2.中的【特別性原則】，直到無【特別性原則】。(令<步驟3>經過 p_2 次操作)
4. 步驟3完成後，剩【一般性原則】，再造出【特別性原則】。(令<步驟4>經過 q_2 次操作)
5. 重複這些過程，(令<步驟5>經過 $p_3 + q_3 + p_4 + q_4 + \cdots + p_t$ 次之操作)直到無法再創出【特別性原則】。此時剩下 $m = n - [2(p_1 + p_2 + \ldots + p_t) + (q_1 + q_2 + \ldots + q_{t-1})]$ 色球。對照[例題5-1]
6. 將m種色球再經過(m-4)次操作至剩下四色球(需儘量避免形成五、【四色球討論】中2.之(1)(2)情形)，再經一次操作變成三色球，利用「三色球之最佳操作法」完成操作，可得「最少操作次數」。

[例題 5-1]

A(10)	B(10)	C(20)	D(50)	E(90)	F(150)	G(210)	H(330)	次數
0	0	40	50	90	150	210	330	T_1
0	0	0	50	50	230	210	330	T_2
0	0	0	0	0	330	210	330	T_3
0	0	0	0	0	0	870	0	T_4

研究二：

若有 n $(n \geq 5)$ 種不同顏色的變色球，每種顏色的球各 m 顆，則 (1)當 n 為奇數時，最少操作次數為 $\frac{n-1}{2}$；(2)當 n 為偶數時，最少操作次數為 $\frac{n}{2}$。其證明如下：

1. 若 n 為奇數(設 n=2k+1，k 為大於 1 之正整數)，令 m=1，其操作過程為：

$$[\underbrace{(1,1),(1,1),\ldots\ldots,(1,1)}_{\text{k組}},1] \xrightarrow{T_1} [0,0,\underbrace{(1,1),\ldots\ldots,(1,1)}_{\text{k-1組}},3] \xrightarrow{T_2} [0,0,0,0,\underbrace{(1,1),\ldots\ldots,(1,1)}_{\text{k-2組}},5]\cdots$$

$$\xrightarrow{T_k} [0,0,0,\ldots\ldots,0,0,2k+1] \Rightarrow \text{共 k 次完成操作} \because k=\frac{n-1}{2} \quad \therefore \frac{n-1}{2} \text{次為最少操作次數。}$$

2. 若 n 為偶數(設 n=2k，k 為大於 2 之正整數)，令 m=1，其操作過程為：

$$[\underbrace{(1,1),(1,1),\ldots\ldots,(1,1)}_{\text{k-1組}},1,1] \xrightarrow{T_1} [0,0,\underbrace{(1,1),\ldots\ldots,(1,1)}_{\text{k-2組}},1,3] \xrightarrow{T_2} [0,0,0,0,\underbrace{(1,1),\ldots\ldots,(1,1)}_{\text{k-3組}},3,3]$$

$$\xrightarrow{T_3} [6,0,0,0,\underbrace{(1,1),\ldots\ldots,(1,1)}_{\text{k-3組}},0,0]\cdots \xrightarrow{T_k} [2k,0,0,\ldots\ldots,0,0] \Rightarrow \text{共 k 次完成操作} \because k=\frac{n}{2}$$

$\therefore k=\frac{n}{2}$ 次為最少操作次數。

伍、結論

(一) 【性質一】：無論經過幾次操作，任意兩色球數量之差除以3的餘數恆不變。

(二) 【性質二】：若A(a)、B(b)、C(c)，且a$\equiv r_1$(mod3)，b$\equiv r_2$(mod3)，c$\equiv r_3$(mod3)，$r_1 \neq r_2 \neq r_3$，則無解。

(三) 【性質三】：若A(a)、B(b)、C(c)，且(b-c)$\equiv$0(mod3)，我們可以確定有解，且可操作完成在A做結束，但要先使B、C兩堆的數量相等。

(四) 令A(a)、B(b)、C(c)，a$\neq$b$\neq$c，當b$\equiv$c(mod3)，且 $3a+b \geq c > b$時，再兩次可完成操作，稱

此爲[判斷式]。當 $a \equiv b \equiv c(\mathrm{mod}\,3)$ 時，必滿足[判斷式]。

(五) 當 b≡c(mod3)，$3a+b<c$ 且 a＜b＜c，先代[公式一]：$2^{k+2} \geq \dfrac{a+b+c}{a+2b}$ (k 取最小偶數值)

1. 當 $1 < \dfrac{a+b+c}{a+2b} \leq 2^2$，則無需代[公式二]　。$k=0$，即三次完成操作。

2. 當 $2^{2n-1} \leq \dfrac{a+b+c}{a+2b} \leq 2^{2n}$ (n 爲大於 1 的正整數)，無需代[公式二]，取[公式一]所得的 k 值，$k+3$ 次爲最少操作次數。

3. 當 $2^{2n} < \dfrac{a+b+c}{a+2b} < 2^{2n+1}$ (n 爲正整數)，需代[公式二]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

(六) 當 b≡c(mod3)，$3a+b<c$ 且 b＜a＜c，先代[公式二]：$2^{k+2} \geq \dfrac{a+b+c}{b+2a}$ (k 取最小奇數值)

1. 當 $2^{2n} \leq \dfrac{a+b+c}{b+2a} \leq 2^{2n+1}$ (n 爲正整數)，無需代[公式一]，取[公式二]所得的 k 值，$k+3$ 次爲最少操作次數。

2. 當 $1 < \dfrac{a+b+c}{b+2a} < 2^2$，需代[公式一]　，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

3. 當 $2^{2n-1} < \dfrac{a+b+c}{b+2a} < 2^{2n}$ (n 爲大於 1 的正整數)，需代[公式一]，取[公式一]、[公式二]之 k 值較小者，得 $k+3$ 次爲最少操作次數。

p.s：我們用三色球的研究結果做了一個電腦數學遊戲。(網址：http://163.20.16.6/3ball/index.htm)

(七) 四色球可二次完成操作發生在有兩色球數量之差爲另一色球數量之3倍，2倍或1倍時。

(八) 1.當(1) $a \equiv b \equiv c \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$，$d \equiv r(\mathrm{mod}\,3)$，r≠0，且 $a \leq b < d < c$

(2) $a \equiv b \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$，$c \equiv d \equiv r(\mathrm{mod}\,3)$，r≠0，且 $a \leq b < c \leq d$

(3) $a \equiv b \equiv r_1(\mathrm{mod}\,3)$，$c \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$，$d \equiv r_3(\mathrm{mod}\,3)$，$r_1 \neq r_3 \neq 0$，且 $c < a < d < b$

(4) $a \equiv b \equiv r_1(\mathrm{mod}\,3)$，$c \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$，$d \equiv r_3(\mathrm{mod}\,3)$，$r_1 \neq r_3 \neq 0$，且 $c < d < a \leq b$

[case1~12]中若有任意二色球數量相等，二次完成操作；若無上述情形，用「三色球之最佳操作法」，若有 case 滿足[判斷式]，共三次完成操作；否則取[case1~12]中所得

k 值最小者，共 $k+4$ 次完成操作。

2.當(1) $a \equiv b \equiv 0(\bmod 3)$ ， $c \equiv 1(\bmod 3)$ ， $d \equiv 2(\bmod 3)$ ，且 $a \le b < c < d$

(2) $a \equiv b \equiv 0(\bmod 3)$ ， $c \equiv 1(\bmod 3)$ ， $d \equiv 2(\bmod 3)$ ，且 $a \le b < d < c$

先經過一次操作變爲 $a \equiv b \equiv c \equiv 1(\bmod 3)$ ， $d \equiv 0(\bmod 3)$ ，共 3 次或 4 次完成操作。

3.除了 1. 2.中的情形之外其餘四色球碰撞的操作皆 2 次或 3 次完成操作。

(九) 1. $a \equiv b \equiv c \equiv 1(\bmod 3)$ ， $d \equiv 2(\bmod 3)$ 與 $a \equiv b \equiv c \equiv 2(\bmod 3)$ ， $d \equiv 1(\bmod 3)$ 操作結果相同。

2. $a \equiv b \equiv 0(\bmod 3)$ ， $c \equiv d \equiv 2(\bmod 3)$ 與 $a \equiv b \equiv 0(\bmod 3)$ ， $c \equiv d \equiv 1(\bmod 3)$ 操作結果相同。

3. $a \equiv b \equiv 1(\bmod 3)$ ， $c \equiv 0(\bmod 3)$ ， $d \equiv 2(\bmod 3)$ 與 $a \equiv b \equiv 2(\bmod 3)$ ， $c \equiv 0(\bmod 3)$ ， $d \equiv 1(\bmod 3)$ 操作結果相同。

(十) 四色球碰撞操作必有解。

(十一) 當n($n \ge 5$)色球之操作須符合「最少操作策略」，最後完成「最少操作次數」。當五色球要操作變爲四色球時，需盡量避免變成(八)之1. 2之情形，以免增加操作次數。

(十二) 若有 $n(n \ge 5)$ 種不同顏色的變色球，每種顏色的球各m顆，則 (1)當n爲奇數時，最少操作次數爲 $\frac{n-1}{2}$ (2)當n爲偶數時，最少操作次數爲 $\frac{n}{2}$ 。

陸、未來的展望

我們未來的目標是將四色球與 n 色球都製作成遊戲介面，甚至訂定新的遊戲規則(例如將三種不同顏色的色球等量碰撞可變成另一種色球)，希望變色球遊戲可以成爲受學生喜愛的電腦數學遊戲。

柒、參考資料與其他

資料來源(書名)	頁數	主編、發行人	出版社
國中數學第 2 冊	P.139~P.168	[陳冒海]、[蘇建中]	南一書局
簡明數論	P.100~P.109	[潘承洞]、[潘承彪]、[孫文先]	九章出版社
趣味數論	P.64~P.87	[單墫]、[孫文先]	九章出版社
參考來源(網名)	網址		
數裡天地	http://www.mikekong.net/Maths/Problems/chinese_remainder02.html		
同餘(mod) 拾遺	http://www.tngs.tn.edu.tw/teaching/math/research/mod.pdf		

【評　語】　030410　變色球遊戲的探討

透過一些簡單的分析以及數字變化的原則的刻畫，給出了解決問題的一般化的方式。雖然不是很困難的問題，但能注意到變化的規律並加以運用，可說已掌握了分析一般數學問題的基本技巧，是很不錯的作品。美中不足的是關於四色以上的分析，並未指明球色變化的規則。任意指定自已希望變化的球色不是很恰當的作法。如果能在做進一步的推廣前，先對問題做清楚的定義會更好。