中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030409

角與線的邂逅----三角形作圖

學校名稱：苗栗縣立建國國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃建瑋 國二 莊宇軒 國二 黃祐敏 國二 徐巧宴	邱興邦

關鍵詞：尺規作圖　三角形全等條件

壹、 摘要

三角形有角(*angle*)、邊(*side*)、高(*height*)、中線(*median*)以及內角平分線(*angle bisector*)各 3 個，總共 15 個條件，從其中任取 3 個，有 95 種不同的組合。研究中應用尺規作圖與國中所學的幾何性質，可以作出所有不含內角平分線的 48 種組合的三角形，含內角平分線的 47 種組合中，只作出 9 種，共作出 57 種組合的三角形。

作出的組合中，有 27 種組合的三角形是唯一的，不唯一的組合中，有 16 種條件中只包含一個角，而當這個角為直角時，有 15 種的三角形會變成唯一。也就是說，研究中找到 27 個三角形全等條件以及 15 個特殊的全等條件。

貳、 研究動機

百世盃數學競賽的歷屆試題中，有一題作圖題是：「已知ΔABC之中，$\overline{BC}$邊長為l，兩中線$\overline{BE}$、$\overline{CF}$長為m、n，求作此ΔABC。」。做這一題的時候，我聯想到了數學課本上講解三角形全等性質時，提到的〝*SSS*〞、〝*SAS*〞以及〝*ASA*〞尺規作圖，但是課本上這部分所教授的內容並不足以解決這道作圖題。在請教老師如何解題後，老師隨口問的問題：「如果題目給的不是中線而是高，要怎麼作呢？」，讓我們發現了一個值得探索的數學世界。

參、 研究目的

三角形當中，除了 3 個邊和 3 個角之外，國中課程裡學到的還有 3 個高、3 條中線以及 3 條內角平分線。我們想探討的是：如果已知三角形這 15 個條件之中任 3 個，是否可以利用國中所學的幾何性質與尺規作圖的方法，作出這個三角形。

肆、 研究設備

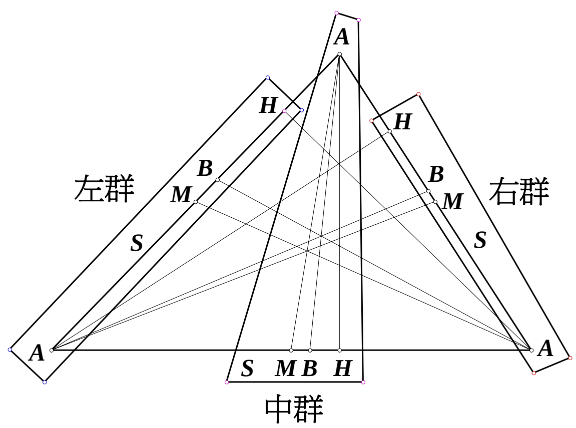
筆、紙、直尺、圓規、電腦、動態幾何繪圖軟體（GSP）。

伍、 研究過程與方法

一、 符號定義：

英文的角是 *Angle*、邊是 *Side*，所以課本上用 *A* 代表角、*S* 代表邊。依此原則，高是 *Height*、中線是 *Median*、角平分線是 *Angel Bisector*，所以用 *H*、*M*、*B* 來代表高、中線、內角平分線。

研究中將這 5 種性質 15 個條件分作左中右三群（右圖），書寫時按照左中右；*A*、*S*、*B*、*H*、*M* 的順序排列。有 2 或 3 個條件在同一群時放在中群，以底線連接表示之。



依照上述規則，15 個條件中任取三個，可分為三類組合：

1. 三個條件為同一性質：

   AAA、SSS、BBB、HHH、MMM 共 5 種。

2. 有二個條件為同一性質：

   ASA、$\underline{AS}A$、ABA、$\underline{AB}A$、AHA、$\underline{AH}A$、AMA、$\underline{AM}A$、SAS、$\underline{AS}S$、SBS、$\underline{SB}S$、SHS、$\underline{SH}S$、SMS、$\underline{SM}S$、BAB、$\underline{AB}B$、BSB、$\underline{SB}B$、BMB、$\underline{BM}B$、BHB、$\underline{BH}B$、HAH、$\underline{AH}H$、HSH、$\underline{SH}H$、HBH、$\underline{BH}H$、HMH、$\underline{HM}H$、MAM、$\underline{AM}M$、MSM、$\underline{SM}M$、MBM、$\underline{BM}M$、MHM、$\underline{HM}M$共 40 種。

3. 三個條件皆為不同性質：

   ASB、$\underline{AS}B$、$\underline{AB}S$、$\underline{SB}A$、$\underline{ASB}$、ASH、$\underline{AS}H$、$\underline{AH}S$、$\underline{SH}A$、$\underline{ASH}$、ASM、$\underline{AS}M$、$\underline{AM}S$、$\underline{SM}A$、$\underline{ASM}$、ABH、$\underline{AB}H$、$\underline{AH}B$、$\underline{BH}A$、$\underline{ABH}$、ABM、$\underline{AB}M$、$\underline{AM}B$、$\underline{BM}A$、$\underline{ABM}$、AHM、$\underline{AH}M$、$\underline{AM}H$、$\underline{HM}A$、$\underline{AHM}$、SBH、$\underline{SB}H$、$\underline{SH}B$、$\underline{BH}S$、$\underline{SBH}$、SBM、$\underline{SBM}$、$\underline{SM}B$、$\underline{BM}S$、$\underline{SBM}$、SHM、$\underline{SH}M$、$\underline{SM}H$、$\underline{HM}S$、$\underline{SHM}$、BHM、$\underline{BH}M$、$\underline{BM}H$、$\underline{HM}B$、$\underline{BH}M$共 50 種。

二、 幾何性質：

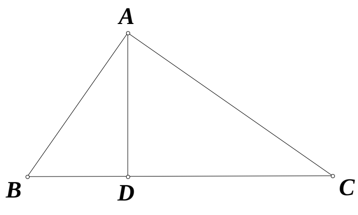
1. 三角形中點連線性質：
   ΔABC 中 D、E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 中點，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且平分 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AH}$ 。

2. 三角形重心性質：
   ΔABC 三中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於 G（重心），則 $\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{CG} : \overline{GF} = 2 : 1$。

3. 三角形相似條件：
   SSS 相似，SAS 相似，AA 相似。

4. 平行線性質：
   平行線距離相等，同位角相等，內錯角相等，同側內角互補。

5. 平行四邊形性質：
   平行四邊形對邊等長，對角相等，鄰角互補，對角線互相平分。

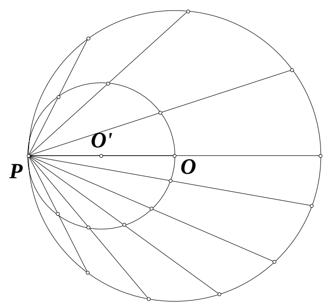


母子性質

6. 直角三角形的母子性質：
   ΔABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D，則 $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$ ，$\overline{BD} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{DC}$

7. 圓心角與圓周角：
   圓心角＝圓周角×2，半圓的圓周角等於 90°。

8. 圓內接四邊形：
   圓內接四邊形對角互補。



弦中點圖形

9. 弦中點圖形：
   若 P 在圓 O 上，圓 O 中以 P 為一端點的所有弦的中點形成一個圓，$\overline{OP}$ 恰為此圓之直徑。

三、 尺規作圖：

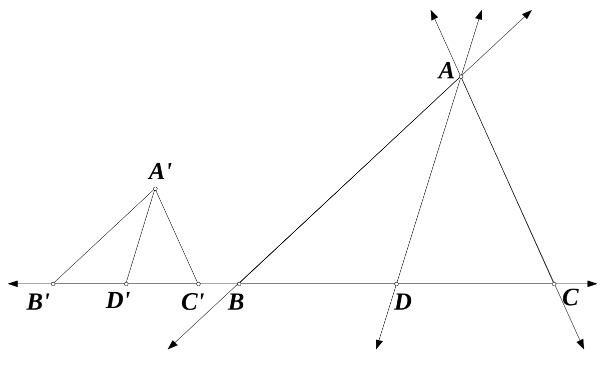
1. 基本作圖：
等線段作圖、等角作圖、中垂線作圖、角平分線作圖、過線外(上)一點作垂線、過線外(上)一點作平行線。

2. 三角形作圖：
SSS、*SAS*、*RHS*、以及 *ASA*（*AAS*）作圖。

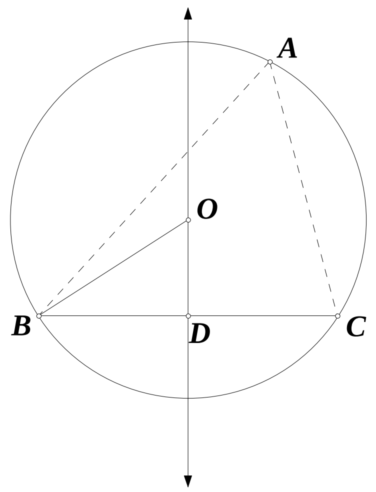
3. n 等分已知線段：
利用平行線所截線段成比例的性質，將已知線段平分成 n 等分。

4. 三角形的放大與縮小：
利用平行線與三角形 *AA* 相似的性質，將三角形任意放大或縮小。
以下圖為例：先作 $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overline{A'D'}$，再作 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overline{A'B'}$、$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overline{A'C'}$，就可以 $\overline{AD}$ 為基準將 $\Delta A'B'C'$ 縮放至想要的 ΔABC。

5. 三角形外接圓：
已知三角形一邊與對角，作外接圓。
取 $\overline{BC}$ 中點 D，向上作 ΔBDO，$\angle BDO = 90^\circ$，$\angle BOD = \angle A$，若 $\angle A > 90^\circ$ 則向下作 $\angle BOD = 180^\circ - \angle A$。以 O 為圓心，$\overline{OB}$ 為半徑作圓 O。
圓 O 即為 ΔABC 的外接圓，A 點在 $\overline{BC}$ 上方圓周上。



三角形的放大與縮小



陸、 研究結果

幾何作圖常常會有多種的作法，所以以下的作法並非唯一的作法。

一、 三條件皆為同一種性質：

1. *AAA*、*SSS*：
參照教科書即可作出。
（*AAA* 有無限多解）

2. *HHH*：

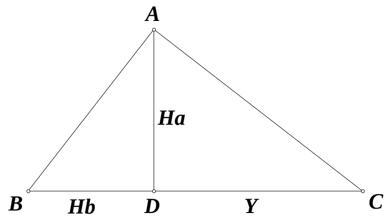
【性質】：三高 H_a、H_b、H_c，則邊長比為 $\frac{1}{H_a} : \frac{1}{H_b} : \frac{1}{H_c}$。

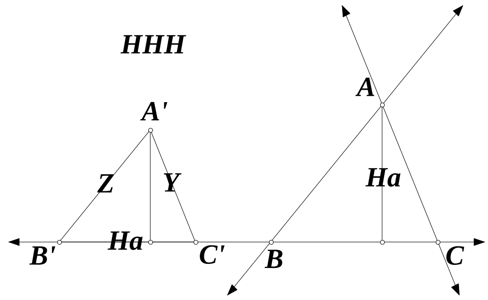
【作法】：

(1) 利用母子性質可得 $Y=\dfrac{H_a^2}{H_b}$（下圖）、同法可得 $Z=\dfrac{H_a^2}{H_c}$ 。

(2) 以 H_a 、Y、Z 爲三邊作 $\Delta A'B'C'$ 。

(3) 任取一高作爲基準，縮放即可得 ΔABC 。





3. *MMM*：

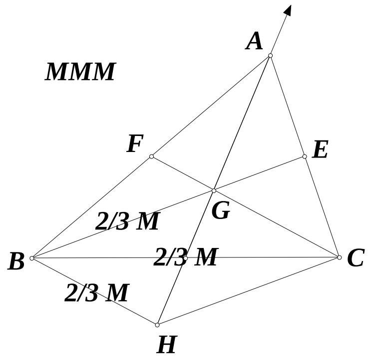
【性質】：重心性質。

【作法】：

(1) 以 $\frac{2}{3}M$、$\frac{2}{3}M$、$\frac{2}{3}M$ 爲三邊，作 ΔBHG 。

(2) 作平行四邊形 $BHCG$。

(3) 在 $\overrightarrow{HG}$ 上取 $\overline{GA}=\overline{GH}$ ，ΔABC 即爲所求。



4. 未解出：

BBB。

二、 有兩條件爲同一種性質：

1. *ASA*、$\underline{AS}A$、*ABA*、$\underline{AB}A$、*AHA*、$\underline{AH}A$、*AMA*、$\underline{AM}A$：

【性質】：三角形放大縮小。

【作法】：

(1) 以已知二角作 $\Delta A'B'C'$ 。

(2) 以第三個條件爲基準，放大或縮小即可得 ΔABC 。

2. *SAS*、$\underline{AS}S$：

參照教科書即可作出。

（$\underline{AS}S$就是課本中的ASS，有二解。）

3. *SHS*：

【性質】：平行線距離相等。

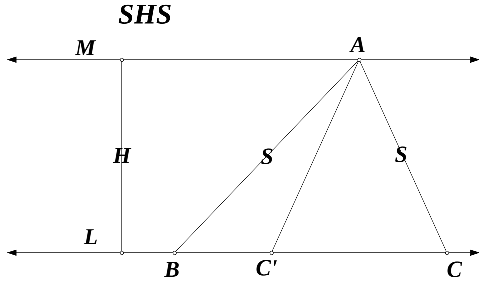
【作法】：

(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 M 上取 A，作 $\overline{AB}=S$ 交 L 於 B。

(3) 作 $\overline{AC}=$另一個 S 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overline{AC'}=S$ 交 L 於 C'，有二解。）



4. *SHS*：

【性質】: 平行線距離相等。

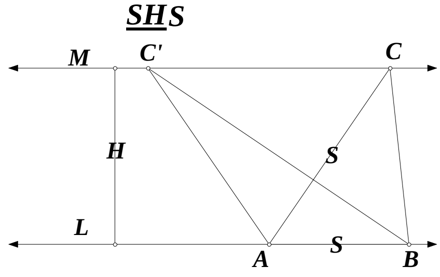
【作法】:

(1) 同 3－(1)。

(2) 在 L 上取 A、$\overline{AB}=S$，

(3) 作 $\overline{AC}=$另一個 S 交 M 於 C，ΔABC即為所求。

（或作$\overline{AC'}=S$ 交 M 於 C'，有二解。）



5. *SMS*：

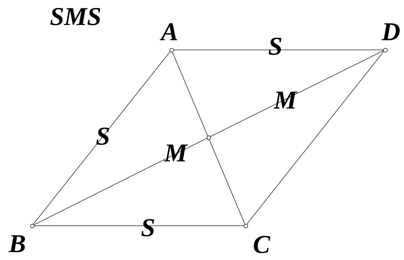
【性質】: 平行四邊形對角線互相平分。

【作法】:

(1) 以 S、$2M$、另一個 S 為三邊，作ΔABD 。

(2) 作平行四邊形 $ABCD$。

(3) 連$\overline{AC}$ ，ΔABC即為所求。



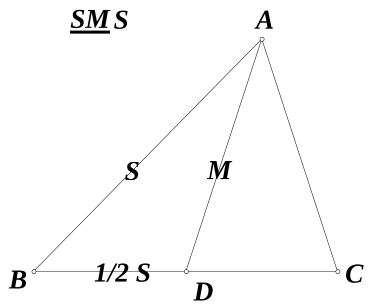
6. *SMS*：

【性質】: 中線定義。

【作法】:

(1) 作$\overline{BC}=S$，取中點 D。

(2) 作$\overline{BA}=$另一個 S、$\overline{DA}=M$ 相交於 A，ΔABC即為所求。



7. *HAH*：

【性質】: 平行線距離相等。

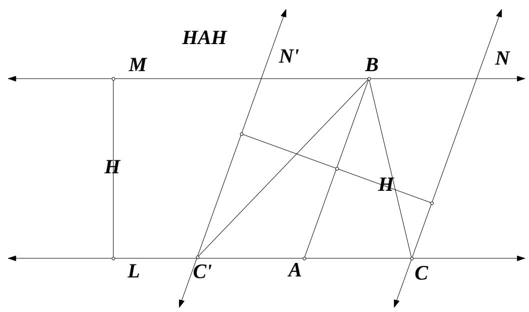
【作法】:

(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 以 L 為一邊，作$\angle A=A$，另一邊交 M 於 B。

(3) 作 N 平行$\overline{AB}$，距離另一個 H 交 L 於 C，ΔABC即為所求。

（或作 N' 交 L 於 C'，有二解。）



8. *AHH*：

【性質】: 平行線距離相等、半圓的圓周角。

【作法】:

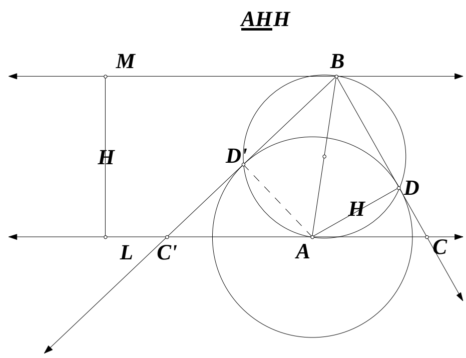
(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 以 L 為一邊，作$\angle A=A$，另一邊交 M 於 B。$\overline{AB}$為直徑作圓。

(3) A 為圓心，另一個 H 為半徑作圓，交前圓於 D、D'。

(4) 作$\overrightarrow{BD}$交 L 於 C，ΔABC即為所求。

（或作$\overrightarrow{BD'}$交 L 於 C'，有二解。）



9. *HSH*：

【性質】：半圓的圓周角。

【作法】：

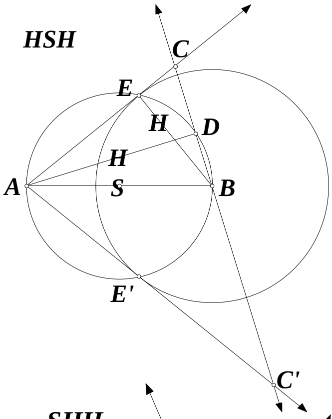
(1) 作 $\overline{AB}=S$，以 $\overline{AB}$ 爲直徑作圓。

(2) 取 $\overline{AD}=H$ 交前圓於 D，作 $\overleftrightarrow{BD}$。

(3) B 爲圓心，另一個 H 爲半徑作圓交前圓於 E、E'。

(4) 作 $\overleftrightarrow{AE}$ 交 $\overleftrightarrow{BD}$ 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overleftrightarrow{AE'}$ 交 $\overleftrightarrow{BD}$ 於 C'，有二解。）



10. *SHH*：

【性質】：平行線距離相等、半圓的圓周角。

【作法】：

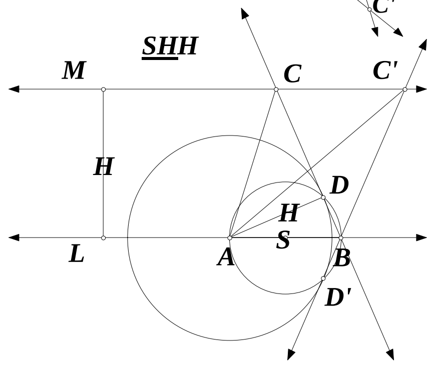
(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 L 上取 $\overline{AB}=S$，以 $\overline{AB}$ 爲直徑作圓。

(3) 以 A 爲圓心，另一個 H 爲半徑作圓，交前圓於 D、D'。

(4) 作 $\overleftrightarrow{BD}$ 交 M 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overleftrightarrow{BD'}$ 交 M 於 C'，有二解。）



11. *HMH*：

【性質】：中點連線平分高、半圓的圓周角。

【作法】：

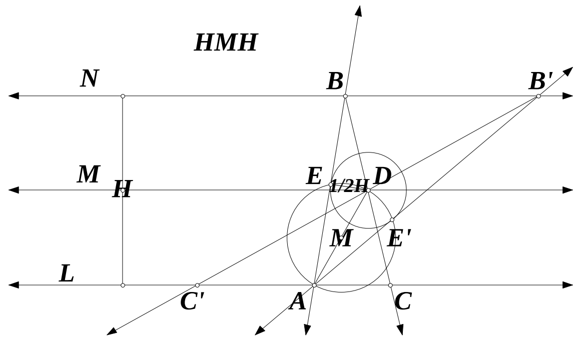
(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，作 $\overline{AD}=M$ 交 M 於 D，以 $\overline{AD}$ 爲直徑作圓。

(3) 以 D 爲圓心，另一個 H 爲直徑作圓，交前圓於 E、E'。

(4) 作 $\overleftrightarrow{AE}$ 交 N 於 B，作 $\overleftrightarrow{BD}$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求

（或作 $\overleftrightarrow{AE}$ 交 N 於 B'，作 $\overleftrightarrow{B'D}$ 交 L 於 C'，有二解。）



12. *HMH*：

【性質】：中點連線平分高、半圓的圓周角。

【作法】：

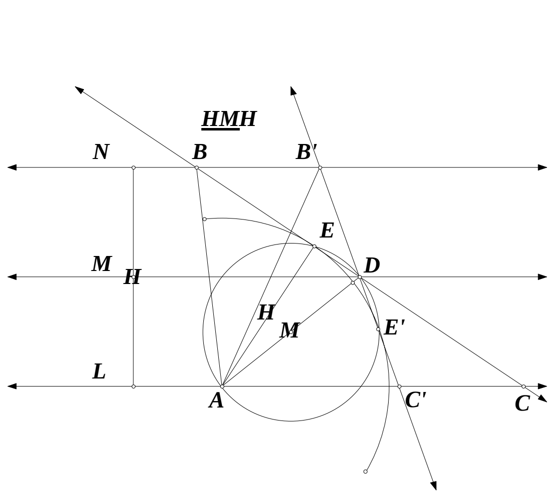
(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，作 $\overline{AD}=M$ 交 M 於 D，以 $\overline{AD}$ 爲直徑作圓。

(3) 以 A 爲圓心，另一個 H 爲半徑畫弧，交前圓於 E、E'。

(4) 作 $\overleftrightarrow{DE}$ 交 N 於 B、交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overleftrightarrow{DE'}$ 交 N 於 B'、交 L 於 C'，有二解。）



13.*MAM*：

【性質】：三角形外接圓、重心位置。

【作法】：

(1) 作 $\overline{BE}=M$，取中點 D、$\overline{EG}=\frac{1}{3}\overline{BE}$。

(2) 向上作 ΔBDO $\angle BDO=90^\circ$，$\angle BOD=\angle A$。

（$\angle A>90^\circ$則向下作$\angle BOD=180^\circ-\angle A$）

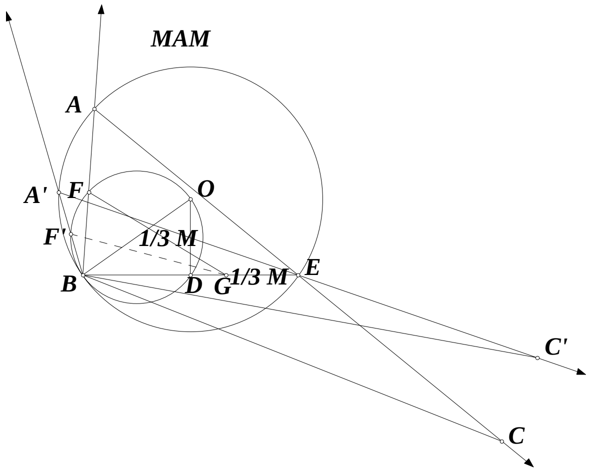
(3) 以 O 爲圓心，$\overline{OB}$ 爲半徑作圓 O。

(4) 以$\overline{OB}$ 爲直徑作圓。

(5) 作$\overline{GF}=\frac{1}{3}$另一個 M 交前圓於 F、F'。

(6) 作$\overrightarrow{BF}$交圓 O於 A，在$\overrightarrow{AE}$取$\overline{EC}=\overline{EA}$，$\Delta ABC$即爲所求。

（或作$\overrightarrow{BF'}$交圓 O於 A'，在$\overrightarrow{A'E}$取$\overline{EC'}=\overline{EA'}$，有二解。）



14.*AMM*：

【性質】：三角形外接圓、重心位置。

【作法】：

(1) 作 $\overline{BE}=M$，取中點 D、$\overline{EG}=\frac{1}{3}\overline{BE}$。

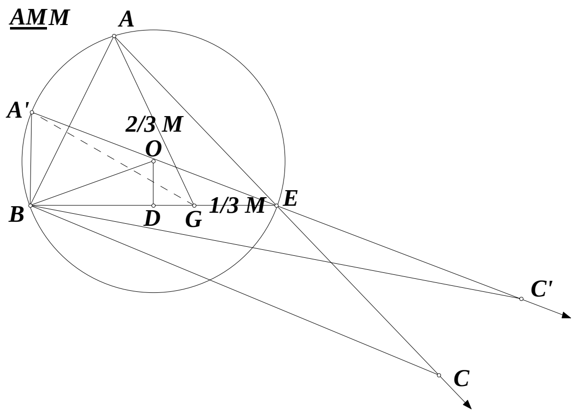
(2) 向上作 ΔBDO $\angle BDO=90^\circ$，$\angle BOD=\angle A$。（$\angle A>90^\circ$則向下作$\angle BOD=180^\circ-\angle A$）

(3) 以 O 爲圓心，$\overline{OB}$ 爲半徑作圓 O。

(4) 向上取$\overline{GA}=\frac{2}{3}$另一個 M 交圓 O 於 A、A'。

(5) 在$\overrightarrow{AE}$上取$\overline{EC}=\overline{EA}$，$\Delta ABC$即爲所求。

（或在$\overrightarrow{A'E}$上取$\overline{EC'}=\overline{EA'}$，有二解。）



15.*MSM*：

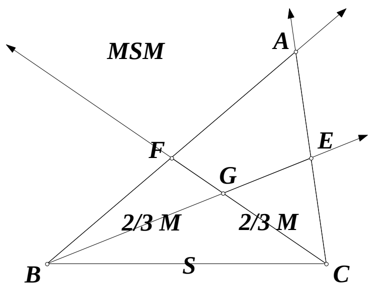
【性質】：重心位置。

【作法】：

(1) 以$\frac{2}{3}M$、S、$\frac{2}{3}$另一個 M 爲三邊，作ΔGBC。

(2) 在$\overrightarrow{BG}$上取$\overline{GE}=\frac{1}{2}\overline{BG}$，$\overrightarrow{CG}$上取$\overline{GF}=\frac{1}{2}\overline{CG}$。

(3) 作$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{CE}$相交於 A，ΔABC即爲所求。



16.$\underline{SM}M$：

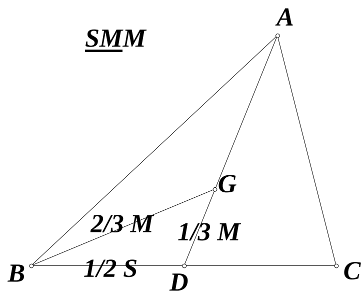
【性質】：重心位置。

【作法】：

(1) 作 $\overline{BC}=S$，取 $\overline{BC}$ 中點 D。

(2) 以 $\frac{2}{3}M$、$\frac{1}{2}S$、$\frac{1}{3}$ 另一個 M 爲三邊，作 ΔGBD。

(3) 在 $\overrightarrow{DG}$ 上取 $\overline{GA}=2\overline{DG}$，$\Delta ABC$ 即爲所求。



17.MHM：

【性質】：中點連線平分高、重心位置、半圓的圓周角。

【作法】：

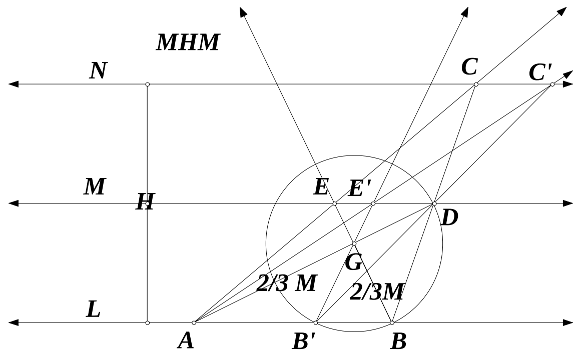
(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，作 $\overline{AD}=M$ 交 M 於 D，取 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$。

(3) 以 G 爲圓心，$\frac{2}{3}$ 另一個 M 爲半徑作圓交 L 於 B、B'。

(4) 作 $\overrightarrow{BG}$ 交 M 於 E，作 $\overrightarrow{AE}$ 交 N 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overrightarrow{B'G}$ 交 M 於 E'，作 $\overrightarrow{AE'}$ 交 N 於 C'，有二解。）



18.$\underline{HM}M$：

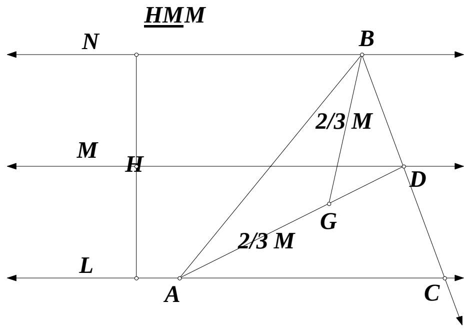
【性質】：中點連線平分高、重心位置。

【作法】：

(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，作 $\overline{AD}=M$ 交 M 於 D，取 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$。

(3) 作 $\overline{GB}=\frac{2}{3}$ 另一個 M 交 N 於 B，作 $\overrightarrow{BD}$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。



19.未解出：

SBS、$\underline{SB}S$、BAB、$\underline{AB}B$、BSB、$\underline{SB}B$、BMB、$\underline{BM}B$、BHB、$\underline{BH}B$、HBH、$\underline{BH}H$、MBM、$\underline{BM}M$。

三、 三條件皆爲不同性質：

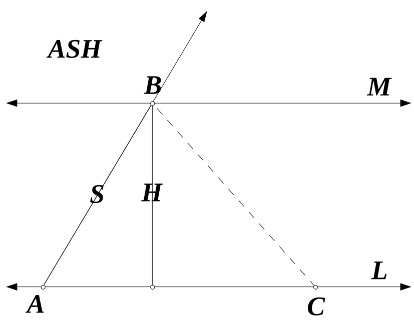
1. ASH：

【性質】：平行線距離相等。

【作法】：

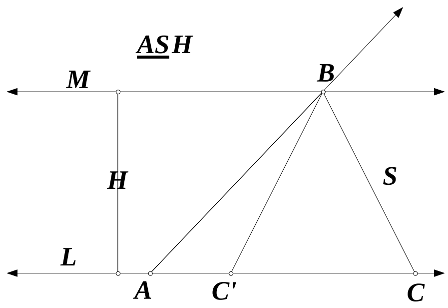
(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 L 上取 A，以 L 爲一邊作 $\angle A=A$，另一邊交 M 於 B。



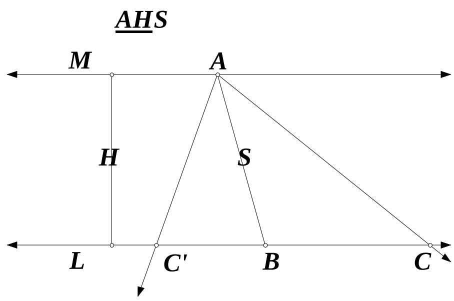
(3) $\overline{AB}$ 恰爲 S，在 L 上任取 C，ΔABC 即爲所求。
（無限多解。）

2. $\underline{AS}H$：



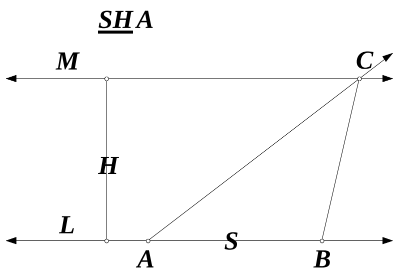
【性質】：平行線距離相等。
【作法】：
(1) 作平行線 L、M 距離 H。
(2) 在 L 上取 A，以 L 爲一邊作 $\angle A = A$，另一邊交 M 於 B。
(3) 作 $\overline{BC} = S$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。
（或作 $\overline{BC'} = S$ 交 L 於 C'，有二解。）

3. $\underline{AH}S$：



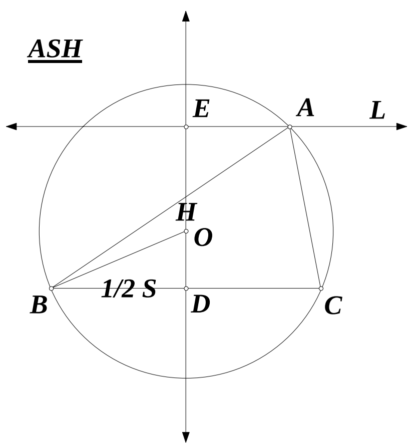
【性質】：平行線距離相等。
【作法】：
(1) 作平行線 L、M 距離 H。
(2) 在 M 上取 A，作 $\overline{AB} = S$ 交 L 於 B。
(3) 作 $\angle BAC = A$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。
（或作 $\angle BAC' = A$ 交 L 於 C'，有二解。）

4. $\underline{SH}A$：



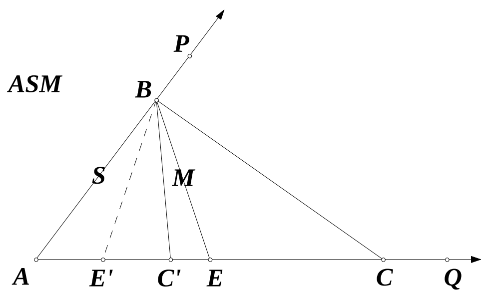
【性質】：平行線距離相等。
【作法】：
(1) 作平行線 L、M 距離 H。
(2) 在 L 上取 $\overline{AB} = S$。
(3) 作 $\angle BAC = A$ 交 M 於 C，ΔABC 即爲所求。

5. $\underline{ASH}$：



【性質】：三角形外接圓、平行線距離相等。
【作法】：
(1) 作 $\overline{BC} = S$，取中點 D。
(2) 向上作三角形 BDO，$\angle BDO = 90^\circ$，$\angle BOD = \angle A$。
（$\angle A > 90^\circ$ 則向下作 $\angle BOD = 180^\circ - \angle A$）
(3) 以 O 爲圓心，$\overline{OB}$ 爲半徑作圓。
(4) 在 $\overleftrightarrow{OD}$ 上取 $\overline{DE} = H$，過 E 作 $L \parallel \overline{BC}$ 交圓 O 於 A，ΔABC 即爲所求。

6. ASM：



【性質】：中線定義。
【作法】：
(1) 作 $\angle PAQ = A$，在 $\overrightarrow{AP}$ 取 $\overline{AB} = S$。
(2) 作 $\overline{BE} = M$，交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 E、E'。
(3) 在 $\overrightarrow{AQ}$ 上取 $\overline{EC} = \overline{EA}$，$\Delta ABC$ 即爲所求。
（或取 $\overline{E'C'} = \overline{E'A}$，有二解。）

7. <u>AS</u>*M*：

【性質】：三角形外接圓、弦中點圖形。

【作法】：

(1) 作 $\overline{BC}=S$，取中點 D。

(2) 向上作三角形 BDO，$\angle BDO=90^\circ$，$\angle BOD=\angle A$。

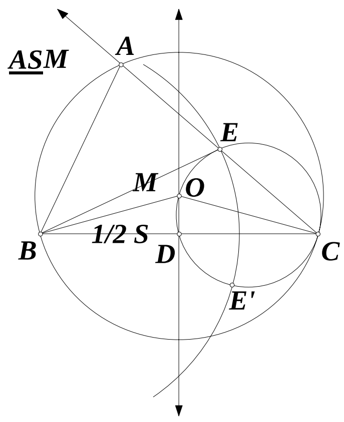
（$\angle A>90^\circ$則向下作$\angle BOD=180^\circ-\angle A$）

(3) 以 O 爲圓心，$\overline{OB}$ 爲半徑作圓。

(4) 以 $\overline{CO}$ 爲直徑作圓。

(5) 以 B 爲圓心，M 爲半徑作弧，交前圓於 E、E'。

(6) 作 $\overrightarrow{CE}$ 交圓 O 於 A，ΔABC 即爲所求。



8. <u>AM</u>*S*：

【性質】：中點連線平分高、平行線距離相等、中線定義。

【作法】：

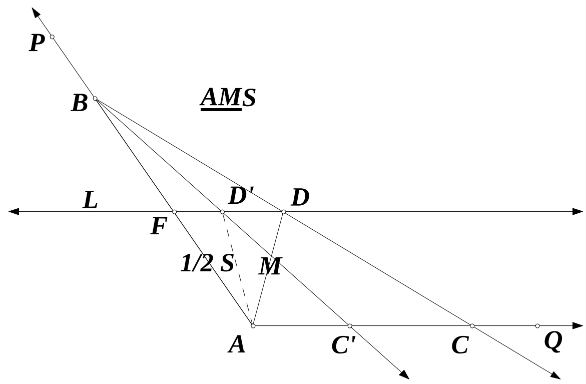
(1) 作$\angle PAQ=A$，在 $\overrightarrow{AP}$ 取 $\overline{AB}=S$。

(2) 取 $\overline{AB}$ 中點 F，過 F 作 L 平行 $\overrightarrow{AQ}$。

(3) 作 $\overline{AD}=M$ 交 L 於 D、D'。

(4) 作 $\overrightarrow{BD}$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overrightarrow{BD'}$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 C'，有二解。）



9. <u>SM</u>*A*：

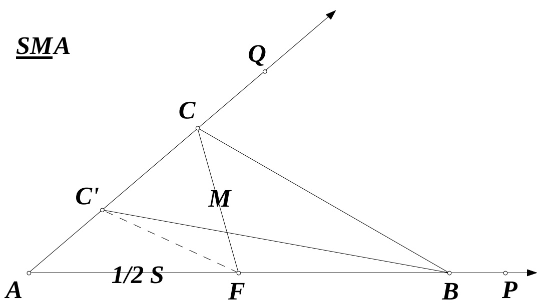
【性質】：中線定義。

【作法】：

(1) 作$\angle PAQ=A$，在 $\overrightarrow{AP}$ 取 $\overline{AB}=S$。

(2) 取 $\overline{AB}$ 中點 F，作 $\overline{FC}=M$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overline{FC'}=M$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 C'，有二解。）



10.<u>AS</u>*M*：

【性質】：三角形外接圓、中線定義。

【作法】：

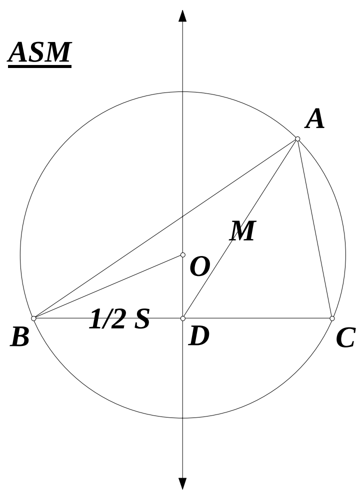
(1) 作 $\overline{BC}=S$，取中點 D。

(2) 向上作三角形 BDO，$\angle BDO=90^\circ$，$\angle BOD=\angle A$。

（$\angle A>90^\circ$則向下作$\angle BOD=180^\circ-\angle A$）

(3) 以 O 爲圓心，$\overline{OB}$ 爲半徑作圓。

(4) 作 $\overline{AD}=M$ 交圓 O 於 A，ΔABC 即爲所求。



11.*AHM*：

【性質】：中點連線平分高、中線定義。

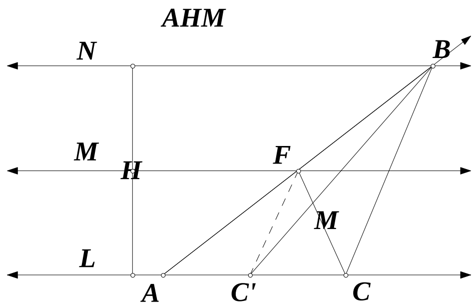
【作法】：

(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，以 L 爲一邊作 $\angle A = A$，另一邊交 M 於 F、交 N 於 B。

(3) 作 $\overline{FC} = M$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $= M$ 交 L 於 C'，有二解。）



12.$\underline{AH}M$：

【性質】：中點連線平分高、三角形外接圓。

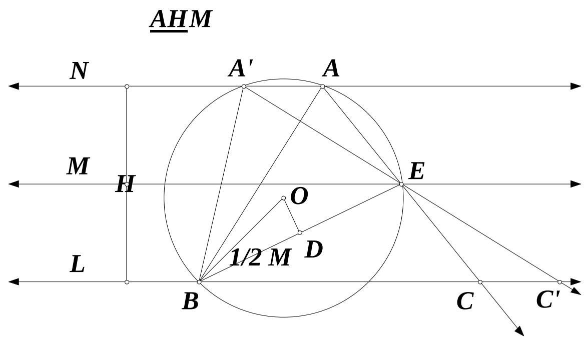
【作法】：

(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 B，作 $\overline{BE} = M$ 交 M 於 E，取中點 D。

(3) 向上作三角形 BDO，$\angle BDO = 90^\circ$，$\angle BOD = \angle A$。

（$\angle A > 90^\circ$ 則向下作 $\angle BOD = 180^\circ - \angle A$）



(4) 以 O 爲圓心，$\overline{OB}$ 爲半徑作圓，交 N 於 A、A'。

(5) 作 $\overrightarrow{AE}$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overrightarrow{A'E}$ 交 L 於 C'，有二解。）

13.$\underline{AM}H$：

【性質】：中點連線平分高、中線定義。

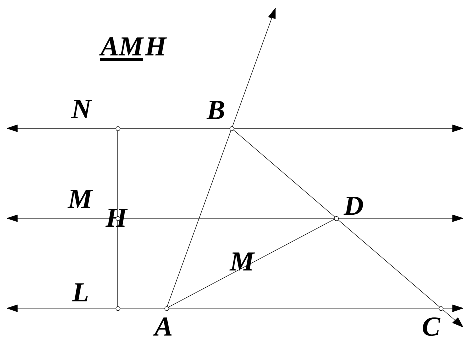
【作法】：

(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，以 L 爲一邊作 $\angle A = A$，另一邊交 M 於 F、交 N 於 B。

(3) 作 $\overline{AD} = M$ 交 M 於 D。

(4) 作 $\overrightarrow{BD}$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。



14.$\underline{HM}A$：

【性質】：平行線距離相等、中線定義。

【作法】：

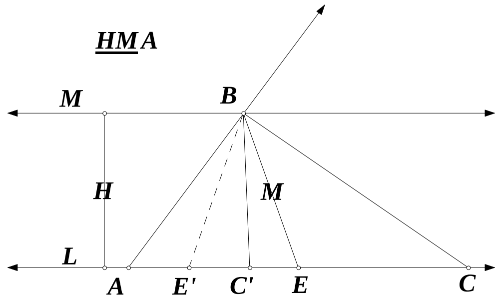
(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 L 上取 A，以 L 爲一邊作 $\angle A = A$，另一邊交 M 於 B。

(3) 作 $\overline{BE} = M$ 交 L 於 E、E'。

(4) 在 L 上取 $\overline{EC} = \overline{EA}$，$\Delta ABC$ 即爲所求。

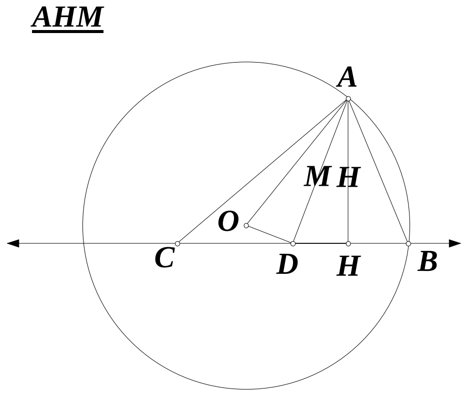
（或取 $\overline{E'C'} = \overline{E'A}$，有二解。）



15.<u>*AHM*</u>：

【性質】：平行四邊形對角線互相平分、鄰角互補，三角形外接圓。

【作法】：



(1) 作 ΔAHD ，$\overline{AH}=H$、$\overline{AD}=M$、$\angle AHD=90^{\circ}$。

(2) 向 H 反方向作 ΔADO ，$\angle ADO=90^{\circ}$、$\angle AOD=\angle A$。

（$\angle A>90^{\circ}$則向 H 方向作 ΔADO ，$\angle AOD=180^{\circ}-\angle A$。）

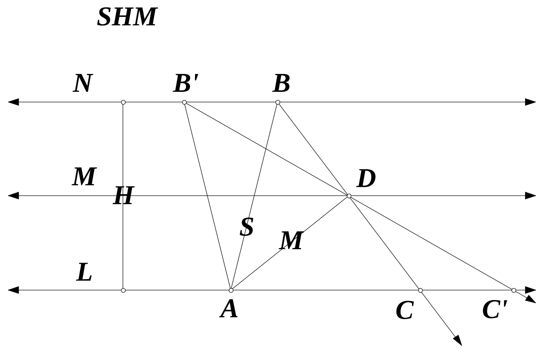
(3) 以 O 爲圓心，$\overline{OA}$爲半徑作圓，交 $\overrightarrow{DH}$ 於 B。

(4) 在 $\overleftrightarrow{DH}$ 上取 $\overline{DC}=\overline{DB}$，$\Delta ABC$ 即爲所求。

16.*SHM*：

【性質】：中點連線平分高、中線定義。

【作法】：



(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，作 $\overline{AD}$ 交 M 於 D。

(3) 作 $\overline{AB}=S$ 交 N 於 B、B'。

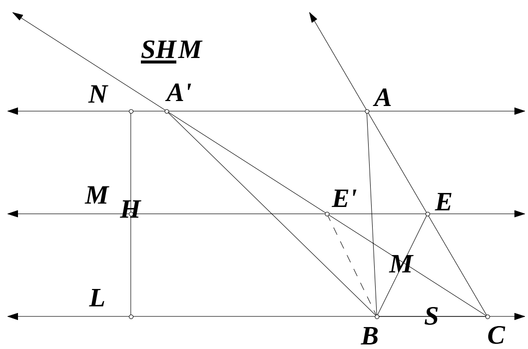
(4) 作 $\overrightarrow{BD}$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overrightarrow{B'D}$ 交 L 於 C'，有二解。）

17.<u>*SH*</u>*M*：

【性質】：中點連線平分高、中線定義。

【作法】：



(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 $\overline{BC}=S$，作 $\overline{BE}$ 交 M 於 E、E'。

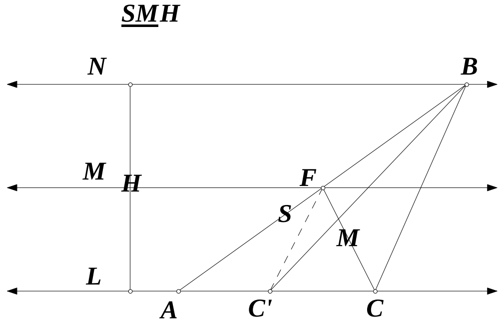
(3) 作 $\overrightarrow{CE}$ 交 N 於 A，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overrightarrow{CE'}$ 交 N 於 A'，有二解。）

18.<u>*SM*</u>*H*：

【性質】：中點連線平分高、中線定義。

【作法】：



(1) 作平行線 L、M、N 距離 $\frac{1}{2}H$。

(2) 在 L 上取 A，作 $\overline{AB}=S$ 交 N 於 B、交 M 於 F。

(3) 作 $\overline{FC}=M$ 交 L 於 C、C'，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\overline{FC'}=M$ 交 L 於 C'，有二解。）

19.<u>*HM*</u>*S*：

【性質】：高、中線定義。

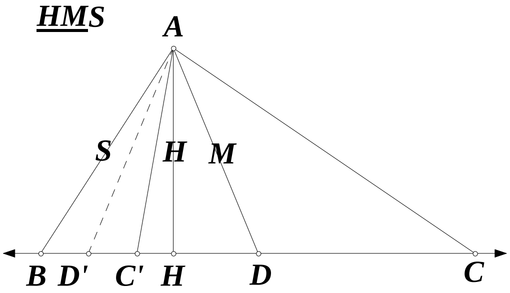
【作法】：

(1) 作三角形 AHB，$\overline{AH}=H$、$\overline{AB}=S$、$\angle AHB=90^\circ$。

(2) 作 $\overline{AD}=M$，交 $\overleftrightarrow{BH}$ 於 D、D'。

(3) 在 $\overleftrightarrow{BH}$ 上取 $\overline{DC}=\overline{DB}$，$\Delta ABC$ 即爲所求。

（或取 $\overline{D'C'}=\overline{D'B}$，有二解。）



20.<u>*SHM*</u>：

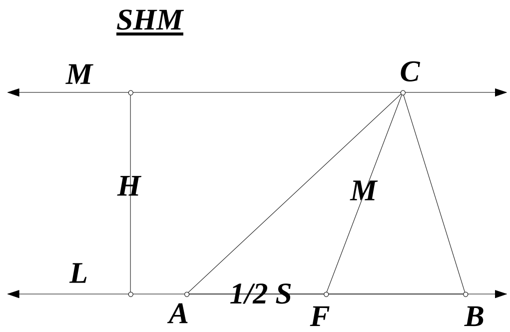
【性質】：平行線距離相等、中線定義。

【作法】：

(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 L 上取 A，在 L 上作 $\overline{AB}=S$，取中點 F。

(3) 作 $\overline{FC}=M$，交 M 於 C，ΔABC 即爲所求。



21.*ASB*：

【性質】：角平分線定義。

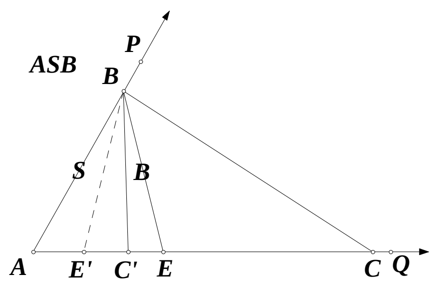
【作法】：

(1) 作 $\angle PAQ=A$，在 $\overrightarrow{AP}$ 取 $\overline{AB}=S$。

(2) 作 $\overline{BE}=B$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 E、E'。

(3) 作 $\angle EBC=\angle EBA$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作 $\angle E'BC'=\angle E'BA$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 C'， 有二解。）



22.<u>*AB*</u>*S*：

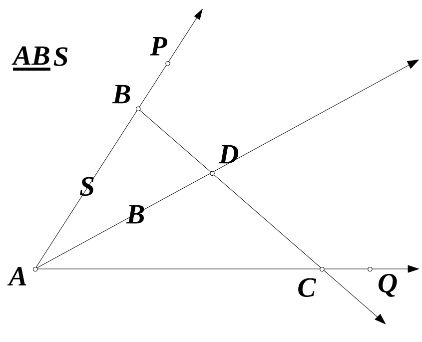
【性質】：角平分線定義。

【作法】：

(1) 作 $\angle PAQ=A$，在 $\overrightarrow{AP}$ 取 $\overline{AB}=S$。

(2) 作 $\angle A$ 平分線 $\overrightarrow{AD}$，$\overline{AD}=B$。

(3) 作 $\overrightarrow{BD}$ 交 $\overrightarrow{AQ}$ 於 C，ΔABC 即爲所求。



23.<u>*AB*</u>*H*：

【性質】：平行線距離相等、角平分線定義。

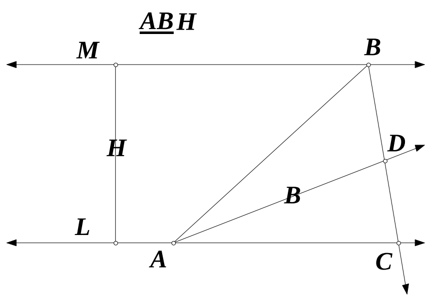
【作法】：

(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 L 上取 A，以 L 爲一邊作 $\angle A=A$，另一邊交 M 於 B。

(3) 作 $\angle A$ 平分線 $\overrightarrow{AD}$，$\overline{AD}=B$。

(4) 連 $\overrightarrow{BD}$ 交另一邊於 C，ΔABC 即爲所求。



24.$\underline{BH}A$：

【性質】: 平行線距離相等、角平分線定義。

【作法】:

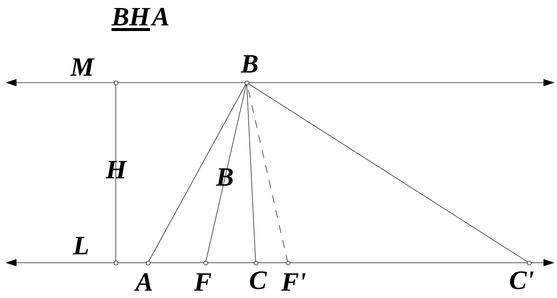
(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 L 上取 A，以 L 爲一邊作$\angle A＝A$，另一邊交 M 於 B。

(3) 作 $\overline{BF}＝B$ 交 L 於 F、F'。

(4) 作$\angle FBC＝\angle FBA$ 交 L 於 C，ΔABC 即爲所求。

（或作$\angle F'BC'＝\angle F'BA$ 交 L 於 C'，有二解。）



25.$\underline{ABH}$：

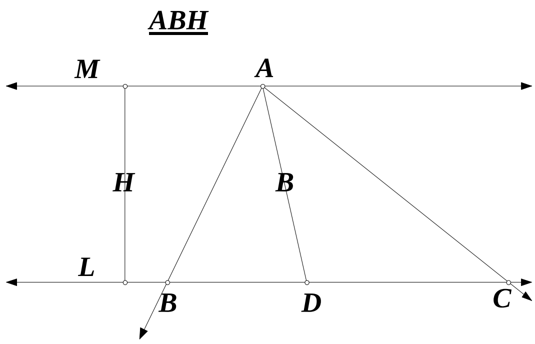
【性質】: 平行線距離相等、角平分線定義。

【作法】:

(1) 作平行線 L、M 距離 H。

(2) 在 M 上取 A，作 $\overline{AD}＝B$ 交 L 於 D。

(3) 作$\angle DAB＝\angle DAC＝\dfrac{1}{2}A$，交 L 於 B、C，ΔABC即爲所求。



26.SBH：

【性質】: 半圓的圓周角、角平分線定義。

【作法】:

(1) 作 $\overline{AB}＝S$，以 $\overline{AB}$ 爲直徑作圓。

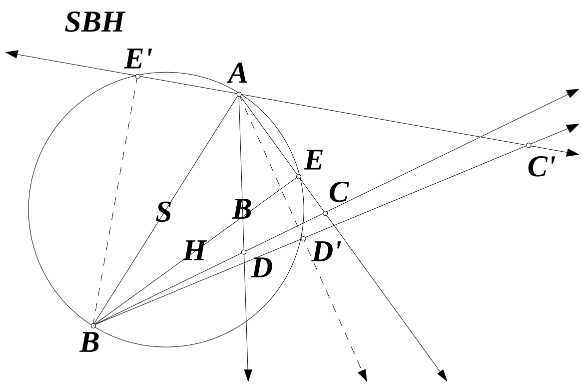
(2) 作 $\overline{BE}＝H$ 交前圓於 E、E'。

(3) 作$\angle EAB$ 角平分線 $\overrightarrow{AD}$，$\overline{AD}＝B$。

（或作$\angle E'AB$ 外角平分線 $\overrightarrow{AD'}$。）

(4) 作 $\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{BD}$ 相交於 C，ΔABC即爲所求。

（作 $\overleftrightarrow{AE'}$、$\overrightarrow{BD'}$ 相交於 C'，有二解。）



27.$\underline{BH}S$：

【性質】: 半圓的圓周角、角平分線定義。

【作法】:

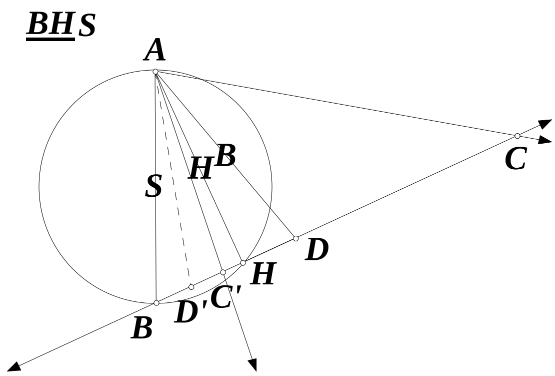
(1) 作 $\overline{AB}＝S$，以 $\overline{AB}$ 爲直徑作圓。

(2) 作 $\overline{AH}＝H$ 交前圓於 H，作 $\overleftrightarrow{BH}$。

(3) 作 $\overline{AD}＝B$ 交 $\overleftrightarrow{BH}$ 於 D、D'。

(4) 作$\angle DAC＝\angle DAB$，ΔABC即爲所求。

（或作$\angle D'AC'＝\angle D'AB$，有二解。）



28.未解出：

$\underline{AS}B$、$\underline{SB}A$、$\underline{ASB}$、ABH、$\underline{AH}B$、ABM、$\underline{AB}M$、$\underline{AM}B$、$\underline{BM}A$、$\underline{ABM}$、$\underline{SB}H$、$\underline{SHB}$、$\underline{SBH}$、SBM、$\underline{SB}M$、$\underline{SM}B$、$\underline{BM}S$、$\underline{SBM}$、BHM、$\underline{BH}M$、$\underline{BM}H$、$\underline{HM}B$、$\underline{BH}M$。

柒、 討論

三角形的角、邊、中線、高以及內角平分線 5 種性質，就是幾何基本性質中的角和線，因此研究中的組合情形，可以簡單分爲三角、二角一線、一角二線以及三線四種組合情形，使用的三角形作圖主要還是基本的 *AAA*（*AA*）、*ASA*（*AAS*）、*SAS* 以及 *SSS* 作圖。

除了基本作圖之外，我們還運用了下列性質與方法：

1.可以作出相似三角形者：先作出相似三角形，再利用平行線將三角形放大或縮小，例如*AXA*、$\underline{AX}A$以及*HHH*的組合。

2.已知三角形的高（*H*）：利用平行線距離相等的性質，作距離爲*H*的兩平行線*L*、*M*，將底邊放在*L*上，則頂角的頂點一定在*M*上，例如*SHS*、$\underline{SH}S$。

3.已知三角形的中線（*M*）：利用重心性質找出重心，再延伸中線作出三角形，例如*MSM*、$\underline{MS}M$。或是利用平行四邊形對角線互相平分的性質，先作出對角線爲中線兩倍長的平行四邊形，即可得三角形，例如*SMS*。

4.已知三角形的高（*H*）和鄰邊（*S*）：利用半圓的圓周角等於 90°的性質，以 *S* 爲直徑作圓，從直徑一端作弦長等於 *H*，弦的另一端即爲垂足，例如 *HSH*。

5.已知三角形的高（*H*）和中線（*M*）：利用三角形兩腰中點連線會垂直平分底邊的高的性質，作距離爲$\frac{1}{2}H$的三平行線*L*、*M*、*N*，將底邊放在*L*上，則中點會在*M*上，例如*HMH*、$\underline{HM}H$。

6.已知三角形的角（*A*）和對邊（*S*）：利用圓心角爲圓周角兩倍的性質，先以對邊*S*爲弦，作出三角形的外接圓，則角*A*的頂點一定在圓周上，例如$\underline{ASH}$、$\underline{AS}M$。

利用上述的性質與方法，我們作出了所有 95 種組合當中的 57 種，剩下 38 種沒有作出，而未作出的組合當中，都含有內角平分線（*B*）這個條件（表一）。

表一：組合數與解答數

	三條件爲同一性質			有二條件爲同一性質			三條件爲不同性質		
	包含 *B*	不包含 *B*	合計	包含 *B*	不包含 *B*	合計	包含 *B*	不包含 *B*	合計
組合數目	1	4	5	16	24	40	30	20	50
解答數目	0	4	4	2	24	26	7	20	27

關於內角平分線的幾何性質，課本上只有提到角平分線上的點到兩邊的距離相等，但是這個性質對我們的作圖沒有任何的幫助。想要作出更多包含內角平分線的組合，就需要其他可以利用的角平分線幾何性質，因此我們在網路上進行搜尋，找到了一篇丁遵標先生所寫『關於三角形內角平分線長的幾何性質』的文章，其中介紹的幾何性質，除了內分比性質（附錄一）比較簡單之外，其他都是複雜的二次方程式或不等式，無法應用到作圖當中。同時，我們也在網路上找到*ASB*組合的解法（附錄二），但是解法中應用到三角函數，還要討論係數然後解二次方程式，並不符合我們的目的，所以不採用。因爲找不到內角平分線簡單而且可應用的幾何性質，所以能作出的組合數目有限。

作出的組合中，除了課本上提到的 AAA 之外，ASH 也可以作出無限多個三角形，是一個很奇妙的組合。在作圖過程中，利用平行線 L、M 將 H 確定，在 L 上任取 A 點以 L 為一邊作 $\angle A = A$，另一邊交 M 於 B，$\overline{AB}$ 會恰為 S。也就是說，A、S、H 這三個條件剛好形成一個直角三角形，因此只要知道其中兩個，就可以得出第三個，所以只能算是兩個條件，可以畫出無限多個三角形也就不奇怪了。

課本上說，如果給予的條件只能作出唯一的三角形，則這個條件就是三角形全等的條件。在我們作出來的 57 種組合當中，有 27 種的三角形是唯一的，也就是說，我們找到了 27 個一定全等的條件（表二）。

表二：全等條件

	三同		二同		不同	
	組合	合計	組合	合計	組合	合計
所作三角形唯一(全等條件)	SSS、HHH、MMM	3	ASA、$\underline{AS}A$、ABA、$\underline{AB}A$、AHA、$\underline{AH}A$、AMA、$\underline{AM}A$、SAS、SMS、$\underline{SM}S$、MSM、$\underline{SM}M$、$\underline{HM}M$	14	$\underline{SH}A$、$\underline{ASH}$、$\underline{ASM}$、$\underline{ASM}$、$\underline{AM}H$、$\underline{AHM}$、$\underline{SHM}$、$\underline{AB}S$、$\underline{AB}H$、$\underline{ABH}$	10
所作三角形不唯一	AAA	1	$\underline{AS}S$、SHS、$\underline{SH}S$、HAH、$\underline{AH}H$、HSH、$\underline{SH}H$、HMH、$\underline{HM}H$、MAM、$\underline{AM}M$、MHM	12	ASH、$\underline{ASH}$、$\underline{AH}S$、ASM、$\underline{AM}S$、$\underline{SM}A$、AHM、$\underline{AH}M$、$\underline{HM}A$、SHM、$\underline{SH}M$、$\underline{SM}H$、$\underline{HM}S$、ASB、$\underline{BH}A$、SBH、$\underline{BH}S$	17

在三角形不唯一的 30 種組合中，除了AAA以及ASH可以作出無限個三角形之外，其他的組合只可以作出兩個三角形。這些組合中條件只有一個角的有$\underline{AS}S$、HAH、$\underline{AH}H$、MAM、AMM、$\underline{AS}H$、$\underline{AH}S$、ASM、$\underline{AM}S$、$\underline{SM}A$、AHM、$\underline{AH}M$、$\underline{HM}A$、ASB以及$\underline{BH}A$共 15 種，當這個角為直角的時候，所作出的兩個三角形會對稱或重合而全等，變成只有一解，也可以視為全等條件。按照課本上的方法，以R作為直角（*Right angle*）的代號，可以得到$\underline{RS}S$、HRH、$\underline{RH}H$、MRM、RMM、$\underline{RS}H$、$\underline{RH}S$、RSM、$\underline{RM}S$、$\underline{SM}R$、RHM、$\underline{RH}M$、$\underline{HM}R$、RSB以及$\underline{BH}R$共 15 個全等條件。

捌、　結論

一、三角形有角、邊、高、中線以及內角平分線各 3 個共 15 個條件，其中任取 3 個，有 95 種組合。應用尺規作圖與國中學的幾何性質，不含內角平分線的 48 種組合可以全部解出；含有內角平分線的 47 種組合中，只能解出 9 種，總共解出 57 種。

二、作出的三角形當中，SSS、HHH、MMM、ASA、$\underline{AS}A$、ABA、$\underline{AB}A$、AHA、$\underline{AH}A$、AMA、$\underline{AM}A$、SAS、SMS、$\underline{SM}S$、MSM、$\underline{SM}M$、$\underline{HM}M$、$\underline{SH}A$、$\underline{ASH}$、$\underline{AS}M$、$\underline{ASM}$、$\underline{AM}H$、$\underline{AHM}$、$\underline{SHM}$、$\underline{AB}S$、$\underline{AB}H$以及$\underline{ABH}$共 27 種組合所作出的三角形唯一，是三角形的全等條件。

三、當條件恰有一直角時，有 15 種三角形不唯一的組合會變成唯一，因此可得$\underline{RS}S$、HRH、$\underline{RH}H$、MRM、RMM、$\underline{RS}H$、$\underline{RH}S$、RSM、$\underline{RM}S$、$\underline{SM}R$、RHM、$\underline{RH}M$、$\underline{HM}R$、RSB以及$\underline{BH}R$共 15 個三角形特殊全等條件。

玖、　參考資料

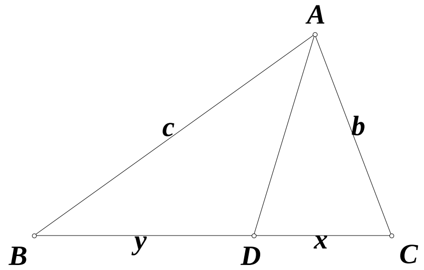
丁遵標（民 94）。關於三角形內角平分線長的幾何性質。數學傳播，29:3，60-64。

朱建正（民 95）。國民中學數學第五冊。台南市：翰林。

陳冒海（民 95）。國民中學數學第四冊。台南市：南一。

壹拾、附錄

一、 內分比性質：



ΔABC當中，$\overline{AD}$是∠BAC 的平分線，$\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$、$\overline{BD}=y$、$\overline{CD}=x$，則 $x：y=b：c$。

二、 ***ASB*** 的作法：

给定三角形的一个内角，该角的内角平分线长度，该角的对边长度，用尺规作图法作出该三角形。

解：设给定$\triangle ABC$的内角 A，AD是角$\angle BAC$的平分线，$\angle BAC=2\alpha$，$AD=d$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，那么

$$b^2+c^2-2bc\cos 2\alpha=(b+c)^2-4bc\cos^2\alpha=a^2,$$

所以

$$bc=\frac{(b+c)^2-a^2}{4\cos^2\alpha},$$

根据内角平分线公式，得到

$$bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=\frac{(b+c)^2-a^2}{4\cos^2\alpha}\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=\frac{1}{4\cos^2\alpha}\left(b+c-\frac{a^2}{b+c}\right)^2=d^2$$

，

因为 $b+c>a$，所以得到

$$(b+c)^2-2d^2(b+c)\cos^2\alpha-a^2=0,$$

所以

$$b+c=d\cos\alpha+\sqrt{a^2+d^2\cos^2\alpha}$$（负根舍去），

令 $b+c=t$，则 t 可由α、a、d完全确定下来，这样就得到 b、c 是关于 x 的方程

$$x^2-tx+\frac{t^2-a^2}{4\cos^2\alpha}=0$$

的两根。

由上面的讨论，得到作图法：

（1）作给定角的平分线，得到大小为α的角；

（2）作直角三角形 EFG，使$\angle EGF = 90°$，$\angle EFG = 90° - \alpha$，$EF = d$；

（3）延长 GF 至 H，使 $GH = a$；

（4）连接 EH 并延长至 I，使 $HI = EG$；

（5）以 EI 为直径作半圆ω；

（6）以点 E 为圆心 a 为半径作圆弧与半圆ω相交于点 J；

（7）延长 EJ 至 K，使$\angle JIK = \alpha$；

（8）作 IK 的中点 L；

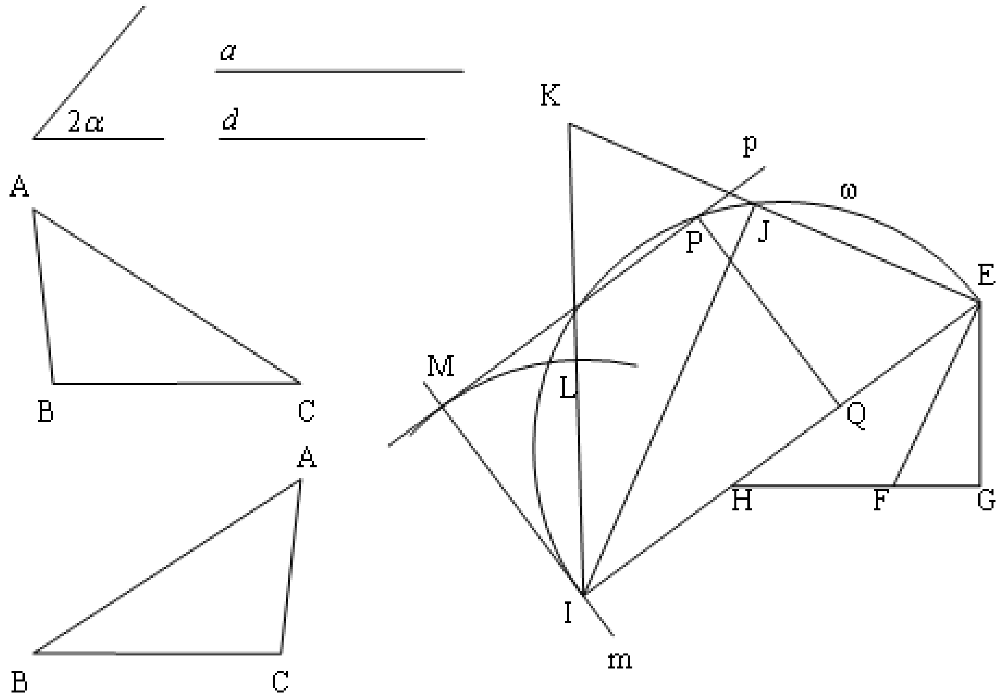
（9）过点 I 作 EI 的垂线 m；

（10）以点 I 为圆心，IJ 为半径作圆弧，与直线 m 交于点 M，并且点 M 与半圆ω在 EI 的同侧；

（11）过点 M 作 EI 的平行线 p，取直线 p 与圆ω的一个交点 P；

（12）过点 P 作 EI 的垂线，垂足为 Q；

（13）以 a、EQ、IQ 为三角形三边长作三角形，则所作的三角形就是所求的三角形。



资料來源：奧數之家，網址：http://www.aoshoo.com/bbs1/

【評　語】　030409　角與線的邂逅----三角形作圖

對所有的情形作了詳盡的分析，討論也中規中矩，是說理清楚的不錯的作品，但其中部份的內容可能是既有的結果，在資料的蒐集上可再多下功夫。單純的把所有情形從頭表列到尾會讓結果看不出有何特殊性。如能加入一些對給定那些條件，可以求出一個三角形，這樣的三角形是否唯一的討論，將會更好。